

تحلیل پس کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی تقویت شده تحت بار فشاری خارجی و احاطه شده توسط بستر الاستیک

علیرضا شاطرزاده^{۱*}، کامران فروتن^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرود، شهرود

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهرود، شهرود

* shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

تحلیل دقیق و عددی پوسته های تقویت شده در صنعت گامی مؤثر در جهت طراحی این گونه پوسته ها می باشد. در این مقاله، تحلیل دقیق رفتار پس کمانش پوسته های استوانه ای مدور نازک مدرج تابعی تقویت شده که توسط محیط الاستیک احاطه شده و تحت فشار خارجی قرار دارد، ارائه شده است. محیط الاستیک بر حسب دو پارامتر بستر الاستیک مدل پیشنهادی وینکلر و پاستراناک فرض شده است. تقویت کننده های طولی و حلقی، داخلی می باشند. خواص پوسته و تقویت کننده ها مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. روابط اساسی و معادلات تعادل بر اساس تکنیک تقویت کننده های تکه ای و تئوری کلاسیک پوسته و با توجه به روابط غیر خطی فن کارمن، به دست آمده است. یک عبارت سه جمله ای شامل شکل پیش کمانش، کمانش خطی و کمانش غیر خطی برای تقریب خیز انتخاب شده است که با استفاده از روش گالرکین، بار بحرانی و منحنی خیز - فشار پس کمانش محاسبه شده است. تأثیر پارامترهای متفاوت ابعادی، مدهای کمانش، شاخص کسر حجمی ماده و تعداد تقویت کننده ها بررسی شده است. نتایج عددی نشان می دهد که تقویت کننده ها و بستر الاستیک باعث بالا بردن پایداری پوسته ها شده است. همچنین افزایش ضخامت پوسته، کاهش شاخص کسر حجمی، بالا بردن تعداد تقویت کننده های طولی و حلقی و به کاربردن بستر الاستیک باعث افزایش بحرانی کمانش شده است.

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۸ بهمن ۱۳۹۳

پذیرش: ۰۱ اردیبهشت ۱۳۹۴

ارائه در سایت: ۰۳ خرداد ۱۳۹۴

کلید واژگان:

پوسته استوانه ای مدرج تابعی

آنالیز غیر خطی

پوسته استوانه ای تقویت شده

پس کمانش

Post-buckling analysis of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation

Alireza Shaterzadeh*, Kamran Foroutan

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

* P.O.B. 316 Shahrood, Iran, a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 17 February 2015

Accepted 21 April 2015

Available Online 24 May 2015

Keywords:

FGM cylindrical shell

Nonlinear analysis

Stiffened cylindrical shell

Post-buckling

ABSTRACT

Careful and numerical analysis eccentrically stiffened shells in the industry is a major step forward in the design of these shells. In this paper, a careful analysis of post-buckling behavior of eccentrically stiffened FGM thin circular cylindrical shells is surrounded by an elastic foundation and external pressure is presented. The two parameter elastic foundation based on Winkler and Pasternak elastic model is assumed. Stringer and ring stiffeners are internal. Shell properties and eccentrically stiffened are FGM. Fundamental relations and equilibrium equations are derived based on the smeared stiffeners technique and the classical theory of shells, and according to von-Karman nonlinear equations. The three-term approximation for the deflection shape, including the pre-buckling, linear buckling shape and nonlinear buckling shape was chosen so that by using the Galerkin method, the critical load and post-buckling pressure-deflection curves are calculated. The effects of different dimensional parameters, buckling modes, volume fraction index and number of stiffeners are investigated. Numerical results show that stiffeners and elastic foundation enhance the stability of the shells. Increasing the shell thickness, reducing the volume fraction index, increasing the number of Stringer and ring stiffeners and applying foundation elastic, causes the critical buckling load to be increase, too.

۱- مقدمه

این ساختارها مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است. در تحلیل استاتیکی بسیاری از مطالعات، کمانش و پس کمانش، ناشی از بارهای حرارتی و مکانیکی متتمرکز است. در عمل به منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت کننده هایی^۲ با وزن کم استفاده می شود. مطالعه بر روی

پوسته استوانه ای تقویت شده مدرج تابعی^۱ در مهندسی مدرن، کاربرد بیشتری دارد. در بسیاری از برنامه های کاربردی، پوسته تحت بار فشاری است و ممکن است کمانش پیدا کند. بنابراین، تحقیق در مورد پایداری غیر خطی

2- Stiffeners

1- Functionally graded material

Please cite this article using:

A.R. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling analysis of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 80-88, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

برای تکیه گاه لبه ای دلخواه را به دست آورده اند. تاجداری و همکارانش [13] به شبیه سازی و آنالیز پوسته های استوانه ای فولادی جدار نازک با ضخامت، طول و قطرهای مختلف دارای حفره مثلثی شکل که به صورت محوری تحت بار فشاری قرار گرفته اند، با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک نرم افزار آباکوس پرداخته اند. بیچ و همکارانش [14] پس کمانش غیر خطی پوسته های کم عمق و ورق های مدرج تابعی با تقویت کننده های همگن را بررسی کرده اند. دانگ و نگا [15] کمانش غیر خطی پوسته های استوانه ای مدرج تابعی با تقویت کننده و بستر الاستیک تحت فشار خارجی را بررسی کرده اند. ایشان فقط از عبارت یک جمله ای شکل کمانش خطی برای بیان خیز استفاده نموده اند و علی رغم اینکه جنس پوسته از مواد مدرج تابعی می باشد، جنس تقویت کننده ها از مواد مدرج تابعی نمی باشد.

مروری بر مطالعات انجام شده نشان می دهد که در خصوص حل تحلیلی پس کمانش پوسته های استوانه ای تقویت شده مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با یک تقریب سه جمله ای برای خیز کاری انجام نشده است. در این مقاله، رفتار پس کمانش پوسته های استوانه ای با تقویت کننده از جنس مواد مدرج تابعی تحت فشار خارجی احاطه شده توسط بستر الاستیک بررسی شده است. معادلات غیر خطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جایه جایی غیر خطی تغییر شکل های بزرگ، تکنیک تقویت کننده های تکه ای¹³ و روش گالرکین به دست آمده است. همچنین از سه جمله برای تخمین خیز شامل شکل پیش کمانش، کمانش خطی و کمانش غیر خطی استفاده شده است. پارامترهای متفاوت ابعادی، مدهای کمانش، بستر الاستیک، شاخص کسر حجمی ماده و تعداد تقویت کننده ها بر پایداری پوسته تأثیر می گذارد.

2- فرمول بندی مسائله

2-1- مشخصات قانون توانی¹⁴ مواد مدرج تابعی

در این مقاله مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک می باشد. با اعمال قانون توانی، کسر حجمی به صورت رابطه (1) می باشد [16]:

$$V_C = V_C(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (1)$$

$$V_m = V_m(z) = 1 - V_C(z)$$

که h ضخامت پوسته، $k \geq 0$ شاخص کسر حجمی؛ Z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می باشد؛ زیرنویس C و m به ترتیب سرامیک و فلز را نشان می دهد.

مشخصه مؤثر (Pr_{eff}) پوسته مدرج تابعی بر اساس قانون ترکیب خطی به صورت رابطه (2) تعیین می شود [17]:

$$Pr_{eff} = Pr_m(z)V_m(z) + Pr_C(z)V_C(z) \quad (2)$$

بر طبق قانون ذکر شده، مدول یانگ برای پوسته و تقویت کننده ها به صورت رابطه (3) می باشد:

$$E_{sh} = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$E_s = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s$$

$$E_r = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_r \quad (3)$$

13- Smeared stiffeners technique

14- Power law

رفتار غیر خطی این قبیل سازه ها از منظر عملی دارای اهمیت ویژه ای است. مواد مدرج تابعی اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن در سال 1984¹ عنوان مواد تحمل کننده دما معرفی شدند. ماده مدرج تابعی، ماده های است که از دو یا چند جزء تشکیل شده و خواص آن به طور پیوسته با مکان تغییر می کند. این خاصیت با تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی اجزای تشکیل دهنده ماده در طی ساخت آن، به وجود می آید. لذا این مواد در زمرة مواد غیر همگن¹ هستند. مواد مدرج تابعی دارای مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خرسن و خستگی می باشند و در صنایع هوا فضا، نفت و گاز، خودروسازی مورد توجه ویژه قرار می گیرند.

ون در نیوت [1] اهمیت تقویت کننده ها را بر کمانش پوسته استوانه ای ایزوتروپ تحت فشار محوری نشان داده است. باروج و سینگر [2] تأثیر تقویت کننده ها را بر ناپایداری عمومی پوسته های استوانه ای تقویت شده تحت فشار هیدرواستاتیک² نشان داده اند. آن ها یافتهند که رفتار تقویت کننده ها به شدت به هندسه پوسته وابسته است. شن و همکارانش [3] رفتار کمانش و پس کمانش پوسته استوانه ای تقویت شده کامل و ناقص تحت فشار خارجی و فشار محوری با استفاده از تئوری لایه مرزی³ پرداخته اند. آن ها از تکنیک اغتشاشات⁴ برای محاسبه بار کمانش و منحنی پس کمانش استفاده کرده اند. بوشنل [4] به بررسی تعادل غیر خطی پنل ها با تقویت کننده های طولی تحت بارهای درون صفحه ای⁵ پرداخته است. باقی زاده و همکارانش [5] به بررسی کمانش مکانیکی پوسته های استوانه ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پاسترناک پرداخته اند. بر اساس معادلات دانل⁶ و تکنیک اغتشاشات، یک حل عمومی برای کمانش غیر خطی حلقه های متقارن محوری⁷ و پوسته های استوانه ای با تقویت کننده طولی و حلقوی ناهمگن توسط جی و یه [6] ارائه شده است. گلمکانی و امامی [7] به تحلیل غیر خطی خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد تابعی تحت بار مکانیکی، به کمک روش رهایی پویا پرداخته اند. قاسمی و همکارانش [8] با استفاده از روش معادل سازی، کمانش پوسته های استوانه ای با تقویت کننده های مشبك لوزی تحت بار محوری را بررسی نموده اند. جیانگ و همکارانش [9] به مطالعه کمانش پنل های استوانه ای دور تقویت شده تحت فشار محوری یکنواخت با استفاده از روش المان دیفرانسیلی مرتبه دوم پرداخته اند. لی و شن [10] به تحلیل سه بعدی پس کمانش پوسته های استوانه ای مرکب⁸ تحت فشار خارجی و فشار محوری در محیط حرارتی پرداخته اند. آن ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای پوسته و تکنیک اغتشاشات به محاسبه بارهای کمانش و منحنی پس کمانش پرداخته اند. صادقی فر و همکارانش [11] کمانش پوسته های استوانه ای لایه ای با تقویت کننده طولی غیر یکنواخت بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول لاو⁹ را بررسی کرده اند. بارهای بحرانی با استفاده از روش ریلی ریتز¹⁰ محاسبه شده است. استماماتلس و همکارانش [12] نتایج رفتار کمانش و پس کمانش پنل های تقویت شده ارتوتروپیک¹¹ و ایزوتروپیک بر اساس تئوری کلاسیک صفحه لمینت¹² و تابع جابه جایی دو بعدی ریتز

1- Non-Homogeneous

2- hydrostatic pressure

3- boundary layer theory

4- perturbation technique

5- in-plane loads

6- Donnell equations

7- axial symmetric

8- composite

9- Love's first-order shear deformation theory

10- Rayleigh-Ritz method

11- orthotropic

12- classical lamination plate theory

کننده‌های حلقوی و طولی می‌باشد. در این مقاله تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی را مدرج تابعی در نظر می‌گیریم. برای لحاظ کردن اثر تقویت-کننده‌ها بر پوسته از تکنیک تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌کنیم. از اثرات پیچشی تقویت‌کننده‌ها به دلیل کوچکی صرف‌نظر می‌شود. با یکپارچه‌سازی معادلات تنش-کرنش و محاسبه نیروها و ممان‌های منتجه برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده روابط (9) و (10) را خواهیم داشت [21-20]:

$$\begin{aligned} N_x &= \left(A_{11} + \frac{E_{1s} d_s}{S_s} \right) \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 - \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) \chi_x - B_{12} \chi_y \\ N_y &= A_{12} \varepsilon_x^0 + \left(A_{22} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \right) \varepsilon_y^0 - B_{12} \chi_x - \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) \chi_y \\ N_{xy} &= A_{66} \gamma_{xy}^0 - 2B_{66} \chi_{xy} \\ M_x &= \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) \varepsilon_x^0 + B_{12} \varepsilon_y^0 - \left(D_{11} + \frac{E_{3s} d_s}{S_s} \right) \chi_x - D_{12} \chi_y \\ M_y &= B_{12} \varepsilon_x^0 + \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) \varepsilon_y^0 - D_{12} \chi_x - \left(D_{22} + \frac{E_{3r} d_r}{S_r} \right) \chi_y \\ M_{xy} &= B_{66} \gamma_{xy}^0 - 2D_{66} \chi_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

که D_{ij} ، B_{ij} ، A_{ij} به ترتیب سفتی کششی، کششی-خمشی و خمشی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده می‌باشد که مقدار آن‌ها در رابطه (11) آورده شده است. N_x ، N_y و N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه می‌باشند. M_x ، M_y و M_{xy} نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند.

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \frac{E_1}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2}, \quad A_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \\ B_{11} = B_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2}, \quad B_{66} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \\ D_{11} = D_{22} &= \frac{E_3}{1-\nu^2}, \quad D_{12} = \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2}, \quad D_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (11)$$

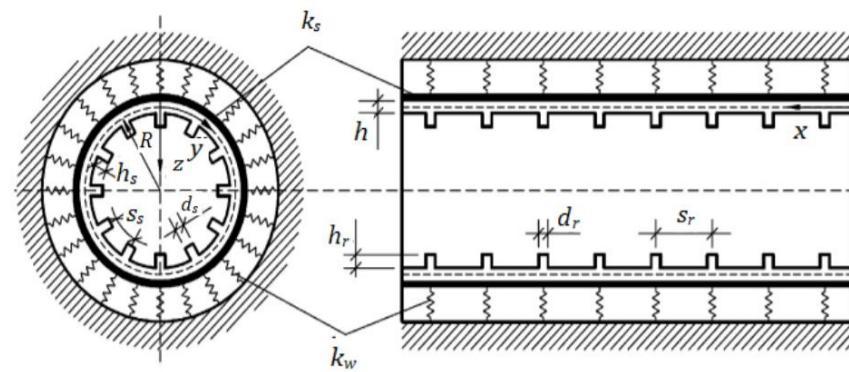
مطابق مرجع [18] روابط مدول یانگ برای پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت رابطه (12) می‌باشد:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(E_{ou} + \frac{E_{in} - E_{ou}}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_{in} - E_{ou}) kh^2}{2(k+1)(k+2)} \\ E_3 &= \left[\frac{E_{ou}}{12} + (E_{in} - E_{ou}) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] h^3 \\ E_{1s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} E_s(z) dz, \quad E_{2s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z E_s(z) dz \\ E_{3s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z^2 E_s(z) dz, \quad E_{1r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} E_r(z) dz \\ E_{2r} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z E_r(z) dz, \quad E_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z^2 E_r(z) dz \end{aligned} \quad (12)$$

که S_s و S_r به ترتیب فاصله طولی و عرضی تقویت‌کننده می‌باشد. d_s و d_r به ترتیب عرض و ضخامت طولی و حلقوی می‌باشد.

از روابط (9) می‌توان کرنش‌ها را بر حسب نیروهای منتجه بازنویسی کرده و به صورت رابطه (13) نشان داد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + B_{11}^* \chi_x + B_{12}^* \chi_y \\ \varepsilon_y^0 &= A_{11}^* N_y - A_{12}^* N_x + B_{21}^* \chi_x + B_{22}^* \chi_y \end{aligned} \quad (13)$$



شکل ۱ پوسته استوانه‌ای تقویت شده در محیط الاستیک

که k_1 ، k_2 ، k_3 به ترتیب شاخص کسر حجمی پوسته، تقویت‌کننده طولی و حلقوی را نشان می‌دهد. زیرنویس s ، sh و r به ترتیب بیانگر پوسته، تقویت‌کننده طولی و حلقوی می‌باشد.

یک پوسته نازک استوانه‌ای تابعی مدرج که توسط بستر الاستیک احاطه شده به طول (L)، شعاع (R) را در نظر می‌گیریم. سیستم تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی مدرج تابعی می‌باشد (شکل ۱). مختصات اصلی x ، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشد. کرنش‌ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله Z از سطح میانی به صورت رابطه (4) می‌باشد:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z \chi_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \chi_{xy} \quad (4)$$

بر طبق روابط غیرخطی کرنش-جایه‌جایی فن‌کارمن، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی پوسته‌های استوانه‌ای به فرم رابطه (5) می‌باشد [18]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به رابطه (5) معادله سازگاری به صورت رابطه (6) می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته‌های مدرج تابعی به صورت رابطه (7) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy}^{sh} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

که ضریب پواسون (ν) ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh} تنש نرمال در مختصات X ، Y روی پوسته بدون تقویت‌کننده و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت‌کننده می‌باشد.

روابط تنش-کرنش برای تقویت‌کننده‌های همگن به صورت رابطه (8) می‌باشد [19]:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{st} &= E_s \varepsilon_x \\ \sigma_r^{st} &= E_r \varepsilon_y \end{aligned} \quad (8)$$

که E_s ، E_r و σ_s^{st} ، σ_r^{st} به ترتیب تنش نرمال مدول یانگ برای تقویت-

1- Poisson's ratio

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

با جایگذاری معادلات (13) در معادله سازگاری (6) و معادلات (15) در سومین معادله (17) و با توجه به معادلات (4) و (18) روابط (19) و (20) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_{11}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + B_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ - B_{21}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - q_0 + k_w w - k_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

معادلات (19) و (20) سیستم معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجھول w و φ می‌باشد. آن‌ها به منظور بررسی ویژگی‌های پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

3- تحلیل کمانش

شرایط تکیه‌گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده، ساده می‌باشد و پوسته در معرض توزیع فشار یکنواخت q_0 بر روی یک بستر الاستیک قراردارد. بنابراین شرایط مرزی بصورت رابطه (21) می‌باشد:

$$w=0, M_x=0, N_x=0, N_{xy}=0, \text{at } x=0; L \quad (21)$$

خیز پوسته‌های استوانه‌ای را بصورت رابطه (22) در نظر می‌گیریم

$$w=f_0 + f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \quad (22)$$

که f_0 دامنه مجھول کمانش یکنواخت، f_1 دامنه مجھول کمانش خطی، f_2 دامنه مجھول کمانش غیرخطی می‌باشد. $\sin^2 \frac{m\pi x}{L}$ ، $\sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}$ به ترتیب بیانگر شکل کمانش خطی، شکل کمانش غیرخطی، تعداد m و n به تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می‌باشد.

با جایگزینی معادله (22) در معادله (19) و حل آن، معادله‌ای برای تابع مجھول φ به دست می‌آید که به صورت رابطه (23) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \\ + \varphi_4 \sin \frac{3m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} - \sigma_0 y h \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن σ_0 تنش محیطی متوسط می‌باشد و ضرایب φ_i به صورت روابط (24) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{n^2 \lambda^2}{32 A_{11}^* m^2 \pi^2} f_1^2 - \frac{(4\lambda L - 16 B_{21}^* m^2 \pi^2)}{32 A_{11}^* m^2 \pi^2} f_2 \\ \varphi_2 &= \frac{m^2 \pi^2}{32 A_{22}^* n^2 \lambda^2} f_1^2 \\ \varphi_3 &= \frac{B}{A} f_1 + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} f_1 f_2 \end{aligned} \quad (24)$$

مقدار ضرایب رابطه (13) در رابطه (14) آورده شده است:

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} \left(A_{11} + \frac{E_{1s} d_s}{S_s} \right), A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} \left(A_{22} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \right) \\ A_{12}^* &= \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{66}^* = \frac{1}{A_{66}} \\ \Delta &= \left(A_{11} + \frac{E_{1s} d_s}{S_s} \right) \left(A_{22} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \right) - A_{12}^2 \\ B_{11}^* &= A_{22}^* \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) - A_{12}^* B_{12} \\ B_{22}^* &= A_{11}^* \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) - A_{12}^* B_{12} \\ B_{12}^* &= A_{22}^* B_{12} - A_{12}^* \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) \\ B_{21}^* &= A_{11}^* B_{12} - A_{12}^* \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) \\ B_{66}^* &= \frac{B_{66}}{A_{66}} \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگزینی معادلات (13) در معادلات (10)، رابطه (15) را داریم:

$$\begin{aligned} M_x &= B_{11}^* N_x + B_{21}^* N_y - D_{11}^* \chi_x - D_{12}^* \chi_y \\ M_y &= B_{12}^* N_x + B_{22}^* N_y - D_{21}^* \chi_x - D_{22}^* \chi_y \\ M_{xy} &= B_{66}^* N_{xy} - 2D_{66}^* \chi_{xy} \end{aligned} \quad (15)$$

مقدار ضرایب رابطه (15) آورده شده است:

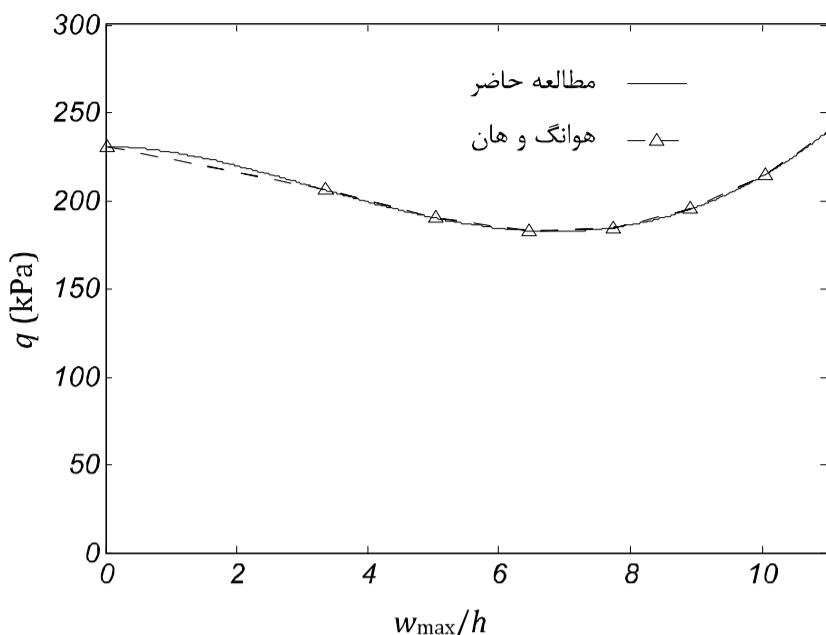
$$\begin{aligned} D_{11}^* &= D_{11} + \frac{E_{3s} d_s}{S_s} - \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) B_{11}^* - B_{12} B_{21}^* \\ D_{22}^* &= D_{22} + \frac{E_{3r} d_r}{S_r} - \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) B_{22}^* - B_{12} B_{12}^* \\ D_{12}^* &= D_{12} - \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) B_{12}^* - B_{12} B_{22}^* \\ D_{21}^* &= D_{12} - \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) B_{21}^* - B_{12} B_{11}^* \\ D_{66}^* &= D_{66} - B_{66} B_{66}^* \end{aligned} \quad (16)$$

معادلات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دور نازک بر اساس تئوری کلاسیک پوسته به فرم رابطه (17) می‌باشد:

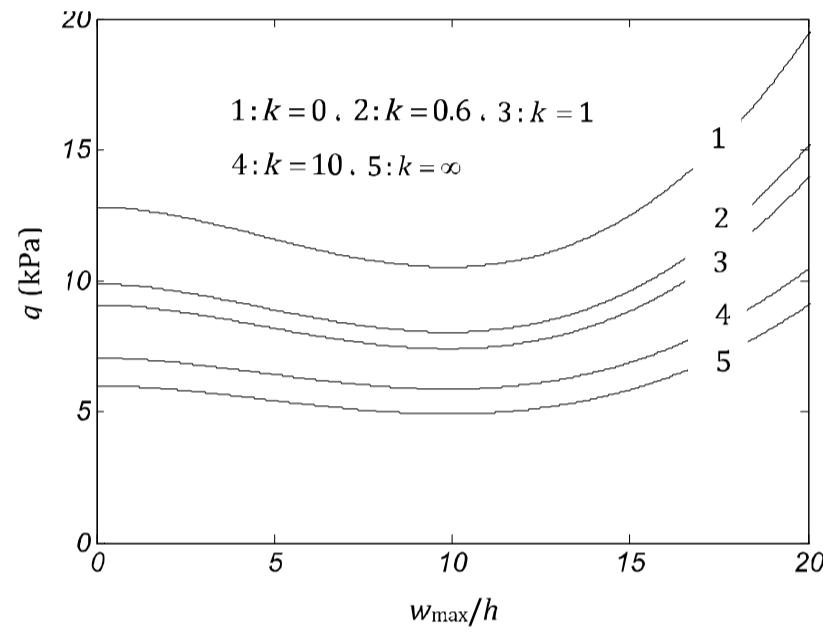
$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y \\ + q_0 - k_w w + k_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که k_w مدول بستر وینکلر، k_s سفتی لایه بررشی بر اساس مدل پاسترناک و q_0 فشار خارجی می‌باشد.

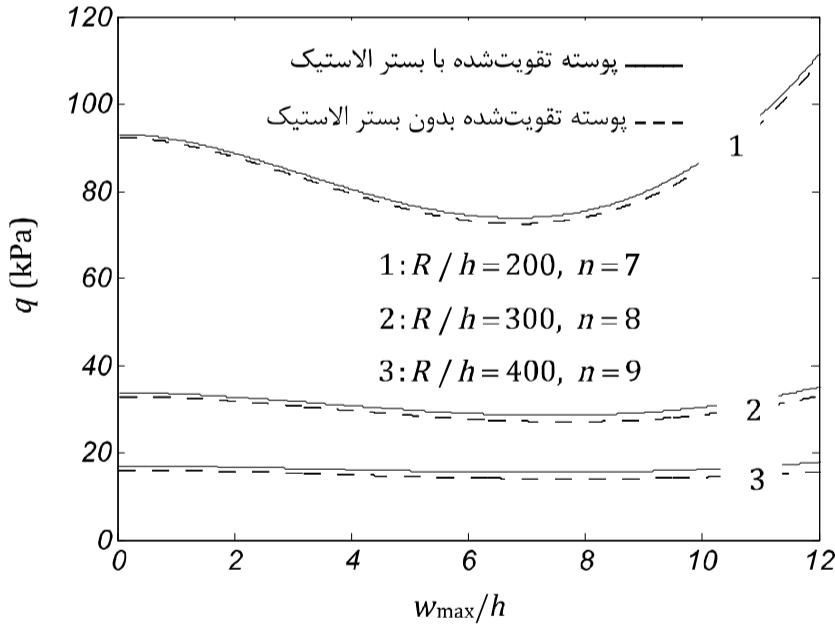
با توجه به دو معادله اول معادلات (17) تابع تنش φ به صورت رابطه (18) تعریف می‌شود:



شکل 2 مقایسه منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون بستر الاستیک



شکل 3 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده بدون بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت



شکل 4 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با بستر و بدون بستر با نسبت R/h متفاوت

جدول 1 کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتropیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی

شن	ردی و استارنس	باروج و سینگر	مطالعه حاضر	
100/7 (4)	93/5	102	103/327 (4)*	بدون تقویت کننده
102/2 (4)	94/7	103	104/494 (4)	تقویت کننده طولی
368/3 (3)	357/5	370	379/694 (3)	تقویت کننده حلقوی
374/1 (3)	365	377	387/192 (3)	هر دو تقویت کننده

* عدد داخل پرانتز شماره مدل کمانش (n) می‌باشد.

$$a_{61} = a_{31} + a_{33}a_{54}, \quad a_{62} = -a_{32} + a_{33}a_{52}$$

$$a_{63} = a_{33}a_{53}, \quad a_{64} = a_{33}a_{51} \quad (43)$$

$$a_{71} = \frac{a_{41} + a_{44}a_{64}}{1 - a_{44}a_{61}}, \quad a_{72} = \frac{a_{42} + a_{62}}{1 - a_{44}a_{61}}, \quad a_{73} = \frac{a_{43} + a_{63}}{1 - a_{44}a_{61}} \quad (44)$$

اگر $f = W_{\max}$ قرار دهیم، پس با توجه به معادله (22)، ماکریم خیز به صورت رابطه (45) می‌باشد:

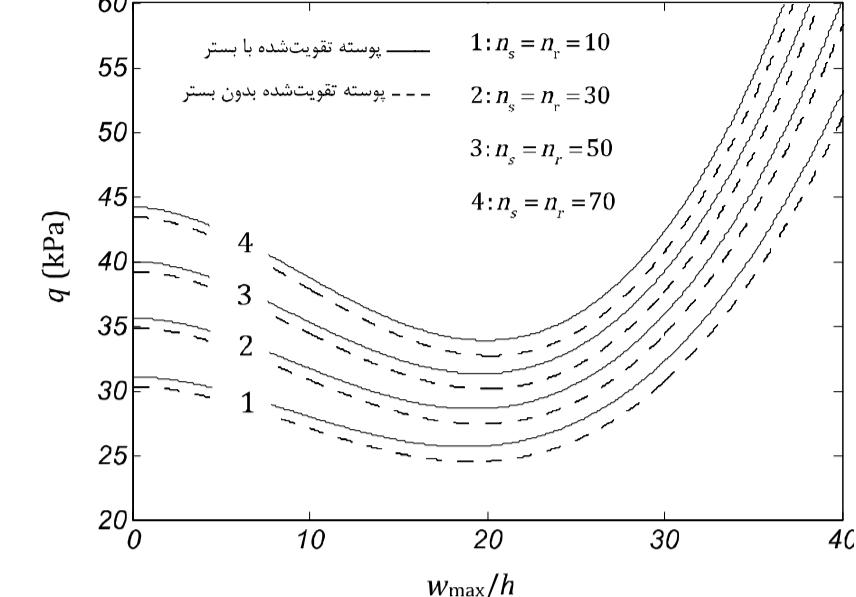
$$f = f_0 + f_1 + f_2 \quad (45)$$

با جایگذاری معادلات (39) و (40) در معادله (45) ماکریم خیز به دست می‌آید. با ترکیب روابط (41) و (45) می‌توان منحنی بار پس‌کمانش-ماکریم خیز پوسته را تحلیل نمود.

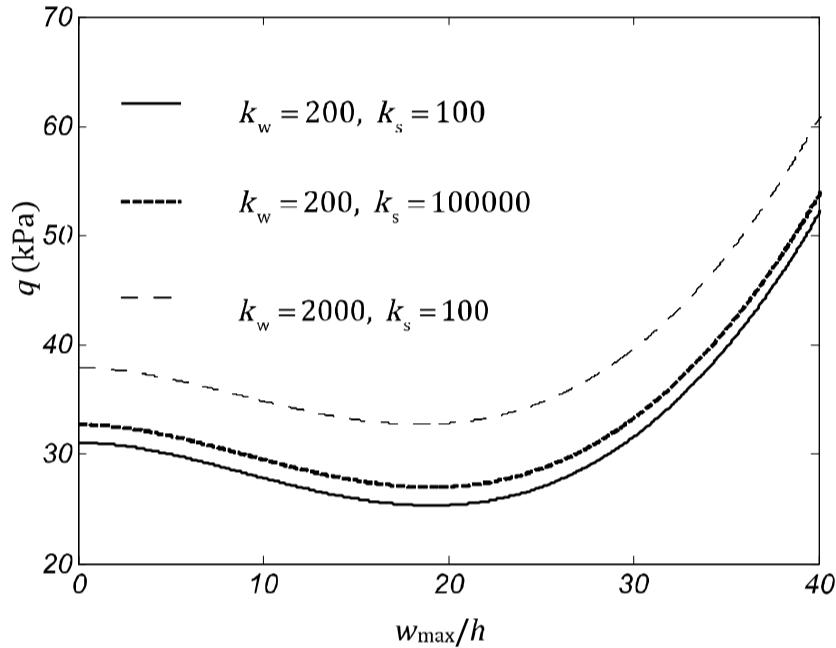
4- نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی حاضر، منحنی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی کامل بدون بستر الاستیک در شکل 2 آورده شده است که با تحلیل هوانگ و هان [24] مقایسه شده است. همچنین کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتropیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی در جدول 1 آورده شده است و با مطالعات باروج و سینگر [2]، ردی و استارنس [26] و شن [21] مقایسه شده است.

در شکل 3 پوسته استوانه‌ای تقویت شده با نسبت $R/h = 500$ ، نسبت $L/R = 2$ ، مدهای n و m به ترتیب برابر (1) و (7) و شاخص کسر حجمی گوناگون ($k = k_2 = k_3$)، در نظر گرفته شده است. این نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش، کاهش پیدا می‌کند. پوسته‌های استوانه‌ای سرامیکی در برابر بار کمانش فشاری مقاومت به مراتب بالاتری نسبت به پوسته‌های استوانه‌ای فلزی دارند که با توجه به سفتی پایین تر فلزات، مورد انتظار است. اما در تمام حالات رفتار نمودار بار-جایه‌جایی مشابه می‌باشد. گراف‌های بار-جایه‌جایی حاصل به نام مسیرهای تعادلی ثانویه شناخته می‌شوند که این رفتار به دلیل وجود نقص‌های هندسی اولیه موجود در هر سازه به ظاهر بی‌عیبی رخ می‌دهد. در مسیر پیش‌کمانش نرخ افزایش جایه‌جایی متناسب با افزایش بار می‌باشد اما به محض عبور از نقطه کمانش و ورود به ناحیه پس‌کمانش (نقطه آغازین نمودارهای موجود) جایه‌جایی‌ها به صورت نامتناسب با بار اعمالی رشد می‌نمایند. با افزایش تدریجی بار تا قبل از رسیدن به بار کمانش جایه‌جایی کمانشی ایجاد نمی‌گردد اما درست در لحظه وقوع کمانش، با رسیدن به بار بحرانی کمانش، خیز به وجود می‌آید. در ادامه مسیر ممکن است علی‌رغم کاهش نیرو پوسته همچنان دچار خیز گردد تا به مسیر تعادلی جدیدی برسد (افزایش نامتناسب جایه‌جایی‌ها در مسیر تعادل ثانویه). پس از آن برای دستیابی به خیز بیشتر باید بار اعمالی را افزایش داد. البته همان‌طور که در نتایج مشاهده می‌شود رفتار نمودارهای پس‌کمانش تابع پارامترهای مختلفی از جمله پارامترهای هندسی پوسته می‌باشد.



شکل 7 تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی برای پوسته استوانهای مدرج تابعی با بستر و بدون بستر



شکل 8 تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پس‌ترنک برای پوسته استوانهای مدرج تابعی تقویت‌شده

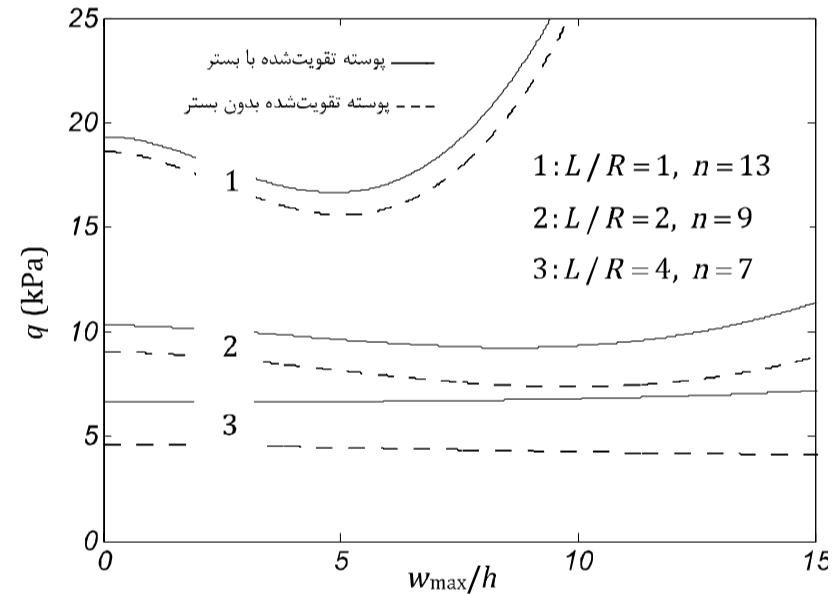
در شکل 6 منحنی پس‌کمانش پوسته تقویت‌شده و تقویت‌نشده با بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت نشان داده شده است. در اینجا نیز در هر دو حالت با افزایش شاخص کسر حجمی بار کمانش کاهش می‌یابد. ضمن آنکه وجود تقویت‌کننده منجر به افزایش ظرفیت تحمل بار در پوسته استوانهای می‌گردد که با توجه به افزایش سفتی سازه به دلیل اضافه کردن تقویت‌کننده‌ها این نتیجه مورد انتظار می‌باشد.

در جدول 2 بار بحرانی کمانش برای پوسته استوانهای با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با بستر و بدون بستر محاسبه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اثر تقویت‌کننده حلقوی بیشتر از تقویت‌کننده طولی می‌باشد. همچنین بیشترین مقاومت در برابر کمانش مربوط به پوسته سرامیکی با تقویت‌کننده حلقوی و طولی روی بستر الاستیک می‌باشد و پوسته فلزی بدون تقویت‌کننده و بستر الاستیک کمترین مقاومت را در برابر کمانش نشان می‌دهد. جنس پوسته بیشترین اثر را دارد که با توجه به ایجاد تغییرات اساسی در ساختار ماده و تغییرات شدید مدول یانگ مورد انتظار می‌باشد اما می‌توان با انتخاب مقادیر بزرگتر برای ثوابت بستر الاستیک و افزایش ابعاد و تعداد تقویت‌کننده‌ها، تأثیر این پارامترها را نیز افزایش داد. کمالاً اینکه با تغییر کوچک در شاخص کسری حجمی تأثیر آن بر رفتار کمانشی پوسته کوچک است اما با تغییر آن از صفر (سرامیک) به بینهایت (فلز) شاهد تأثیر چشمگیری می‌باشیم.

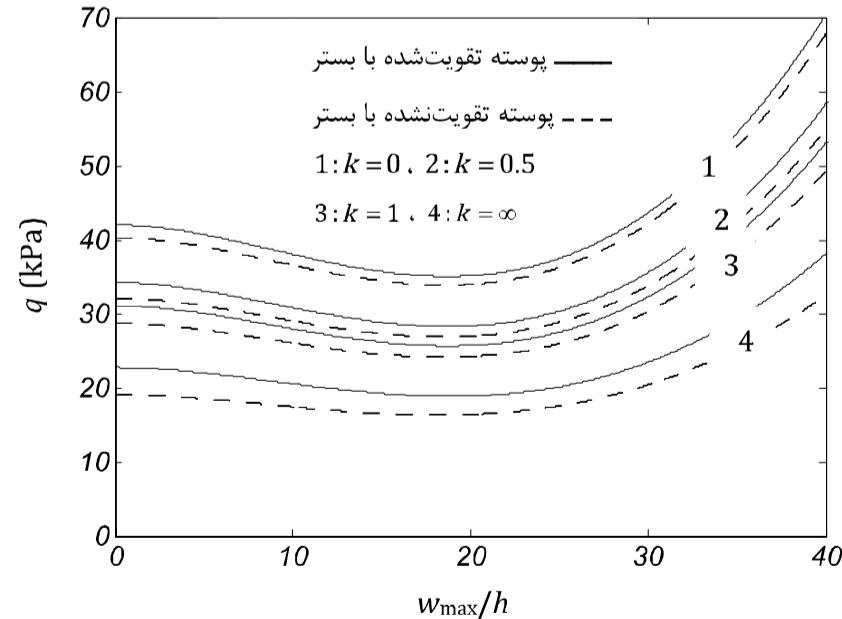
در شکل 7 تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی برای پوسته استوانهای

شکل 4 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانهای تقویت‌شده با پارامترهای بستر (k_w) و (k_s) به ترتیب 200 نیوتن بر متر مکعب و 100 نیوتن بر متر و هم‌چنین بدون بستر با شاخص کسر حجمی (k_1 ، k_2 ، k_3) برابر 1 و نسبت L/R برابر 2 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت R/h بار بحرانی کمانش به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد بنابراین هر چه پوسته نازک‌تر باشد بار بحرانی کمانش کمتر می‌شود. با نازک‌تر شدن پوسته شماره مد کمانش افزایش می‌یابد ضمن آنکه با رسیدن بار به بار بحرانی کمانش، برای پوسته‌های نازک‌تر بدون افزایش چشمگیر بار اعمالی، پوسته دچار خیزهای بزرگ می‌گردد.

شکل 5 نیز منحنی پس‌کمانش پوسته استوانهای تقویت‌شده با پارامترهای بستر (k_w) و (k_s) به ترتیب 200 نیوتن بر متر مکعب و 100 نیوتن بر متر و هم‌چنین بدون بستر با شاخص کسر حجمی (k_1 ، k_2 ، k_3) برابر 1 و نسبت R/h برابر با 500 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت L/R بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. با افزایش طول پوسته شماره مد کمانش کاهش می‌یابد. وجود بستر تنها باعث کاهش خیز کمانش به ازای بار اعمالی مشخص می‌گردد و تأثیر محسوسی بر رفتار نمودار بار-جایه‌جایی نمی‌گذارد و شماره مد کمانش را نیز تغییر نمی‌دهد. همچنین برای پوسته‌های بلندتر حساسیت پاسخ خیز نسبت به تغییرات بار کمتر می‌شود.



شکل 5 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانهای مدرج تابعی تقویت‌شده با بستر و بدون بستر با نسبت R/h متفاوت



شکل 6 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانهای تقویت‌شده و تقویت‌نشده با بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت

نشان می‌دهد. این نتیجه نشان می‌دهد که بستر الاستیک وینکلر تأثیری به مراتب بیشتر از بستر پاسترناک بر پاسخ کمانشی پوسته دارد.

با توجه به شکل ۹ می‌توان به نتایج جالب توجهی دست یافت. پوسته‌های سرامیکی قوی‌ترین و پوسته‌های فلزی ضعیف‌ترین مقاومت در برابر بار کمانشی را از خود نشان می‌دهند. اما استفاده از تقویت‌کننده‌های فلزی و سرامیکی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته.

مدرج تابعی با بستر و بدون بستر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا کرده است.

شکل ۸ تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ۱۰۰۰ برابر ضریب پاسترناک ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته حدود ۶/۶ درصد افزایش می‌یابد در صورتیکه با ۱۰ برابر کردن ضریب وینکلر ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته حدود ۲۹/۴ درصد افزایش را

جدول ۲ بار بحرانی کمانش برای پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده و بدون تقویت‌کننده با بستر و بدون بستر ($m=1$)

$k=\infty, n=4$	$k=1, n=4$		$k=0.5, n=4$		$k=0, n=4$			
بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	
18/33	19/09	27/98	28/74	31/33	32/09	39/53	40/29	بدون تقویت‌کننده
19/57	21/25	28/91	30/58	32/14	33/82	40/12	41/79	تقویت‌کننده طولی
20/75	22/42	29/41	31/07	32/65	34/33	40/68	42/35	تقویت‌کننده حلقوی
21/99	23/66	30/33	32/00	33/46	35/14	41/26	42/94	هر دو تقویت‌کننده

د) هر چه نسبت شعاع به ضخامت افزایش یابد بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند.

ه) با افزایش نسبت طول به شعاع، بار کمانش کاهش پیدا می‌کند.

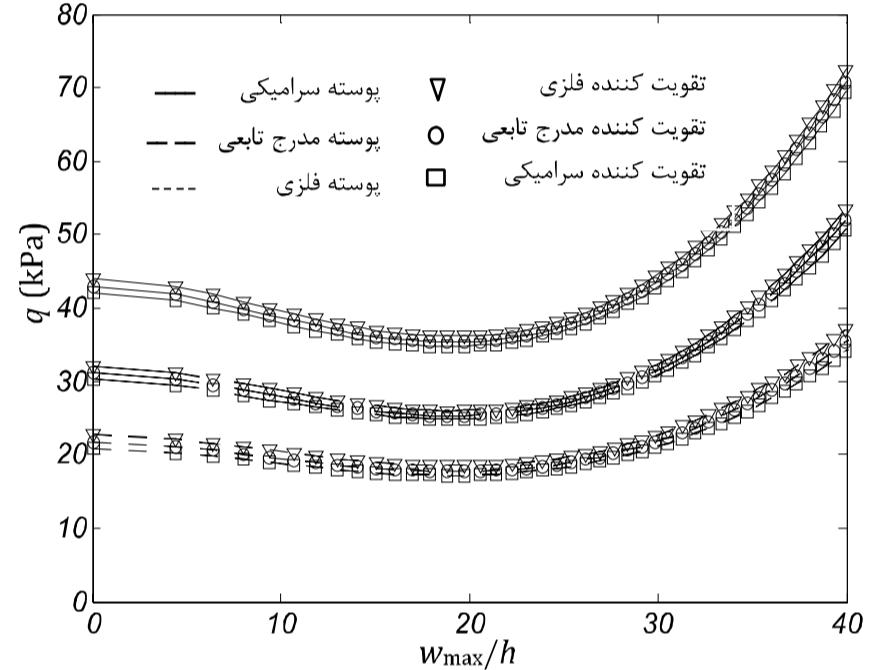
و) اثر تقویت‌کننده حلقوی بیشتر از تقویت‌کننده طولی می‌باشد.

ز) بستر الاستیک وینکلر تأثیری به مراتب بیشتر از بستر پاسترناک بر پاسخ کمانشی پوسته دارد.

ح) استفاده از تقویت‌کننده‌های فلزی و سرامیکی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته نسبت به پوسته با تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی می‌شود.

6- مراجع

- [1] A. Van der Neut, The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression. Rep S314. Amsterdam: National Aeronautical Research Institute, 1947.
- [2] M. Baruch, J. Singer, Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydro-static pressure. *J. Mech. Eng. Sci.* 5, pp. 23-27, 1963.
- [3] H. S. Shen, P. Zhou, T.Y. Chen, Post-buckling analysis of stiffened cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. *Thin-Walled Structures*. 15, pp. 43–63, 1993.
- [4] D. Bushnell, Nonlinear equilibrium of imperfect locally deformed stringer-stiffened panels under combined in-plane loads. *Computers & Structures*. 27, pp. 519–539, 1987.
- [5] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, M. R. Eslami, , Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation. *Compos. Struct.* 93, pp. 3063-3071, 2011.
- [6] Z. Y. Ji, K. Y. Yeh, General solution for nonlinear buckling of non-homogeneous axial symmetric ring-and stringer-stiffened cylindrical shells. *Computers & Structures*. 34, pp. 585–591, 1990.
- [7] M. E. Golmaki, M. Emami, Nonlinear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 11, pp. 1-14, 2014. (In Persian)
- [8] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, S. M. Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013. (In Persian)
- [9] L. Jiang, Y. Wang, X. Wang, Post-buckling analysis of stiffened circular cylindrical panels using differential quadrature element method. *Thin-Walled Structures*. 46, pp. 390–398, 2008.
- [10] Z. M. Li, H. S. Shen, Post-buckling of 3D braided composite cylindrical shells under combined external pressure and axial compression in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*. 50, pp. 719–731, 2008.
- [11] M. Sadeghifar, M. Bagheri, A. A. Jafari, Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with non-uniform eccentricity. *Archive of Applied Mechanics*. 81, pp. 875–886, 2011.



شکل ۹ تأثیر جنس بر ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته استوانه‌ای

نسبت به پوسته با تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پوسته استوانه‌ای سرامیکی با تقویت‌کننده فلزی بهترین انتخاب می‌باشد.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده در معرض فشار خارجی که توسط بستر الاستیک احاطه شده، پیشنهاد شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و تکنیک تقویت‌کننده‌های تکه‌ای با در نظر گرفتن جمله‌های کرنش غیرخطی فن‌کارمن، معادلات حاکم به دست آمده است. یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، کمانش خطی و کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته تقویت‌شده مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش گالرکین، معادلات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به دست آورده شده است.

بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

(الف) با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها، بار کمانش بحرانی افزایش پیدا می‌کند.

(ج) با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند.

- [20] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, Khazaenejad P. Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*. 33, pp. 1151–1157, 2009.
- [21] H. S. Shen, Post-buckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells under combined external pressure and thermal loading. *Int. J. Mech.* 40, pp. 339–355, 1998.
- [22] M. Darabi, M., Darvizeh, A. Darvizeh, Non-linear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading. *Compos. Struct.* 83, pp. 201–211, 2008.
- [23] A. H. Sofiyev, E. Schnack, The stability of functionally graded cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading. *Eng. Struct.* 26, pp. 1321–1331, 2004.
- [24] H. Huang, Q. Han, Research on nonlinear post-buckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads. *Composite Structures*. 92, pp. 1352–1357, 2010.
- [25] A. S. Volmir, *Non-Linear Dynamics of Plates and Shells*. Science Edition M, 1972. (in Russian).
- [26] J. N. Reddy, J. H. Starnes, General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a layerwise theory. *Comput. Struct.* 49, pp. 605–616, 1993.
- [12] D. G. Stamatelos, G. N. Labeas, K. I. Tserpes, Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels. *Thin-Walled Structures*. 49, pp. 422–430, 2011.
- [13] M. Tajdari, M. Azimi, M. Khorram, J. Eskandari Jam, Numerical and experimental investigations on buckling of steel cylindrical shells with triangular cutout subject to axial compression. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 1, pp. 24–37, 2013. (In Persian)
- [14] D. H. Bich, V. H. Nam, N. T. Phuong, Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells. *Vietnam Journal of Mechanics*. 33, pp. 132–147, 2011.
- [15] D. V. Dung, N. T. Nga, Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic medium based on the first order shear deformation theory. *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 35, No. 4, pp. 285 – 298, 2013.
- [16] H. S. Shen, Post-buckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Engineering Structures*. 25, pp. 487–497, 2003.
- [17] A. H. Sofiyev, Non-linear buckling behavior of FGM truncated conical shells subjected to axial load. *Int. J. Non-Linear Mech.* 46, pp. 711–719, 2011.
- [18] D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates and Shells*. Mc Graw-Hill, New York, 1975.
- [19] D. V. Dung, L. K. Hoa, Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure. *Thin-Walled Struct.* 63, pp. 117–124, 2013.