مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1395، دوره 16، شماره 3، ص‌ص 353-363

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

طراحی مسیر زمان بهینه برای مکانیزم چهار لینکی به روش غیر مستقیم

امین نیکوبین[1*]، امیر کمال[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

* سمنان، صندوق پستی 3513119111، anikoobin@semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 17 آذر 1394

پذیرش: 26 بهمن 1394

ارائه در سایت: 07 فروردین 1395

کلید واژگان:

مکانیزم چهار لینکی

طراحی مسیر زمان بهینه

کنترل بهینه

روش غیر مستقیم

جرک محدود

چکیده

مسأله طراحی مسیر زمان بهینه برای مکانیزم‌های حلقه بسته تاکنون به روش غیر مستقیم حل نشده است. در این مقاله این مسأله برای یک مکانیزم چهار لینکی در نظر گرفته می‌شود و حل آن بر اساس حل غیر مستقیم مسأله کنترل بهینه ارائه می‌شود. به این منظور با استفاده از معادلات قیدی هولونومیک سیستم، مختصات‌های اضافی حذف می‌شود و معادلات دینامیکی مکانیزم بر حسب تنها یک مختصات تعمیم یافته استخراج می‌گردد. سپس با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگن شرایط لازم بهینگی با توجه به محدودیت گشتاور اعمالی موتور بدست می‌آید. معادلات بدست آمده یک مسأله مقدار مرزی را تشکیل می‌دهند، که با حل این معادلات می‌توان به جواب بهینه دست یافت. با روش غیر مستقیم برخلاف روش‌های مستقیم که یک حل تقریبی نتیجه می‌دهند، می‌توان یک حل دقیق بدست آورد. اما مشکل اصلی در روش غیر مستقیم، حساس بودن حل به حدس اولیه است. این مشکل برای مسأله زمان بهینه که جواب نهایی شدیدا غیر خطی و به صورت بنگ بنگ می‌باشد، بسیار حادتر می‌شود. برای رفع این مشکل الگوریتمی پیشنهاد شده است که مسأله زمان بهینه را می‌توان با هر دقت خواسته شده‌ای محاسبه نمود و مسأله تنها با یک حدس اولیه ساده صفر در شروع الگوریتم قابل حل است. از آنجا که در مسیر زمان بهینه تغییر ناگهانی کنترل رخ می‌دهد، مقدار جرک بسیار افزایش می‌یابد. برای رفع این مشکل الگوریتم دیگری جهت محاسبه زمان کمینه با جرک محدود، ارائه شده است. در نهایت، شبیه¬سازی‌های انجام گرفته کارایی روش پیشنهادی در محاسبه مسیر زمان بهینه را نشان می‌دهد.

Time optimal trajectory planning of four bar mechanism using indirect approach

Amin Nikoobin*, Amir Kamal

Faculty of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.
* P.O.B. 3513119111, Semnan, Iran, anikoobin@semnan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 December 2015
Accepted 15 February 2016
Available Online 26 March 2016

Keywords:
Four Bar Mechanism
Time Optimal Trajectory Planning
Optimal Control
Indirect Method
Bounded Jerk

ABSTRACT

Time optimal trajectory planning of closed chain mechanisms has not been done by indirect method yet. In this paper, this problem is considered for a four bar mechanism and its solution is presented on the basis of the indirect solution of optimal control problem. To this end, the additional coordinates are omitted using the holonomic constraints, so the dynamic equation is obtained with respect to only one generalized coordinate. Then the necessary conditions for optimality are derived using Pontryagin's minimum principle by considering the constraint on the applied torque. The obtained equations lead to a two-point boundary value problem (BVP) the solution of which is the optimum answer. Unlike the direct methods that result in approximate solution, indirect method leads to an exact solution. But the main challenge in indirect method is solving the BVP. Solving this problem is sensitive to the initial guess. This problem is much more severe for time optimal problem which has a high nonlinear answer in bang-bang form. To overcome this problem an algorithm is proposed to solve the time optimal problem with any desired accuracy, and the initial solution can simply be zero at the start of the algorithm. But in the time optimal trajectory the large jerk occurs, due to control signals switching. In order to overcome this problem, another algorithm is presented to calculate the minimum time with bounded jerk. Finally, the simulation results show the performance of the proposed method in time optimal trajectory planning.

1- مقدمه

مکانیزم‌های چهار لینکی، نوع ساده و بسیار پرکاربرد از مکانیزم‌های موازی حلقه بسته هستند که در صنایع مختلف از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشند. این مکانیزم‌ها از سه لینک متحرک و یک لینک ثابت تشکیل می‌شوند. کاربرد آن‌ها از ساختارهای ساده‌ای مانند مکانیزم برف پاکن خودرو تا ساختارهای پیچیده مانند صخره شکن‌ها، ماشین آلات دوخت، سیستم‌های تعلیق خودرو و مفصل زانو توسعه می‌یابد [1]. این نوع مکانیزم در مفصل زانو کاربرد زیادی دارد که کارهای انجام گرفته در این زمینه در مرجع [2] مورد بررسی قرار

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Nikoobin, A. Kamal, Time optimal trajectory planning of four bar mechanism using indirect approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 353-363, 2016 (in Persian)

گرفته است. اگر چه این مکانیزم یک مکانیزم ساده و قدیمی می‌باشد، اما به دلیل اهمیت و کاربرد زیادی که دارد، همچنان مورد توجه بوده است و پژوهش‌های زیادی در زمینه توسعه و استفاده از روش‌های بهینه‌سازی به منظور بهبود عملکرد مکانیزم چهار لینکی تاکنون انجام شده است. از کارهای اخیر انجام گرفته در زمینه طراحی مسیر و بهینه‌سازی مکانیزم‌های چهار لینکی می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. چادهاری و همکاران [3] روش بهینه‌سازی برای محاسبه ابعاد بهینه لینک‌های مکانیزم چهار لینکی تحت بالانس دینامیکی را در سال 2015 ارائه دادند. آکودو و همکاران [4] بالانس دینامیکی بهینه برای مکانیزم چهار لینکی را در سال 2014 انجام دادند. طراحی مسیر برای این مکانیزم پرکاربرد با استفاده از الگوریتم ژنتیک [5] و الگوریتم‌های رقابت استعماری و آنیل شبیه‌سازی شده موازی [6] در سال 2015 انجام گرفته است.

به طور کلی مسأله طراحی مسیر بهینه را می‌توان به یک مسأله کنترل بهینه تبدیل نمود. دو روش اصلی برای حل این مسأله وجود دارد، روش مستقیم و روش غیر مستقیم [7]. در روش مستقیم ابتدا متغیرهای حالت و کنترل، گسسته شده و مسأله کنترل بهینه به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود. سپس الگوریتم‌های بهینه‌سازی مانند برنامه‌ریزی غیرخطی، الگوریتم ژنتیک، تجمع پرندگان و غیره برای محاسبه مقدار بهینه پارامترها استفاده می‌شوند. روش غیر مستقیم بر اساس روش حساب تغییرات است و شرایط لازم بهینگی از اصل مینیمم پونتریاگین استخراج می‌شود. این معادلات نهایتا منجر به یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای می‌شوند که حل آن‌ها پاسخ بهینه خواهد بود.

در هر دو روش برای شروع عملیات حل مسأله، نیاز به حدس اولیه از پارامترها می‌باشد. ویژگی روش مستقیم در این است که حل نهایی به حدس اولیه چندان حساس نیست و اغلب همگرایی به خوبی انجام می‌گیرد. اما برای مسائل با تعداد پارامترهای بالا، حل مسأله بسیار زمان‌بر خواهد شد. به همین منظور در این روش‌ها اغلب لازم است تا جواب مسأله را به فرم یک سری توابع از پیش تعیین شده مانند چند جمله‌ای، توابع هارمونیک یا اسپیلاین[1] در نظر گرفت، که این منجر به یک حل تقریبی از مسأله می‌شود [8,7]. از طرف دیگر حل مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای ناشی از روش غیر مستقیم، به حدس اولیه حساس است و کاربرد آنرا در بسیاری از مسائل پیچیده، مشکل می‌کند. اما حل بدست آمده از این روش یک حل دقیق است و اگر حدس اولیه مناسب و درست انتخاب شود، سرعت همگرایی بسیار بالا است و زمان حل مسأله نسبت به روش مستقیم بسیار کمتر است [9].

طراحی مسیر بهینه برای انواع ربات‌ها، به روش غیر مستقیم به عنوان یک روش دقیق و کارآمد، اخیرا مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. کالیس و همکاران طراحی مسیر بهینه برای یک ربات سری صلب را به روش غیر مستقیم ارائه کرده‌اند [9]. کورایم و همکاران [10] روش غیر مستقیم را برای طراحی مسیر بهینه منیپولاتور متحرک با لینک‌ها و مفصل‌های انعطاف پذیر، به کار برده‌اند. بسکاریول و همکاران [11] با استفاده از روش غیر مستقیم، طراحی مسیر بهینه با جرک محدود را برای منیپولاتورها با لینک انعطاف پذیر انجام داده‌اند. مشهدی و همکاران [12] طراحی مسیر بهینه را برای یک وسیله نقلیه جهت رد شدن از یک مانع متحرک ارائه نمودند. صالحی و همکاران [13] طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتور با مفاصل انعطاف پذیر را جهت افزایش ظرفیت حمل بار و کاهش ارتعاشات به روش غیر مستقیم ارائه داده‌اند. نیکوبین و همکاران بالانس بهینه برای ربات‌های سری را با استفاده از جرم و فنر ارائه کرده‌اند [14]. مقالات [9-14] بخشی از کارهای انجام گرفته در سه سال اخیر در زمینه طراحی مسیر به روش غیر مستقیم می‌باشد.

در طراحی مسیر بهینه توابع هدف مختلفی در نظر گرفته می‌شود که شامل: توان کمینه، گشتاور کمینه، مدت زمان کمینه حرکت، ظرفیت حمل بار بیشینه، دامنه ارتعاشات کمینه، انرژی مکانیکی کمینه عملگر و غیره می‌باشد. در این بین، به منظور افزایش سرعت کار ربات‌ها و استفاده از حداکثر توان آن‌ها، محاسبه مدت زمان کمینه حرکت یکی از مسائل مهم در علم رباتیک می‌باشد. لیو و همکاران [15] با اعمال قیود سینماتیکی، طراحی مسیر زمان بهینه و جرک پیوسته را برای رباتهای بازویی بدست آوردند. دابی و همکاران [16] روش جدیدی برای بهینه‌سازی زمان حرکت یک ربات بازویی با استفاده از الگوریتم ژنتیک پیشنهاد کردند. قربانی و همکاران روش جدیدی را برای طراحی مسیر بهینه با هدف کمینه‌سازی زمان به روش غیر مستقیم برای یک شناور تندروی پروازی پیشنهاد داده‌اند [17]. با نزدیک شدن زمان حرکت مکانیزم به زمان کمینه مطلق، جرک به سمت بینهایت میل می‌کند. بنابراین در عمل اغلب، زمان کمینه با اعمال محدودیت روی جرک، محاسبه می‌شود. قاسمی و همکاران [18] با استفاده از روش غیر مستقیم، طراحی مسیر زمان بهینه و جرک محدود را برای ربات سری ارائه داده‌اند. لو و شیه [19] زمان بهینه با جرک محدود را برای سیستم سروو موقعیت‌یاب پیشنهاد کردند. ژو و هونگ [20] طراحی مسیر زمان بهینه با جرک محدود را با استفاده از روش مستقیم برای ربات سری انجام دادند. مسأله طراحی مسیر زمان بهینه به روش مستقیم برای مکانیزم‌های موازی نیز مورد توجه قرار گرفته است، از جمله برای ربات کابلی موازی [21]، ربات پلت فرم موازی [22] و ربات موازی دو درجه آزادی صفحه‌ای [23] این مسأله حل شده است. سیلوا و همکارن حل مسأله دینامیک معکوس یک مکانیزم چهار لینکی را به صورت یک مسأله کنترل بهینه تعریف کردند، اما برای حل آن از روش مستقیم استفاده شده است [24]. همه کارهای دیگر در زمینه طراحی مسیر مکانیزم‌های چهار لینکی بر اساس روش مستقیم است [3-6].

با بررسی کارهای انجام شده در زمینه طراحی مسیر برای مکانیزم‌های چند لینکی و همچنین کارهای انجام شده به روش غیر مستقیم، مشاهده می‌شود که تاکنون مسأله طراحی مسیر بهینه برای مکانیزم‌های چند لینکی به روش غیر مستقیم حل نشده است. در این بین مسأله طراحی مسیر زمان بهینه برای مکانیزم چهار لینکی نه به روش مستقیم و نه به روش غیر مستقیم تاکنون حل نگردیده است. معادلات دینامیکی مکانیزم‌های چند لینکی حلقه بسته در مقایسه با ربات‌های سری بسیار پیچیده‌تر هستند. در مکانیزم‌های حلقه بسته وجود قیود سینماتیکی هولونومیک در کنار معادلات دینامیکی [24]، حل آن‌ها به روش غیر مستقیم را بسیار مشکل می‌کند. مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای بدست آمده در این حالت علاوه بر معادلات دیفرانسیل معمولی، دارای تعدادی معادله جبری نیز می‌باشد. روش‌هایی برای حل چنین معادلاتی ارائه شده است اما این روش‌ها برای یک سری معادلات ساده و خاص قابل اعمال است [25]. برای رفع این مشکل در این مقاله، با تعریف مناسب یک سری پارامترهای واسط، معادلات ناشی از قیود سینماتیکی در معادلات دینامیکی مرحله به مرحله جایگذاری می‌شود و نهایتا یک معادله دینامیکی به فرم بسته بر حسب مختصات‌های تعمیم یافته بدست می‌آید. جهت بررسی صحت معادلات استخراج شده، مکانیزم با

[1] Spline

استفاده از جعبه ابزار شبیه‌سازی مکانیک[1] نیز مدل شده و حل دینامیک مستقیم معادلات دینامیکی با آن مقایسه می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک تابع هدف و تعریف شبه حالت‌ها، تابع هیملتونین بدست آمده و شرایط لازم بهینگی با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات و اصل مینیمم پونتریاگن استخراج می‌شود. معادلات بدست آمده، یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند که با استفاده از دستور bvp4c[2] در نرم‌افزار متلب[3] حل می‌شود. در ادامه مسأله طراحی مسیر زمان بهینه برای مکانیزم چهار لینکی در نظر گرفته می‌شود. برای حل این مسأله، یک الگوریتم کارآمد براساس حل مسأله مقدار مرزی پیشنهاد می‌شود. الگوریتم پیشنهادی به گونه‌ای طرح ریزی شده است که علاوه بر سرعت بالای آن در رسیدن به جواب نهایی، می‌توان جواب نهایی را با هر دقت مورد نظر محاسبه نمود. در الگوریتم پیشنهادی برای رفع مشکل حدس اولیه در روش غیر مستقیم، حل هر مرحله به عنوان حدس اولیه برای مرحله بعد جایگذاری می‌شود. در الگوریتم ارائه شده با رسیدن زمان حرکت به زمان بهینه مطلق، جرک به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. برای رفع این مشکل، الگوریتم دیگری پیشنهاد شده است که با اعمال محدودیت در جرک، می‌توان زمان کمینه را محاسبه نمود. نهایتا با شبیه‌سازی‌های انجام گرفته میزان دقت و کارایی روش پیشنهاد شده نشان داده می‌شود.

2- استخراج معادله دینامیکی مکانیزم چهار لینکی

در این بخش تحلیل سینماتیکی و نحوه استخراج معادلات دینامیکی به روش لاگرانژ برای مکانیزم چهار لینکی ارائه می‌شود.

2-1- تحلیل موقعیت

شکل 1 مکانیزم چهار لینکی صفحه‌ای را نشان می‌دهد. با توجه به شکل 1، معادله‌های حلقه بسته در راستای محورهای x و y به صورت روابط (1) و (2) نوشته می‌شوند [26].

$$L_2\cos\alpha = L_0 - L_1\cos\theta + L_3\cos\phi \quad (1)$$

$$L_2\sin\alpha = L_3\sin\phi - L_1\sin\theta \quad (2)$$

اگر مختصات‌های تعمیم یافته θ، α و ϕ در نظر گرفته شود، معادلات (1) و (2) در اصل قیود هولونومیک[4] سیستم می‌باشند که رابطه بین مختصات‌ها را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن این سه مختصات، معادلات دینامیک ساده خواهد شد، اما در کنار معادلات دینامیک دو معادله قیدی (1) و (2) نیز وجود خواهد داشت که همان‌طور که در مقدمه توضیح داده شد،

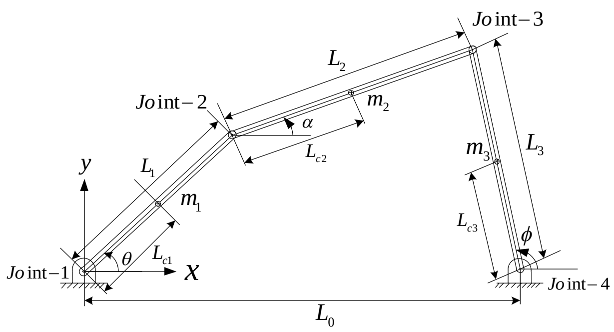

Fig. 1 Schematic diagram of planar parallel four-bar mechanism

شکل 1 شکل شماتیک مکانیزم چهار لینکی موازی صفحه‌ای

[1] Simmechanic
[2] Boundary value problem for conditions (bvp4c)
[3] MATLAB
[4] Holonomic constraints

حل مسأله کنترل بهینه به روش غیر مستقیم برای این معادلات منجر به یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با معادلات جبری می‌شود که حل آن بسیار مشکل است. بنابراین راه حلی که وجود دارد این است که مختصات θ به عنوان مختصات تعمیم یافته انتخاب شود و سپس متغیرهای α و ϕ بر حسب مختصات θ بدست آیند. به این منظور، مجموع مربع معادله‌های (1) و (2)، معادله (3) را نتیجه می‌دهد.

$$C_1(\theta)\sin\phi + C_2(\theta)\cos\phi + C_3(\theta) = 0 \quad (3)$$

ضرایب معادله (3) عبارتند از:

$$C_1(\theta) = -2L_1L_3\sin\theta$$
$$C_2(\theta) = 2L_3(L_0 - L_1\cos\theta)$$
$$C_3(\theta) = L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 - 2L_0L_1\cos\theta$$

با تعریف پارامتر ζ به صورت رابطه (4)، توابع $\sin\phi$ و $\cos\phi$ به صورت رابطه (5) بدست می‌آیند.

$$\zeta = \tan\frac{\phi}{2} \quad (4)$$

$$\sin\phi = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}$$
$$\cos\phi = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (5) در معادله (3)، معادله مرتبه دوم بر حسب ζ، مطابق با رابطه (6) بدست می‌آید.

$$(C_3 - C_2)\zeta^2 + (2C_1)\zeta + (C_3 + C_2) = 0 \quad (6)$$

با حل معادله (6)، پارامتر ζ طبق رابطه (7) بدست می‌آید.

$$\zeta = \frac{-C_1 \pm \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2 - {C_3}^2}}{C_3 - C_2} \quad (7)$$

با جایگزین کردن معادله (7) در معادله (4)، زاویه ϕ برحسب θ مطابق با رابطه (8) محاسبه می‌شود.

$$\phi(\theta) = 2 \times \arctan\left(\frac{-C_1 \pm \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2 - {C_3}^2}}{C_3 - C_2}\right) \quad (8)$$

با تقسیم معادله (2) بر معادله (1)، زاویه α بر حسب ϕ و θ طبق رابطه (9) بدست می‌آید:

$$\alpha(\theta,\phi) = \arctan\left(\frac{L_3\sin\phi - L_1\sin\theta}{L_0 - L_1\cos\theta + L_3\cos\phi}\right) \quad (9)$$

2-2- تحلیل سرعت

مشتق گیری از معادلات (1) و (2) نسبت به زمان، رابطه (10) را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} L_2\dot{\alpha}\sin\alpha - L_3\dot{\phi}\sin\phi &= -L_1\dot{\theta}\sin\theta \\ -L_2\dot{\alpha}\cos\alpha + L_3\dot{\phi}\cos\phi &= L_1\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \quad (10)$$

شکل ماتریسی معادله (10)، به صورت معادله (11) بیان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} L_2\sin\alpha & -L_3\sin\phi \\ -L_2\cos\alpha & L_3\cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha} \\ \dot{\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1\sin\theta \\ L_1\cos\theta \end{bmatrix} \times \dot{\theta} \quad (11)$$

$\dot{\alpha}$ و $\dot{\phi}$ بدست آمده از معادله (11)، به صورت رابطه (12) خواهد بود.

$$\dot{\alpha} = \frac{L_1\sin(\phi-\theta)}{L_2\sin(\alpha-\phi)}\dot{\theta}$$
$$\dot{\phi} = \frac{L_1\sin(\alpha-\theta)}{L_3\sin(\alpha-\phi)}\dot{\theta} \quad (12)$$

2-3- محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل

روش لاگرانژ روش شناخته شده و بسیار کارآمدی برای مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی، به خصوص سیستم‌هایی متشکل از چند جرم می‌باشد،

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.42.9]

از این روش برای استخراج معادله دینامیکی مکانیزم استفاده می‌شود. با بدست آوردن انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم، لاگرانژین سیستم محاسبه می‌شود. مجموع انرژی جنبشی مکانیزم چهار لینکی به صورت معادله (13) تعریف می‌شود.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \tag{13}$$

انرژی جنبشی هر یک از لینک‌ها به صورت رابطه (14) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\left(m_1\|v_{c1}\|^2 + I_1\dot{\theta}^2\right) \\ T_2 &= \frac{1}{2}\left(m_2\|v_{c2}\|^2 + I_2\dot{\alpha}^2\right) \\ T_3 &= \frac{1}{2}\left(m_3\|v_{c3}\|^2 + I_3\dot{\phi}^2\right) \end{aligned} \tag{14}$$

مربع سرعت مرکز جرم لینک‌ها طبق رابطه (15) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \|v_{c1}\|^2 &= {L_{c1}}^2\dot{\theta}^2 \\ \|v_{c2}\|^2 &= {L_1}^2\dot{\theta}^2 + {L_{c2}}^2\dot{\alpha}^2 + 2L_1L_{c2}cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ \|v_{c3}\|^2 &= {L_{c3}}^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

به ازای هر لینک i (i=1,2,3)، m_i جرم لینک، I_i ممان اینرسی لینک حول مرکز جرم آن و L_{ci} فاصله مفصل i تا مرکز جرم لینک i می‌باشد، مجموع انرژی پتانسیل مکانیزم چهار لینکی طبق معادله (16) بیان می‌شود.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \tag{16}$$

انرژی پتانسیل هر یک از لینک‌ها به صورت رابطه (17) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} V_1 &= m_1gy_{c1} \\ V_2 &= m_2gy_{c2} \\ V_3 &= m_3gy_{c3} \end{aligned} \tag{17}$$

که g شتاب گرانش می‌باشد، مختصات مرکز جرم لینک‌ها در راستای y طبق رابطه (18) می‌باشد.

$$\begin{aligned} y_{c1} &= L_{c1}\sin\theta \\ y_{c2} &= L_1\sin\theta + L_{c2}\sin\alpha \\ y_{c3} &= L_{c3}\sin\phi \end{aligned} \tag{18}$$

لاگرانژین از تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بدست می‌آید و به صورت معادله (19) تعریف می‌شود.

$$L = T - V \tag{19}$$

با جایگزین کردن انرژی جنبشی و پتانسیل در معادله (19)، لاگرانژین طبق رابطه (20) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}&\left[\left(m_1{L_{c1}}^2 + I_1 + m_2{L_1}^2\right)\dot{\theta}^2\right. \\ &\left.+\left(m_2{L_{c2}}^2 + I_2\right)\dot{\alpha}^2 + \left(m_3{L_{c3}}^2 + I_3\right)\dot{\phi}^2\right] \\ &+ m_2L_1L_{c2}\cos(\theta-\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} - (m_1gL_{c1} + m_2gL_1)\sin\theta \\ &-m_2gL_{c2}\sin\alpha - m_3gL_{c3}\sin\phi \end{aligned} \tag{20}$$

2-4- استخراج معادله حرکت برای مکانیزم چهار لینکی صفحه‌ای

بر اساس روش لاگرانژ، با انتخاب θ به عنوان مختصات تعمیم یافته و با استفاده از لاگرانژین بدست آمده در بخش قبل، معادله حرکت مکانیزم از رابطه (21) بدست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \tau \tag{21}$$

طبق روابط (8) و (9)، زاویه ϕ بر حسب θ و زاویه α بر حسب ϕ و θ و بر اساس رابطه (12) سرعت زاویه‌های $\dot{\alpha}$ و $\dot{\phi}$ بر حسب θ، α، ϕ و $\dot{\theta}$ می‌باشند. هم چنین طبق رابطه (20) معادله لاگرانژ بر حسب θ، α، ϕ، $\dot{\theta}$، $\dot{\alpha}$ و $\dot{\phi}$ است. بنابراین مشتق لاگرانژین نسبت به θ، طبق قاعده زنجیره‌ای معادله (22) را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta} &+ \frac{\partial L}{\partial\phi}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial L}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \\ &+ \frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\left(\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

با توجه به معادله (20)، مشتق جزئی لاگرانژین نسبت به $\dot{\theta}$ بر حسب پارامترهای θ، α، ϕو $\dot{\theta}$ می‌باشد. بنابراین مشتق آن نسبت به زمان معادله (23) را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}{\partial\theta}\times\frac{\partial\theta}{\partial t} &+ \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ + \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}{\partial\phi}\times\frac{\partial\phi}{\partial t} &+ \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}{\partial\dot{\theta}}\times\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial t} \end{aligned} \tag{23}$$

معادله (23) بر حسب پارامترهای θ، α، ϕ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ می‌باشد. با جایگزین کردن روابط (22) و (23) در معادله (21)، معادله دینامیکی مکانیزم بر حسب متغیرهای θ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ بدست می‌آید. در نهایت مدل دینامیکی مکانیزم به شکل خلاصه طبق معادله (24) نوشته می‌شود.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta) = u \tag{24}$$

در معادله (24)، $M(\theta)$ ماتریس اینرسی، $C(\theta,\dot{\theta})$ نیروی کوریولیس، $G(\theta)$ اثر جاذبه و u گشتاور ورودی است.

ماتریس اینرسی به صورت معادله (25) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} M(\theta,\alpha,\phi) = {}& m_1{L_{c1}}^2 + I_1 + m_2{L_1}^2 + \\ &+ \frac{m_2{L_1}^2L_{c2}\sin(\phi-\theta)\cos(\alpha-\theta)}{L_2\sin(\alpha-\phi)} + \\ &\frac{L_1\sin(\phi-\theta)m_2L_1L_{c2}\cos(\alpha-\theta)}{L_2\sin(\alpha-\phi)} + \\ &\frac{L_1\sin(\phi-\theta)L_1{L_{c2}}^2\sin(\phi-\theta)}{L_2\sin^2(\alpha-\phi)} + \\ &\frac{L_1\sin(\phi-\theta)I_2L_1\sin(\phi-\theta)}{L_2\sin^2(\alpha-\phi)} + \\ &\frac{I_3{L_1}^2\sin^2(\alpha-\theta)}{L_3\sin^2(\alpha-\phi)} + \frac{m_3{L_1}^2{L_{c3}}^2\sin^2(\alpha-\theta)}{L_3\sin^2(\alpha-\phi)} \end{aligned} \tag{25}$$

اثر جاذبه طبق معادله (26) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} G(\theta,\alpha,\phi) = {}& L_1m_2\cos(\theta) + L_{c1}m_1\cos(\theta) \\ &-L_{c2}m_2\cos(\alpha)\left[\frac{L_1\left(L_0\cos(\theta) - L_1 + L_3\cos(\phi-\theta)\right)}{B_1}\right. \\ &\left.-\frac{L_3B_2\left(L_3 + L_0\cos(\phi) - L_1\cos(\phi-\theta)\right)}{B_3B_1}\right] \\ &+\frac{L_{c3}m_3\cos(\phi)B_2}{B_3} \end{aligned} \tag{26}$$

ضرایب معادله (26) عبارتند از:

$$\begin{aligned} B_1 &= {L_0}^2 - 2\cos(\theta)L_0L_1 + 2\cos(\phi)L_0L_3 + {L_1}^2 \\ &\quad -2\cos(\phi-\theta)L_1L_3 + {L_3}^2 \\ B_2 &= \frac{8L_1\sin(\theta)B_7{L_3}^2 + 2{B_{10}}^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{B_4B_5} - \\ &\quad \frac{2B_9\sin(\theta)B_6}{B_4B_5} - \frac{2B_{10}\cos(\theta)}{B_5} + \frac{2B_4 - 2B_{10}\sin(\theta)}{B_5}\times \\ &\quad \frac{B_9\sin(\theta) - 2L_1L_3\sin(\theta)}{B_5} \\ B_3 &= \frac{\left(B_4 - B_{10}\sin(\theta)\right)^2}{{B_5}^2} + 1 \\ B_4 &= \left({B_{10}}^2\sin^2(\theta) + 4{L_3}^2{B_7}^2 - {B_6}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ B_5 &= B_9\cos(\theta) - B_8 + 2L_3B_7 \\ B_6 &= B_8 - B_9\cos(\theta) \\ B_7 &= L_0 - L_1\cos(\theta) \end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.42.9]

$$B_8 = {L_0}^2 + {L_1}^2 - {L_2}^2 + {L_3}^2$$
$$B_9 = 2L_0L_1$$
$$B_{10} = 2L_1L_3$$

با توجه به روابط (8) و (9)، معادله‌های (25) و (26) به صورت $M = M(\theta)$ و $G = G(\theta)$ بدست می‌آیند. از نوشتن معادله نیروی کوریولیس به علت طولانی بودن آن صرف نظر شده است.

3-استخراج شرایط لازم بهینگی

برای بیان مسأله کنترل بهینه، در ابتدا لازم است معادلات دینامیکی سیستم به فرم فضای حالت نوشته شوند، به این منظور با تعریف بردار حالت

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{27}$$

معادله دینامیکی (24) به شکل فضای حالت مطابق با رابطه (28) بیان می‌شود.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M(\theta)^{-1}\left(u - C(\theta,\dot{\theta}) - G(\theta)\right) \end{bmatrix} \tag{28}$$

که در فرم فشرده مطابق با معادله (29) بیان می‌شود.

$$\dot{x} = F(x,u,t) \tag{29}$$

که در آن:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M(\theta)^{-1}\left(u - C(\theta,\dot{\theta}) - G(\theta)\right) \end{bmatrix} \tag{30}$$

حال مسأله طراحی مسیر بهینه برای مکانیزم چهار لینکی را می‌توان به صورت مسأله کنترل بهینه بیان نمود، هدف یافتن کنترل بهینه $u \in \bar{U}$ می‌باشد به گونه‌ای که تابع (31) کمینه شود

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(u)\,dt \tag{31}$$

تحت قید دینامیکی (29)، شرایط مرزی طبق معادله (32) داده می‌شود.

$$x_1(0) = \theta_0, \qquad x_1(t_f) = \theta_f$$
$$x_2(0) = 0, \qquad x_2(t_f) = 0 \tag{32}$$

در رابطه (31)، L تابع هدف و در حالت کلی تابعی از سیگنال کنترل u و حالت‌ها می‌باشد، t_0 زمان ابتدایی و t_f زمان نهایی می‌باشد. $\bar{U}$ محدوده قابل قبول کنترل می‌باشد و طبق معادله (33) تعریف می‌شود.

$$\bar{U} = \{u | U^- \le u \le U^+\} \tag{33}$$

U^- و U^+ به ترتیب حد پایین و بالا کنترل اعمالی به سیستم می‌باشند، در ادامه با تعریف بردار شبه حالت به صورت رابطه (34)، تابع همیلتون به صورت معادله (35) تعریف می‌شود.

$$\psi = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$H = L + \psi^T F \tag{35}$$

با جایگذاری روابط (30) و (34)، در رابطه (35)، تابع همیلتون به شکل معادله (36) بدست می‌آید.

$$H = L + x_2x_3 + x_4M(x_1)^{-1}\left(u - C(x_1,x_2) - G(x_1)\right) \tag{36}$$

حال با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات در صورتی که محدودیتی روی مقدار کنترل وجود نداشته باشد برای کمینه شدن تابع J، باید معادلات (37) تا (39) برآورده شود [27].

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} \tag{37}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{38}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{39}$$

و در صورت وجود محدودیت روی تابع کنترل ورودی، اصل مینیمم پونتریاگن بیان می‌کند که برای مینیمم شدن تابع هدف J، کنترل بهینه $u^* \in \bar{U}$ باید همیلتونین را مینیمم کند، به عبارت دیگر رابطه (40) باید به ازای هر $u \in \bar{U}$ و $t \in [t_0, t_f]$ برقرار باشد [27].

$$H(x^*, u^*, \psi^*, t) \le H(x^*, u, \psi^*, t) \tag{40}$$

در این معادله نماد (*) مقادیر بهینه را نشان می‌دهد، حال با تعریف تابع هدف به صورت رابطه (41)، که مسیر بهینه با کمترین گشتاور را نتیجه می‌دهد، با استفاده از معادله (39) قانون کنترل بهینه به صورت معادله (42) بدست می‌آید.

$$L = \frac{1}{2}u^2 \tag{41}$$

$$u = -x_4M^{-1}(x_1) \tag{42}$$

و در صورت وجود محدودیت روی تابع کنترل، با استفاده از معادله (40) قانون کنترل بهینه به صورت معادله (43) بیان می‌شود.

$$u = \begin{cases} U^+ & u > U^+ \\ -x_4M^{-1}(x_1) & U^- \le u \le U^+ \\ U^- & u < U^- \end{cases} \tag{43}$$

در معادله (42)، ماتریس اینرسی M در قسمت 2-4 بدست آمده است.

با جایگذاری معادله (36) در روابط (37) و (38)، شرایط بهینگی بر اساس رابطه (44) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= M(\theta)^{-1}\left(u - C(\theta,\dot{\theta}) - G(\theta)\right) \\
\dot{x}_3 &= -\left\{\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right. \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}}\left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)\right\} \\
\dot{x}_4 &= -\left\{\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} \times \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \times \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\theta}}\right\}
\end{aligned} \tag{44}$$

با جایگزین کردن گشتاور بهینه حاصل از معادله (42) در معادله (44)، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیر خطی بدست می‌آید که در کنار چهار شرط مرزی (32)، یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای حاصل می‌شود که با استفاده از دستور bvp4c در نرم‌افزار متلب می‌توان این مسأله را حل نمود.

4-محاسبه زمان کمینه

بدست آوردن مسیر بهینه با کمترین زمان یک مسأله بسیار پرکاربرد در علم رباتیک می‌باشد [15-22]. با توجه به محدودیت گشتاوری که موتورها دارند، به منظور استفاده از حداکثر توان موتور و حرکت سیستم در کمترین زمان ممکن، مسأله طراحی مسیر زمان بهینه مطرح می‌شود. برای بدست آوردن مسیر بهینه با کمترین زمان باید تابع هدف به صورت معادله (45) در نظر گرفته شود.

$$L = 1 \tag{45}$$

در این صورت تابع $J = t_f$ خواهد شد و موجب کمینه شدن زمان نهایی t_f می‌شود. با جایگذاری رابطه (45) در (36) و سپس جایگذاری تابع همیلتون از معادله (36) در (40)، نامساوی (46) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&1 + {x_2}^*{x_3}^* + {x_4}^*M({x_1}^*)^{-1}\left(u^* - C({x_1}^*,{x_2}^*) - G({x_1}^*)\right) < 1 \\
&\quad + {x_2}^*{x_3}^* + {x_4}^*M({x_1}^*)^{-1}\left(u - C({x_1}^*,{x_2}^*) - G({x_1}^*)\right)
\end{aligned} \tag{46}$$

که از رابطه (46)، نامساوی (47) نتیجه می‌شود.

$${x_4}^*M({x_1}^*)^{-1}u^* < {x_4}^*M({x_1}^*)^{-1}u \tag{47}$$

معادله (47) باید برای هر کنترل قابل قبول u و در کل بازه $t \in [t_0\ t_f]$

برقرار باشد، این رابطه بیان می‌کند که ترم $x_4{}^*M(x_1{}^*)^{-1}u$ باید نسبت به هر کنترل u کمینه شود، این به کنترل u تحمیل می‌کند که همیشه مقادیر حدیش را داشته باشد، بنابرین قانون کنترل بهینه برای برآورده نمودن رابطه (47) باید به صورت زیر در نظر گرفته شود.

$$u=\begin{cases}U^{+} & \text{for}\quad x_2M^{-1}(x_1)<0\\ U^{-} & \text{for}\quad x_2M^{-1}(x_1)>0\end{cases}\qquad (48)$$

تابع $G=x_2M^{-1}(x_1)$ تابع تعویض گفته می‌شود، این نوع کنترل به کنترل بنگ-بنگ[1] معروف می‌باشد، بنابراین برای مینیمم شدن تابع هدف مورد نظر، مقادیر کنترل در کل بازه حرکت، باید روی مقادیر حدی قرار بگیرند، برای حل این مسأله لازم است که زمان‌های تعویض را بدست آورد، از آنجا که محاسبه مستقیم زمان‌های تعویض به راحتی قابل انجام نیست، روشی که در بعضی مقالات برای حل این مشکل به کار رفته به این صورت است که تابع هدف به شکل رابطه (41) در نظر گرفته می‌شود، یعنی مسیر بهینه با کمترین گشتاور به ازای یک t_f معلوم بدست می‌آید، سپس با کاهش مرحله‌ای زمان t_f، کمترین زمان ممکن بدست می‌آید [18].

در ادامه الگوریتمی جهت محاسبه زمان کمینه که در شکل 2 نشان داده شده است، پیشنهاد می‌شود، اساس کار الگوریتم بر مبنای کاهش تدریجی زمان نهایی از یک مقدار اولیه تا رسیدن به کمترین زمان ممکن می‌باشد، در ابتدا مقادیر e، e_d، t_f، e^* و حل اولیه انتخاب می‌شوند، همان‌طور که گفته شد برای حل مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای، در ابتدا لازم است که یک حل اولیه برای شروع فرایند حل انتخاب شود، حل اولیه شامل همه حالت‌ها به ازای $t\in[t_0\ t_f]$ به صورت رابطه (49) در نظر گرفته می‌شود.

$$PreSol=[x_{1\mathrm{pre}}\ x_{2\mathrm{pre}}\ x_{3\mathrm{pre}}\ x_{4\mathrm{pre}}]\qquad (49)$$

t_f مدت زمان انتخابی برای حرکت مکانیزم و e مقداری است که در هر مرحله از t_f کم می‌شود تا در نهایت زمان بهینه بدست آید، برای t_f و e در ابتدای الگوریتم یک مقدار اولیه انتخاب می‌شود و مقدار آنها در طول اجرای الگوریتم تغییر می‌یابد تا t_f به $t_{f\min}$ و مقدار e به e_d برسد، e_d مقدار دقت لازم جهت محاسبه زمان کمینه می‌باشد، در ابتدا مسأله مقدار مرزی به ازای مقادیر اولیه انتخاب شده حل می‌شود، اگر مسأله مقدار مرزی حل شود، حل بدست آمده به عنوان حل اولیه مرحله بعد در PreSol ذخیره می‌شود و در مرحله بعد مسأله به ازای t_f-e حل می‌شود، اگر مسأله مقدار مرزی حل نشود با افزایش k، مقدار e به صورت e/k کاهش می‌یابد، این کاهش e تا زمان حل مجدد مسأله ادامه می‌یابد، نهایتا الگوریتم تا زمانی که مقدار e^* به e_d برسد ادامه می‌یابد، مقدار e^* برابر است با آخرین مقدار e که مسأله حل شده است، با این شرط محاسبه مقدار $t_{f\min}$ با دقت e_d تضمین می‌گردد، جزئیات کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب برای اجرای این الگوریتم در بخش پیوست آمده است.

همان‌طور که در بخش مقدمه اشاره شد، مشکلی که روش غیر مستقیم دارد، انتخاب مناسب حل اولیه می‌باشد، به گونه‌ای که اگر حل اولیه مناسب انتخاب نشود، مسأله مقدار مرزی حل نخواهد شد، حال برای مسأله زمان بهینه مکانیزم چهار لینکی که معادلات بسیار طولانی و شدیدا غیر خطی دارد و نهایتا پاسخ بهینه آن به صورت بنگ بنگ یک تغییر ناگهانی در زمان بسیار کوتاه دارد، مشکل بسیار حادتر خواهد بود، برای رفع این مشکل همان‌طور که در الگوریتم توضیح داده شد، حل هر مرحله به عنوان حل مرحله بعد استفاده می‌شود و این موجب می‌شود که زمان بهینه را بتوان با هر دقت خواسته شده بدست آورد و محدودیتی برای حل مسأله مقدار مرزی وجود نداشته باشد.

[1] Bang-bang

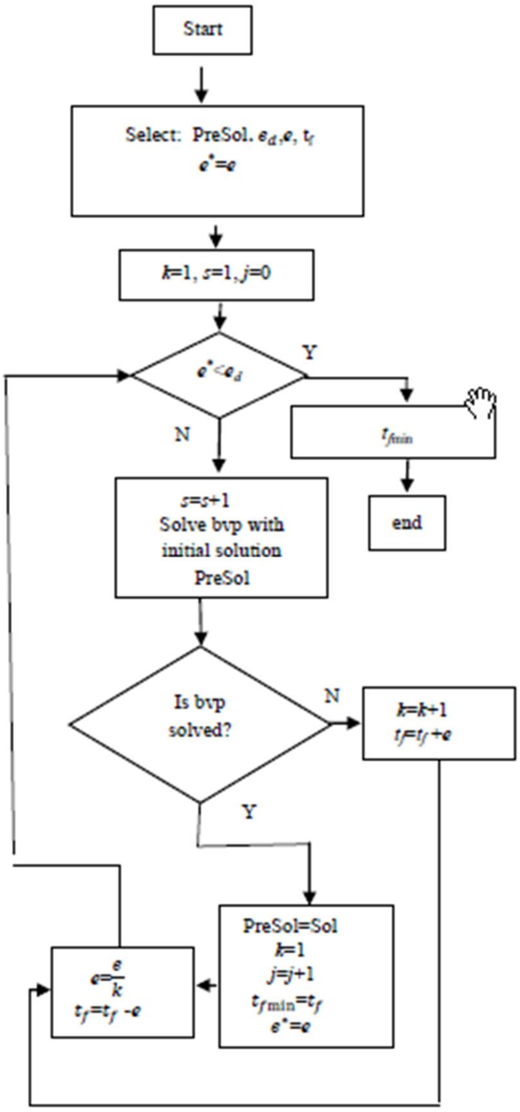

Fig. 2 Algorithm of the time optimal calculation

شکل 2 الگوریتم محاسبه زمان بهینه

5- الگوریتم محاسبه زمان کمینه با جرک محدود

الگوریتم محاسبه زمان کمینه با در نظر گرفتن جرک محدود در شکل 3 نشان داده شده است، در الگوریتم ارائه شده، کاهش تدریجی زمان نهایی از یک مقدار اولیه تا لحظه رسیدن به زمان بهینه صورت می‌گیرد، در هر مرحله مقدار جرک محاسبه شده و با مقدار جرک مطلوب مقایسه می‌شود، در ابتدا مقادیر e_d، e، t_f، $Jk_{\max}$ و حل اولیه انتخاب می‌شوند، e مقداری است که در هر مرحله از t_f کم می‌شود تا زمان بهینه بدست آید، t_f مقدار اولیه زمان نهایی می‌باشد، $Jk_{\max}$ مقدار حداکثر جرک مجاز می‌باشد و e_d مقدار دقت لازم جهت برآورده شدن محدودیت روی جرک می‌باشد، در ابتدا مسأله مقدار مرزی به ازای مقادیر اولیه انتخاب شده حل می‌شود، اگر مسأله مقدار مرزی حل نشود، با افزایش k، مقدار e به صورت e/k کاهش می‌یابد و به t_f اضافه می‌شود، این کاهش e تا زمان حل مجدد مسأله ادامه می‌یابد، اگر مسأله مقدار مرزی حل شود، در ادامه، ماکزیمم جرک در Jk ذخیره می‌شود، اگر Jk از $Jk_{\max}$ بیشتر شود، با افزایش k، مقدار e به صورت e/k کاهش می‌یابد و به t_f اضافه می‌شود، این کاهش e تا زمان حل مجدد مسأله ادامه می‌یابد، اگر Jk از $Jk_{\max}$ کمتر شود، مسأله به ازای t_f-e حل می‌شود و این حل تا رسیدن t_f

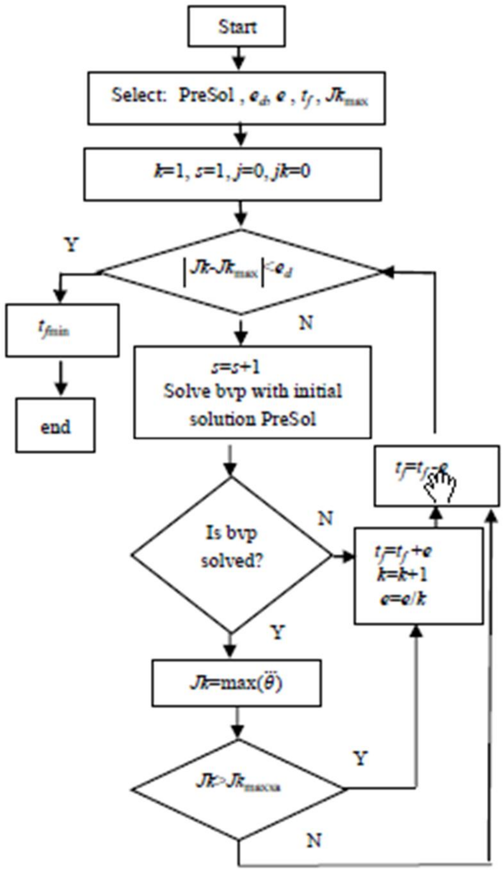

Fig. 3 Algorithm of the time optimal calculation with bounded jerk

شکل 3 الگوریتم محاسبه زمان بهینه با جرک محدود

به $t_{f\min}$ ادامه می‌یابد. جزئیات کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب برای اجرای این الگوریتم در بخش پیوست آمده است.

6- شبیه‌سازی مکانیزم موازی چهار لینکی صفحه‌ای

در این بخش شبیه‌سازی برای مکانیزم چهار لینکی صفحه‌ای که مشخصات آن در جدول 1 آورده شده است، ارائه می‌شود.

1-6-بررسی صحت معادله دینامیکی

به منظور بررسی صحت معادلات دینامیکی استخراج شده، مکانیزم مورد نظر در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار متلب مدل شده است و پاسخ آن با پاسخ دینامیک مستقیم سیستم که از حل معادلات (28) با استفاده از دستور ode45 در نرم‌افزار متلب بدست می‌آید، مقایسه می‌شود. شبیه‌سازی

جدول 1 پارامترهای عددی مربوط به مکانیزم چهارلینکی [26]

Table 1 Relevant numerical parameters for the four-bar mechanism [26]

پارامتر	لینک اول	لینک دوم	لینک سوم	واحد
طول	1	4	2.5	m
جرم	1	1	1	kg
ممان اینرسی	0.0833	1.3333	0.5208	kgm^2
زاویه اولیه	1.5708	0.3533	1.2649	rad
زاویه ثانویه	6.2832	0.5368	0.9582	rad
سرعت اولیه	0	0	0	rad/s
سرعت ثانویه	0	0	0	rad/s

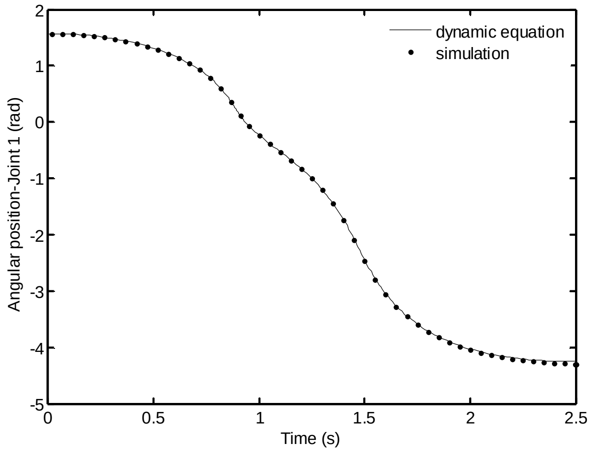

Fig. 4 Angular position of the first joint with respect to time

شکل 4 موقعیت زاویه مفصل اول بر حسب زمان

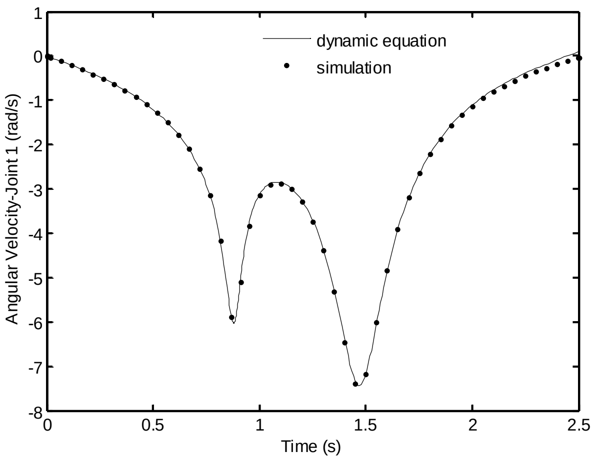

Fig. 5 Angular velocity of the first joint with respect to time

شکل 5 سرعت زاویه مفصل اول بر حسب زمان

مکانیزم تحت نیروی جاذبه و بدون اعمال گشتاور ورودی (u=0) در مدت زمان 2.5 ثانیه انجام می‌گیرد. با توجه به شکل 4 و شکل 5 نمودارهای موقعیت و سرعت زاویه‌ای حاصل از معادله دینامیکی استخراج شده و مکانیزم مدل شده کاملا روی هم منطبق شده‌اند که درستی معادله دینامیکی را نتیجه می‌دهد.

2-6- مسیر بهینه با کمترین زمان

در این قسمت به بررسی دقت و کارایی الگوریتم ارائه شده در شکل 2 پرداخته می‌شود و بر اساس آن مسیر بهینه با کمترین زمان برای مکانیزم چهار لینکی محاسبه می‌شود. پارامترهای فیزیکی مکانیزم در جدول 1 بیان شده است. گشتاور ماکزیمم اعمالی برابر با 9 N.m و گشتاور مینیمم برابر با 9- N.m در نظر گرفته شده است. موقعیت زاویه‌ای مکانیزم در زمان t=0 برابر با 0 و در زمان t=t_f برابر با 30 درجه می‌باشد. سرعت زاویه آن در ابتدا و انتهای بازه حرکتی برابر با صفر در نظر گرفته شده است. مقادیر اولیه به صورت $t_f = 1s, e = 0.1, ed = 0.0001$، PreSol=[0 0 0 0] در نظر گرفته می‌شود. در شکل 6 مراحل طی شده توسط الگوریتم شکل 2 نشان داده شده است. زمان‌هایی که مسأله مقدار مرزی حل شده است با علامت '+' و زمان‌هایی که مسأله حل نشده است با 'o' نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 6 دیده می‌شود در مرحله اول، حل برای t_f = 1

انجام می‌گیرد، مرحله به مرحله از t_f به اندازه e=0.1 کم می‌شود تا زمانی که در تکرار هشتم، t_f=0.4 s شود، از آنجا که این زمان کمتر از زمان کمینه است، واضح است که مسأله مقدار مرزی در این مرحله جواب نخواهد داشت، سپس مقدار e پله به پله کاهش می‌یابد تا مجددا در تکرار دوازدهم مسأله حل می‌شود، حل مسأله ادامه می‌یابد تا نهایتا زمان بهینه با دقت 0.0001 در مرحله هفدهم برابر با $t_{f\min}$=0.49868 s بدست آید.

موقعیت، سرعت، شتاب و جرک مفصل 1 به ترتیب در شکل‌های 7 تا 10 به ازای مقادیر مختلف t_f نشان داده شده است. در شکل 9 تغییر ناگهانی شتاب در زمان حدود $0.85t_f$ در چهار نمودار آخر به خوبی نمایان است، همان‌طور که از چهار منحنی آخر شکل 10 دیده می‌شود وقتی زمان از t_f=0.5 تا $t_{f\min}$=0.49868 تغییر می‌کند یعنی به اندازه 0.00132s کاهش می‌یابد، جرک ماکزیمم از 300 به 900 افزایش می‌یابد. این نشان می‌دهد که با نزدیک شدن به زمان کمینه مطلق، مقدار ماکزیمم جرک به سمت بینهایت میل می‌کند.

شکل 11 نیز نمودار گشتاور بهینه موتور را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد، همان‌طور که در شکل 11 مشاهده می‌شود با رسیدن زمان حرکت به زمان بهینه t_f=0.49868 s، منحنی گشتاور کاملا حالت پله‌ای و یا همان بنگ بنگ را پیدا می‌کند.

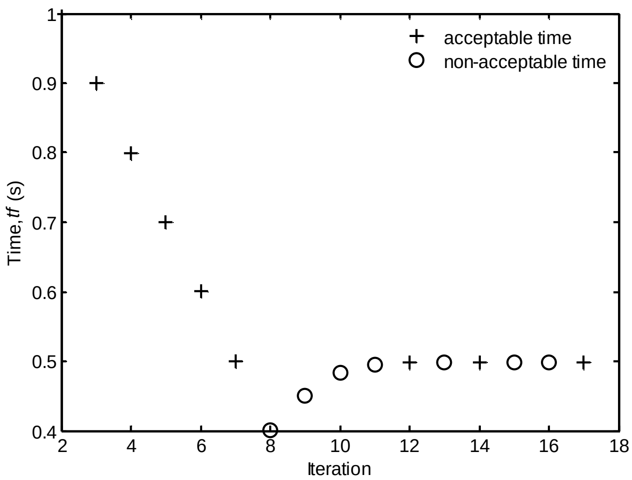

Fig. 6 Motion time in each iterations

شکل 6 زمان حرکت در هر تکرار

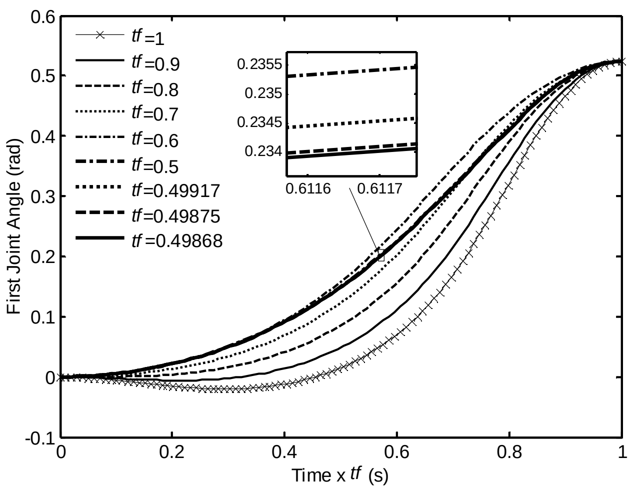

Fig. 7 Angular position of first joint with respect to time

شکل 7 موقعیت زاویه مفصل اول بر حسب زمان

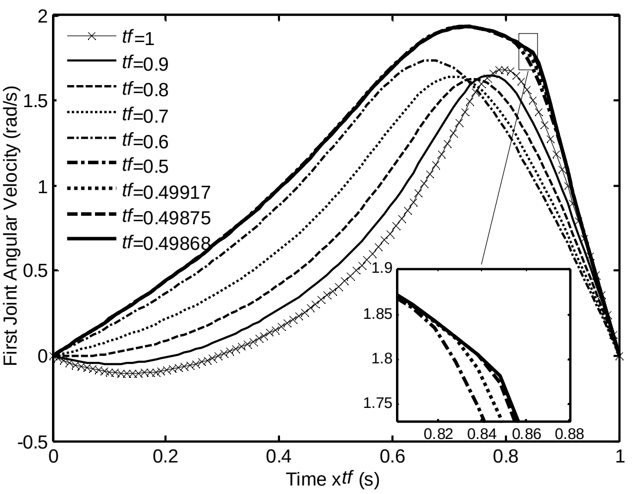

Fig. 8 Angular velocity of fist joint with respect to time

شکل 8 سرعت زاویه‌ای مفصل اول بر حسب زمان

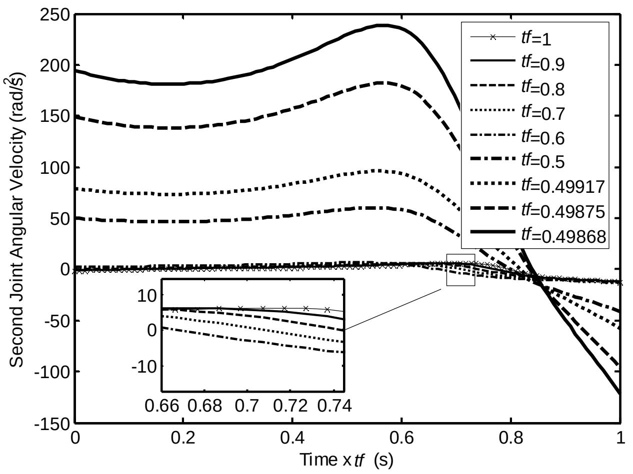

Fig. 9 Angular acceleration of fist joint with respect to time

شکل 9 شتاب زاویه‌ای مفصل اول بر حسب زمان

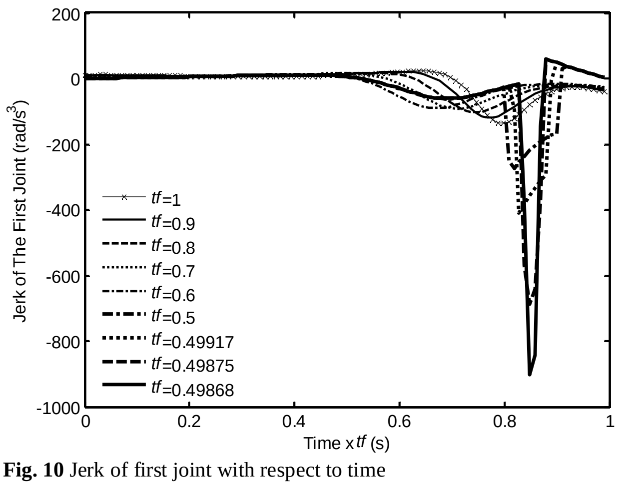

Fig. 10 Jerk of first joint with respect to time

شکل 10 جرک مفصل اول بر حسب زمان

3-6- مسیر بهینه در کمترین زمان با جرک محدود

در این قسمت به بررسی دقت و کارایی الگوریتم ارائه شده در شکل 3 پرداخته می‌شود و بر اساس آن مسیر بهینه با کمترین زمان با جرک محدود

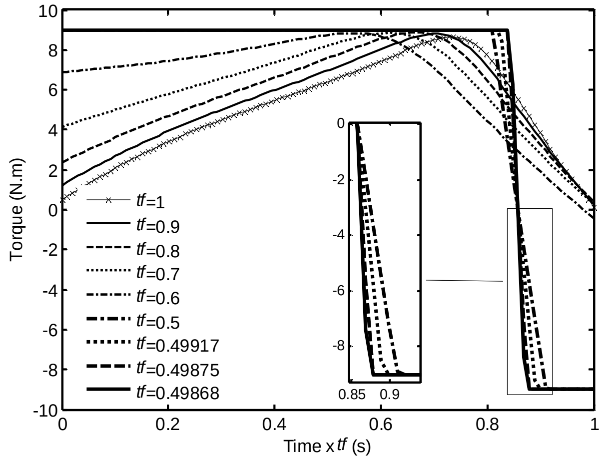

Fig. 11 Optimal torque of first joint with respect to time

شکل 11 گشتاور بهینه مفصل اول بر حسب زمان

برای مکانیزم چهار لینکی محاسبه می‌شود. کلیه پارامترهای فیزیکی شبیه حالت قبل در جدول 1 بیان شده است. شرایط مرزی نیز شبیه حالت قبل می‌باشد. بیشترین مقدار جرک برابر با $150\ rad/s^3$ در نظر گرفته می‌شود. مقادیر اولیه به صورت:

$$PreSol = [0\ 0\ 0\ 0], t_f = 1s, e = 0.11,$$
$$ed = 5, Jk_{\max} = 150 \frac{rad}{s^3}$$

در نظر گرفته می‌شود. در شکل 12 مراحل طی شده توسط الگوریتم شکل 3 نشان داده شده است. زمان‌هایی که مسأله مقدار مرزی حل شده است با علامت '*' و '+'، و زمان‌هایی که مسأله حل نشده است با علامت 'o' نشان داده شده است. همچنین زمان‌هایی که $Jk>Jk_{\max}$ باشد با علامت '+' و زمان‌هایی که $Jk<Jk_{\max}$ باشد با علامت '*' نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 12 دیده می‌شود در مرحله اول، حل برای $t_f=1$ انجام می‌گیرد. مرحله به مرحله از t_f به اندازه $e=0.11$ کم می‌شود تا زمانی که در تکرار هفتم، این زمان کمتر از زمان کمینه است و مسأله مقدار مرزی در این مرحله جواب نخواهد داشت. سپس مقدار e کاهش می‌یابد تا مجددا در تکرار هشتم مسأله حل می‌شود. اما در تکرار هشتم، جرک محاسبه شده بیش از حد مجاز است. بنابراین زمان افزایش می‌یابد به گونه‌ای که در تکرار دهم، جرک کمتر از حد مجاز می‌شود. حل مسأله به همین صورت ادامه می‌یابد تا نهایتا زمان بهینه با جرک محدود با دقت مورد نظر در مرحله پانزدهم برابر با $t_{f\min}=0.5132$ s بدست می‌آید. همان‌طور که انتظار می‌رفت، زمان بهینه در این حالت کمی بیشتر از زمان بهینه در حالت بدون محدودیت جرک بدست آمد.

نمودارهای موقعیت، سرعت، شتاب و جرک مفصل 1 به ترتیب در شکل های 13 تا 16 به ازای مقادیر مختلف t_f نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 15 دیده می‌شود، دیگر آن شکستگی در نمودار شتاب شبیه حالت قبل دیده نمی‌شود. از شکل 16 نیز می‌توان دید که مقدار جرک ماکزیمم برای حالت نهایی از 150 بیشتر نشده است. شکل 17 نمودار گشتاور بهینه موتور را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود در این شکل نیز گشتاور از حالت بنگ-بنگ دور شده و تغییرات گشتاور ملایم‌تر شده است.

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله، طراحی مسیر زمان بهینه برای مکانیزم چهار لینکی صفحه‌ای بر اساس حل غیر مستقیم مسأله کنترل بهینه ارائه شده است. با بررسی تاریخچه موضوع، مشاهده می‌شود که مسأله طراحی مسیر برای مکانیزم چهار لینکی تاکنون به روش غیر مستقیم انجام نگرفته است و در این بین، طراحی

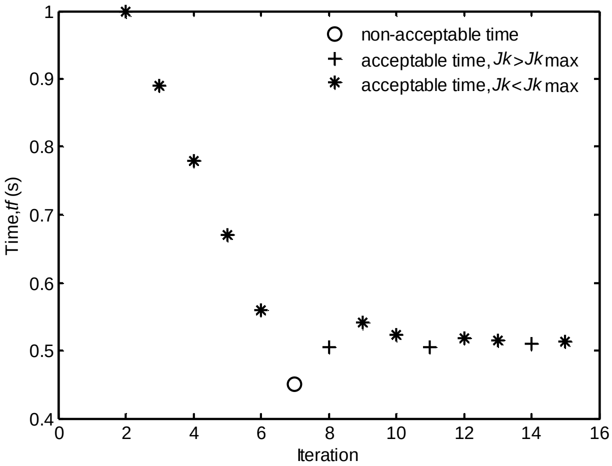

Fig. 12 Motion time in each iterations

شکل 12 زمان حرکت در هر تکرار

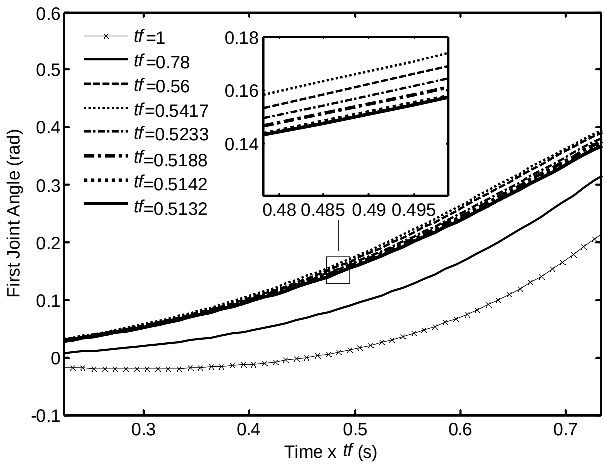

Fig. 13 Angular position of first joint with respect to time

شکل 13 موقعیت زاویه مفصل اول بر حسب زمان

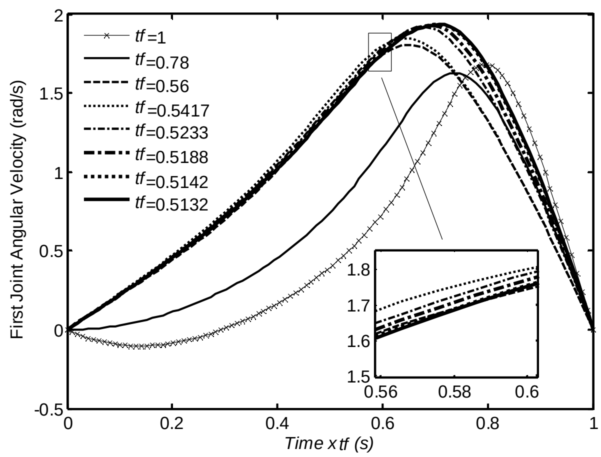

Fig. 14 Angular velocity of first joint with respect to time

شکل 14 سرعت زاویه مفصل اول بر حسب زمان

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.42.9]

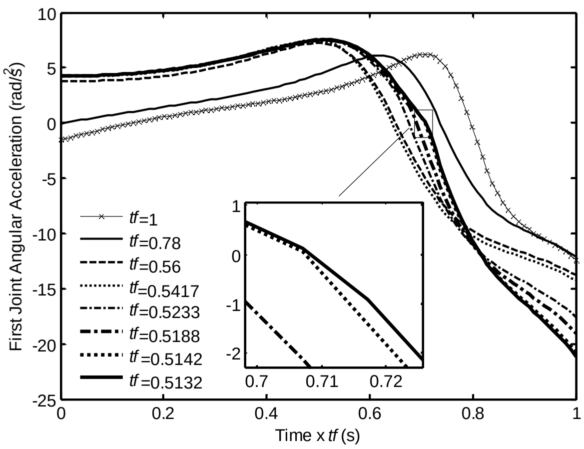

Fig. 15 Angular acceleration of first joint with respect to time

شکل 15 شتاب زاویه مفصل اول بر حسب زمان

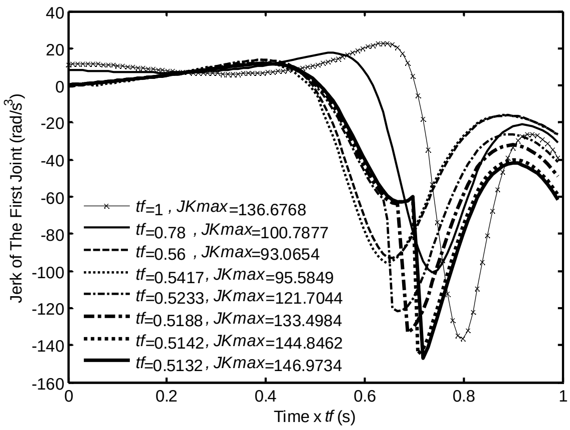

Fig. 16 Jerk of first joint with respect to time

شکل 16 جرک مفصل اول بر حسب زمان

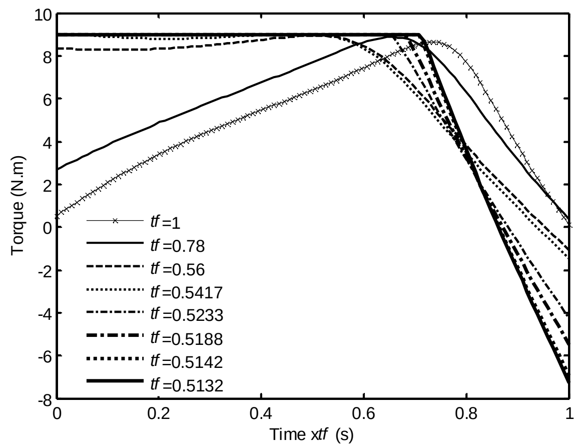

Fig. 17 Optimal torque of first joint with respect to time

شکل 17 گشتاور بهینه مفصل اول بر حسب زمان

مسیر زمان بهینه برای این نوع مکانیزم نه به روش مستقیم و نه غیر مستقیم تاکنون حل نشده است. در اینجا قید هولونومیک ناشی از حلقه بسته بودن مکانیزم، در معادلات دینامیکی جایگذاری می‌شود تا نهایتا معادله حرکت تنها بر حسب یک مختصات تعمیم یافته بدست آید. سپس شرایط لازم بهینگی براساس قضیه اساسی حساب تغییرات و اصل مینیمم پونتریاگن بدست می‌آید. برای حل مسأله زمان بهینه یک الگوریتم کارا ارائه می‌شود. این الگوریتم علاوه بر این که جواب مورد نظر را با دقت مطلوب بدست می‌آورد، سرعت قابل قبولی نیز دارد و با تعداد تکرار نسبتا کمی به جواب نهایی می‌رسد. علاوه بر این به گونه‌ای طرح ریزی شده است که مشکل حل اولیه برطرف شود. در الگوریتم ارائه شده با نزدیک شدن زمان حرکت به زمان بهینه مطلق، جرک به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد و به سمت بینهایت میل می‌کند. برای رفع این مشکل، الگوریتمی پیشنهاد شده است که زمان بهینه را با اعمال محدودیت روی جرک، بدست می‌آورد. نهایتا با شبیه‌سازی‌های انجام گرفته، صحت معادلات دینامیکی بررسی گردیده و دقت و کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی در بدست آوردن مسیر زمان بهینه و زمان بهینه با جرک محدود برای مکانیزم چهار لینکی نشان داده شده است.

8- پیوست

کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب برای حل مسأله طراحی مسیر زمان بهینه بر اساس الگوریتم شکل 2 در ادامه آمده است. در این برنامه a@ فانکشن مربوط به معادلات بهینگی (44) می‌باشد. b@ فانکشن مربوط به شرایط مرزی (32) می‌باشد. solvebvp فانکشن حل مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای می‌باشد و هسته اصلی آن همان دستور bvp4c می‌باشد. این فانکش دو خروجی outs و solo دارد. حل مسأله مقدار مرزی در متغیر solo ذخیره می‌شود و مقدار outs حل مسأله یا عدم حل آنرا نشان می‌دهد. در استفاده معمول از دستور bvp4c، زمانی که مسأله مقدار مرزی به دلیل خطای ژاکوبین تکین حل نشود، اجرای برنامه متوقف می‌گردد. با اصلاحی که در دستور bvp4c داده شده است، اگر مسأله مقدار مرزی با دقت خواسته شده حل گردد مقدار outs مساوی صفر قرار داده می‌شود، در غیر این صورت عددی مخالف صفر خواهد داشت. بنابراین می‌توان به راحتی شرط حل شدن یا حل نشدن مسأله مقدار مرزی را در برنامه چک نمود و بر اساس آن الگوریتم به طور پیوسته ادامه یابد.

```
clear
tf=1;
sol = bvpinit(linspace(0,1,20),[0 0 0 0]);
e=.1*tf;es=e;ed=.0001;k=1;s=1;j=0;
while ed<es
ttf(s)=tf;
   s=s+1;
[solo,outs]=solvebvp(@a,@b,sol);

  if outs==0
     k=1; j=j+1;tfmin(j)=tf;

      figure (5)
      hold on
      plot(s,tf,'+')

      sol=solo;
      es=e;
    else
      figure (5)
      hold on
      plot(s,tf,'O')

      k=k+1;
      tf=tf+e;
  end
e=e/k;
tf=tf-e;
end
```

کد نوشته شده در نرم‌افزار مت‌لب برای حل مسأله طراحی مسیر زمان بهینه با جرک محدود بر اساس الگوریتم شکل 3 آمده است. اساس کار این کد، مشابه کد الگوریتم شکل 2 می‌باشد با این تفاوت که برنامه نویسی برای اعمال محدودیت در جرک، انجام شده است.

```
clear
tf=1;
solver = 'GeOCPbvp4c';
sol = bvpinit(linspace(0,1,20),[0 0 0 0]);
JKmax=150;ed=5;e=.11;k=1;s=1;j=0;JK=0;
while abs(JK-JKmax)>ed
abs(JK-JKmax);
ttf(s)=tf
   s=s+1;
[solo, outs, times]=GeOCPbvp4c(@a,@b,sol,options,inf);
  if outs==0
      xx=linspace(0,1);yy=deval(solo,xx)
n=size(xx);n=n(2);
      sol=solo;
  for i=1:n
      %calculate T(i) and thdd(i)
  end
  for i=1:n-1
    thddd(i)=(thdd(i+1)-thdd(i))/(xx(i+1)-xx(i));
  end
      JKmax=max(abs(thddd));
  if JK>JKmax
      figure (1);hold on;plot(s,tf,'+')
      tf=tf+e;k=k+1;e=e/(k)
  else
      figure (1);hold on;plot(s,tf,'*')
  end
  else
      figure (1);hold on;plot(s,tf,'O')
      tf=tf+e;k=k+1;e=e/(k);
end
tf=tf-e;
end
```

9-مراجع

[1] S. K. Acharyya, M. Mandal, Performance of EAs for four-bar linkage synthesis, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, No. 9, pp. 1784–1794, 2009.

[2] P. Choudhary, P. Mishra, V. R. Dwivedi, A proprioceptive discussion on mechanism used for knee joint from 2000-2012:a literature review, *International Journal of Scientific and Research Publications*, Vol. 4, No. 5, pp. 1-7, 2014.

[3] K. Chaudhary, H. Chaudhary, Shape optimization of dynamically balanced planar four-bar mechanism, *Procedia Computer Science*, Vol. 57, No. 1, pp. 519 – 526, 2015.

[4] M. Acevedo, E. Haro, F. Martínez, An alternative method for the optimum dynamic balancing of the four-bar mechanism, *Multibody Mechatronic Systems*, pp. 177-187, Switzerland: Springer, 2014.

[5] S. S. Shete, S. A. Kulkarni, Dimensional synthesis of four bar mechanism using genetic algorithm, *International Journal of Engineering Research*, Vol. 4, No. 3, pp. 123 - 126, 2015.

[6] S. Ebrahimi, P. Payvandy, Efficient constrained synthesis of path generating four-bar mechanisms based on the heuristic optimization algorithms, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 85, No. 1, pp. 189–204, 2015.

[7] T. Chettibi, H. E. Lehtihet, M. Haddad, S. Hanchi, Minimum cost trajectory planning for industrial robots, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 23. No. 4, pp. 703–715, 2004.

[8] A. Gasparetto, V. Zanotto, Optimal trajectory planning for industrial robots, *Advances in Engineering Software*, Vol. 41, No. 4, pp. 548–556, 2010.

[9] R. Callies, P. Rentrop, Optimal control of rigid-link manipulators by indirect methods, *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 31, No. 1, pp. 27-58, 2008.

[10] M. H. Korayem, H. N. Rahimi, A. Nikoobin, Path planning of mobile elastic robotic arms by indirect approach of optimal control, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 8, No. 1, pp. 10-20, 2011.

[11] P. Boscariol, A. Gasparetto, Model-based trajectory planning for flexible-link mechanisms with bounded jerk, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29, No. 4, pp. 90-99, 2013.

[12] B. Mashadi, M. Majidi, Global optimal path planning of an autonomous vehicle for overtaking a moving obstacle, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No. 14, pp. 2555-2572, 2014.

[13] M. Salehi, A. Nikoobin, Optimal trajectory planning of flexible joint manipulator: Maximum load carrying capacity-minimum vibration, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 14, pp. 68-80, 2014. (in Persian فارسی)

[14] A. Nikoobin, M. Moradi, Optimal balancing of the robotic manipulators, *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, pp. 337-363, Switzerland: Springer, 2016.

[15] H. Liu, X. Lai, W. Wu, Time-optimal and jerk-continuous trajectory planning for robot manipulators with kinematic constraints, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29, No. 2, pp. 309–317, 2013.

[16] A. D. Dubey, R. B. Mishra, A. K. Jha, Task time optimization of a robot manipulator using artificial neural network and genetic algorithm, *International Journal of Computer Applications*, Vol. 51, No. 13, pp. 26-33, 2012.

[17] M. T. Ghorbani, H. Salarieh, N. Assadian, Time optimal trajectory planning for a high speed planing boat, *Journal of Control*, Vol. 5, No. 3, pp. 57–68, 2011. (in Persian فارسی)

[18] M. H. Ghasemi, N. Kashiri, M. Dardel, Time-optimal trajectory planning of robot manipulators in point-to-point motion using an indirect method, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 226, No. 2, pp. 473-484, 2011.

[19] Y. S. Lu, R. Shieh, A jerk-constrained time-optimal servo with disturbance compensation, *Control Engineering Practice*, Vol. 28, No.1, pp. 49-57, 2014.

[20] Y. P. Xu, Y. Hong, Time optimal path planning of palletizing robot, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 470, No.1, pp. 658-662, 2014.

[21] S. Behzadipour, A. Khajepour, Time-optimal trajectory planning in cable-based manipulators, *IEEE Transaction on Robotics*, Vol. 22, No. 3, pp. 559-563, 2006.

[22] C. T. Chen, T. T. Liao, A hybrid strategy for the time-and energy-efficient trajectory planning of parallel platform manipulators, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 27, No. 1, pp. 72–81, 2011.

[23] J. Hu, X. Zhang, J. Zhan, Trajectory planning of a novel 2-DoF high-speed planar parallel manipulator, *Intelligent Robotics and Applications*, pp. 199-207, Berlin Heidelberg: Springer, 2008.

[24] O. L. Silva, L. L. Menegaldo, Inverse dynamics of redundantly actuated four-bar mechanism using optimal control formulation, *19th International Congress of Mechanical Engineering*, Brasilia, 2007.

[25] B. C. Fabien, Parallel collocation solution of index-1 BVP-DAEs arising from constrained optimal control problems, *Numerical Algorithms*, Vol. 71, No. 2, pp. 311-335, 2016.

[26] C. P. Tang. *Lagrangian Dynamic Formulation of a Four-Bar Mechanism with minimal coordinates*, Accessed 2010; http://www.nonholonomic.com/pdf/FourbarMinimalCoordinates.pdf.

[27] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*, Dover Publications Inc, New York, 2004.