مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دوره 16، شماره 11، ص‌ص 439-444

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

پیشنهاد یک جزء مرتبه بالای سه گرهی تیموشنکو برای تحلیل تیرها و قاب‌های دو بعدی

محمد کارکن

استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان

* لار، کد پستی 95659 -74318، mo.karkon@iaularestan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 01 شهریور 1395
پذیرش: 17 مهر 1395
ارائه در سایت: 24 آبان 1395

کلید واژگان:
اجزای محدود
تیر تیموشنکو
جزء سه گرهی
تحلیل استاتیکی

چکیده

در این مقاله یک جزء مرتبه بالا برای تحلیل تیرهای با اثر برش پیشنهاد می‌گردد. این جزء دارای سه گره و شش درجه آزادی می‌باشد. رابطه‌سازی جزء برپایه‌ی کرنش برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT) می‌باشد. برای این منظور، میدان جابجایی تیر از درجه پنج انتخاب می‌گردد. هم‌چنین، کرنش برشی جزء در طول آن نیز، دارای تغییرات درجه دو خواهد بود. یادآوری می‌گردد که، تغییرشکل محوری جزء نیز از درجه‌ی دو خواهد بود. با نوشتن رابطه‌های انحنا و کرنش برشی تیر تیموشنکو، تابع‌های درون‌یاب برای میدان‌های جابه‌جایی و دوران جزء به صورت صریح حساب می‌گردد. در ادامه، با بهره‌جویی از این تابع‌های درونیاب، ماتریس سختی جزء در دسترس قرار می‌گیرد. در پایان با آزمون‌های عددی دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این آزمون‌ها نشان دهنده‌ی دقت بالای جزء در تحلیل ایستایی تیرهای با اثر برش و هم‌چنین نبود مشکل قفل برشی می‌باشد. یادآوری می‌گردد که، به دلیل به کار بردن میدان جابه‌جایی درجه پنج، جزء پیشنهادی قادر است در تحلیل ایستایی برای بارهای گسترده با تغییرات خطی نیز، پاسخ‌های دقیق را برای تغییرمکان‌ها و نیروهای داخلی ارائه کند.

A new high order three-node Timoshenko beam element for static analysis of beam and plane frame structures

Mohammad Karkon

Department of Civil Engineering, Larestan Branch, Islamic Azad University, Larestan, Iran
* P.O.B. 74318–95659, Larestan, Iran, mo.karkon@iaularestan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 August 2016
Accepted 08 October 2016
Available Online 14 November 2016

Keywords:
Finite Element
Timoshenko Beam
Three-node Element
Static Analysis

ABSTRACT

In this paper a new high order element is proposed for analysis of beams with shear deformation effect. In each node of this element there exist translation and rotation degrees of freedom. The element's formulation is based on the first-order shear deformation theory (FSDT). For this aim, displacement field of the element is selected from fifth order. Moreover, the shear strain is varied as quadratic function throughout the element. It is worth noting that the quadratic function can be used for axial displacement field. By employing curvature and shear strain relations of Timoshenko beam theory, the exact and explicit shape functions of the displacement fields are obtained. By utilizing these shape functions, beam elements' stiffness matrix is also calculated. Finally, several numerical tests are performed to assess the robustness of the suggested element. The results of the numerical testes prove the absence of the shear locking and high accuracy and efficiency of the proposed element for analysis of beam and frame structures. It should be mentioned, due to utilizing fifth order function for displacement field, the proposed element calculates the exact solution for displacements and internal forces throughout the element for triangular distributed loads.

1- مقدمه

عضوهای تیری در ساخت بسیاری از سازه‌های مهندسی مانند قاب‌های اسکلتی، سازه‌های هوافضایی و کشتی‌ها کاربرد فراوان دارد. در تحلیل این گونه سازه‌ها دو گونه نگره گسترش یافته‌اند. در نگره‌ی اولر-برنولی اثر برش وارد تغییر شکل تیر نمی‌گردد. این شیوه، برای تیرهای نازک پاسخ مناسب را به دست می‌دهد ولی با افزایش ضخامت، خطای پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند. در مقابل، برای تحلیل تیرهای ضخیم که اثر تغییر شکل‌های برشی تأثیرگذار می‌باشد، نگره‌ی تیر تیموشنکو به کار می‌رود. در این نگره با توجه به پنداشت ثابت بودن کرنش برشی در هر مقطع تیر، تغییرات جابه‌جایی درون صفحه تیر در راستای ضخامت، خطی می‌باشد، اما خط جابه‌جایی در راستای ضخامت تیر بر میان‌تار عمود نخواهد بود. این شیوه در تیرهای تا ضخامت متوسط، پاسخ با دقت مناسب را به دست می‌دهد.

تاکنون جزءهای گوناگونی بر پایه‌ی نگره‌ی تیموشنکو ارائه شده است. این جزءها در دو دسته ساده و پیچیده طبقه‌بندی می‌شوند. رابطه‌سازی اجزای محدود این نگره با شیوه‌های گوناگونی انجام یافته است. در مرجع‌های [2,1] و [3] جزءهای ساده‌ی دو گرهی با چهار درجه‌ی آزادی پیشنهاد شده است. اولین جزء مرتبه‌ی بالا توسط کاپور پیشنهاد شد [4]. این جزء دارای هشت درجه‌ی آزادی می‌باشد. تسلر و دونگ با بهره‌جویی از تابع‌های سلسله مراتبی، جزءهای زیادی را بر پایه‌ی نگره تیر تیموشنکو آفریدند [5]. لیس و توماس رابطه‌سازی یک جزء پیچیده را با به کار بردن سری‌های چند جمله‌ای

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Karkon, A new high order three-node Timoshenko beam element for static analysis of beam and plane frame structures, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 439-444, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]

مستقل برای میدان‌های جابه‌جایی و دوران انجام دادند [7,6]. در سال‌های اخیر، فالسون و سترینی با گسترش نگره‌ی اولر-برنولی، یک روش اجزای محدود را برای تحلیل تیرهای تیموشنکو ارائه کردند [8]. در این شیوه ماتریس سختی جزءهای مرتبه‌ی بالا نامتقارن می‌باشد، اما با متراکم ساختن درجه‌های آزادی میان جزء، ماتریس سختی متقارن به دست می‌آید. باکلر و همکارانش در سال 2012 روش هم‌هندسی را برای تحلیل تیرهای خمیده‌ی ضخیم بکار بردند [9]. هم‌چنین، در سال 2014 لیپه و همکاران با بهره جستن از رابطه‌های اجزای محدود بر پایه‌ی حساب تغییرات خطی، یک جزء با رابطه سازی درهم بدون مشکل قفل برشی را برای تحلیل خمش تیر تیموشنکو پیشنهاد کردند [10]. در این سال، ژانگ و همکاران یک جزء تیر تیموشنکو را برپایه‌ی گرادیان کرنش و نگره‌ی کشسانی برای تحلیل ایستایی، ارتعاش آزاد و پایداری تیرها، رابطه‌سازی کردند [11]. کایلری و همکاران نیز در سال 2015 میلادی، یک جزء تیموشنکو با درجه‌های آزادی میانی برای تحلیل سازه‌هایی مانند شمع‌های مدفون در خاک ارائه کردند [12]. با استفاده از تابع‌های شکل سلسله مراتبی، تای و چن یک جزء مرتبه بالا را برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای تیموشنکو پیشنهاد کردند. آن‌ها برای این‌کار از چندجمله‌ای‌های لژاندر بهره جستند [13]. خواجوی با بهره‌جویی از روش نرمی و سختی، ماتریس سختی جزء تیموشنکو را برای تحلیل تیرهای نامنشوری و دارای ناپیوستگی ارائه کرده است [14].

در این مقاله برای تحلیل ایستایی تیرها و قاب‌های دوبعدی، یک جزء جدید سه گرهی بر پایه‌ی نگره‌ی تیموشنکو پیشنهاد شده است. برای این منظور، میدان جابه‌جایی جزء از درجه پنج و میدان کرنش برشی آن از درجه دو انتخاب می‌گردد. هم‌چنین، با توجه به سه گرهی بودن جزء، جابه‌جایی محوری آن برای تحلیل سازه‌های قابی، از درجه‌ی دو خواهد بود. در ادامه، با به کار بردن رابطه‌های اجزای محدود، تابع‌های درون‌یاب برای جزء پیشنهادی به دست می‌آید. با بهره‌جویی از این تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی برای جزء پیشنهادی حساب می‌گردد. در پایان با انجام آزمون‌های عددی گوناگون دقت جزء پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- معادله حاکم

کرنش و تنش در نگره تیر تیموشنکو را، می‌توان به صورت روابط (2,1) نوشت [3]:

$$\varepsilon = z\frac{d\phi}{dx} \quad , \quad \gamma = \frac{dw}{dx} - \theta \tag{1}$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad \tau = G\gamma \tag{2}$$

در رابطه‌های کنونی w و θ به ترتیب، تابع‌های خیز و دوران تیر می‌باشند. هم‌چنین در این نگره، لنگر و برش داخلی به صورت روابط (4,3) حساب می‌گردند:

$$M = \int z\sigma\, dA = EI\frac{d\theta}{dx} \tag{3}$$

$$V = k_s\int \tau\, dA = GAk_s\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) \tag{4}$$

در رابطه (4) k_s ضریب اصلاح برش می‌باشد. بنابراین با نوشتن معادله تعادل تنش‌ها، معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل برشی تیر با نگره‌ی تیموشنکو، به صورت روابط (6,5) به دست می‌آید:

$$-\frac{d}{dx}(GAk_s\gamma) = q(x) \tag{5}$$

$$GAk_s\gamma - \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\theta}{dx}\right) = 0 \tag{6}$$

3- رابطه‌سازی اجزای محدود

در روش اجزای محدود، میدان‌های جابه‌جایی و دوران جزء، با تابع‌های درون-یاب به تغییرمکان‌های گرهی وابسته می‌گردد. شکل 1 جزء سه گرهی پیشنهادی را نشان می‌دهد. برای محاسبه تابع‌های درون‌یاب جزء، میدان جابه‌جایی و کرنش برشی آن، به ترتیب از درجه پنج و دو انتخاب می‌گردد. بنابراین این تابع‌ها را در فضای مختصه‌ی بدون بعد ξ، می‌توان به صورت روابط (8,7) نوشت:

$$w = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + a_4\xi^3 + a_5\xi^4 + a_6\xi^5 = [P_w]\{a\} \tag{7}$$

$$\gamma = a_7 + a_8\xi + a_9\xi^2 \tag{8}$$

هم‌چنین، میدان دوران جزء به صورت رابطه (9) به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{dw}{dx} - \gamma = \frac{2}{l}\frac{dw}{d\xi} - \gamma \tag{9}$$

یادآوری می‌گردد که، میدان دوران یک تابع درجه‌ی چهار می‌باشد. از طرفی با توجه به معادله‌ی (6)، کرنش برشی را می‌توان به صورت رابطه (10) به دست آورد:

$$\gamma = \lambda l^2\frac{d^2\theta}{dx^2} \ , \quad \lambda = \frac{EI}{GAk_s l^2} \tag{10}$$

بنابراین، با توجه به برابر بودن رابطه‌های (8) و (10)، عامل‌های a_7، a_8 و a_9 به صورت روابط (11-13) در دسترس قرار می‌گیرد:

$$a_7 = -\frac{48}{l}(\lambda a_4 + 80\lambda^2 a_6) \tag{11}$$

$$a_8 = -\frac{192}{l}\lambda a_5 \tag{12}$$

$$a_9 = -\frac{480}{l}\lambda a_6 \tag{13}$$

از طرفی با جایگذاری عامل‌های a_7، a_8 و a_9 در رابطه (9)، میدان دوران جزء را می‌توان به صورت روابط (15,14) نوشت:

$$\theta = [P_\theta]\{a\} \tag{14}$$

$$[P_\theta] = \frac{1}{l}[0 \quad 2 \quad 4\xi \quad 6(\xi^2 + 8\lambda) \quad 8\xi(\xi^2 + 24\lambda) \quad 10(\xi^4 + 48\lambda\xi^2 + 384\lambda^2)] \tag{15}$$

برای یافتن تابع‌های درون‌یاب جزء روش غیر مستقیم، به کار می‌رود. در این شیوه، با استفاده از تابع‌های میدان w و θ، بردار تغییر مکان‌های گرهی $\{D\}$، به صورت روابط (16-18) نوشته می‌شود:

$$\{D\} = [G]\{a\} \tag{16}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_\theta \end{bmatrix}\{D\} = [N]\{D\} \tag{17}$$

$$\{D\} = \{w_i \quad \theta_i \quad w_k \quad \theta_k \quad w_j \quad \theta_j\}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

ماتریس $[G]$ در رابطه (16) وابسته به هندسه جزء و یک ماتریس مربعی است که هر سطر از آن با گذاشتن مختصه‌های گره‌ها در ماتریس‌های $[P_w]$ و $[P_\theta]$ به دست می‌آید. بنابراین، این ماتریس را می‌توان به صورت (19) بدست آورد:

$$[G] = \begin{bmatrix} l & -l & l & -l & l & -l \\ 0 & 2 & -4 & g_1 & g_2 & g_3 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 48\lambda & 0 & 3840\lambda^2 \\ l & l & l & l & l & l \\ 0 & 2 & 4 & g_1 & -g_2 & g_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

عامل‌های g_1، g_2 و g_3 به صورت روابط (19) می‌باشند:

$$\begin{aligned} g_1 &= 6(8\lambda + 1) \\ g_2 &= -8(24\lambda + 1) \\ g_3 &= 10(384\lambda^2 + 48\lambda + 1) \end{aligned} \tag{20}$$

از سوی دیگر، تابع‌های درون‌یاب، $[N]$ و تابع میدان به صورت (21) با

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]

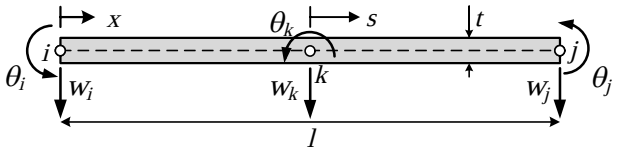

Fig. 1 3-node proposed Timoshenko beam element

شکل 1 جزء سه گرهی تیر تیموشنکو

هم رابطه دارند:

$$[N] = \begin{bmatrix} P_w \\ P_\theta \end{bmatrix} [G]^{-1} \tag{21}$$

بنابراین تابع‌های درون‌یاب میدان جابه‌جایی، برای جزء پیشنهادی به صورت روابط (23,22) به دست می‌آید:

$$[N_w] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{2}{\beta}\xi(\xi-1)(11520\lambda^2\xi + 5760\lambda^2 - 144\lambda\xi^3 - 24\lambda\xi^2 \\
&\quad + 456\lambda\xi + 120\lambda - 3\xi^3 - \xi^2 + 4\xi) \\
N_2 &= \frac{l}{\beta}\xi(\xi^2-1)(92160\lambda^3 - 1152\lambda^2\xi^2 + 768\lambda^2 + 24\lambda\xi^2 \\
&\quad - 60\lambda\xi - 24\lambda + \xi^2 - \xi) \\
N_3 &= -\frac{8}{\beta}(60\lambda+1)(\xi^2-1)(-\xi^2+48\lambda+1) \\
N_4 &= -\frac{4l}{\beta}(48\lambda+1)(\xi^2-1)(960\lambda^2 - 12\lambda\xi^2 + 108\lambda - \xi^2 \\
&\quad + 1) \\
N_5 &= \frac{2}{\beta}\xi(\xi+1)(11520\lambda^2\xi - 5760\lambda^2 - 144\lambda\xi^3 + 24\lambda\xi^2 \\
&\quad + 456\lambda\xi - 120\lambda - 3\xi^3 + \xi^2 + 4\xi) \\
N_6 &= \frac{l}{\beta}\xi(\xi^2-1)(92160\lambda^3 - 1152\lambda^2\xi^2 + 768\lambda^2 \\
&\quad + 24\lambda\xi^2 + 60\lambda\xi - 24\lambda + \xi^2 + \xi)
\end{aligned} \tag{23}$$

در رابطه‌های کنونی عامل β، به صورت رابطه (24) تعریف می‌گردد:

$$\beta = 23040\lambda^2 + 864\lambda + 8 \tag{24}$$

هم‌چنین، تابع‌های درون‌یاب میدان دوران نیز، به صورت روابط (26,25) حساب می‌گردند:

$$[N_\theta] = [N_7 \quad N_8 \quad N_9 \quad N_{10} \quad N_{11} \quad N_{12}] \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
N_7 &= \frac{4}{\beta l}\xi(\xi^2-1)(15\xi - 480\lambda + 720\lambda\xi - 8) \\
N_8 &= -\frac{2}{\beta}\xi(\xi-1)(5760\lambda^2\xi^2 + 5760\lambda^2\xi - 5760\lambda^2 \\
&\quad - 120\lambda\xi^2 + 120\lambda\xi + 24\lambda - 5\xi^2 - \xi + 2) \\
N_9 &= \frac{64}{\beta l}\xi(60\lambda+1)(\xi^2-1) \\
N_{10} &= \frac{8}{\beta}(48\lambda+1)(\xi^2-1)(60\lambda\xi^2 - 60\lambda + 5\xi^2 - 1) \\
N_{11} &= -\frac{4}{\beta l}\xi(\xi^2-1)(15\xi + 480\lambda + 720\lambda\xi + 8) \\
N_{12} &= -\frac{2}{\beta}\xi(\xi+1)(5760\lambda^2\xi^2 - 5760\lambda^2\xi - 5760\lambda^2 \\
&\quad - 120\lambda\xi^2 - 120\lambda\xi + 24\lambda - 5\xi^2 \\
&\quad + \xi + 2)
\end{aligned} \tag{26}$$

در ادامه‌ی کار به چگونگی یافتن ماتریس کرنش پرداخته می‌شود. برای برپا سازی ماتریس سختی، به ماتریس کرنش نیاز است. بنابراین،کرنش‌های درون جزء را می‌توان توسط ماتریس کرنش $[B]$، به تغییر مکان‌های گرهی پیوند داد:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{dw}{dx} \\ \dfrac{dw}{dx} - \theta \end{Bmatrix} = [B]\{D\} \tag{27}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} \\ \dfrac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_w \\ N_\theta \end{bmatrix} \tag{28}$$

در رابطه (26) عامل‌های $\{D\}$ و $[B]$ به ترتیب، بردار تغییرمکان گرهی و ماتریس کرنش می‌باشند. هم‌چنین، ماتریس سختی جزء تیموشنکو را می‌توان به صورت رابطه (29) حساب کرد:

$$[K] = \int_0^l [B]^{\mathrm{T}}[D_m][B]\,dx = \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} [B]^{\mathrm{T}}[D_m][B]\,d\xi \tag{29}$$

در رابطه (29) ماتریس $[D_m]$، وابسته به خصوصیات مکانیکی جسم می‌باشد. برای جزء تیموشنکو این ماتریس به صورت (30) می‌باشد:

$$[D_m] = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GAk_s \end{bmatrix} \tag{30}$$

یادآوری می‌گردد، عامل k_s ضریب اصلاح برش می‌باشد. این ضریب به طور معمول، برای تیرهای با مقطع مستطیلی برابر 5/6 می‌باشد. با محاسبه رابطه (28)، ماتریس سختی جزء سه گرهی پیشنهادی به صورت رابطه (31) به دست می‌آید:

$$[k] = \frac{64}{35l^3\beta^2}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & -k_{16} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & 0 & k_{13} & -k_{23} \\ k_{14} & k_{24} & 0 & k_{44} & -k_{14} & k_{24} \\ k_{15} & -k_{16} & k_{13} & -k_{14} & k_{11} & -k_{12} \\ k_{16} & k_{26} & -k_{23} & k_{24} & -k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{31}$$

عامل‌های ماتریس سختی (30)، به صورت روابط (32) حساب می‌گردند:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 4EI(401587200\lambda^3 + 19440000\lambda^2 + 292140\lambda \\
&\quad + 1273) \\
k_{12} &= 2EIl(-1857945600\lambda^4 + 76723200\lambda^3 + 6814080\lambda^2 \\
&\quad + 119340\lambda + 569) \\
k_{13} &= -3584EI(60\lambda+1)^3 \\
k_{14} &= 1920EIl(48\lambda+1)^2(1680\lambda^2 + 180\lambda + 1) \\
k_{15} &= -4EI(208051200\lambda^3 + 9763200\lambda^2 + 130860\lambda \\
&\quad + 377) \\
k_{16} &= 2EIl(-1857945600\lambda^4 - 20044800\lambda^3 + 1975680\lambda^2 \\
&\quad + 38700\lambda + 121) \\
k_{22} &= 4EIl^2(3715891200\lambda^5 + 6220800\lambda^4 + 15949440\lambda^3 \\
&\quad + 967980\lambda^2 + 16605\lambda + 83) \\
k_{23} &= -896EIl(60\lambda+1)^3 \\
k_{24} &= 320EIl^2(48\lambda+1)^2(-40320\lambda^3 - 2640\lambda^2 + 180\lambda \\
&\quad + 1) \\
k_{26} &= 2EIl^2(7431782400\lambda^5 - 277862400\lambda^4 \\
&\quad - 14065920\lambda^3 + 116520\lambda^2 + 5490\lambda \\
&\quad + 19) \\
k_{33} &= 7168EI(60\lambda+1)^3 \\
k_{44} &= 1280EIl^2(48\lambda+1)^2(20160\lambda^3 + 3840\lambda^2 + 192\lambda + 1)
\end{aligned} \tag{32}$$

یادآوری می‌گردد که، جزء پیشنهادی فاقد مشکل قفل برشی می‌باشد. زیرا اگر از اثر تغییرشکل‌های برشی صرف نظر گردد (یعنی $\lambda = 0$ فرض شود)، تابع‌های درون‌یاب و ماتریس سختی جزء پیشنهادی، به‌ترتیب به تابع‌های درون‌یاب و ماتریس سختی جزء سه گرهی اولر-برنولی تبدیل خواهد شد. تابع‌های درون‌یاب و ماتریس سختی جزء سه گرهی اولر-برنولی را می‌توان در مرجع‌های [15-17] یافت. هم‌چنین، بردار نیروهای گرهی را می‌توان به صورت رابطه (32) به دست آورد:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]

$$[F] = \int_0^l [[N_w]^{\mathrm{T}} \quad [N_\theta]^{\mathrm{T}}] \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} dx \tag{32}$$

در رابطه (32)، q و m، به‌ترتیب، نیرو و لنگر گسترده وارد بر تیر می‌باشند.

4- آزمون‌های عددی

در این بخش کارآیی و دقت جزء پیشنهادی در تحلیل ایستایی سازه‌های تیری و قابی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، دو آزمون عددی انجام می‌شود. در آزمون یکم، یک تیر طره تحلیل می‌گردد و پاسخ خیز انتهای آن حساب می‌گردد. در آزمون دوم، تحلیل یک سازه قابی به انجام می‌رسد. در هر دو آزمون، پاسخ جزء پیشنهادی با نتایج سایر پژوهشگران و نیز پاسخ دقیق مقایسه می‌شود.

4-1- تحلیل تیر طره

در این بخش، به منظور نشان داده دقت بالای جزء پیشنهادی، تحلیل ایستایی یک تیر طره زیر اثر بار متمرکز در انتهای آن، انجام می‌گردد. این تیر دارای طول $L = 4$، عرض $b = 1$ و عمق $h = 0.554256$ می‌باشد. ضریب اصلاح برش نیز، $k_s = 0.85$ فرض می‌گردد. هم‌چنین، ضریب کشسانی و نسبت پواسون مصالح تیر، به ترتیب، برابر با $E = 2.6$ و $\nu = 0.3$ می‌باشد. پاسخ تحلیلی جابه‌جایی انتهای تیر بر پایه‌ی نگره‌ی تغییرشکل‌های مرتبه بالا (HSDT) به صورت رابطه (33) حساب می‌گردد [18]:

$$w_{\text{tip}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{5EI}(1+\nu)\left(\frac{h}{L}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\alpha L}\tanh(\alpha L)\right)$$
$$\alpha = \frac{420}{(1+\nu)h} \tag{33}$$

هم‌چنین، پاسخ تحلیلی انتهای تیر برپایه‌ی نگره‌ی تغییرشکل مرتبه یکم (FSDT) نیز، به صورت رابطه (34) به دست می‌آید:

$$w_{\text{tip}} = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 - \frac{3EI}{GAk_sL^2}\right) \tag{34}$$

نتیجه‌ی تحلیل، در جدول 1 نشان شده است. در این جدول علاوه بر نتایج جزء پیشنهادی، یافته‌های هیلگر و ردی نیز درج شده است [18]. این پژوهش‌گران با دو شیوه‌ی جزء مرتبه بالا (HOE) و جزء دو گرهی با انتگرال-گیری کاهشی (RIE)، سازه را تحلیل نموده‌اند. با بررسی این جدول، مشاهده می‌شود که دقت جزء پیشنهادی بسیار بالا است. به گونه‌ای که با بهره جستن از یک جزء پاسخ دقیق را به دست می‌دهد.

4-2- تحلیل قاب

به منظور سنجش دقت جزء در تحلیل ایستایی، یک قاب دو بعدی تحلیل می‌گردد. شکل 2 این قاب به همراه بارهای وارد بر آن را نشان می‌دهد. در این شکل $a = 3.6576$ m (12ft) است. ضریب کشسانی، ضریب پواسون و ضریب اصلاح برش برای مصالح اعضای قاب به ترتیب $E = 6.89 \times 10^9$ N/m² (10^6 psi)، $\nu = 0.25$ و $k_s = 5/6$ می‌باشند. برای نشان دادن دقت بسیار بالای جزء پیشنهادی، دو جزء برای تحلیل قاب به کار می‌رود. سطح مقطع اعضای قاب برابر $A = 6.452 \times 10^{-3}$ m² (10 in²) و ممان اینرسی آن نیز برابر $I = 4.16 \times 10^{-7}$ m⁴ (10 in⁴) می‌باشد. در این قاب همانگونه که در شکل 2 نیز نشان داده شده است، بار متمرکز قائم $2P$ در گره 3 و بار قائم $4P$ نیز در گره 4 وارد می‌گردد. در این شکل $P = 44.48$ kN (10^4 lb) می‌باشد. هم‌چنین، عضو قائم قاب زیر اثر یک بار گسترده یکنواخت با شدت $q = \frac{P}{8.135}$ N/m $\left(\frac{P}{6}\text{ lb/ft}\right)$ قرار دارد.

با انجام تحلیل سازه، جابه‌جایی‌های افقی (u_x)، قائم (u_y) و دوران (θ) گره 3 برای جزء پیشنهادی به همراه نتایج جزءهای دو گرهی سایر پژوهشگران در جدول 2 درج شده است. یادآوری می‌گردد که، این پژوهشگران از دو جزء برای هر عضو قاب بهره جسته‌اند. این جدول نشان می‌دهد که با استفاده از یک جزء پیشنهادی برای هر عضو قاب، پاسخ دقیق به دست می‌آید.

به منظور بهتر نشان دادن دقت جزء پیشنهادی، نمودارهای جابجایی، دوران، لنگر خمشی و نیروی برشی در طول عضو قائم قاب رسم می‌گردند و با یافته‌های سایر پژوهشگران مقایسه می‌شوند. این نمودارها به‌ترتیب، در شکل‌های 3 تا 6 نشان داده شده‌اند. در این نمودارها، پاسخ جزء پیشنهادی به همراه نتایج جزء دو گرهی با انتگرال گیری کاهشی (RIE)، جزء دو گرهی (IIE) و پاسخ دقیق رسم شده است. یادآوری می‌گردد که در نمودار (6)، به دلیل خطای زیاد نمودار برش برای جزء (RIE) رسم نشده است. بررسی این نمودارها نشان می‌دهد که جزء پیشنهادی در تمامی موارد پاسخ دقیق را به دست می‌دهد و جابه‌جایی‌ها و نیروهای داخلی عضو را در سراسر عضو به صورت دقیق درون‌یابی می‌کند. هم‌چنین، مشاهده می‌شود که، جزء دو گرهی (IIE)، فقط پاسخ‌های خیز و دوران را آن هم در نقاط گرهی به صورت دقیق محاسبه می‌کند.

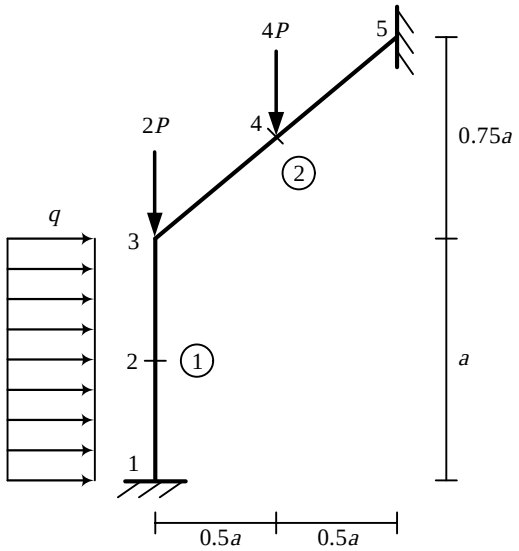

Fig. 2 Plane frame geometry with applied loads

شکل 2 هندسه قاب به همراه بارهای وارد به آن

جدول 1 خیز انتهای تیر طره

Table 1 Tip deflection of cantilever beam

تعداد جزءها	جزء HOE [18]	جزء RIE [18]	جزء پیشنهادی
1	-	-	586.8
2	553.3	550.6	586.8
4	579.9	577.7	586.8
8	585.8	584.6	586.8
پاسخ دقیق	586.9	586.8	

جدول 2 جابه‌جایی‌های گره 3 قاب دو بعدی

Table 2 Displacements at node 3 for the plane frame

تغییر مکان	جزء RIE [3]	جزء IIE [3]	مرجع [19]	پاسخ دقیق	جزء پیشنهادی
u_x	0.84765	0.83898	0.83843	0.83898	0.83898
u_y	0.68056	0.68123	0.68107	0.68123	0.68123
θ	0.86647	0.96206	0.96715	0.96206	0.96206

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]

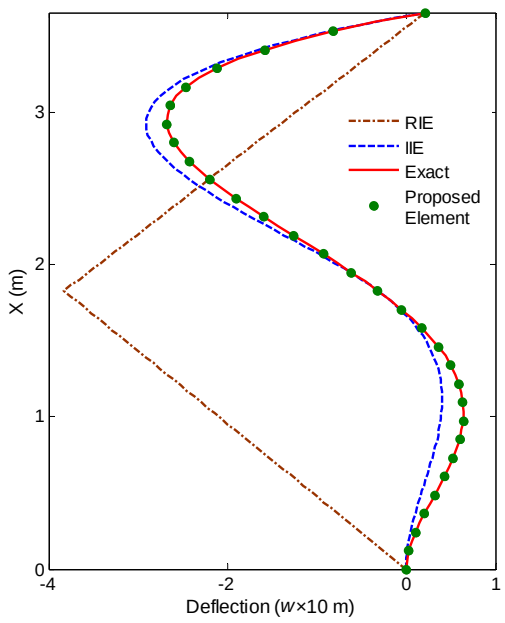

Fig. 3 Transversal deflection for the vertical element

شکل 3 نمودار خیز در راستای عضو قائم قاب

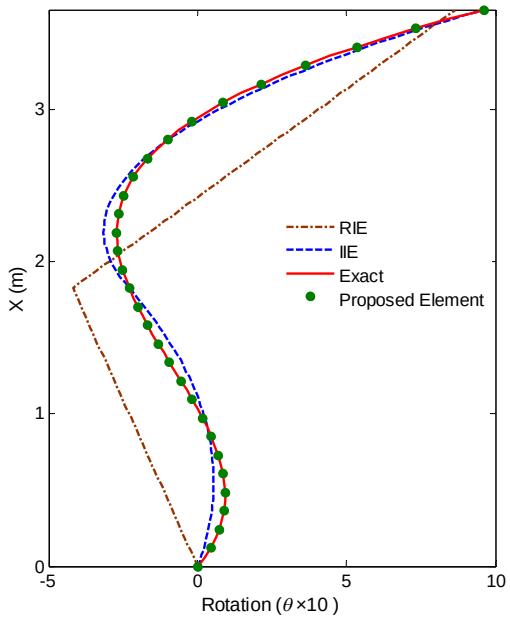

Fig. 4 Rotation for the vertical element

شکل 4 نمودار دوران در راستای عضو قائم قاب

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک جزء سه گرهی جدید بر پایه‌ی نگره‌ی تیموشنکو، برای تحلیل ایستایی تیرهای با اثر برش پیشنهاد شد. برای رابطه‌سازی جزء پیشنهادی، میدان‌های جابه‌جایی و کرنش برشی آن به ترتیب از درجه‌ی پنج و دو اختیار شد. در ادامه با نوشتن رابطه بین میدان‌های جابجایی، کرنش برشی و دوران و هم‌چنین، بهره‌جویی از روابط اجزای محدود، تابع‌های درون‌یاب جزء به صورت صریح به دست آمد. با به کاربردن این تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی جزء پیشنهادی به صورت صریح به دست آمد. در

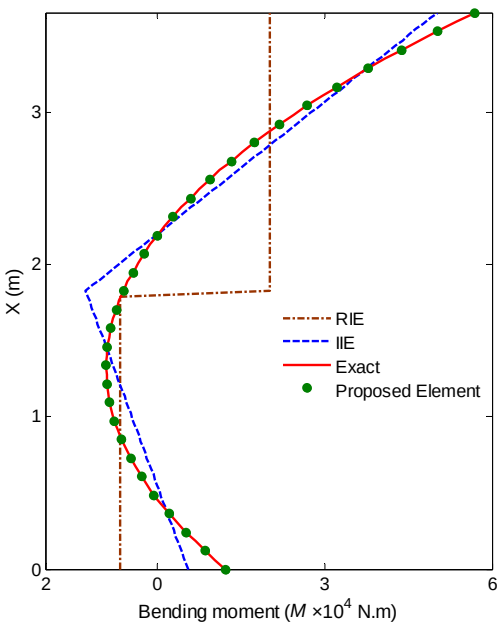

Fig. 5 Bending moment for the vertical element

شکل 5 نمودار لنگر در راستای عضو قائم قاب

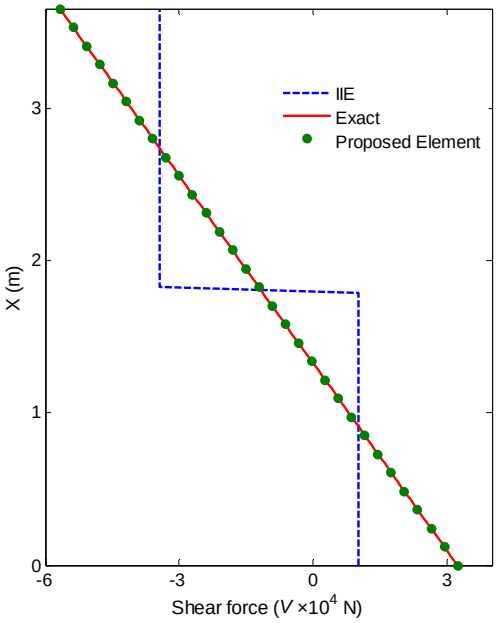

Fig. 6 Shear force for the vertical element

شکل 6 نمودار برش در راستای عضو قائم قاب

پایان برای نشان دادن کارآیی و دقت جزء پیشنهادی در تحلیل ایستایی تیرها و قاب‌ها، دو آزمون عددی انجام شد. نتایج این آزمون نشان دهنده‌ی دقت بسیار بالای جزء پیشنهادی برای محاسبه‌ی تغییرمکان‌ها و نیروهای داخلی در تحلیل ایستایی قاب‌ها می‌باشند. هم‌چنین، نبود مشکل قفل برشی نیز به اثبات رسید.

6- فهرست علایم

A سطح مقطع (m^2)

E ضریب کشسانی (N/m^2)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]

G ضریب برشی (N/m^2)

I ممان اینرسی (m^4)

M لنگر خمشی (Nm)

V نیروی برشی (N)

علایم یونانی

ε کرنش محوری

γ کرنش برشی

ξ مختصه بدون بعد طولی

σ تنش محوری (N/m^2)

τ تنش برشی (N/m^2)

زیرنویس‌ها

tip نوک تیر طره

7- مراجع

[1] R. Nickel, G. Secor, Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, No. 2, pp. 243-252, 1972.
[2] D. Thomas, J. Wilson, R. Wilson, Timoshenko beam finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No. 3, pp. 315-330, 1973.
[3] J. Reddy, On locking-free shear deformable beam finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 149, No. 1, pp. 113-132, 1997.
[4] K. K. Kapur, Vibrations of a Timoshenko Beam, Using Finite-Element Approach, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 40, No. 5, pp. 1058-1063, 1966.
[5] A. Tessler, S. Dong, On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements, *Computers & structures*, Vol. 14, No. 3, pp. 335-344, 1981.
[6] A. Lees, D. Thomas, Unified Timoshenko beam finite element, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 80, No. 3, pp. 355-366, 1982.
[7] A. Lees, D. Thomas, Modal hierarchical Timoshenko beam finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 99, No. 4, pp. 455-461, 1985.
[8] G. Falsone, D. Settineri, An Euler–Bernoulli-like finite element method for Timoshenko beams, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, No. 1, pp. 12-16, 2011.
[9] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure, Locking free isogeometric formulations of curved thick beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 245, No. 1, pp. 144-162, 2012.
[10] F. Lepe, D. Mora, R. Rodríguez, Locking-free finite element method for a bending moment formulation of Timoshenko beams, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 68, No. 3, pp. 118-131, 2014.
[11] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 79, No. 1, pp. 22-39, 2014.
[12] D. Caillerie, P. Kotronis, R. Cybulski, A Timoshenko finite element straight beam with internal degrees of freedom, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 39, No. 16, pp. 1753-1773 2015.
[13] C.-Y. Tai, Y. Chan, A hierarchic high-order Timoshenko beam finite element, *Computers & Structures*, Vol. 165, No. 1, pp. 48-58, 2016.
[14] R. Khajavi, A novel stiffness/flexibility-based method for Euler–Bernoulli/Timoshenko beams with multiple discontinuities and singularities, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 17, pp. 7627-7655, 2016.
[15] B. A. Coulter, R. E. Miller, Vibration and buckling of beam-columns subjected to non-uniform axial loads, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 23, No. 9, pp. 1739-1755, 1986.
[16] C. E. Augarde, Generation of shape functions for straight beam elements, *Computers & structures*, Vol. 68, No. 6, pp. 555-560, 1998.
[17] A. Modarakar Haghighi, M. Zakeri, R. Attarnejad, 3-node Basic Displacement Functions in Analysis of Non-Prismatic Beams, *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 1, pp. 77-91, 2015.
[18] P. Heyliger, J. Reddy, A higher order beam finite element for bending and vibration problems, *Journal of sound and vibration*, Vol. 126, No. 2, pp. 309-326, 1988.
[19] M. Eisenberger, An exact high order beam element, *Computers & structures*, Vol. 81, No. 3, pp. 147-152, 2003.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.48.1]