مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1396، دوره 17، شماره 4، ص‌ص 134-142

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری یک میکروشفت دوار با درنظرگرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و اثر میکرواینرسی

سیدعلی قصابی[1]، مجید شاه‌قلی[2*]، محمدرضا ارباب‌تفتی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

*تهران، صندوق پستی 16785-136، majid.shahgholi@srttu.edu

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 دی 1395

پذیرش: 24 بهمن 1395

ارائه در سایت: 19 فروردین 1396

کلید واژگان:

ارتعاشات غیرخطی وپایداری

میکروشفت دوار

تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده

اثر میکرواینرسی

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی و پایداری یک میکروشفت دوار متقارن و نامتقارن با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده در نزدیکی رزونانس اصلی سیستم مطالعه شده است. به کمک اصل هامیلتون معادلات غیرخطی حرکت استخراج شده و به‌کمک روش مقیاس‌های چندگانه معادلات حرکت حل شده‌اند و عبارت‌های تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی پیش‌گشت و پس‌گشت ارائه شده که تأثیر تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و اثرات میکرو اینرسی در آن مشهود است. پاسخ فرکانسی سیستم برای مودهای مختلف، نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی، نمودار دامنه برحسب نابالانسی برای میکروشفت‌های دوار متقارن و نامتقارن مقایسه و بررسی شده است. مشاهده می‌شود که برای میکروشفت‌های دوار متقارن و نامتقارن با در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و اثرات میکرو اینرسی دامنه سیستم کاهش می‌یابد و محل نقاط انشعاب سیستم نیز تغییر خواهد کرد. میکروشفت متقارن در حضور تئوری کلاسیک و بدون اثرات میکرواینرسی در کم‌ترین مقدار ضریب میرایی و میکروشفت نامتقارن برای این حالت در بیشترین مقدار ضریب میرایی به حالت کاملاً پایدار می‌رسند. میکروشفت متقارن در حضور تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و با اثرات میکرو اینرسی در کمترین مقدار نابالانسی به حالت کاملاً پایدار می‌رسد درحالی‌که میکروشفت نامتقارن در حضور تئوری کلاسیک و بدون اثرات میکرواینرسی در بیشترین مقدار نابالانسی به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید؛ بنابراین در نظر گرفتن اثرات مربوط به مقیاس کوچک ناشی از گرادیان‌های کرنش و گرادیان‌های سرعت که در تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده منظور شده‌اند، در تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروشفت‌های دوار اهمیت دارد.

Nonlinear vibrations and stability analysis of a micro rotating shaft by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect

Seyed Ali Ghasabi, Majid Shahgholi*, Mohammad Reza Arbabtafti

Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 16785-136 Tehran, Iran, majid.shahgholi@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 December 2016
Accepted 12 February 2017
Available Online 08 April 2017

Keywords:
Nonlinear vibrations and stability
Micro rotating shaft
Modified couple stress theory
Micro inertia effect

ABSTRACT

In this paper stability analysis of a nonlinear micro rotating shaft when the system is near the primary resonances by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect is investigated. The geometric nonlinearities due to classical and non-classical theories (the modified couple stress theory) are considered. Using Hamilton principle, the nonlinear equations of motion are obtained. In order to solve the equations of motion the multiple scales method is used and the analytical expressions are presented for forward and backward frequencies which illustrate the effects of modified couple stress theory and micro inertia effect. The frequency response curves, amplitude versus damping coefficient, amplitude versus total eccentricities etc. are reported. It is seen that due to the modified couple stress theory and micro inertia effect the amplitude of the system decreases and the loci of bifurcation points is changed. Symmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the lowest damping coefficient and asymmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the highest damping coefficient. Symmetrical micro-shaft in the presence of modified couple stress theory and with micro inertia effects becomes completely stable in the lowest total eccentricity and asymmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the highest total eccentricity. So, considering the small-scale effects due to strain and velocity gradients for analysis of the system is mandatory.

1- مقدمه

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. A. Ghasabi, M. Shahgholi, M. R. Arbabtafti, Nonlinear vibrations and stability analysis of a micro rotating shaft by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 134-142, 2017 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

امروزه المان‌های مهم مهندسی مانند تیر در ابعاد کوچک میکرومتر کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند. سیستم‌های دوار در مقیاس کوچک کاربردهای بسیار زیادی دارند از جمله در سیستم‌های میکرو الکترو مکانیکی [1]، میکرو توربین‌ها، میکرو کمپرسورها و.... وقتی ابعاد یک المان مهم مهندسی مثل تیر به سمت میکرومتر حرکت می‌کند اتفاقاتی خواهد افتاد که تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته قادر به توضیح آن‌ها نیست. محققان بسیاری بر تئوری‌های غیرکلاسیک نظیر تئوری گرادیان کرنش [2]، تئوری تنش کوپل [3] و حالات اصلاح‌شده آن‌ها که قادرند اثرات مربوط به مقیاس کوچک و وابسته به اندازه را در نظر بگیرند مطالعه و پژوهش کرده‌اند. در زمینه شفت‌های دوار کاتز و همکاران [1] پاسخ‌های دینامیکی یک شفت دوار که بار محوری و دورانی به آن اعمال می‌شد را با استفاده از تئوری تیر ریلی بررسی کردند. پاسخ‌های حالت گذرای سیستم را به کمک آنالیز مودال [4] و تبدیلات انتگرالی به‌دست آوردند. ناگازاکا و همکاران [2] ارتعاشات اجباری یک روتور دوار نامتقارن با غیرخطی هندسی را برای سرعت‌های نزدیک به سرعت بحرانی اولیه و ثانویه مطالعه و بررسی کردند. حسینی و زمانیان [3] ارتعاشات آزاد یک شفت دوار با غیرخطی از نوع کشیدگی [5]را به کمک روش‌های مقیاس زمانی چندگانه مورد مطالعه و پژوهش قرار دادند. هر دو فرکانس طبیعی پیش‌گشت و پس‌گشت [6]جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی تحریک شدند. خادم و همکاران [4] رزونانس‌های اصلی یک شفت دوار با غیرخطی از نوع کوتاه‌شدگی [7] را مورد مطالعه و پژوهش قرار دادند. آن‌ها روش مقیاس‌های زمانی چندگانه را مستقیم بر معادلات حرکت با مشتق جزیی اعمال کردند و عباراتی تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی پیش‌گشت و پس‌گشت به‌دست آوردند. شاهقلی و همکاران [5] رزونانس‌های اصلی و پارامتریک [8] یک شفت دوار نامتقارن با غیرخطی از نوع کشیدگی را با در نظرگرفتن اثرات اینرسی دورانی وژیروسکوپیک مطالعه و بررسی کردند. آن‌ها معادلات غیرخطی حاصله را به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه [9] حل کردند، همچنین [6] رزونانس‌های داخلی ترکیبی و زیرهارمونیک [10] شفت دوار نامتقارن را مطالعه کردند. برای حل معادلات غیرخطی از روش بالانس هارمونیک [11] استفاده کردند. ایشان [7] رزونانس‌های اولیه و اصلی شفت نامتقارن را با در نظر گرفتن نوسانات سرعت [12] مطالعه کردند و تأثیر نوسانات سرعت بر پاسخ سیستم مطالعه و بررسی شد. در زمینه میکروتیرهای غیردوار شوشتری و همکاران [8] یک میکروتیر یک‌سرگیردار ویسکو الاستیک که با یک لایه عملگر پیزوالکتریک تحریک خارجی می‌شد تحلیل ارتعاشاتی کردند. مدل تیرشان مدل کلاسیک اویلر برنولی بود و اثرات مربوط به مقیاس کوچک را که با تئوری‌های غیرکلاسیک بیان می‌شود در نظر نگرفتند. فتحعلی‌لو و همکاران [9] معادلات حرکت یک بعدی میکرو تیرهای اویلر برنولی را به کمک اصل هامیلتون [13]و تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده برای شرایط مرزی دو سر ساده و دو سر ثابت به‌دست آوردند. روابطی را برای فرکانس‌های طبیعی خطی و شکل مودها به‌دست آوردند. کونگ و همکاران [10] روابطی تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی یک میکروتیر غیردوار براساس تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده برای دو گونه از شرایط مرزی گوناگون به‌دست آوردند. آگوز و همکاران [11] ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تابعی هدفمند اویلربرنولی را براساس تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده مطالعه و بررسی کردند. روش ریلی-ریتز برای حل معادلات حرکت مورد استفاده قرار گرفت. این پژوهشگران [12] ارتعاشات خمشی و کمانش میکروتیرهای تابعی هدفمند را که بر بستر الاستیک وینکلر قرار داشت به کمک تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده مطالعه و بررسی کردند. در زمینه ارتعاشات خطی میکروتیرهای دوار نیز کارهایی صورت گرفته است که هاشمی و همکاران [13] ارتعاشات آزاد خطی خمشی میکروتیرهای دوار با سطح مقطع متقارن را براساس تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش در کلی‌ترین حالت که پنج ثابت مرتبه بالای ماده وجود داشت در نظر گرفتند و به کمک تکنیک حل فضای حالت [14] برخی از فرکانس‌های طبیعی را در شرایط مرزی مختلف به‌دست آوردند. مصطفی و ژانگ [14] ارتعاشات خطی یک میکروتیرچرخان را که بر بستر الاستیک قرار داشت به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده مطالعه و بررسی کردند و با روش المان اسپکترال [15] پاسخ‌های فرکانسی خطی را به‌دست آوردند. با مطالعه کارهای بالا می‌توان نتیجه گرفت که با وجود کارهای بسیاری که در زمینه میکروتیرها انجام شده ولی اثرات غیرخطی مربوط به تنش کوپل اصلاح‌شده و میکروواینرسی مخصوصاً بر میکروتیرهای دوار (متقارن و نامتقارن) به صورت توأمان بررسی نشده است. در این جا اثرات میکرو اینرسی و نیز اثرات هندسه برای یک میکرو شفت دوار که غیرخطی آن از نوع کوتاه‌شدگی است به کمک تئوری گرادیان کرنش و درحالت خاص آن یعنی تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت.

2- استخراج معادلات حرکت

در شکل 1 یک میکروشفت دوار که بر تکیه‌گاه‌های ساده قرار گرفته است و با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور X دوران می‌کند نشان داده شده است. XYZ محورهای مختصات عمومی [16] است که از تار خنثی میکروشفت عبور می‌کند. xyz محورهای مختصات محلی [17] است که با جسم حرکت می‌کند. به کمک زوایای اویلر [18] ψ, θ و β ارتباط بین دو محور مختصات عمومی و محلی معلوم خواهد شد. این زوایا از معادلات (1) به‌دست خواهند آمد [15].

$$\psi = \sin^{-1}\frac{v'}{\sqrt{v'^2 + (1+u')^2}}$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{-w'}{\sqrt{w'^2 + v'^2 + (1+u')^2}}$$

$$\beta = \phi + \Omega t \qquad (1)$$

باید توجه کنیم که زوایای اویلر تابعی از موقعیت و زمان هستند. دو زاویه اویلر ψ و θ مربوط به خمش و زاویه اویلر β مربوط به پیچش کل است که شامل دو بخش ϕ تغییر شکل برشی [19] و ترم دیگر مربوط به سرعت زاویه‌ای است. w, v, u به ترتیب جابه‌جایی‌ها در راستای طولی، جابه‌جایی در راستای عرضی y، جابه‌جایی در راستای عرضی z و علامت $()'$ نشان‌دهنده مشتق نسبت به x است.

[1] MEMS
[2] Strain Gradient Theory
[3] Couple Stress Theory
[4] Modal Analysis
[5] Stretching
[6] Forward and backward frequencies
[7] Shortening
[8] Primary and Parametric Resonances
[9] Multiple Scales Method
[10] Sub Harmonic
[11] Harmonic Balance
[12] Speed Fluctuations
[13] Hamilton's Principle

[14] Steady State
[15] Spectral Element Method
[16] Global Coordinates
[17] Local Coordinates
[18] Euler Angles
[19] Shear Deformation

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

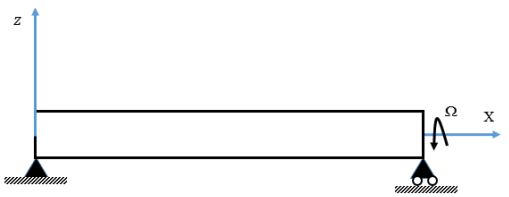

Fig. 1 a schematic of the micro rotating shaft and the attached coordinates on it

شکل 1 شماتیکی از میکروشفت دوار و محورهای مختصات متصل‌شده بر آن

انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان به دو بخش تقسیم‌بندی کرد. نخست انرژی پتانسیل ناشی از کرنش‌ها و قسمت دوم انرژی ناشی از گرادیان‌های کرنش‌هاست که قسمت دوم را به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده به‌دست آورده می‌شود. انرژی پتانسیل مربوط به کرنش‌ها از رابطه (2) به‌دست می‌آید.

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\int(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz})dxdA \tag{2}$$

در رابطه بالا $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xx}$ به ترتیب تنش عمودی، تنش برشی در صفحه z، تنش برشی در صفحه y، کرنش عمودی، کرنش برشی در صفحه z و کرنش برشی در صفحه y است.

به کمک قانون هوک [1] برای مواد همسانگرد[2] روابط تنش از رابطه (3) به‌دست می‌آید.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}\ ,\ \ \sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}\ ,\ \ \sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz} \tag{3}$$

E , G به ترتیب مدول یانگ [3] و مدول برشی [4] است. برای محاسبه کرنش‌ها از روابط (4) می‌توان استفاده کرد.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= e - yk_3 + zk_2\\ \varepsilon_{xy} &= zk_1\\ \varepsilon_{xz} &= yk_1\end{aligned} \tag{4}$$

در روابط بالا e کرنش محوری تار خنثی است که از رابطه (5) به‌دست می‌آید.

$$e = \sqrt{w'^2 + v'^2 + (1+u')^2} - 1 \tag{5}$$

اگر کرنش محوری تار خنثی تا مرتبه سوم بسط داده شود به صورت رابطه (6) خواهد شد.

$$e = u' + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2 + \cdots \tag{6}$$

با توجه به این‌که یک سر میکرو شفت مفصل و سر دیگر آن غلتک و می‌توان فرض کرد که کرنش محوری تار خنثی صفر است و غیرخطی مسأله از نوع کوتاه‌شدگی خواهد بود [16]؛ بنابراین رابطه (7) به صورت است.

$$e = 0 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}w'^2 - \cdots \tag{7}$$

k_1, k_2, k_3 انحناهای شفت در راستای محورهای اصلی [5] که از طریق طریق روابط (8) به‌دست می‌آیند [17].

$$\begin{aligned}k_1 &= \phi' - \psi'\sin\theta\\ k_2 &= q_2\sin\Omega t + q_1\cos\Omega t\\ k_3 &= q_2\cos\Omega t - q_1\sin\Omega t\end{aligned} \tag{8}$$

همچنین رابطه (9) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}q_1 &= \psi'\cos\theta\sin\phi + \theta'\cos\phi\\ q_2 &= \psi'\cos\theta\cos\phi - \theta'\sin\phi\end{aligned} \tag{9}$$

حال اگر روابط مربوط به زوایای اویلر یعنی روابط (1) در روابط مربوط به انحناهای میکروشفت یا همان روابط (8) جای‌گذاری شود و به کمک بسط تیلور [6] تا مرتبه سوم بسط داده شود روابط انحناهای میکروشفت برحسب جابه‌جایی‌ها به‌دست خواهد آمد. رابطه (2) انرژی پتانسیل کرنشی را می‌توان به صورت رابطه (10) نیز نوشت.

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}(A_1 e^2 + D_1k_1^2 + D_2k_2^2 + D_3k_3^2)dx \tag{10}$$

در این رابطه D_3, D_2, D_1, A_1 به ترتیب سفتی محوری، سفتی پیچشی، سفتی خمشی حول محور y و سفتی خمشی حول محور z است و از روابط (11) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}A_1 &= \int E\,dA\\ D_1 &= \int G\,(y^2+z^2)dA,\\ D_2 &= \int E\,z^2dA\\ D_3 &= \int E\,y^2dA\end{aligned} \tag{11}$$

بخش دوم انرژی پتانسیل سیستم مربوط به اثرات وابسته به اندازه و مقیاس کوچک است که به کمک تئوری‌های غیرکلاسیک محیط پیوسته نظیر تئوری گرادیان کرنش به‌صورت رابطه (12) خواهد شد [18].

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\int(\Lambda_1{\varepsilon_{xx,x}}^2 + \Lambda_2{\varepsilon_{xx,y}}^2 \ \ + \Lambda_3{\varepsilon_{xx,z}}^2)dxdA \tag{12}$$

همچنین روابط (14,13) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5),\\ \Lambda_2 &= \Lambda_3 = 2(a_2+a_4)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= G(-\tfrac{4}{15}l_1^2 + l_2^2)\\ a_2 &= G(l_0^2 - \tfrac{1}{15}l_1^2 - \tfrac{1}{2}l_2^2)\\ a_3 &= -G(\tfrac{4}{15}l_1^2 + \tfrac{1}{2}l_2^2)\\ a_4 &= G(\tfrac{1}{3}l_1^2 + l_2^2)\\ a_5 &= G(\tfrac{2}{3}l_1^2 - l_2^2)\end{aligned} \tag{14}$$

در روابط بالا a_i و $(i = 1,\dots,5)$ موسوم به ثوابت مرتبه بالاتر ماده[7] است که به کمک رابطه (14) به سه ثابت l_{i-1} و $(i = 1,2,3)$ تقلیل می‌یابند. یکی از حالات در نظر گرفتن ثوابت مرتبه بالاتر ماده به صورت $l_0 = l_1 = 0$ و $l_2 = l = 2b$ که تئوری غیرکلاسیک به تئوری تنش کوپل اصلاح شده موسوم است.

رابطه (12)، انرژی پتانسیل مربوط به گرادیان‌های کرنش را می‌توان به صورت رابطه (15) نیز نوشت.

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}(I_4{k'}_3^2 + I_5{k'}_2^2 + I_6k_3^2 + I_7k_2^2)dx \tag{15}$$

رابطه (16) به شرح زیر است.

$$\begin{aligned}I_4 &= \int \Lambda_1 y^2dA\\ I_5 &= \int \Lambda_1 z^2dA\\ I_6 &= \int \Lambda_2 dA\\ I_7 &= \int \Lambda_3 dA\end{aligned} \tag{16}$$

حال انرژی پتانسیل کل سیستم (V_{total}) از مجموع روابط (15,10) به‌دست آورده می‌شود بنابراین می‌توان رابطه (17) را به صورت زیر نوشت.

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 \tag{17}$$

[1] Hook's Law
[2] Isotropic
[3] Young's Modulus
[4] Shear Modulus
[5] Principle Axes
[6] Taylor's Expansion
[7] Higher Order Material Constants

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

انرژی جنبشی سیستم را نیز می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش نخست انرژی جنبشی ناشی از حرکت‌های انتقالی و دورانی و نیز انرژی جنبشی ناشی از توزیع نابالانسی[1] در سیستم که از روابط (19,18) به‌دست می‌آید [16].

$$K_1 = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} + K_{\text{ecc}} \tag{18}$$

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\,dx$$

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} (I_1{\Omega_1}^2 + I_2{\Omega_2}^2 + I_3{\Omega_3}^2)\,dx$$

$$K_{\text{ecc}} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} m\,\Omega^2\left(e_y^2 + e_z^2\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\Big(-2m\Omega\left(\dot{v}e_z + \dot{w}e_y\right)\sin\Omega t + \left(\dot{v}e_y - \dot{w}e_z\right)\cos\Omega t\Big)\,dx \tag{19}$$

در روابط بالا $m, I_1, I_2, I_3, e_y, e_z$ به ترتیب جرم واحد طول[2] ممان اینرسی قطبی[3]، ممان اینرسی جرمی حول محور y، ممان اینرسی جرمی حول حول محور z، نابالانسی نسبت به محور y و نابالانسی نسبت به محور z است . $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای میکروشفت نسبت به محورهای اصلی هستند و از روابط (20) به‌دست می‌آیند [19].

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (\dot{\beta} - \dot{\psi}\sin\theta)\\ \Omega_2 &= \dot{\psi}\cos\theta\sin\beta + \dot{\theta}\cos\beta\\ \Omega_3 &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\beta - \dot{\theta}\sin\beta\end{aligned} \tag{20}$$

اگر زوایای اویلر روابط (1) در رابطه بالا جای‌گذاری شود و نتایج با سری تیلور تا مرتبه سوم بسط داده شود سرعت‌های زاویه‌ای برحسب جابه‌جایی‌ها به‌دست خواهد آمد. از آن‌جایی که میکروشفت دوار در ابعاد میکرومتر است علاوه‌بر انرژی جنبشی رابطه (18) باید تأثیر مربوط به ابعاد کوچک یا گرادیان‌سرعت نیز بررسی شود. انرژی جنبشی مربوط به گرادیان سرعت یا اثرات میکرو اینرسی از رابطه (21) به‌دست می‌آید [9].

$$K_2 = \int \tfrac{1}{6}\rho b^2 \dot{u}_{j,i}\dot{u}_{j,i}\,dV \tag{21}$$

ρ دانسیته[4] ماده و V حجم ماده است و u_jها مؤلفه‌های جابه‌جایی است. $b = \frac{l}{2}$ تنها ثابت مرتبه بالاتر در تئوری تنش کوپل اصلاح شده خواهد بود. علامت نقطه نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان است؛ بنابراین انرژی جنبشی کل سیستم (K_{total}) از مجموع روابط (21,18) به صورت رابطه (22) به‌دست خواهد آمد:

$$K_{\text{total}} = K_1 + K_2 \tag{22}$$

با اصل هامیلتون معادلات حرکت به صورت رابطه (23) استخراج خواهد شد.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K_{\text{total}} - \delta V_{\text{total}})dt = 0 \tag{23}$$

با تعریف پارامترهای رابطه (24) به صورت زیر

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \frac{D_3 - D_2}{2}, & \Delta_I &= \frac{I_3 - I_2}{2}\\ D &= \frac{D_3 + D_2}{2}, & I &= \frac{I_3 + I_2}{2}\\ \Theta_1 &= \frac{I_6 - I_7}{2}, & \Theta_2 &= \frac{I_4 - I_5}{2}\\ \Theta_3 &= \frac{I_6 + I_7}{2}, & \Theta_4 &= \frac{I_4 + I_5}{2}\end{aligned} \tag{24}$$

و پارامترهای بدون بعد رابطه (25) به شرح زیر است.

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{v}{\ell}, & \tilde{w} &= \frac{w}{\ell}\\ \tilde{x} &= \frac{x}{\ell}, & \tilde{b} &= \frac{b}{\ell}\\ \tilde{I} &= \frac{I}{m\ell^2}, & \tilde{I}_1 &= \frac{I_1}{m\ell^2}\\ \tilde{e}_y &= \frac{e_y}{\ell}, & \tilde{e}_z &= \frac{e_z}{\ell}\\ \tilde{\Delta}_I &= \frac{\Delta_I}{m\ell^2}, & \tilde{\Delta}_D &= \frac{\Delta_D}{D}\\ \tilde{\Omega} &= \Omega\sqrt{\frac{m\ell^4}{D}}, & \tilde{t} &= t\sqrt{\frac{D}{m\ell^4}}\\ \tilde{\bar{z}} &= \tilde{v} - i\tilde{w}, & \tilde{z} &= \tilde{v} + i\\ \tilde{\Theta}_1 &= \frac{\Theta_1}{D}, & \tilde{\Theta}_2 &= \frac{\Theta_2}{D\ell^2}\\ \tilde{\Theta}_3 &= \frac{\Theta_3}{D}, & \tilde{\Theta}_4 &= \frac{\Theta_4}{D\ell^2}\\ \tilde{c} &= \frac{c\ell^2}{\sqrt{mD}}\end{aligned} \tag{25}$$

که $b, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$پس از حذف کردن علامت ~ جهت سهولت، پارامترهای بدون بعد مناسب مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح شده است. پس معادلات بدون بعد در فضای مختلط به صورت رابطه (26) خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&z^{(4)} + \ddot{z} + c\dot{z} + i\Omega I_1\dot{z}'' - \frac{2}{3}b^2\ddot{z}'' + \frac{1}{3}b^2 I\ddot{z}^{(4)} + \frac{1}{3}b^2\Delta_I\ddot{\bar{z}}^{(4)}\\
&-I\ddot{z}'' - \Delta_I(\ddot{\bar{z}}'' + 2i\Omega\dot{\bar{z}}'')\mathrm{e}^{2i\Omega t} + \Delta_Q\bar{z}^{(4)}\mathrm{e}^{2i\Omega t} + \tfrac{1}{2}z''\bar{z}'z'''\\
&+\tfrac{3}{2}\bar{z}''z'z''' + \bar{z}''z''^2 + 2z''z'\bar{z}''' + \tfrac{1}{2}z^{(4)}\bar{z}'z' + \tfrac{1}{2}\bar{z}^{(4)}z'^2\\
&+\tfrac{1}{2}z''\int_1^x\int_0^x(2\dot{z}'\dot{\bar{z}}' + \ddot{z}' + \ddot{\bar{z}}'z')\,dxdx\\
&+\tfrac{1}{2}z'\int_0^x(2\dot{z}'\dot{\bar{z}}' + \ddot{z}'\bar{z}' + \ddot{\bar{z}}'z')\,dx + \Theta_1\bar{z}^{(4)}e^{2i\Omega t}\\
&-\Theta_2\bar{z}^{(6)}\mathrm{e}^{2i\Omega t} + \Theta_3(\tfrac{1}{2}z''\bar{z}'z''' + \tfrac{3}{2}\bar{z}''z'z''' + \bar{z}''z''^2\\
&+2z''z'\bar{z}''' + \tfrac{1}{2}z^{(4)}\bar{z}'z' + \tfrac{1}{2}\bar{z}^{(4)}z'^2)\\
&+\Theta_3 z^{(4)} + \frac{\Theta_4}{8}(2z'''^2\bar{z}'' - 92z'''\bar{z}'''z'' - 2\bar{z}''^2 z^{(4)}\\
&-38z''^2\bar{z}^{(4)} - 38z'\bar{z}'''z^{(4)} - 2\bar{z}'\bar{z}'''z^{(4)}\\
&-42z'z'''\bar{z}^{(4)} + 2\bar{z}'z'''\bar{z}^{(4)} - 4z''\bar{z}'z^{(5)}\\
&-18\bar{z}''z'z^{(5)} - 2\bar{z}'\bar{z}''z^{(5)} - 26z''z'\bar{z}^{(5)}\\
&+2z''\bar{z}'\bar{z}^{(5)} - 4z'^2\bar{z}^{(6)} - 42z''\bar{z}''z^{(4)}\\
&+2z''\bar{z}''\bar{z}^{(4)} - 4z'\bar{z}'z^{(6)}) - \Theta_4 z^{(6)}\\
&= \left(ie_z + e_y\right)\Omega^2\mathrm{e}^{i\Omega t}
\end{aligned} \tag{26}$$

شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (27) است.

$$z = z'' = 0 \qquad @\ x = 0\,, x = 1 \tag{27}$$

باید توجه کنیم برای راحتی علامت ~ حذف شده است.

جهت حل معادلات حرکت غیرخطی بدون بعد از یکی از روش‌های اغتشاشات[5] موسوم به روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده می‌شود [20]. بدین منظور پاسخ معادله به صورت رابطه (28) در نظر گرفته می‌شود.

$$z(x,t) = \varepsilon^1 z_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 z_3(x, T_0, T_2) + \cdots \tag{28}$$

درجایی‌که T_0, T_2 به ترتیب مقیاس زمانی سریع[6] و مقیاس زمانی خیلی کند[7] است. ε پارامتر بدون بعدی است که مرتبه سایر پارامترها را

[1] Eccentricity Distribution
[2] Mass Per unit Length
[3] Polar Mass Moment Of Inertia
[4] Density
[5] Perturbations
[6] Fast Time Scale
[7] Super Slow Time Scale

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

نشان می‌دهد. مشتق اول و دوم نسبت به زمان به کمک قاعده زنجیره‌ای از روابط (30,29) به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 , \qquad \frac{\partial}{\partial t^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 \tag{29}$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0} \ , \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial T_2} \tag{30}$$

با جای‌گذاری روابط (28-30) در معادله (26) و مساوی قراردادن مراتب مشابه ε روابط (32,31) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^1):\ & {D_0}^2 z_1 - \frac{2}{3} b^2 {D_0}^2 {z_1}'' + \frac{1}{3} b^2 I {D_0}^2 {z_1}^{(4)} - I {D_0}^2 {z_1}'' \\ & + i I_1 \Omega D_0 {z_1}'' + {z_1}^{(4)} + \Theta_3 {z_1}^{(4)} \\ & - \Theta_4 {z_1}^{(6)} = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^3):\ & {D_0}^2 z_3 - \frac{2}{3} b^2 {D_0}^2 {z_3}'' + \frac{1}{3} b^2 I {D_0}^2 {z_3}^{(4)} - I {D_0}^2 {z_3}'' \\ & + i I_1 \Omega D_0 {z_3}'' + \Theta_3 {z_3}^{(4)} - \Theta_4 {z_3}^{(6)} \\ & = \Delta_I \left({D_0}^2 \bar{z}_1'' + 2 i \Omega D_0 \bar{z}_1'' \right) e^{2 i \Omega T_0} - \Delta_Q \bar{z}_1'' e^{2 i \Omega T_0} \\ & - 2 D_0 D_2 z_1 - c D_0 z_1 - i \Omega I_1 D_2 {z_1}'' + 2 I D_0 D_2 {z_1}'' \\ & + \frac{4}{3} b^2 D_0 D_2 {z_1}'' - \frac{2}{3} b^2 I D_0 D_2 {z_1}^{(4)} \\ & - \frac{1}{3} b^2 \Delta_I {D_0}^2 \bar{z}_1^{(4)} \\ & - \tfrac{1}{2} {z_1}'' \int_1^x \int_0^x \left(2 D_0 {z_1}' D_0 \bar{z}_1' + {D_0}^2 {z_1}' + {D_0}^2 \bar{z}_1' {z_1}' \right) dx\, dx \\ & - \tfrac{1}{2} {z_1}' \int_0^x \left(2 D_0 {z_1}' D_0 \bar{z}_1' + {D_0}^2 {z_1}' \bar{z}_1' + {D_0}^2 \bar{z}_1' {z_1}' \right) dx \\ & - \tfrac{1}{2} \left({z_1}'' \bar{z}_1' {z_1}''' + {z_1}^{(4)} \bar{z}_1' {z_1}' + 3 \bar{z}_1'' {z_1}' {z_1}''' + 4 {z_1}'' {z_1}' \bar{z}_1''' + 2 \bar{z}_1'' {z_1}''^2 + \bar{z}_1^{(4)} {z_1}'^2 \right) \\ & - \Theta_3 \left(\tfrac{1}{2} {z_1}'' \bar{z}_1' {z_1}''' + \tfrac{3}{2} \bar{z}'' {z_1}' {z_1}''' + \bar{z}_1'' {z_1}''^2 + 2 {z_1}'' {z_1}' \bar{z}_1''' + \tfrac{1}{2} {z_1}^{(4)} \bar{z}_1' {z_1}' + \tfrac{1}{2} \bar{z}^{(4)} {z_1}'^2 \right) - \frac{\Theta_4}{8} \left(2 {z_1}'''^2 \bar{z}_1'' - 92 {z_1}''' \bar{z}_1''' {z_1}'' - 2 \bar{z}_1'''^2 {z_1}^{(4)} - 38 {z_1}'''^2 \bar{z}_1^{(4)} - 38 {z_1}' \bar{z}_1''' {z_1}^{(4)} - 2 \bar{z}_1' \bar{z}_1''' {z_1}^{(4)} - 42 {z_1}' {z_1}''' \bar{z}_1^{(4)} + 2 \bar{z}_1' {z_1}''' \bar{z}_1^{(4)} - 4 {z_1}'' \bar{z}_1' {z_1}^{(5)} - 26 {z_1}'' {z_1}' \bar{z}_1^{(5)} - 18 \bar{z}_1'' {z_1}' {z_1}^{(5)} - 2 \bar{z}_1' \bar{z}_1'' {z_1}^{(5)} + 2 {z_1}'' \bar{z}_1' \bar{z}_1^{(5)} - 4 {z_1}'^2 \bar{z}_1^{(6)} - 42 {z_1}'' \bar{z}_1'' {z_1}^{(4)} + 2 {z_1}'' \bar{z}_1'' \bar{z}_1^{(4)} - 4 {z_1}' \bar{z}_1' {z_1}^{(6)} \right) \\ & + \Omega^2 \left(i e_z + e_y \right) e^{i \Omega T_0} + \Theta_2 \bar{z}_1^{(6)} e^{2 i \Omega T_0} \\ & - \Theta_1 \bar{z}_1^{(4)} e^{2 i \Omega T_0} \end{aligned} \tag{32}$$

باید توجه کرد که مؤلفه‌های $c, \Delta_I, \Delta_D, e_z \Omega^2, e_y \Omega^2$ در معادلات بالا به ترتیب با $c\varepsilon^2, \Delta_I \varepsilon^2, \Delta_D \varepsilon^2 , e_z \Omega^2 \varepsilon^3, e_y \Omega^2 \varepsilon^3$ جایگزین شده‌اند. یک حل عمومی از رابطه (31) به صورت رابطه (33) به شرح زیر بیان می شود.

$$\begin{aligned} z_1(x, T_0, T_2) = {} & \Phi_f(x) A_1(T_2) e^{i \omega_f T_0} \\ & + \Phi_b(x) A_2(T_2) e^{i \omega_b T_0} \end{aligned} \tag{33}$$

$\Phi_f(x), \Phi_b(x)$ شکل مودهای پیش‌گشت[1] و پس‌گشت[2] میکروشفت و برای یک میکروشفت دو سر ساده به صورت رابطه (34) است.

[1] Forward Mode Shape
[2] Backward Mode Shape

$$\Phi_f(x) = \Phi_b(x) = 2\sqrt{2} \sin n\pi x \tag{34}$$

که n شماره مود[3] است. ω_b, ω_f فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت هستند و از رابطه‌های (35-37) به‌دست می‌آیند.

$$\omega_f = \pi^2 n^2 \frac{I_r \Omega + \sqrt{{I_r}^2 \Omega^2 + 4 I_s (1 + \Theta_3 + \pi^2 n^2 \Theta_4)}}{2 I_s} \tag{35}$$

$$\omega_b = \pi^2 n^2 \frac{I_r \Omega - \sqrt{{I_r}^2 \Omega^2 + 4 I_s (1 + \Theta_3 + \pi^2 n^2 \Theta_4)}}{2 I_s} \tag{36}$$

$$I_r = I_1 \quad , \quad I_s = 1 + \pi^2 n^2 I + \frac{2}{3} b^2 \pi^2 n^2 + \frac{1}{3} b^2 \pi^4 n^4 I \tag{37}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود روابط (36,35) عبارت‌های تحلیلی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم ارائه می‌دهند که تأثیر گرادیان‌های کرنش مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده در فرکانس‌های پیش‌گشت و پس‌گشت با ترم‌های مربوط به Θ_3, Θ_4 در روابط (36,35) کاملاً مشخص است. اثرات میکرو اینرسی خطی نیز در I_s با ترم‌های مربوط به پارامتر بدون بعد b اثر خود را نشان می‌دهند.

برای تحلیل پایداری سیستم در سرعت‌های نزدیک به سرعت بحرانی[4] با در نظر گرفتن پارامتر نامیزانی $\sigma = o(1)$ می‌توان رابطه (38) را نوشت.

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \tag{38}$$

رابطه (39) را با جای‌گذاری روابط (38,33) در رابطه (32) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & {D_0}^2 z_3 - \frac{2}{3} a^2 {D_0}^2 {z_3}'' + \frac{1}{3} a^2 I {D_0}^2 {z_3}^{(4)} - I {D_0}^2 {z_3}'' \\ & + i \Omega I_1 D_0 {z_3}'' + \Theta_3 {z_3}^{(4)} - \Theta_4 {z_3}^{(6)} \\ & = H_f(x, T_2) e^{i \omega_f T_0} + H_b(x, T_2) e^{i \omega_b T_0} \\ & + \mathrm{N.S.T} \end{aligned} \tag{39}$$

در رابطه اخیر N.S.T به ترم‌های غیرسکولار[5] اشاره دارد. با شرایط حل‌پذیری[6] رابطه (40) می‌توان پاسخ‌های غیربدیهی[7] معادله اخیر را به‌دست آورد.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Phi_f(x) H_f(x, T_2) dx = 0, \\ & \int_0^1 \Phi_b(x) H_b(x, T_2) dx = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

با جای‌گذاری شرایط حل‌پذیری رابطه (40) در رابطه (39) می‌توان روابط (41-43) را به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} & -4 n^6 \pi^6 \Theta_3 \bar{A}_1(T_2) A_1(T_2)^2 - 8 n^6 \pi^6 \Theta_3 A_1(T_2) A_2(T_2) \bar{A}_2(T_2) \\ & + \tfrac{7}{2} n^8 \pi^8 \Theta_4 \bar{A}_1(T_2) A_1(T_2)^2 + 7 n^8 \pi^8 \Theta_4 A_1(T_2) A_2(T_2) \bar{A}_2(T_2) \\ & - i \Lambda_f D_2 A_1(T_2) - i c A_1(T_2) \omega_f - n^6 \pi^6 \bar{A}_1(T_2) A_1(T_2)^2 \\ & + \Gamma A_1(T_2) \bar{A}_2(T_2) A_2(T_2) + \Psi_f \bar{A}_1(T_2) e^{2 i \sigma T_2} \\ & + \Omega^2 (i e_1 + e_2) e^{i \sigma T_2} \\ & = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} & -8 n^6 \pi^6 \Theta_3 \bar{A}_1(T_2) A_1(T_2) A_2(T_2) - 4 n^6 \pi^6 \Theta_3 \bar{A}_2(T_2) A_2(T_2)^2 \\ & + 7 n^8 \pi^8 \Theta_4 A_1(T_2) A_2(T_2) \bar{A}_1(T_2) + \tfrac{7}{2} n^8 \pi^8 \Theta_4 \bar{A}_2(T_2) A_2(T_2)^2 \\ & - i \Lambda_b D_2 A_2(T_2) - i c A_2(T_2) \omega_b - n^6 \pi^6 \bar{A}_2(T_2) A_2(T_2)^2 \\ & + K A_2(T_2) \bar{A}_1(T_2) A_1(T_2) \\ & = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} & \Psi_f = n^6 \pi^6 N_f - n^6 \pi^6 \Theta_2 - n^4 \pi^4 \Theta_1 \\ & N_f = \Delta_I {\omega_f}^2 - 2 \Delta_I \Omega \omega_f - \Delta_Q n^2 \pi^2 \\ & \Lambda_f = 2 I_s \omega_f - \Omega n^2 \pi^2 \\ & I_r \Lambda_b = 2 I_s \omega_b - \Omega n^2 \pi^2 I_r \end{aligned}$$

[3] Mode Number
[4] Critical Speed
[5] Non-Secular Terms
[6] Solvability Conditions
[7] Non -trivial Solutions

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

$$K=\left(\frac{n^4\pi^4}{6}-\frac{3n^2\pi^2}{16}\right)(\omega_f-\omega_b)^2-2n^6\pi^6$$
$$e_1=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin n\pi x\right)e_z dx\ ,e_2=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin n\pi x\right)e_y dx$$
$$I_r=I_1\ ,I_s=\left(1+\ \pi^2n^2I+\frac{2}{3}b^2\pi^2n^2+\frac{1}{3}b^2\pi^4n^4I\right) \quad (43)$$

حال به کمک تبدیل زیر رابطه (44) به‌دست می‌آید.

$$A_1(T_2)=A(T_2)\mathrm{e}^{i\sigma T_2} \quad (44)$$

و با جای‌گذاری آن در روابط (43,42) می‌توان روابط (46,45) را نوشت.

$$-4n^6\pi^6\Theta_3A^2\bar{A}-8n^6\pi^6\Theta_3AA_2\overline{A_2}+\tfrac{7}{2}n^8\pi^8\Theta_4A^2\bar{A}$$
$$+7n^8\pi^8\Theta_4AA_2\overline{A_2}-i\Lambda_fD_2A+\Psi_f\bar{A}+\sigma\Lambda_fA-n^6\pi^6A^2\bar{A}$$
$$+KAA_2\overline{A_2}-ic\omega_fA+\Omega^2(e_2+ie_1)\mathrm{e}^{i\sigma T_2}=0 \quad (45)$$
$$-8n^6\pi^6\Theta_3\bar{A}AA_2-4n^6\pi^6\Theta_3\overline{A_2}A_2{}^2+7n^8\pi^8\Theta_4\bar{A}AA_2$$
$$+\tfrac{7}{2}n^8\pi^8\Theta_4\overline{A_2}A_2{}^2-i\Lambda_bD_2A_2-ic\omega_bA_2-n^6\pi^6\overline{A_2}A_2{}^2$$
$$+K\bar{A}AA_2=0 \quad (46)$$

A,A_2 را می‌توان به فرم مختصات قطبی به شکل رابطه (47) نوشت.

$$A=\tfrac{1}{2}a(T_2)\mathrm{e}^{i\alpha(T_2)},\ \ A_2=\tfrac{1}{2}a_2(T_2)\mathrm{e}^{i\beta(T_2)} \quad (47)$$

با جای‌گذاری رابطه (47) در روابط (46,45) می‌توان روابط (49,48) را نوشت.

$$-\Psi_fa\sin 2\alpha-\Lambda_fD_2a-c\omega_fa+2\Omega^2(e_1\cos\alpha-e_2\sin\alpha)$$
$$=0\ ,$$
$$-n^6\pi^6\Theta_3a^3+\Psi_fa\cos 2\alpha+\Lambda_faD_2\alpha+\Lambda_fa\sigma-\frac{n^6\pi^6}{4}a^3$$
$$+\frac{K}{4}aa_2{}^2-2n^6\pi^6\Theta_3aa_2{}^2+\tfrac{7}{4}n^8\pi^8\Theta_4aa_2{}^2+\tfrac{7}{8}n^8\pi^8\Theta_4a^3$$
$$+2\Omega^2(e_1\sin\alpha+e_2\cos\alpha)=0 \quad (48)$$
$$-\Lambda_bD_2a_2-c\omega_ba_2=0\ ,$$
$$\Lambda_ba_2D_2\beta-\frac{n^6\pi^6}{4}a_2{}^3+\frac{K}{4}a^2a_2-2n^6\pi^6\Theta_3a^2a_2$$
$$-n^6\pi^6\Theta_3a_2{}^3+\tfrac{7}{4}n^8\pi^8\Theta_4a^2a_2+\tfrac{7}{8}n^8\pi^8\Theta_4a_2{}^3=0 \quad (49)$$

در پاسخ حالت ماندگار سیستم[1] تغییرات نسبت به زمان برابر صفر خواهد بود؛ بنابراین در روابط (49,48) با صفر قرار دادن $D_2a_2,D_2a,D_2\alpha,D_2\beta$ پاسخ‌های ماندگار به‌دست می‌آیند. از رابطه (49) نتیجه می‌شود که $a_2=0$ است. که نشان می‌دهد اثر مربوط به مود پس‌گشت از بین خواهد رفت و برای پاسخ مربوط به مود پیش‌گشت می‌توان رابطه (50) را به صورت زیر نوشت.

$$-\Psi_fa\sin 2\alpha-c\omega_fa+2\Omega^2(e_1\cos\alpha-e_2\sin\alpha)=0\ ,$$
$$-n^6\pi^6\Theta_3a^3+\Psi_fa\cos 2\alpha+\Lambda_fa\sigma-\frac{n^6\pi^6}{4}a^3$$
$$+\tfrac{7}{8}n^8\pi^8\Theta_4a^3+2\Omega^2(e_1\sin\alpha+e_2\cos\alpha)=0 \quad (50)$$

3- نتایج عددی

یک میکروشفت دوار با ثوابت مرتبه بالاتر به صورت $l_0=l_1=0$, $l_2=b/2=17.6\mu\mathrm{m}$ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود میکروشفت دوار از اپوکسی[2] با خواص رابطه (51) ساخته شده باشد.

$$E=1.44\mathrm{GPa},\qquad \nu=0.38,$$
$$\rho=1000\mathrm{kg/m^3} \quad (51)$$

ابعاد هندسی میکروشفت متقارن دایره‌ای به شعاع 17.6 میکرومتر و طول 176 میکرو متر است.

در شکل 2 پاسخ فرکانسی یک میکرو شفت دوار متقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی‌های برابر با اندازه 0.0005 و میرایی خارجی 0.03 در دو حالت تئوری کلاسیک و تئوری غیرکلاسیک ترسیم شده است. مشاهده می‌شود با درنظرگرفتن تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح‌شده و اثرات میکرو اینرسی دامنه نوسان کم می‌شود و سفتی سیستم افزایش می‌یابد.

نقطه انشعاب سیستم در پارامترهای نامیزانی بزرگ‌تری اتفاق می‌افتد. در میکروشفت متقارن پاسخ‌های پایدار و ناپایدار دو بار با هم تلاقی می‌کنند که به نقطه محل تلاقی آن‌ها نقطه انشعاب می‌گویند. در این‌جا نقطه انشعاب از نوع گره-زینی است. پدیده پرش نیز فقط یک بار اتفاق می‌افتد و سیستم می‌تواند به ازای یک پارامتر نامیزانی مشخص حداکثر سه پاسخ داشته باشد که آن پاسخ بسته به شرایط اولیه سیستم می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. منظور از MCST تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده است.

در شکل 3 نمودار پاسخ فرکانسی یک میکروشفت نامتقارن در مود دوم با در نظر گرفتن نابالانسی‌هایی با دامنه برابر 0.0005 و میرایی خارجی 0.03 در دو حالت مدل تئوری کلاسیک و مدل تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح‌شده ترسیم شده است. با در نظر گرفتن اثرات مربوط به متغیرهای کوچک یعنی تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و اثر میکرو اینرسی دامنه نوسانات کوچک‌تر می‌شود و محل نقاط انشعاب نیز تغییر می‌کند. در مدل کلاسیک انشعاب اول در سرعت‌هایی زیر سرعت بحرانی اتفاق می‌افتد، ولی نخستین انشعاب در سرعت‌هایی بالاتر از سرعت بحرانی با درنظرگرفتن اثرات میکرو اینرسی و تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده اتفاق می‌افتد. مشاهده می‌شود که در میکروشفت نامتقارن دو نقطه انشعاب و دو پدیده پرش رخ می‌دهد و سیستم به ازای یک σ مشخص حداکثر پنج پاسخ می‌تواند داشته باشد که سه تای آن پایدار و دو تای دیگر ناپایدار است، ولی در میکرو شفت متقارن دو نقطه انشعاب، یک بار پدیده پرش و حداکثر سه پاسخ می‌تواند اتفاق افتد؛ بنابراین هم اثرات هندسی و هم اثرات وابسته به اندازه تأثیر به سزایی در پاسخ سیستم و نقاط انشعاب خواهد داشت. افزایش مود سبب می‌شود که انشعاب در σهای بزرگ‌تری رخ دهد.

در شکل 4 پاسخ فرکانسی یک میکروشفت دوار در مود سوم و وجود نابالانسی‌های با دامنه برابر 0.0005 و ضریب میرایی خارجی 0.03 برای دو حالت متقارن و نامتقارن ترسیم شده است. تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اثرات میکرو اینرسی نیز در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اثرات هندسی تأثیر مهمی در پاسخ سیستم و محل نقاط انشعاب دارد. با افزایش شماره مود انشعاب در سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی میکروشفت اتفاق می‌افتد.

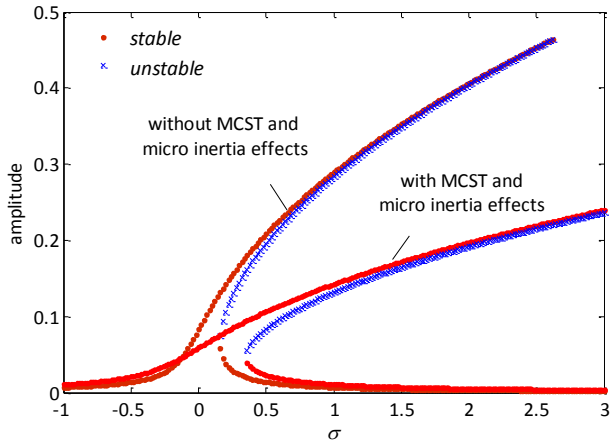

Fig. 2 the amplitude versus frequency curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 2 نمودار دامنه برحسب فرکانس در مود اول برای میکروشفت متقارن

[1] Steady State Response
[2] Epoxy

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

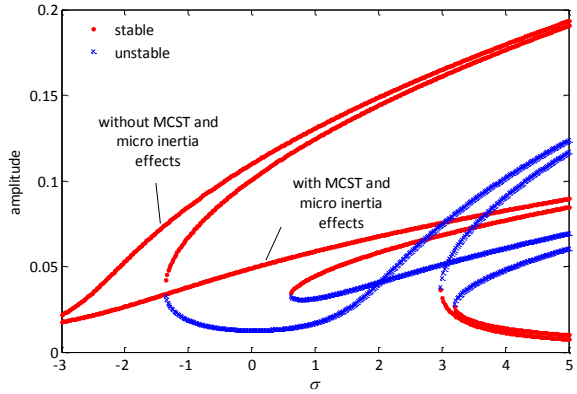

Fig. 3 the amplitude versus frequency curve for the second mode and asymmetrical micro shaft

شکل 3 نمودار دامنه برحسب فرکانس در مود دوم برای میکروشفت نامتقارن

در شکل 5 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی برای میکرو شفت دوار متقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی‌های برابر با 0.0005 به ازای یک σ مشخص (در این‌جا برابر با 0.6) در دو حالت تئوری کلاسیک و تئوری غیرکلاسیک ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک یعنی اثرات میکرو اینرسی و اثر مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده انشعاب در ضرایب میرایی بالاتری اتفاق می‌افتد. اگر یک ضریب میرایی خاص مثلاً 0.15 در نظر گرفته شود با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک فقط یک پاسخ پایدار وجود دارد، ولی سیستم با در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک سه پاسخ دارد که یکی از آن‌ها ناپایدار و دو تای دیگر پایدار است، و شرایط اولیه تعیین می‌کند که کدام پاسخ قابل قبول خواهد بود. ضریب میرایی خارجی نیز یک پارامتر تاثیرگذار در پاسخ حالت ماندگار سیستم و نقطه انشعاب است. منظور از CT تئوری کلاسیک است.

در شکل 6 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی برای یک میکروشفت دوار نامتقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی‌های برابر 0.0005 و به ازای $\sigma = 0.9$ در دو حالت تئوری غیرکلاسیک و تئوری کلاسیک رسم شده است. یکی از پاسخ‌های سیستم که دامنه کوچکی دارد در هر دو تئوری برهم منطبق شده، و این همان پاسخ پایدار و میراشده سیستم است. برای چهار پاسخ باقی‌مانده دامنه نوسانات در تئوری غیرکلاسیک کوچک‌تر از تئوری کلاسیک است. در تئوری کلاسیک و بدون منظور کردن اثرات میکرو اینرسی در ضرایب میرایی بالاتری نقاط انشعاب اتفاق می‌افتد در حالی که در میکروشفت متقارن برعکس چنین حالتی رخ می‌دهد.

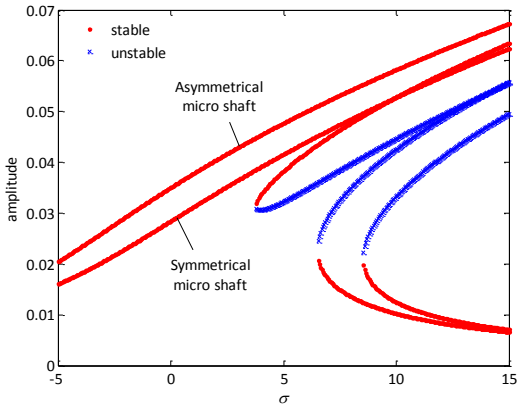

Fig. 4 the comparing of the frequency response between symmetrical and asymmetrical micro shaft on the third mode

شکل 4 مقایسه پاسخ فرکانسی میکروشفت متقارن و نامتقارن در مود سوم

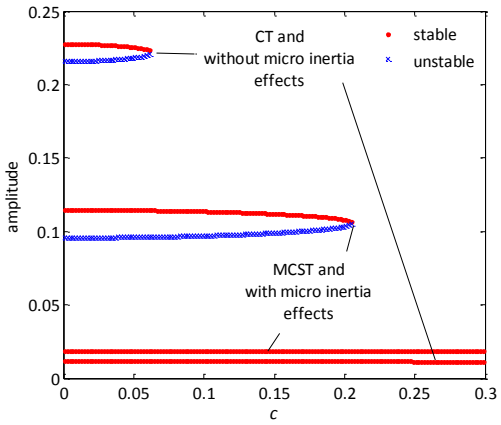

Fig. 5 the amplitude versus external damping coefficient curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 5 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی در مود اول برای میکروشفت متقارن

در شکل 7 نمودار دامنه برحسب نابالانسی در مود اول به ازای $\sigma = 1$ و وجود میرایی خارجی با ضریب 0.03 برای یک میکروشفت متقارن در دو حالت با در نظرگرفتن تئوری کلاسیک و با در نظرگرفتن تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح‌شده رسم شده است. وقتی نابالانسی صفر است، یعنی میکروشفت بالانس و سیستم دارای پاسخ بدیهی پایدار است. با افزایش نابالانسی پاسخ سیستم تغییر می‌کند و می‌تواند به‌ازای برخی نابالانسی‌های خاص سه پاسخ داشته باشد که باز هم شرایط اولیه تعیین می‌کند کدام پاسخ قابل قبول است. در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده و اثرات میکرو اینرسی سبب شده که در نابالانسی‌های کم‌تری انشعاب اتفاق افتد. در یک نابالانسی مشخص برای نمونه 0.005 در مدل غیرکلاسیک سیستم فقط یک پاسخ پایدار غیربدیهی دارد، در حالی که در مدل کلاسیک سیستم سه پاسخ غیربدیهی دارد که دو تای آن پایدار و یکی ناپایدار است.

در شکل 8 نمودار دامنه برحسب نابالانسی در مود اول با وجود میرایی خارجی 0.03 به ازای $\sigma = 0.6$ برای یک میکروشفت دوار نامتقارن در دو حالت مدل کلاسیک و مدل غیرکلاسیک رسم شده است.

میکروشفت متقارن در میکرو شفت نامتقارن نیز در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک و اثرات میکرو اینرسی سبب شده که انشعاب دوم در نابالانسی‌های کم‌تری اتفاق افتد. در یک نابالانسی مشخص مثلاً 0.005 مدل

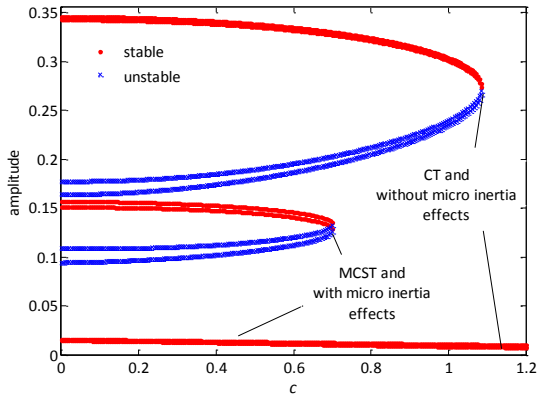

Fig. 6 the amplitude versus external damping coefficient curve for the first mode and asymmetrical micro shaft

شکل 6 نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی در مود اول برای میکروشفت نامتقارن

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

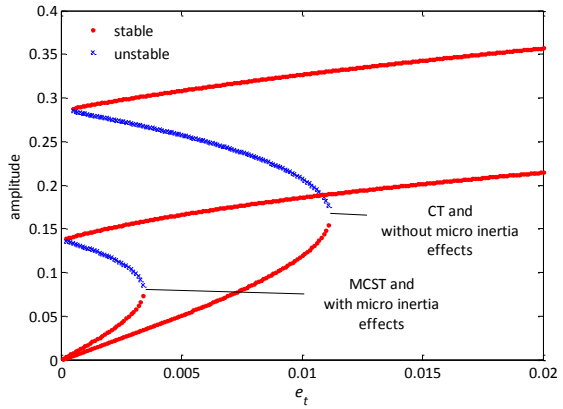

Fig. 7 the amplitude versus eccentricity curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 7 نمودار دامنه بر حسب نابالانسی در مود اول برای میکرو شفت متقارن

غیرکلاسیک فقط یک پاسخ پایدار غیربدیهی را پیش‌بینی می‌کند، ولی مدل کلاسیک سه پاسخ را پیش‌بینی می‌کند که دوتای آن پایدار و یکی ناپایدار است. به هر حال شرایط اولیه باز هم تعیین کننده پاسخ خواهد بود.

در شکل 9 پاسخ فرکانسی یک میکرو شفت دوار متقارن در مود اول با وجود میرایی خارجی با ضریب 0.03 و در نظر گرفتن اثرات میکرو اینرسی و تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح‌شده برای مقادیر مختلفی از نابالانسی رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که اختلاف بین نابالانسی نیز در پاسخ سیستم و نقطه انشعاب تأثیرگذار خواهد بود به‌گونه‌ای که افزایش نابالانسی برای حالت دامنه نابالانسی برابر سبب شده که نقطه انشعاب در سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی میکروشفت صورت گیرد.

4- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی و پایداری میکرو شفت دوار متقارن و نامتقارن با در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه و مقیاس کوچک مربوط به گرادیان‌های کرنش (حالت خاص آن تنش کوپل اصلاح‌شده) و میکرو اینرسی به کمک تئوری غیرکلاسیکِ تنش کوپل اصلاح‌شده مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. در نظرگرفتن تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی سبب خواهد شد محل نقاط انشعاب تغییر کند، همچنین به دلیل تغییر سفتی سیستم دامنه سیستم به طورکلی پایین‌تر از تئوری کلاسیک خواهد بود. نمودار دامنه برحسب ضریب میرایی خارجی برای یک میکروشفت دوار متقارن نشان

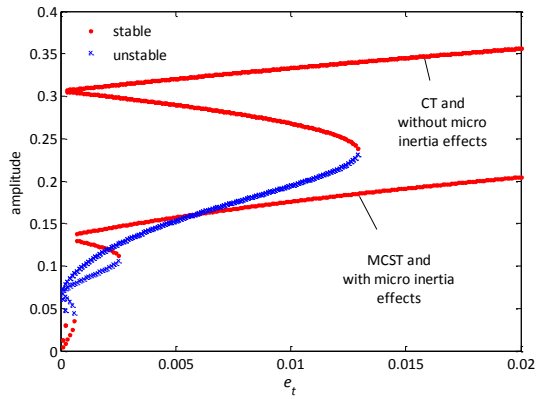

Fig. 8 the amplitude versus eccentricity curve for the first mode and asymmetrical micro shaft

شکل 8 نمودار دامنه برحسب نابالانسی در مود اول برای یک میکرو شفت نامتقارن

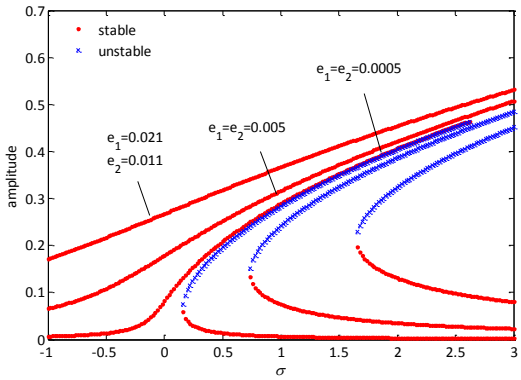

Fig. 9 the frequency response of the symmetrical micro rotating shaft for the first mode and the difference eccentricities

شکل 9 پاسخ فرکانسی میکرو شفت دوار متقارن در مود اول برای مقادیر نابالانسی‌های متفاوت

می‌دهد که سیستم با وجود تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی در ضرایب میرایی بزرگ‌تری به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید، ولی میکروشفت دوار نامتقارن در ضرایب میرایی کوچک‌تری به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید. از نمودار دامنه برحسب نابالانسی می‌توان نتیجه گرفت که برای یک میکروشفت متقارن یا نامتقارن با وجود تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی، انشعاب بارز مسأله در نابالانسی‌های کوچک‌تری اتفاق خواهد افتاد؛ بنابراین اثرات مربوط به مقیاس کوچک، ضریب میرایی خارجی، نابالانسی و نامتقارنی پارامترهای تأثیرگذاری بر پاسخ سیستم است که در طراحی و ساخت سازه‌های با ابعاد کوچک می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

5- فهرست علایم

m	جرم واحد طول
c	ضریب میرایی خارجی
ℓ	طول میکروشفت
A	سطح مقطع
$E\ ,G$	مدول یانگ و مدول برشی
e	کرنش محوری تار خنثی
A_1	سفتی محوری
D_1,D_2,D_3	سفتی پیچشی، سفتی محوری حول محور y و سفتی محوری حول محور z
u,v,w	جابه‌جایی طولی، جابه‌جایی عرضی در راستای y وجابه‌جایی عرضی در راستای z
k_1,k_2,k_3	انحناهای میکرو شفت
I_1,I_2,I_3	ممان اینرسی قطبی، ممان اینرسی حول محور y و ممان اینرسی حول محور z
e_y,e_z	نابالانسی نسبت به محور y و نابالانسی نسبت به محور z
l_0,l_1,l_2	ثوابت مرتبه بالاتر ماده

علایم یونانی

ρ	چگالی حجمی
Ω	سرعت زاویه‌ای میکروشفت
ψ,θ,β	زوایای اویلر 3-2-1
$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$	مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]

6- مراجع

[1] R. Katz, The dynamic response of a rotating shaft subject to an axially moving and rotating load, *Sound and Vibration*, Vol. 246, pp. 757-775, 2001.

[2] I. Nagasaka, Y. Ishida, J. Liu, Forced oscillations of a continuous asymmetrical rotor with geometric nonlinearity (major critical speed and secondary critical speed), *Vibration and Acoustics*, Vol. 130, pp. 031012-031012, 2008.

[3] S. A. A. Hosseini, M. Zamanian, Multiple scales solution for free vibrations of a rotating shaft with stretching nonlinearity, *Scientia Iranica*, Vol. 20, pp. 131-140, 2013.

[4] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, pp. 1067-1081, 2010.

[5] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 51, pp. 131-144, 2012.

[6] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Internal, combinational and sub-harmonic resonances of a nonlinear asymmetrical rotating shaft, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, pp. 173-184, 2015.

[7] M. Shahgholi, S. Esmaeilzadeh Khadem, Resonance analysis of gyroscopic nonlinear spinning shafts with parametric excitations and speed fluctuations, *Mechanical Sciences*, Vol. 64, pp. 94-109, 2012.

[8] Shooshtari, A. n. A. M. Hoseini, S. n. A. N. Mahmoodi, S. n. A. Kalhori, Hamed, Analytical solution for nonlinear free vibrations of viscoelastic microcantilevers covered with a piezoelectric layer, *Smart Materials and Structures*, 2012.

[9] M. Fathalilou, M. Sadeghi, G. Rezazadeh, Micro-inertia effects on the dynamic characteristics of micro-beams considering the couple stress theory, *Mechanics Research Communications*, Vol. 60, pp. 74-80, 2014.

[10] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams, *Engineering Science*, Vol. 46, pp. 427-437, 2008.

[11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 314-322, 2013.

[12] B. Akgöz, Ö. Civalek, Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity, *Composite Structures*, Vol. 134, pp. 294-301, 2015.

[13] M. Hashemi, M. Asghari, A Semi-analytical Solution for Flexural Vibration of Micro Beams Based on the Strain Gradient Theory, *Theoretical and Applied Vibration and Acoustics*, Vol. 1, pp. 48-61, 2015.

[14] K. B. Mustapha, Z. W. Zhong, Spectral element analysis of a non-classical model of a spinning micro beam embedded in an elastic medium, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 53, pp. 66-85, 2012.

[15] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 65, pp. 217-233, 2011.

[16] S. A. A. Hosseini, S. E. Khadem, Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, pp. 272-288, 2009.

[17] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Second Edition, pp. 195-202, New York: Wiley-Interscience, 2004.

[18] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 109-124, 1968.

[19] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Stability analysis of a nonlinear rotating asymmetrical shaft near the resonances, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, pp. 1311-1325, 2012.

[20] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Methods*, Second Edition, pp. 139-142, New York: Wiley-Interscience, 1981.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.52.8]