



## مدل سازی عددی انتشار موج خمشی برای تخمین آسیب توسط روش بی شبکه درونیابی نقطه ای شعاعی هرمیتی مبتنی بر تابع پایه گائوسی

علی منصوری<sup>1</sup>، حسین غفارزاده<sup>2\*</sup>، مجید برقیان<sup>2</sup>، مرتضی همایون صادقی<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران - سازه، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشیار، مهندسی عمران - سازه، دانشگاه تبریز، تبریز

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

\* تبریز، صندوق پستی 51666، ghaffar@tabrizu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 خرداد 1395

پذیرش: 02 شهریور 1395

ارائه در سایت: 16 آبان 1395

کلید واژگان:

روش بی شبکه

انتشار موج

شناسایی آسیب

تابع پایه شعاعی

روش درونیابی نقطه ای شعاعی

### چکیده

در پایش سلامت سازه های، طیف وسیعی از روش های عددی، هریک با مزایا و معایب خاص خود، برای تحلیل انتشار موج توسعه یافته اند. در این چهارچوب، تحلیل برخی از مسائل همچون ایجاد آسیب و رشد آن و در نهایت شکست مصالح، توسط روش های بی شبکه مناسب تر است. در این پژوهش، مدل سازی عددی انتشار موج خمشی و تخمین شدت آسیب در تیر اولر - برنولی توسط روش بی شبکه درونیابی نقطه ای شعاعی هرمیتی با کد نویسی در محیط نرم افزار متلب بررسی می شود. این روش، توابع پایه شعاعی و مشتقات آنها را در تابع درونیابی بکار می گیرد و فرمول بندی هرمیتی را ارائه می دهد. ارزیابی عملکرد و کارایی این روش مبتنی بر مقایسه سیگنال ثبت شده با سیگنال مرجع توسط معیار خطای جذر میانگین مربعات و مقایسه ضریب بازتاب موج بدست آمده از آسیب می باشد. الگوریتم تخمین شدت آسیب یک راه حل تحلیلی است که میزان موج بازتابیده از آسیب را به شدت آسیب مرتبط می سازد. تابع پایه شعاعی انتخابی از نوع گائوسی در نظر گرفته شده و کمیت های مؤثر بر نتایج محاسبات عبارتند از: تعداد نقاط میدانی، اندازه دامنه پایه، پارامترهای شکل تابع پایه گائوسی، تعداد چندجمله ای های بکار رفته در درونیابی، آرایش سلول های زمینه و تعداد نقاط گائوسی انتگرال گیری واقع در ناحیه آسیب. در نهایت بر اساس ارزیابی های این پژوهش، مقادیر قابل قبول دامنه مناسب هر یک از کمیت های فوق برای رسیدن به مدل سازی صحیح و دقت مناسب ارائه می گردد.

## Numerical modeling of flexural wave propagation for damage quantification using Hermite radial point interpolation method based on Gaussian RBF

Ali Mansouri<sup>1</sup>, Hosein Ghaffarzadeh<sup>1\*</sup>, Majid Barghian<sup>1</sup>, Morteza Homayoun Sadeghi<sup>2</sup>

1- Department of Structural Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

\* P.O.B. 51666, Tabriz, Iran. ghaffar@tabrizu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 07 June 2016

Accepted 23 August 2016

Available Online 06 November 2016

### Keywords:

Meshless methods

Wave propagation

damage identification

Radial Basis Function

Radial point interpolation method

### ABSTRACT

A variety of numerical methods were developed for the wave propagation analysis in the field of structural health monitoring. In this framework, meshless methods are suitable procedure for the analysis of problems such as damage initiation and its propagation or the fracture of materials. In this study, Hermit-type radial point interpolation method (HRPIM) is investigated for the numerical modeling of flexural wave propagation and damage quantification in Euler-Bernoulli beams using MATLAB. This method employs radial basis function (RBF) and its derivatives for interpolation which leads to Hermitian formulation. The evaluation of performance and capability of HRPIM is based on the comparison between the captured HRPIM and benchmark signals using the root mean square error (RMSE) and reflection ratio from damage. The algorithm of damage quantification is the analytical solution which relates the reflection ratio to the damage extent. In this study, Gaussian-type RBF is utilized and the number of field nodes, the size of support domain, shape parameters of RBF, the number of polynomials in the interpolation formula, the arrangement of background cells and the number of Gaussian points in damage length are the effective parameters on results. Based on the evaluation, the acceptable values and range of these parameters are presented for correct modeling.

### 1- مقدمه

موج مشاهده می شود که در حالت کلی می توان آنها را در دامنه های زمان، فرکانس و زمان - فرکانس تقسیم بندی نمود. رایج ترین این روش ها، روش اجزاء محدود است که عملکرد آن در انتشار موج قابل قبول گزارش شده ولی دارای محدودیت هایی است [1,2]. با توجه به اینکه بارگذاری با فرکانس بالا، با طول موج کوتاه همراه است، از این رو شبکه بندی با تراکم بالا و بسیار ریز و

انتشار موج یکی از کاراترین ابزارهای تعیین آسیب های ریز در اجزای سازه ای است؛ به گونه ای که با اعمال یک سیگنال محرک با فرکانس بالا و مطالعه اندرکنش سیگنال مذکور با آسیب موجود، می توان به وجود، مکان و شدت آسیب پی برد. در متون فنی روش های عددی متعددی برای مدل سازی انتشار

Please cite this article using:

A. Mansouri, H. Ghaffarzadeh, M. Barghian, M. Homayoun Sadeghi, Numerical modeling of flexural wave propagation for damage quantification using Hermite radial point interpolation method based on Gaussian RBF, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 244-254, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مناسب برای تابع پایه شعاعی انتخاب شده و سایر پارامترهای دخیل است که دقت پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. رپبا [20] طی یک الگوریتم بهینه‌سازی، دقت مورد نیاز، تعداد نقاط موجود و نحوه توزیع آنها را در یک تابع هدف در نظر گرفته و پارامترهای شکل بهینه تابع پایه شعاعی چندربعی، چندربعی معکوس<sup>8</sup> و گائوسی را در مسئله برازش یک منحنی ارائه داد. ونگ و لیو [21] تأثیر پارامترهای شکل توابع چند ربعی و گائوسی را در مکانیک جامدات یک محیط دوبعدی مدل‌سازی شده با RPIM، با مطالعه عدد حالت<sup>9</sup> دستگاه معادلات حاکم، بررسی نموده و مقادیر مشخصی را پیشنهاد نمودند. بوزکورت و همکارانش [22] تأثیر پارامترهای شکل را در دقت نتایج روش RPIM در مسائل غیر خطی هندسی بررسی کردند. همچنین کانبر و همکارانش [23] تأثیر پارامترهای شکل مختلف را در نرخ همگرایی یک مسئله الاستوپلاستیک کامل و سخت شونده را با روش RPIM و توابع پایه چندربعی ارزیابی نمودند.

بر این اساس، پژوهش حاضر به بررسی مدل‌سازی انتشار موج خمشی و تخمین شدت آسیب در یک تیر اولر-برنولی می‌پردازد که در موقعیت مشخصی از طول آن یک آسیب پیش‌فرض بصورت افت پله‌ای ضخامت و با طول بسیار کوتاه، به منزله یک ترک، در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی مذکور بصورت روش بی شبکه درونیابی نقطه‌های شعاعی مبتنی بر تابع پایه شعاعی گائوسی و با توجه به یک بعدی بودن مدل و در نظر گرفتن دوران نقاط به عنوان درجات آزادی مستقل، از نوع هرمیتی می‌باشد. الگوریتم تخمین شدت آسیب مبتنی بر یک راه حل تحلیلی است که میزان موج بازتابیده از آسیب را به شدت آسیب، عمق ترک، مرتبط می‌سازد. ضریب بازتاب بر اساس منحنی پوش انرژی سیگنال برخوردی و بازتابی ثبت شده در یک موقعیت مشخص تعیین می‌گردد. کمیت‌های مورد مطالعه، تعداد نقاط میدانی، اندازه دامنه پایه، پارامترهای شکل تابع پایه شعاعی، تعداد چندجمله‌ای‌ها در درونیابی و آرایش سلول‌های زمینه را شامل می‌شود.

## 2- فرمول بندی مسأله

### 2-1- روش درونیابی نقطه‌های شعاعی هرمیتی

توابع پایه شعاعی توابعی هستند که مقدار تابع فقط به فاصله میان نقطه مرکز و نقاط پراکنده واقع در دامنه بستگی دارد. جهت جلوگیری از تکینگی در روش درونیابی نقطه‌های متعارف، RBFها جایگزین چندجمله‌ای‌ها شده و با افزودن چندجمله‌ای‌ها آزمون وصله<sup>10</sup> را می‌توان تضمین نمود. همچنین برای در نظر گرفتن مشتقات تابع به عنوان متغیرهای مستقل، مشتقات RBFها به عبارت درونیابی افزوده می‌شوند. بنابراین تابع  $u(x)$  توسط ترکیب خطی (1) برای یک مدل تیر یک بعدی با دو درجه آزادی جابجایی و دوران در هر گره، در امتداد محور  $x$  تقریب زده می‌شود [19]:

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{i=1}^n R_{i,x}(x) a_i^x + \sum_{j=1}^m P_j(x) b_j \\ &= R^T(x) a + R_x^T(x) a^x + P^T(x) b \\ &= [R^T(x) \quad R_x^T(x) \quad P^T(x)] \{a \quad a^x \quad b\}^T \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $R_i(x)$  و  $R_{i,x}(x)$  به ترتیب تابع پایه شعاعی و مشتق آن بوده و  $P_j(x)$  چندجمله‌ای‌ها هستند.  $R$ ،  $R_x$  و  $P$  نیز به ترتیب فرم ماتریسی کمیت‌های مذکور بوده و  $T$  نشان ترانهاده است.  $a_i$ ،  $a_i^x$  و  $b_j$  ضرایب مجهول

درجات آزادی قابل توجهی برای در نظر گرفتن دقیق‌تر انرژی موج لازم می‌باشد. این محدودیت، هزینه محاسبات را بالا برده و محققان را برای یافتن روش‌های جایگزین تشویق نموده است. روش‌های اجزاء محدود اصلاح شده [3]، اجزاء مرزی [4]، مدل شبکه جرم- فنر [5] و اجزاء محدود طیفی [6] روش‌های جایگزینی هستند که در متون فنی برای انتشار موج و شناسایی آسیب گزارش شده‌اند. با این حال روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی برای مسائلی که با ناهمگنی قابل توجه مصالح، اعوجاج شبکه‌ها و ناپیوستگی‌هایی که در لبه شبکه‌ها واقع نیستند، مخصوصاً گسترش ترک، مناسب نمی‌باشند [7]. جهت غلبه بر این نواقص رهیافت‌های بی شبکه مطرح شده‌اند [8]. ون [9] از روش بی شبکه پتروف-گالرکین موضعی (MLPG)<sup>1</sup> برای حل مسأله انتشار موج در محیط‌های متخلخل استفاده کرد. گائو و همکارانش [10] یک روش MLPG اصلاح شده‌ای را برای تحلیل انتشار موج در محیط ترک‌یافته و غیرایزوتروپ پیشنهاد کردند. داس و کوندو [11] مدل میدان فراصوتی در یک محیط لایه لایه سالم و دارای ترک را با استفاده از روش بی شبکه منبع نقطه‌ای توزیع شده نیمه تحلیلی<sup>2</sup> شبیه سازی نمودند.

در میان روش‌های متعددی بی شبکه، ونگ و لیو [12] نظر به قابلیت‌های توابع پایه شعاعی (RBF)<sup>3</sup> در تقریب و درونیابی داده‌های پراکنده چندمتغیره و حل معادلات دیفرانسیل جزئی، با ترکیب توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای‌ها، روش درونیابی نقطه‌های شعاعی (RPIM)<sup>4</sup> را جهت غلبه بر محدودیت‌های روش درونیابی نقطه‌های متعارف پیشنهاد دادند. این روش خاصیت تابع دلتای کرونگر را در توابع شکل تامین نموده و امکان اعمال شرایط مرزی اساسی را فراهم می‌نماید. همچنین مشکل ناپایداری محاسبات و تکینگی ماتریس‌ها در توزیع‌های منظم و نامنظم نقاط دامنه نیز تضمین می‌گردد. این روش در چهارچوب فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل در مسائل متعدد مکانیک جامدات [13,14] و مواد مرکب [15] به کار گرفته شده است. در زمینه انتشار موج، غفارزاده و منصوری [16] انتشار موج طولی در میله را بر اساس مدل‌سازی RPIM در مسأله شناسایی جرم افزون و با انتخاب تابع پایه چندربعی<sup>5</sup>، مطالعه نموده و تأثیر پارامترهای مختلف تعداد نقاط میدانی و پارامترهای شکل چندربعی را ارزیابی نمودند.

در برخی مسائل، در نظر گرفتن مشتقات تابع میدان به عنوان متغیرهای مستقل از مقدار خود تابع، ضرورت می‌یابد. در این زمینه، وو [17] رهیافت درونیابی شعاعی هرمیتی را بر اساس درونیابی هرمیت-بیرخوف<sup>6</sup> برای تقریب داده‌های چندبعدی پراکنده مطرح کرد. در زمینه مکانیک جامدات، لیو و همکارانش [18] روش درونیابی نقطه‌های شعاعی هرمیتی<sup>7</sup> (HRPIM) را برای تقریب میدان جابجایی در حل فرم ضعیف گالرکین معادله دیفرانسیل حاکم بر ورق کیرششف بکار برده و با تحلیل استاتیکی اشکال مختلف ورق با شرایط مرزی مختلف، کارایی، دقت و قوت روش مذکور را نشان دادند. همچنین کوئی و همکارانش [19] برپایه روش هموارسازی گرادیان، یک HRPIM هموار را برای تحلیل جابجایی ورق نازک توسعه داده و با تقریب متغیرهای جابجایی و دوران و قابلیت اعمال شرایط مرزی اساسی، حتی برای سلول‌های انتگرال‌گیری بسیار نامنظم نیز دقت بسیار قبولی را بدست آوردند. چالش مهم در کاربرد RPIM و HRPIM انتخاب پارامترهای شکل

<sup>1</sup> Local Petrov-Galerkin method

<sup>2</sup> Semi-analytical distributed point source method

<sup>3</sup> Radial Basis Functions (RBFs)

<sup>4</sup> Radial point interpolation method (RPIM)

<sup>5</sup> Multi-Quadric (MQ)

<sup>6</sup> Hermite-Birkhoff interpolation

<sup>7</sup> Hermite radial point interpolation

<sup>8</sup> Inverse Multi-Quadric (MQ)

<sup>9</sup> Condition number

<sup>10</sup> Patch test

در نظر گرفته می‌شود.

## 2-2- تحلیل انتشار موج

در یک مسئله الاستودینامیک معادله حرکت حاکم عبارت است از [25]:

$$L^T \sigma + b = \rho \ddot{u} + \eta_c \dot{u}, \quad \Omega \text{ در دامنه} \quad (12)$$

$$\sigma = D \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (13)$$

که در آن  $L$  اپراتور دیفرانسیل،  $\sigma$  و  $\varepsilon$  به ترتیب تنش و کرنش،  $b$  نیروی حجمی،  $\rho$  چگالی و  $\eta_c$  پارامتر میرایی است.  $\dot{u}$  و  $u$  به ترتیب شتاب، سرعت و جابجایی‌اند و  $\nabla u$  گرادیان ماتریس جابجایی است. شرایط مرزی طبیعی و اساسی مطابق روابط (14) عبارتند از:

$$\sigma \cdot n = \bar{t}, \quad \Gamma_t \text{ بر روی} \quad (14)$$

$$u = \bar{u}, \quad \Gamma_u \text{ بر روی}$$

که  $\bar{u}$  جابجایی معین بر روی مرز اساسی  $\Gamma_u$  و  $\bar{t}$  تنش‌های معین بر مرز طبیعی است.  $n$  نشانگر بردار واحد عمود بر مرز کل جسم ( $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ ) است. با نوشتن فرم ضعیف گالرکین برای مسئله دینامیکی (12) تحت شرایط (13) و (14) بر روی دامنه کل  $\Omega$  به رابطه (15) منجر می‌شود:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T (b - \rho \ddot{u} - \eta_c \dot{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (15)$$

با استفاده از روابط (13) و (8) گسسته‌سازی رابطه (15) منجر می‌شود به رابطه (16):

$$M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = F(t) \quad (16)$$

بگونه‌ای که  $U$  بردار جابجایی کلی و  $K, C, M$  و  $F$  به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، سختی و سیگنال محرک فرکانس بالا هستند که مؤلفه‌های آنها برای دامنه پایه یک نقطه گائوسی معین عبارت است از:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i^T \rho \Phi_j d\Omega \quad (17-الف)$$

$$c_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i^T \eta_c \Phi_j d\Omega \quad (17-ب)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega \quad (17-ج)$$

$$f_i = \int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi_i^T \bar{t} d\Gamma \quad (17-د)$$

در روابط (17)،  $B$  ماتریس کرنش-جابجایی است. برای حالت خاص مدل تیر یک بعدی اولر-برنولی، جابجایی در دو بعد  $x$  و  $y$  به ترتیب با مؤلفه‌های  $u(x)$  و  $v(x)$  بصورت جابجایی‌های محوری و عرضی تعریف می‌شوند. براین اساس کرنش محوری  $\varepsilon(x)$  بصورت رابطه (18) بدست می‌آیند:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -y \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right] \quad (18)$$

که در آن  $y$  فاصله عرضی از محور خنثای مقطع تیر است. بنابراین برای مدل تیر اولر-برنولی، مؤلفه‌های ماتریس  $B$  از مؤلفه کرنش محوری بصورت  $B_i = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\phi_i \quad \phi_i^x\}$  حاصل می‌شود.

در روش بی‌شبکه HRPIM برای انتگرال‌گیری عددی روابط (17) بایستی از سلول‌های زمینه که مستقل از نقاط میدانی هستند استفاده گردد. در این پژوهش، رهیافت انتگرال‌گیری تربیع گاوسی به علت دقت و سهولت

متناظر با فرم ماتریسی  $a, a^x, b$  و  $n$  تعداد نقاط واقع در دامنه پایه نقطه  $x = [x, y, z]$  تعداد چندجمله‌ای‌هاست. ضرایب مجهول رابطه (1) را می‌توان با اعمال برابری تابع تقریب و دقیق میدان (جابجایی) و مشتق مرتبه اول آنها (دوران) در  $n$  نقطه داخل دامنه پایه بدست آورد که منجر به  $2n$  معادله خطی مطابق رابطه (2) در تیر یک بعدی می‌شود:

$$u = R_Q a + R_{Qx} a^x + P_m b \quad (2)$$

$$\theta = R_{Qx} a + R_{Qxx} a^x + P_{mx} b$$

که در آن:

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (3)$$

$$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}^T$$

و ماتریس‌ها مطابق روابط (4) عبارتند از:

$$R_{Qij} = R_j(x_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$R_{Qxij} = R_{j,x}(x_i) = \partial R_j(x_i) / \partial x,$$

$$R_{Qxxij} = R_{j,xx}(x_i) = \partial^2 R_j(x_i) / \partial x^2,$$

$$P_{mij} = P_j(x_i), \quad P_{mxij} = P_{j,x}(x_i) = \partial P_j(x_i) / \partial x \quad (4)$$

برای دارا بودن جواب منحصر بفرد، عبارات چندجمله‌ای بایستی قید (5) را ارضا نمایند:

$$P_m^T a + P_{mx}^T a^x = 0 \quad (5)$$

با تلفیق روابط (2) و (5):

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Q & R_{Qx} & P_m \\ R_{Qx} & R_{Qxx} & P_{mx} \\ P_m^T & P_{mx}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ a^x \\ b \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} a \\ a^x \\ b \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ a^x \\ b \end{Bmatrix} = G^{-1} U \quad (7)$$

بردار  $U$  بردار مقادیر گرهی است و  $G$  ماتریس ممان تعمیم یافته است. جایگذاری رابطه (7) در رابطه (1) منجر به رابطه (8) می‌شود:

$$u^h(x) = [R^T(x) \quad R_x^T(x) \quad P^T(x)] G^{-1} U \quad (8)$$

در نتیجه توابع شکل درونیابی نقطه‌های شعاعی هرمیتی برابر خواهند بود با رابطه (9):

$$\Phi^T(x) = [R^T(x) \quad R_x^T(x) \quad P^T(x)] G^{-1} = \{\phi \quad \phi^x \quad \phi^p\} \\ = \{\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n \quad \phi_1^x \quad \dots \quad \phi_n^x \quad \phi_1^p \quad \dots \quad \phi_m^p\} \quad (9)$$

و مقدار تابع تقریب برابر خواهد بود با رابطه (10):

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n (\phi_i u_i + \phi_i^x \theta_i) = \phi u + \phi^x \theta \quad (10)$$

با توجه به اینکه ماتریس  $G^{-1}$  متقارن، مثبت معین و معکوس پذیر است، در نتیجه در فرآیند محاسبه توابع شکل، ناپایداری رخ نخواهد داد. توابع شکل و مشتقات آنها پایدار بوده و شرایط دلتای کرونکر و پیکربندی واحد  $(\sum_{i=1}^n \phi_i = 1)$  را ارضا خواهند نمود [24].

در پژوهش حاضر رفتار تابع پایه شعاعی نوع گائوسی (نمایی) مورد بررسی قرار می‌گیرد که به فرم (11) تعریف می‌شود:

$$R_i(x) = \exp \left[ -\alpha_c \left( \frac{r}{d_c} \right)^2 \right], \quad r = \|x - x_i\| \quad (11)$$

که در آن  $r$  نرم اقلیدسی و  $\|\cdot\|$  نماد آن،  $\alpha_c$  پارامتر شکل RBF و  $d_c$  طول مشخصه است که فاصله میانگین بین گرهی برای  $n$  نقطه واقع در دامنه پایه

در روابط (21)  $E, I, A, \rho$  و  $K$  به ترتیب عبارتند از مدول الاستیسیته، ممان اینرسی مقطع، سطح مقطع، چگالی و پارامتر اصلاح برشی. با در نظر گرفتن پدیده پراکنش در انتشار موج خمشی مطابق رابطه (22):

$$u = u_0 \cdot e^{-i(kx-\omega t)}, \quad \theta = \theta_0 \cdot e^{-i(kx-\omega t)} \quad (22)$$

ریشه‌های ویژه یا عدد موج معادلات (21) برابر خواهند بود با رابطه (23):

$$k_n = \pm \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c_0^2}{\kappa^2 c_s^2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{c_0}{q\omega} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{c_0^2}{\kappa^2 c_s^2} \right)^2} \right]^{1/2} \cdot \frac{\omega}{c_0}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (23)$$

وجود چهار ریشه ویژه نشانگر این است که چهار مولفه موج منتشره در تیر اولر- برنولی بطور همزمان تولید می‌شوند. پاسخ کلی رابطه (21) از مجموع چهار مولفه مذکور رابطه (24) حاصل می‌شود:

$$u(x, t) = \left[ \sum A_1 e^{-ikx} + \sum A_2 e^{ikx} + \sum A_3 e^{-kx} + \sum A_4 e^{kx} \right] \cdot e^{i\omega t} \quad (24)$$

هر جمله رابطه (24) با توجه به جهت انتشار و خصوصیات، متناظر با یکی از مدهای انتشار هستند؛ موج منتشره با دامنه  $A_1$ ، موج منتشره با دامنه  $A_2$ ، لرزش نوسانی با دامنه  $A_3$  و موج استهلاکی نمایی با دامنه  $A_4$ .

اندراکنش موج برخوردی و آسیب منجر به دو معادله انتشار موج (25) و (26) از رابطه (24) و قبل و بعد از موقعیت آسیب (به ترتیب  $u_+$  و  $u_-$ ) می‌شود:

$$u_-(x, t) = \left[ \sum A_1 e^{-ik_1 x} + \sum A_2 e^{ik_1 x} + \sum A_4 e^{k_1 x} \right] \cdot e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$u_+(x, t) = \left[ \sum B_1 e^{-ik_2 x} + \sum B_2 e^{-k_2 x} \right] \cdot e^{i\omega t} \quad (26)$$

سه جمله رابطه (25) متناظر با موج برخوردی ( $A_1$ )، موج برگشتی ( $A_2$ ) و موج استهلاکی نمایی ( $A_4$ ) هستند در حالیکه دو جمله رابطه (26) عبارتند از موج ناشی از آسیب ( $B_1$ ) و موج تضعیف شونده ( $B_2$ ).

مؤلفه‌های ( $A_4$ ) و ( $B_2$ ) خیلی سریع به علت طبیعت نمایی خود محو می‌شوند. با اعمال شرایط پیوستگی و تعادل دامنه، دامنه هر یک از مؤلفه‌ها بدست می‌آید. بر این اساس ضریب بازتاب را می‌توان بصورت نسبت دامنه موج برگشتی به موج برخوردی از رابطه (27) محاسبه نمود:

$$R = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-I_1^2 k_1^4 + 2I_1 I_2 k_1^3 k_2 + 2iI_1 I_2 k_1^2 k_2^2 - 2I_1 I_2 k_1 k_2^3 - iI_2^2 k_2^4}{I_1^2 k_1^4 + 2I_1 I_2 k_1^3 k_2 + 2iI_1 I_2 k_1^2 k_2^2 + 2I_1 I_2 k_1 k_2^3 + I_2^2 k_2^4} \quad (27)$$

$$I_1 = \frac{l \cdot H^3}{12}, \quad I_2 = \frac{l \cdot (H - H_d)^3}{12} \quad (28)$$

که در آن  $l$  و  $H$  به ترتیب عرض و ارتفاع مقطع مستطیلی و عمق آسیب است. ضریب بازتاب اساساً از نوع مختلط بوده و نشان می‌دهد که نسبت به موج برخوردی انتقال فاز وجود دارد [29]. شکل 3 تغییرات قدرمطلق ضریب بازتاب را نسبت به شدت آسیب نشان می‌دهد که می‌توان از آن برای تعیین عمق آسیب استفاده کرد.

### 5-2- محاسبه پوش سیگنال با استفاده از تبدیل هیلبرت

تبدیل هیلبرت اطلاعات بیشتری از یک سیگنال ارائه دهد. یکی از این

قابل قبول مطابق رابطه (19) بر روی هر یک از سلول‌های زمینه برای انتگرال‌گیری عددی اعمال می‌گردد [26]:

$$\int_{\Omega} E d\Omega = \sum_k \int_{\Omega_k} E d\Omega = \sum_k \sum_{i=1}^{n_g} w_i E(x_{Qi}) |J_{ik}^D| \quad (19)$$

که در آن  $n_g$  تعداد نقاط گائوسی در هر سلول زمینه،  $w_i$  مقدار وزن گائوس متناظر با تأمین نقطه گائوسی  $x_{Qi}$  و ماتریس ژاکوبین انتگرال‌گیری سلول  $k$  که نقطه گائوسی  $x_{Qi}$  در آن واقع است می‌باشند (شکل 1).

### 3-2- رهیافت انتگرال‌گیری عددی

در این پژوهش برای حل معادله (16) از انتگرال‌گیری زمانی تفاضل مرکزی به عنوان یک روش صریح مطابق رابطه (20) استفاده می‌شود:

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) U_{t+\Delta t} = F_t - \left( K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) U_t - \left( \frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right) U_{t-\Delta t} \quad (20)$$

که در آن  $t$  و  $\Delta t$  به ترتیب زمان و گام زمانی انتگرال‌گیری هستند. این روش با شرط  $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = 2/\omega_{max}$  پایدار بوده و انتشار دقیق انرژی موج در امتداد سازه تضمین می‌گردد.  $\omega_{max}$  بزرگترین فرکانس سیستم است [7]. همچنین فرض می‌شود که در زمان اولیه  $U = \dot{U} = 0, t = 0$  است.

### 4-2- تخمین آسیب تیر اولر-برنولی دارای ترک بر طبق انتشار موج خمشی

شکل 2 قسمتی از یک تیر اولر-برنولی با مقطع یکنواخت مستطیلی را نشان می‌دهد که دارای یک ترک بصورت آسیب پله‌ای با عمق  $H_d$  و عمود بر امتداد محور طولی تیر است. با صرف نظر کردن از اثرات پیچشی و با فرض امتداد  $x$  برای محور طولی تیر، معادله حرکت بر اساس جابجایی جانبی  $u(x, t)$  و دوران  $\theta(x, t)$  می‌تواند با روابط (21) بیان شود [28,27].

$$\kappa^2 c_s^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (21-الف)$$

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{c_s^2}{q} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right] - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (21-ب)$$

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}, c_s = \sqrt{G/\rho}, q = \sqrt{I/A}, \kappa = \pi/\sqrt{12} \quad (21-ج)$$

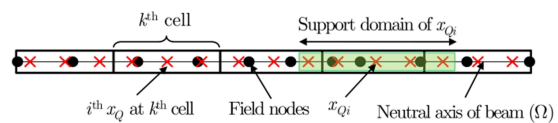


Fig. 1 A straight beam represented by a set of field nodes and background cells with Gauss points.

شکل 1 تیر مستقیم به همراه نقاط میدانی، سلول‌های زمینه و نقاط گائوسی

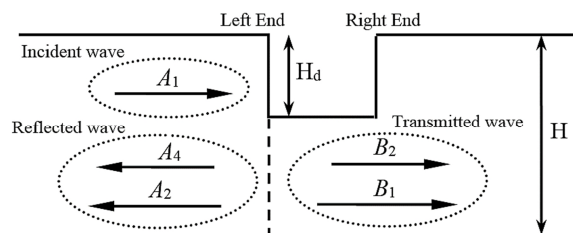


Fig. 2 Damaged beam model for damage quantification based on flexural wave propagation [27].

شکل 2 مدل آسیب دیده تیر برای تخمین آسیب بر اساس انتشار موج خمشی [27].

مطابق شکل 5 سیگنال محرک  $F(t)$  یک سیگنال سینوسی تحت پنجره هنینگ<sup>1</sup> است که فرکانس اصلی 250 kHz دارد و در درجه آزادی  $u_1$  وارد می‌شود و سیگنال پاسخ خروجی در موقعیت  $S$  به فاصله  $P_s = 425$  mm اخذ می‌شود. علت انتخاب فاصله مذکور برای  $P_s$  این است که در این فاصله، سیگنال برخوردی به آسیب و برگشتی از آن به تفکیک قابل تشخیص هستند. لازم به ذکر است که در رابطه (16) ماتریس میرایی بصورت  $C = \eta M$  و  $\eta = 0.02$  در نظر گرفته می‌شود. شکل 6 سیگنال‌های جابجایی مرجع و منحنی پوش نرمالیزه تحلیل انتشار موج مدل سازی اجزاء محدود تیر سالم و آسیب دیده را نشان می‌دهند که با کدنویسی در متلب مطابق فلوجارت شکل 7 حاصل شده است. همان طور که در شکل 6b مشاهده می‌شود شدت آسیب  $H_d = 50\%$  دامنه موج برگشتی تقریباً 0.25 را بدست می‌دهد.

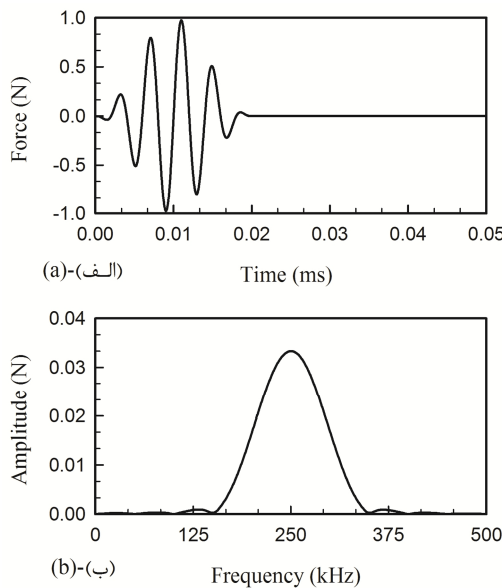


Fig. 5 Excitation signal in (a) time, (b) frequency domain.

شکل 5 سیگنال محرک (الف) دامنه زمان (ب) دامنه فرکانس

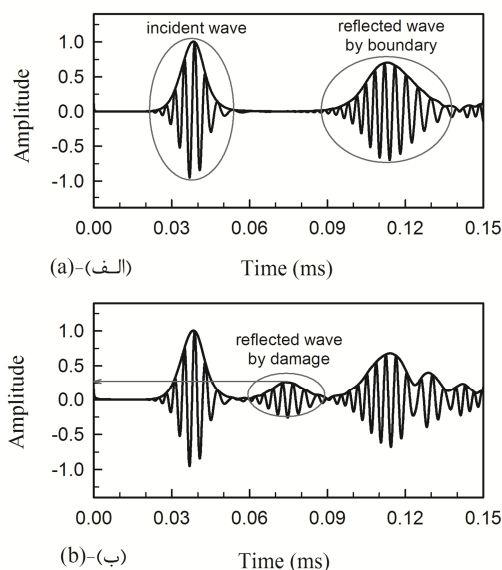


Fig. 6 FE output signal in (a) undamaged, (b) damaged.

شکل 6 سیگنال‌های خروجی مدل اجزاء محدود (الف) مدل سالم (ب) مدل آسیب دیده

<sup>1</sup> Hanning window

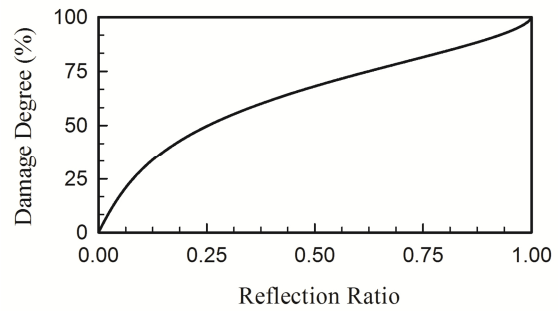


Fig. 3 relationship between reflection ratio and damage degree.

شکل 3 نمودار تغییرات ضریب بازتاب نسبت به شدت آسیب

اطلاعات منحنی پوش سیگنال است که محتوای انرژی موج را بیان می‌کند. برای سیگنال  $X(t)$ ، تبدیل هیلبرت طبق رابطه (29) برابر است با [30]:

$$\bar{X}(t) = H[X(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (29)$$

و یک انتقال فاز  $90^\circ$  برای ساخت سیگنال تحلیلی  $Z(t)$  بکار گرفته می‌شود:

$$Z(t) = X(t) + iH(t) = e(t)e^{i\varphi(t)} \quad (30)$$

بخش حقیقی سیگنال تحلیلی همان سیگنال اصلی و بخش موهومی آن تبدیل هیلبرت سیگنال است. پوش  $e(t)$  و فاز لحظه‌ای سیگنال  $\varphi(t)$  نیز از روابط (31) برابر خواهند بود:

$$e(t) = \sqrt{X^2(t) + H^2(t)} \quad (31\text{-الف})$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \frac{H(t)}{X(t)} \quad (31\text{-ب})$$

در نهایت بر اساس تبدیل هیلبرت سیگنال ثبت شده، ضریب بازتاب از تقسیم دامنه حداکثر انرژی موج برگشتی به دامنه انرژی موج برخوردی در حوزه زمان حاصل می‌گردد.

### 3- مدل سازی و تحلیل عددی

شکل 4 مدل بی شبکه شماتیک یک تیر اولر- برنولی آسیب دیده را نشان می‌دهد که در این پژوهش مورد استفاده قرار می‌گیرد. آرایش نقاط میدانی مدل سازی بصورت منظم در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، سلول‌های زمینه انتگرال گیری با تعداد نقاط گائوس مختلف و مستقل از نقاط میدانی قابل مشاهده است. تیر مذکور طول 1000 mm، سطح مقطع مربعی  $25 \times 25$  mm<sup>2</sup>، مدول الاستیسیته 70 GPa و چگالی 2700 kg/m<sup>3</sup> دارد. شدت آسیب فرضی ( $H_d$ ) برابر با 50% کاهش در ارتفاع مقطع در نظر گرفته شده است بطوری که مطابق شکل 3 مقدار ضریب بازتاب بایستی برابر با مقدار دقیق 0.2533 حاصل شود. مکان آسیب ( $P_d$ ) در فاصله 700 mm از انتهای سمت چپ و طول آن ( $L_d$ ) برابر با 2 mm در نظر گرفته می‌شود.

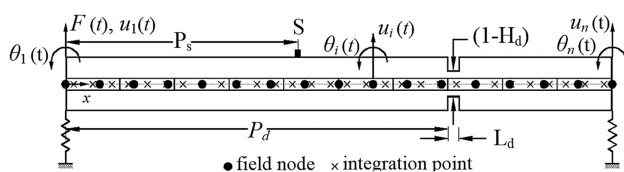


Fig. 4 meshfree model of a damaged Euler-Bernoulli beam.

شکل 4 مدل بی شبکه تیر آسیب دیده اولر- برنولی

می‌شود [31]:

$$RMSE (\%) = \sqrt{\sum_{t=1}^N (f_t - f_t^m)^2 / N} \cdot 100 \quad (32)$$

که در آن  $f_t$  و  $f_t^m$  به ترتیب عبارتند از سیگنال HRPIM و سیگنال مرجع و  $N$  تعداد زمان‌های گسسته شده است. علاوه بر این از خطای ضریب بازتاب نسبت به مقدار تحلیلی نیز مطابق رابطه (33) بهره‌گیری می‌گردد:

$$e_{rr} = \left| \frac{R_{HRPIM} - R_{analytical}}{R_{analytical}} \right| \cdot 100 \quad (33)$$

در رابطه فوق  $R_{HRPIM}$  ضریب بازتاب بدست آمده از HRPIM و  $R_{analytical}$  برابر با مقدار تحلیلی متناظر با شدت آسیب 50% یعنی 0.2533 است.

### 3-1- تأثیر تعداد نقاط میدانی و پارامتر شکل $d_c$ تابع پایه شعاعی

در حالت کلی تمامی کمیت‌های مؤثر در HRPIM به یکدیگر وابسته‌اند و ارزیابی مستقل آنها منطقی به نظر نمی‌رسد ولی با توجه به اینکه ارزیابی همزمان آنها روند پژوهش را پیچیده می‌نماید از این رو مطالعه هر یک از کمیت‌های مؤثر، با فرض مقادیر ثابت برای دیگر کمیت‌ها اجتناب‌ناپذیر است. برای مطالعه تعداد نقاط میدانی مؤثر، ابتدا مدل تیر سالم تحت انتشار موج بررسی می‌شود. با توجه به فرکانس اصلی بسته موج (250 kHz)، سرعت فاز مبتنی بر این مؤلفه برابر است با  $c = \sqrt{2\pi f [EI/\rho A]}^{1/4} = 7597.45$  m/s [27] و طول موج متناظر با آن  $\lambda = c/f = 0.03$  m بدست می‌آید. آنچه که از شکل 8 برای مدل تیر سالم می‌توان نتیجه گرفت این است که حداقل تعداد نقاط لازم برای رسیدن به دقت پوش انرژی مرجع از  $n_f = 50$  با  $RMSE = 16.94\%$  شروع شده و در  $n_f = 100$  به  $RMSE = 3.6532\%$  و در  $n_f = 500$  به  $RMSE = 8.4519\%$  منجر می‌شود. بنابراین اگر  $n_f = 50$  تعداد نقاط حداقل لازم برای رسیدن به دقت مناسب در مدل سازی انتشار موج باشد،  $d_c = 0.02$  m خواهد بود درحالی که طول موج ورودی  $\lambda = 0.03$  m است. بنابراین برای رسیدن به دقت لازم، توزیع نقاط باید بگونه‌ای باشد که فواصل میان آنها کمتر از طول موج ورودی باشد و در این پژوهش برای حالت سالم مقدار  $d_c \leq (70\%)\lambda$  توصیه می‌شود.

شکل 9 نتایج منحنی پوش انرژی موج و تأثیر نقاط میدانی به تعداد 100, 200, 300, 400, 500 و 1000 را در استخراج سیگنال پاسخ مدل

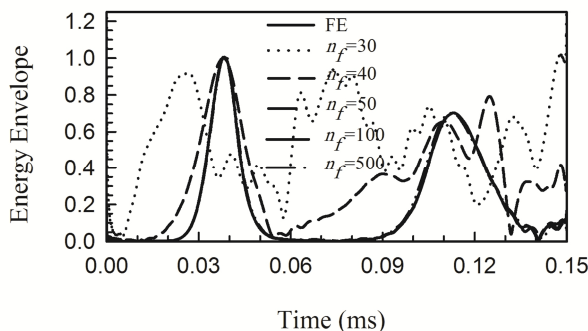


Fig. 8 Envelope energy in health model relative to the primary field nodes ( $\alpha_s = 4, \alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 8 پوش انرژی مدل سالم نسبت به تعداد نقاط میدانی اولیه ( $\alpha_s = 4, \alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

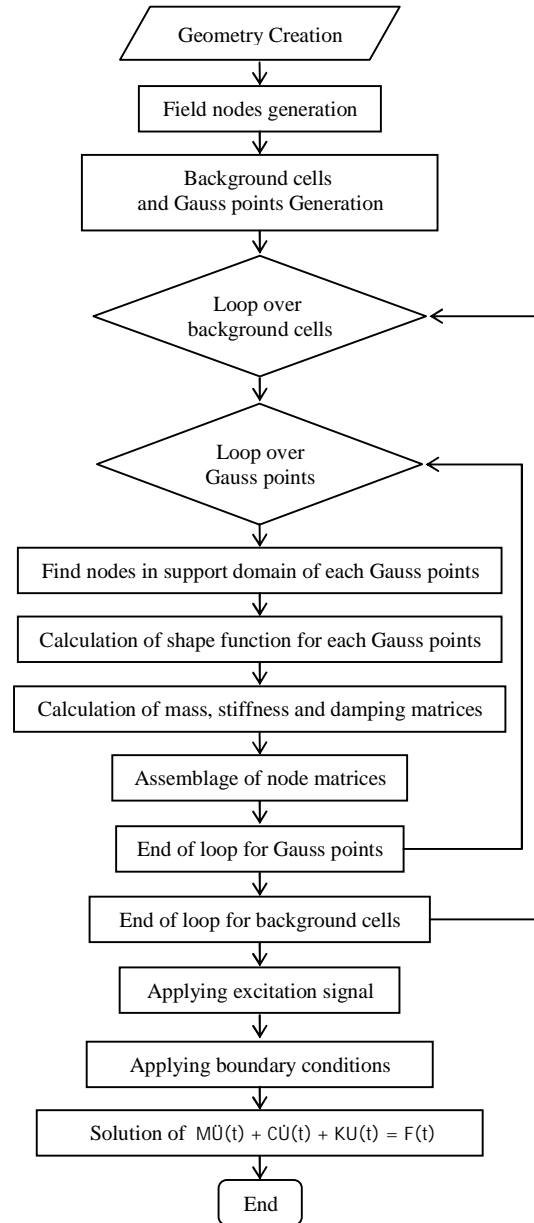


Fig. 7 Flowchart of HRPIM.

شکل 7 فلوچارت روش بی شبکه درونیابی نقطه‌ای شعاعی هرمیتی

کمیت‌های اصلی که نتایج حاصل از انتشار موج به روش بی شبکه درونیابی نقطه‌ای شعاعی مبتنی بر تابع پایه شعاعی گائوسی را تحت تأثیر قرار می‌دهند عبارتند از: تعداد نقاط میدانی ( $n_f$ ) که در واقع پارامتر  $d_c$  را شامل می‌شود، اندازه دامنه پایه ( $\alpha_s$ )، پارامتر شکل تابع پایه ( $\alpha_c$ )، تعداد چندجمله‌ای‌ها ( $n_p$ ) و تعداد نقاط انتگرال‌گیری گائوسی ( $n_g$ ) که با کدنویسی در نرم‌افزار متلب بررسی می‌شوند. در این پژوهش برای داشتن یک پاسخ پایدار در گام اول شرط  $n_g > 3n_f$  اعمال می‌گردد و در انتها تأثیر آرایش مختلف تعداد معینی از نقاط انتگرال‌گیری گائوسی بصورت مستقل مطالعه می‌شوند.

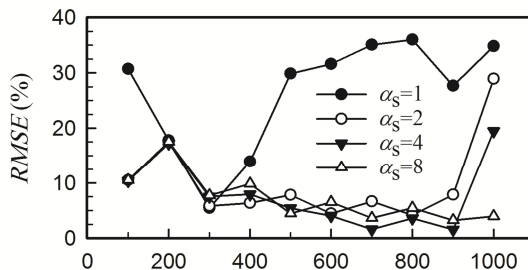
برای ارزیابی عملکرد تابع پایه شعاعی، از خطای جذر میانگین مربعات<sup>1</sup> که اختلاف میان سیگنال‌های بدست آمده از روش FE به عنوان سیگنال مرجع و HRPIM را بطور مناسبی بیان می‌کند مطابق معادله (32) استفاده

<sup>1</sup> Root Mean Square Error (RMSE)

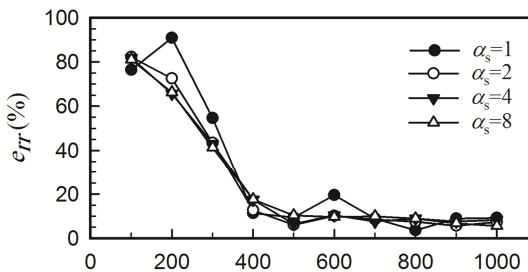
مسأله منجر به باریک شدن شکل زنگوله‌ای تابع گائوس و عدم تأثیر مشارکت تمامی نقاط داخل دامنه پایه در درونیابی و افت دقت می‌گردد. شکل 11 یک دید کلی از رفتار یک تابع گائوسی متعارف  $f(x) = \exp(-\beta x^2)$  را تحت مقادیر مختلف  $\beta$  ارائه می‌دهد. در شکل 10 برای حالت خاص  $n_f = 1000$  بوضوح قابل تشخیص است که افزایش تعداد نقاط درگیر در درونیابی هر دامنه پایه با اعمال ضریب بزرگتر  $\alpha_s$  برای جبران عدم دقت ضرورت می‌یابد.

3-2- تأثیر اندازه دامنه پایه  $\alpha_s$

کمیت  $\alpha_s$  بیانگر اندازه و بزرگی دامنه پایه و در واقع تعداد نقاط میدانی مورد استفاده در درونیابی مربوط به هر نقطه گائوسی است که برای استخراج ماتریس‌ها بکار می‌رود. این ضریب با اعمال در فاصله متوسط میان نقاط میدانی یک فاصله شعاعی حول هر نقطه گائوسی ایجاد می‌کند که نقاط درون این ناحیه در درونیابی استفاده می‌شوند. شکل 12 تغییرات  $RMSE$  و خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) را نسبت به متغیر  $\alpha_s$  و مقادیر مختلف  $n_f$  تحت  $\alpha_c = 1$  و  $n_g = 3000$  نشان می‌دهد. انتظار می‌رود که برای هر حالت  $n_f$  با افزایش تعداد نقاط میدانی به دلیل اینکه نقاط بیشتری در دامنه پایه قرار می‌گیرند



(الف)-(ا) # nodes



(ب)-(ب) # nodes

Fig. 10 a) RMSE b) reflection ratio error ( $e_{rr}$ ) relative to the number of field nodes ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 10 الف) نمودار  $RMSE$  ب) نمودار خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) نسبت به تعداد نقاط میدانی ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

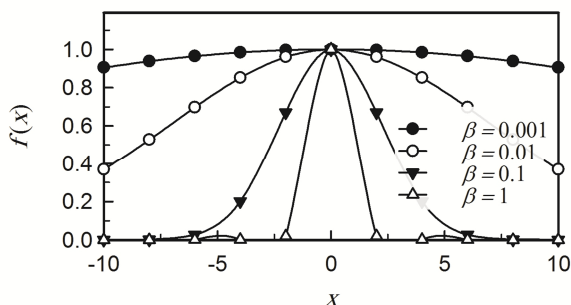


Fig. 11 typical bell curve of a Gaussian RBF

شکل 11 منحنی زنگوله ای یک تابع پایه شعاعی گائوسی

آسیب دیده و تعیین ضریب بازتاب ارزیابی برای هر یک از نقاط میدانی فوق را نسبت به اندازه دامنه پایه  $\alpha_s = \{1, 2, 4, 8\}$  نشان می‌دهد. مفروضات عبارتند از سه چندجمله‌ای ( $m = 3$ ) در تابع درونیابی رابطه (1)،  $\alpha_c = 1$  و  $n_g = 3000$  (به تعداد 1000 سلول زمینه با تعبیه 3 نقطه گائوسی در هر سلول) که در طول آسیب دو میلیمتری، 6 نقطه گائوسی جای می‌گیرند.

آنچه که در حالت آسیب دیده می‌توان بیان نمود این است که قسمت موج برخوردی در تمامی حالات انطباق قابل قبولی با هم دارند ولی بعد از برخورد با آسیب و در موج برگشتی مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد گره‌ها، سیگنال ثبت شده به سیگنال مرجع و ضریب بازتاب به مقدار تحلیلی 0.2533 نزدیکتر می‌شود. با این وجود از تعداد نقاط 500 و بیشتر از آن، شرایط نسبتاً پایدار و ثابتی در نمودار  $RMSE$  و  $e_{rr}$  حاصل می‌شود و در نتیجه افزایش نقاط بیشتر از 500 نه تنها دقت محاسبات را افزایش نمی‌دهد بلکه صرفاً زمان تحلیل افزایش می‌یابد. در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که در مدل پایش سلامت سازه‌ای و برای در نظر گرفتن اثر آسیب در انتشار موج بایستی  $\lambda d_c = (6.5\%)$  باشد. در شکل 9f برای  $n_f = 1000$  مشاهده می‌شود که یک شیفت جزئی نسبت به سیگنال مرجع وجود دارد و از طرف دیگر مطابق شکل 10 تأثیر ضریب  $\alpha_s$  نسبت به مقادیر کمتر از  $n_f = 1000$  قابل توجه‌تر است با این وجود از نظر تخمین ضریب بازتاب نتایج کماکان قابل قبول است.

افزایش تعداد نقاط میدانی، معادل کاهش پارامتر شکل  $d_c$  در تابع پایه شعاعی گائوسی است. از طرفی برای درونیابی دقیق‌تر میدان جابجایی با توجه به طول موج بسیار کوتاه سیگنال محرک، تراکم بیشتر نقاط میدان مورد نیاز است ولی از طرف دیگر در تابع  $R_i(x) = \exp[-(\alpha_c/d_c^2)r^2]$  مقادیر ثابت  $\alpha_c$ ، کاهش  $d_c$  منجر به افزایش  $(-\alpha_c/d_c^2)$  می‌شود و همین

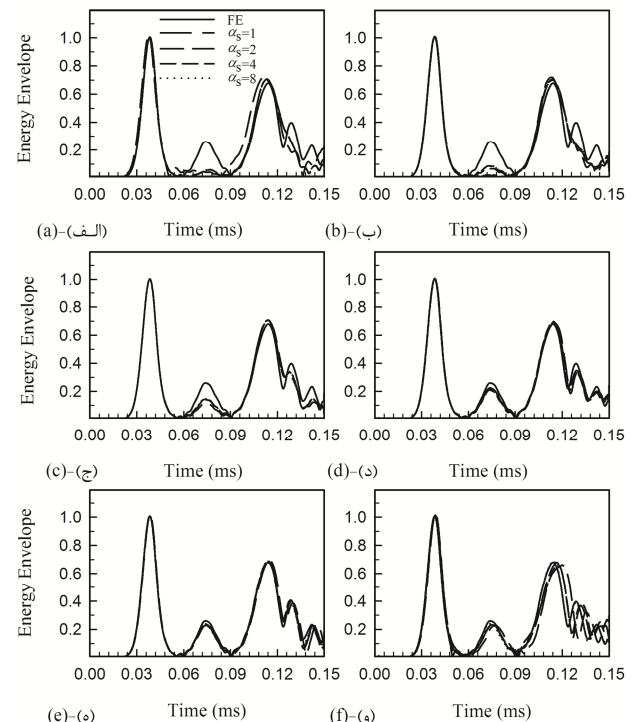
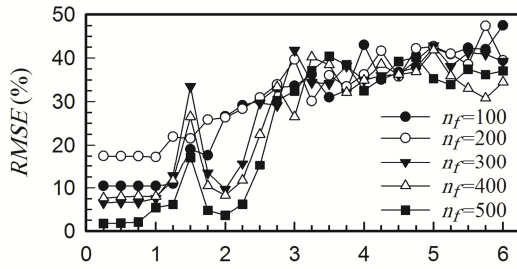
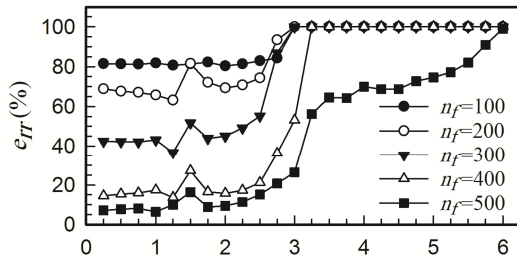


Fig. 9 Envelope energy relative to the field nodes: a) 100 b) 200 c) 300 d) 400 e) 500 f) 1000 for  $\alpha_s = \{1, 2, 4, 8\}$  ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 9 پوش انرژی نسبت به تعداد نقاط میدانی الف) 100 ب) 200 ج) 300 د) 400 ه) 500 و) 1000 به ازاء  $\alpha_s = \{1, 2, 4, 8\}$  ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )



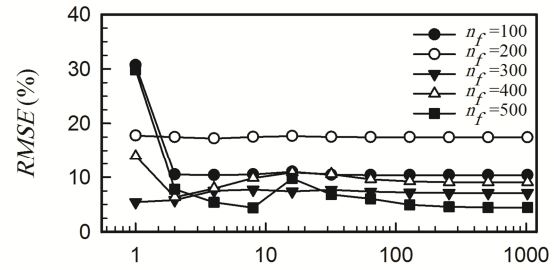
(الف)-(الف)  $\alpha_c$



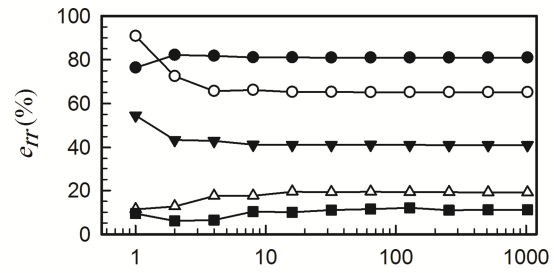
(ب)-(ب)  $\alpha_c$

**Fig. 13** a)  $RMSE$  b) reflection ratio error ( $e_{rr}$ ), relative to  $\alpha_c$  and  $n_f$  ( $\alpha_s = 4, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 13 الف) تغییرات  $RMSE$  ب) تغییرات خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) نسبت به مقادیر  $\alpha_c$  و  $n_f$  ( $\alpha_s = 4, n_g = 3000, m = 3$ )



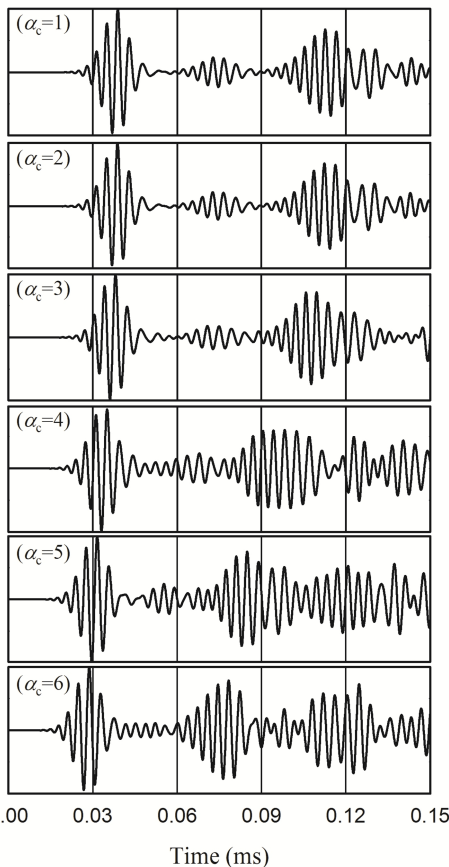
(الف)-(الف)  $\alpha_s$  (log)



(ب)-(ب)  $\alpha_s$  (log)

**Fig. 12** a)  $RMSE$  relative to  $\alpha_s$  b) reflection ratio error ( $e_{rr}$ ) relative to  $\alpha_s$  ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 12 الف) تغییرات  $RMSE$  نسبت به مقادیر  $\alpha_s$  ب) تغییرات خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) نسبت به مقادیر  $\alpha_s$  ( $\alpha_c = 1, n_g = 3000, m = 3$ )



**Fig. 14** HRPIM output signal relative to  $\alpha_c$  ( $n_f = 500, \alpha_s = 4, n_g = 3000, m = 3$ )

شکل 14 سیگنال‌های RPIM نسبت به  $\alpha_c$  ( $n_f = 500, \alpha_s = 4, n_g = 3000, m = 3$ )

کاهش بیشتر  $RMSE$  و  $e_{rr}$  حاصل شود، اما برای بیشتر حالات  $n_f$  دقت قابل قبول در  $\alpha_s = 2, 4, 8$  مشاهده می‌گردد؛ مخصوصاً به لحاظ  $e_{rr}$  که برای  $\alpha_s > 8$  شرایط ثابت و پایداری حاکم می‌شود. با افزایش  $\alpha_s$  در مقادیر بیش از 256 با توجه به اینکه تمامی نقاط میدانی در محاسبات وارد می‌شوند بنابراین تغییری در پاسخ‌ها ایجاد نمی‌شود.

### 3-3- تأثیر پارامتر شکل $\alpha_c$

تأثیر پارامتر شکل  $\alpha_c$  در معادلات، مشابه پارامتر شکل  $d_c$  در پهن یا باریک شدن شکل زنگوله‌ای تابع پایه شعاعی گائوسی است بگونه‌ای که افزایش آن همانند شکل 11 به باریک شدن و عدم پوشش کامل نقاط داخل دامنه پایه می‌انجامد. شکل 13 تغییرات  $RMSE$  و خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) را نسبت به مقادیر  $\alpha_c$  برای مقادیر مختلف  $n_f$  تحت  $\alpha_s = 4$  و  $n_g = 3000$  نشان می‌دهد. مطابق شکل برای تمامی حالات  $n_f$  مقادیر  $\alpha_c \leq 2$  پاسخ‌های قابل قبولی را به همراه دارند نکته قابل توجه این است که در  $\alpha_c = 1.5$  پرشی در نتایج  $RMSE$  و  $e_{rr}$  رویت می‌شود. با افزایش مقادیر  $\alpha_c$  در پاسخ‌های بیشتری ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است که حتی تا مقادیر قابل توجه  $\alpha_c = 300$  نیز برای  $n_f = 500$  مسئله ناپایداری اتفاق نمی‌افتد، مخصوصاً برای تحلیل استاتیکی و مقدار ویژه که خارج از چهارچوب این پژوهش است نتایج کماکان قابل قبول است.

در شکل 14 سیر تغییر سیگنال اخذ شده برای مقادیر مختلف  $\alpha_c$  و  $n_f = 500$  نشان داده شده است. با افزایش  $\alpha_c$  فاصله زمانی میان موج برخوردی و برگشتی از آسیب و مرز تیر، کاهش می‌یابد و می‌توان گفت سرعت موج افزایش پیدا می‌کند و در نتیجه زمان ثبت سریعتری مشاهده می‌شود و موج برگشتی از آسیب در میان دو موج برخوردی و برگشتی از مرز محو می‌شود و خطای بیشتری حاصل رخ می‌دهد.



4-3- تأثیر تعداد چند جمله‌ای‌های درونیابی  $m$

هر یک از آنها ماتریس موضعی (گرهی) تعیین شده و در نهایت اسمبل می‌شوند؛ ثانیاً برای انتگرال‌گیری و استخراج ماتریس‌های سیستم رابطه (17) با استفاده از رابطه (19) بکار برده می‌شوند. ثالثاً تعداد نقاط گائوسی برای کنترل مسئله تکینگی ماتریس‌ها لازم است.

برخلاف روش اجزاء محدود که یک آسیب پله‌ای با تعبیه یک جزء محدود به اندازه طول آسیب و با کاهش سختی مدل می‌شود، در این پژوهش، اعمال مشخصات هندسی ناحیه آسیب بر اساس نقاط گائوسی واقع در آن ناحیه انجام می‌گیرد. به این صورت که با توجه به نوع آسیب که تغییر در ممان اینرسی است، در رابطه (19) برای نقاط گائوسی‌ای که در ناحیه آسیب واقع شده‌اند از ممان اینرسی آسیب دیده استفاده می‌شود حتی اگر نقاط میدان درونیابی در خارج از ناحیه آسیب قرار گرفته باشند.

بر این اساس در شکل 16 تأثیر نقاط گائوسی مختلف با دو نوع آرایش سلول‌های زمینه منظم و نامنظم و برای مقایسه مختلف  $n_f$  ارائه شده است. آرایش منظم با تقسیم‌بندی بین نقاط میدانی متوالی به عنوان سلول زمینه و با یک نقطه گائوسی درون آن و آرایش نامنظم بصورت تک سلول برای طول تیر و تعداد نقاط متناظر با حالت آرایش منظم در نظر گرفته شده است.

نکته مهم این است که در مورد حد پایین تعداد نقاط لازم برای پایداری پاسخ‌ها می‌توان گفت که آرایش نامنظم تعداد نقاط گائوسی تقریباً دوبرابر آرایش منظم را نیاز دارد. به عبارت دیگر برای آرایش منظم شرط  $n_g > 2n_f$  و برای آرایش نامنظم تک سلولی  $n_g > 4n_f$  لازم است. لازم به ذکر است که با افزایش تعداد سلول‌ها و چندسلولی شدن آنها شرط  $n_g > 3n_f$  برای تامین پایداری کفایت می‌کند.

نکته مهم دیگر این است که برای هر دو نوع آرایش، در مقادیر  $n_f$  و  $n_g$  کمتر، گرچه پایداری و مقدار  $RMSE$  قابل قبول به نظر می‌رسد ولی به دلیل عدم وجود نقطه گائوسی در ناحیه آسیب مقدار  $e_{rr}$  به 100% می‌رسد ولی با افزایش تعداد نقاط گائوسی، مخصوصاً در حالت منظم، احتمال وجود نقاط گائوسی در ناحیه آسیب و اعمال اثرات آن در مدل سازی افزایش می‌یابد. نکته مهم این است که وجود حداقل یک نقطه گائوسی در ناحیه آسیب برای برآورد قابل قبول ضریب بازتاب کفایت می‌کند؛ کمالینکه برای حالت خاص  $n_g = 5988$  در  $n_f = 500$  آرایش منظم منجر به 12 نقطه گائوسی در ناحیه آسیب و آرایش نامنظم به 9 نقطه منجر می‌شود ولی با این وجود آرایش نامنظم خطای ضریب بازتاب کمتری را ارائه می‌نماید. به همین جهت است که همان‌طور که در شکل 16 مشاهده می‌شود افزایش قابل توجه  $n_g$  منجر به نتایج بهتری نمی‌شود و نتایج به یک آستانه ثابت میل می‌کنند و می‌توان گفت که مقادیر لازم حداقل  $n_g$  برای تامین پایداری مخصوصاً در آرایش منظم از هر دو نظر  $RMSE$  و  $e_{rr}$  (شکل 16-1) کفایت می‌کند.

4- نتیجه گیری

در پایش سلامت سازه‌ای تعریف یک مدل تحلیلی از سازه مورد پایش با توجه به روش شناسایی آسیب و مطالعه اثرات گسترش آسیب ضروری است. در این پژوهش، روش عددی درونیابی نقطه‌ای شعاعی هرمیتی (HRPIM) مبتنی بر تابع پایه شعاعی گائوسی برای انتشار موج و تخمین آسیب پیش فرض در تیر اولر- برنولی مورد بررسی قرار گرفت. آسیب بصورت ترک در کناره تیر و عمود بر محور طولی آن با کاهش ضخامت و در یک مکان معین در نظر گرفته شد. با اعمال یک سیگنال محرک با فرکانس بالا و ثبت سیگنال پاسخ و مطالعه خطای  $RMSE$  بین سیگنال مرجع اجزاء محدود و سیگنال ثبت شده HRPIM تخمین آسیب توسط ضریب بازتاب موج

در حالت کلی در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  در تابع درونیابی رابطه (1) همواره مورد نیاز نیست. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که تأثیر تعداد چندجمله‌ای‌ها در حساسیت پارامتر شکل  $\alpha_c$  بسیار قابل توجه است. در شکل 15 اثرات تعداد چندجمله‌ای‌ها ( $m$ ) نسبت به پارامتر شکل  $\alpha_c$  تحت  $n_f = 500$  و  $\alpha_s = 4$  و  $n_g = 3000$  نشان داده شده است. در انتشار موج و شناسایی آسیب می‌توان نتیجه گرفت که حساسیت نسبت به پارامتر شکل  $\alpha_c$  با افزایش  $m$  کاهش می‌یابد و دقت محاسبات بسیار قابل قبول‌تر می‌شود؛ مخصوصاً در  $\alpha_c = 1.5$  که نتایج غیرقابل قبولی در شکل 13 برای تمامی  $n_f$ ‌ها ایجاد می‌شد، این افزایش دقت برای هر دو مورد  $RMSE$  و  $e_{rr}$  به‌ویژه در  $m = 25$  بسیار قابل توجه‌تر است. نکته مهم این است که اعمال  $0.1 \leq \alpha_c \leq 0.5$  صرفنظر از تعداد چندجمله‌ای‌ها نتایج منطقی با  $RMSE < 2.5\%$  و  $e_{rr} < 10\%$  بدست می‌دهد.

مسئله مهم در مورد حالت خاص  $m = 0$  این است که گرچه در بازه  $0.1 \leq \alpha_c \leq 1.25$  نتایج انتشار موج پایدار است ولی نتایج تحلیل مقدار ویژه از  $\alpha_c > 0.25$  دچار واگرایی می‌شود تا اینکه در  $\alpha_c > 1.5$  واگرایی انتشار موج آغاز می‌شود. در مورد  $m = 1$  نیز واگرایی نتایج مقدار ویژه از  $\alpha_c > 0.25$  شروع شده و در  $\alpha_c > 2.5$  انتشار موج دچار واگرایی می‌شود. با حضور عبارت خطی در درونیابی ( $m = 2$ ) پایداری پاسخ‌ها بهبود یافته و دامنه مناسب پارامتر شکل  $\alpha_c$  افزایش می‌یابد. علت این امر این است که در حالت خالص ( $m = 0$ )، آزمون وصله استاندارد برآورده نمی‌گردد؛ از این رو افزودن عبارات چندجمله‌ای تا مرتبه خطی می‌تواند پیوستگی مرتبه  $C^1$  را تضمین نماید که برای گذر از آزمون وصله استاندارد لازم است.

3-5- تأثیر آرایش سلول‌های زمینه

نقاط گائوسی به سه دلیل نتایج محاسبات را تحت تأثیر قرار می‌دهند: اولاً به تعداد نقاط گائوسی موجود، دامنه پایه وجود خواهد داشت بگونه‌ای که برای

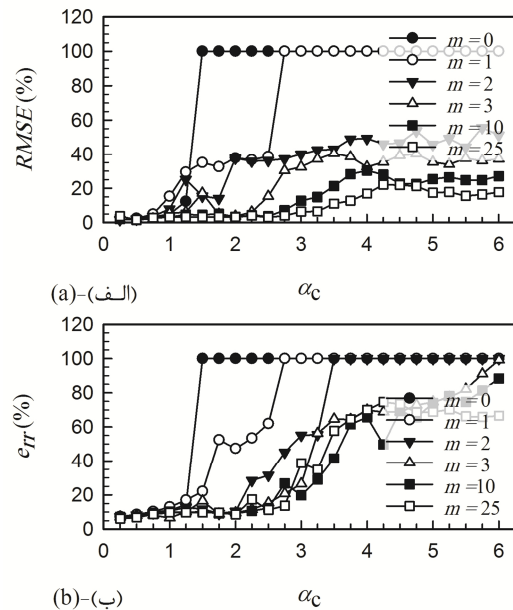


Fig. 15 a)  $RMSE$  b) reflection ratio error ( $e_{rr}$ ), relative to  $\alpha_c$  and  $m$  ( $n_f = 500, \alpha_s = 4, n_g = 3000$ )

شکل 15 الف) تغییرات  $RMSE$  ب) تغییرات خطای ضریب بازتاب ( $e_{rr}$ ) نسبت به مقادیر  $\alpha_c$  و  $m$  ( $n_f = 500, \alpha_s = 4, n_g = 3000$ )

برای اکثر مقادیر  $n_f$  دقت قابل قبول در  $\alpha_s = 2,4,8$  مشاهده می‌گردد مخصوصاً به لحاظ خطای ضریب بازتاب که برای  $\alpha_s > 8$  شرایط ثابت و پایداری حاکم می‌شود.

در مورد پارامتر شکل  $\alpha_c$  برای تمامی مقادیر  $n_f$  با افزایش مقادیر آن در خطاهای بیشتری در نتایج رخ می‌دهد و  $\alpha_c \leq 2$  همواره پاسخ‌های قابل قبولی را به همراه دارند.

عدم استفاده از چندجمله‌ای در تابع درونیابی امکان‌پذیر است ولی مقادیر کوچکتر  $\alpha_c$  را می‌طلبد. تأثیر تعداد چندجمله‌ای‌ها در کاهش حساسیت پارامتر شکل  $\alpha_c$  بسیار قابل توجه است و با افزایش تعداد چندجمله‌ای‌ها کاربرد مقادیر نسبتاً بزرگتر  $\alpha_c$  نیز ممکن می‌گردد.

و در نهایت از نقطه نظر سلول‌های زمینه و تعداد آنها باید گفت که آرایش منظم نتایج مطمئنتری به همراه داشته و شرط  $n_g > 2n_f$  برای پایداری لازم است. همچنین وجود حداقل یک نقطه گائوسی در ناحیه آسیب برای اعمال اثرات آسیب در ماتریس‌های سیستم کافی است و وجود بیش از یک نقطه در آن ناحیه لزوماً به افزایش دقت نمی‌انجامد.

5- مراجع

- [1] F. Moser, L. J. Jacobs, J. Qu, Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method, *NDT&E International*, Vol. 32, pp. 225-234, 1999.
- [2] A. Chakraborty, D. R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, Finite Analysis of Free Vibration and Wave Propagation in Asymmetric Composite Beams With Structural Discontinuities, *Composite Structures*, Vol. 55, No. 1, pp. 23-26, 2002.
- [3] A. Keramat, A. Ahmadi, Axial wave propagation in viscoelastic bars using a new finite-element-based method, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 77, No. 1, pp. 105-117, 2012.
- [4] X. G. Zhao, J. L. Rose, Boundary element modeling for defect characterization potential in a wave guide, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 11, pp. 2645-2658, 2003.
- [5] H. Yim, Y. Sohn, Numerical simulation and visualization of elastic waves using mass-spring lattice model, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 47, No. 3, pp. 549-558, 2000.
- [6] P. Kudela, M. Krawczuk, W. Ostachowicz, Wave propagation modelling in 1D structures using spectral finite elements, *Journal of sound and vibration*, Vol. 300, No. 1-2, pp. 88-100, 2007.
- [7] Y. Chen, J. Lee, A. Eskandarian, *Meshless methods in solid mechanics*, pp. 63-67, New York: Springer, 2006.
- [8] H. Li, S. S. Mulay, *Meshless methods and their numerical properties*, pp. 5-52, Boca Raton: CRC Press, 2013.
- [9] P. H. Wen, Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for wave propagation in 3D poroelastic solids, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, No. 4, pp. 315-323, 2010.
- [10] L. Gao, K. Liu, Y. Liu, A meshless method for stress-wave propagation in anisotropic and cracked media, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2-8, pp. 601-616, 2007.
- [11] S. Das, T. Kundu, Mesh-free modeling of ultrasonic wave fields in damaged layered half-spaces, *Structural Health Monitoring*, Vol. 8, No. 5, pp. 369-379, 2009.
- [12] J. G. Wang, G. R. Liu, A point interpolation meshless method based on radial basis functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 11, pp. 1623-1648, 2002.
- [13] G. R. Liu, G. Y. Zhang, Y. T. Gu, Y. Y. Wang, A meshfree radial point interpolation method (RPIM) for three-dimensional solids, *Computational Mechanics*, Vol. 36, No. 6, pp. 421-430, 2005.
- [14] K. M. Liew, X. L. Chen, Mesh-free radial point interpolation method for the buckling analysis of Mindlin plates subjected to in-plane point loads, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, No. 11, pp. 1861-1877, 2004.
- [15] G. R. Liu, X. Zhao, K. Y. Dai, Z. H. Zhong, G. Y. Li, X. Han, Static and free vibration analysis of laminated composite plates using the conforming radial point interpolation method,

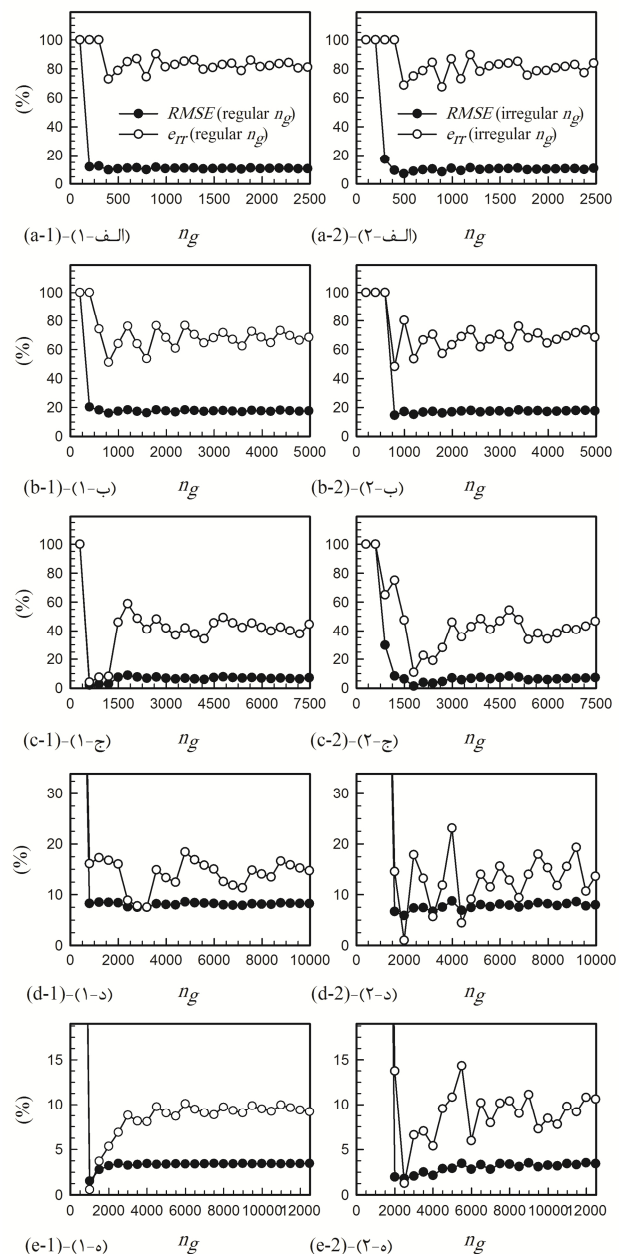


Fig. 16 RMSE and corresponding  $e_{rr}$  for regular and irregular arrangement of background cells relative to various  $n_f$ . a)  $n_f = 100$  b)  $n_f = 200$  c)  $n_f = 300$  d)  $n_f = 400$  e)  $n_f = 500$  ( $\alpha_s = 4, \alpha_c = 0.25, m = 3$ )

شکل 16 RMSE و  $e_{rr}$  متناظر با آن برای آرایش‌های منظم و نامنظم سلول‌های زمینه نسبت به مقادیر مختلف  $n_f$  (الف  $n_f = 100$  ب)  $n_f = 200$  ج)  $n_f = 300$  د)  $n_f = 400$  ه)  $n_f = 500$ ) ( $\alpha_s = 4, \alpha_c = 0.25, m = 3$ )

تحلیلی، تأثیر پارامترهای مختلف و دامنه قابل قبول آنها مورد ارزیابی قرار گرفت.

مهمترین کمیت مؤثر در مدل‌سازی انتشار موج به روش HRPIM تعداد نقاط میدانی و به عبارتی دیگر پارامتر شکل  $d_c$  در RBF انتخابی است. برای مدل‌سازی بدون آسیب در نظر گرفتن  $\lambda \leq (70\%) d_c$  کافی است ولی برای حالت آسیب دیده که اثرات برگشت موج از منطقه آسیب بایستی لحاظ شود  $d_c \cong (5\%) \lambda$  ضرورت می‌یابد. با این وجود افزایش بیشتر  $n_f$  و کاهش  $d_c$  نه تنها دقت نتایج را افزایش نمی‌دهد بلکه افت دقت خواهد داشت. در این حالت با اعمال ضریب بزرگتر  $\alpha_s$  برای جبران عدم دقت لازم است.

- [23] B. Kanber, Ö. Y. Bozkurt, A. Erklig, Investigation of RPIM Shape Parameter Effects on the Solution Accuracy of 2D Elastoplastic Problems, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 14, No. 4, pp. 354-366, 2013.
- [24] G. R. Liu, *Mesh Free Methods Moving Beyond the Finite Element Method*, Second Edition, pp. 69-81, Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [25] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, pp.161-166, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [26] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*, pp. 155-157, Dordrecht: Springer, 2005.
- [27] J. F. Doyle, *Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms*, pp. 78, New York: Springer; 2nd edition, 1997.
- [28] Z. Su, L. Ye, X. Bu, X. Wang, Y. W. Mai, Quantitative Assessment of Damage in a Structural Beam Based on Wave Propagation by Impact Excitation, *Structural Health Monitoring*, Vol. 2, No. 1, pp. 27-40, 2003.
- [29] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids*, pp. 155, New York: Dover Publications, 1991.
- [30] K. Sun, G. Meng, F. Li, L. Ye, Y. Lu, Damage Identification in Thick Steel Beam Based on Guided Ultrasonic Waves, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 21, No. 3, pp. 225-232, 2009.
- [31] D .E. Adams, *Health Monitoring of Structural Materials and Components: Methods with Applications*, pp. 205-210, Chichester: John Wiley & Sons, 2007.
- Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 2, pp. 354-366, 2008.
- [16] H. Ghaffarzadeh, A. Mansouri, Numerical modeling of wave propagation using RBF-based meshless method, *Proceedings of the International Conference on Future Trends in Structural, Civil, Environmental and Mechanical Engineering (FTSCEM)*, Bangkok, Thailand, pp. 4-8, 2013.
- [17] Z. Wu, Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis function, *Application Theory and its Applications* Vol. 8, pp. 1-10, 1992.
- [18] Y. Liu, Y. C. Hon, K. M. Liew, A meshfree Hermite-type radial point interpolation method for Kirchhoff plate problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, No. 7, pp. 1153-1178, 2006.
- [19] X. Cui, G. Liu, G. Li, A smoothed Hermite radial point interpolation method for thin plate analysis, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 1, pp. 1-18, 2009.
- [20] S. Rippa, An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 11, pp. 193-210, 1999.
- [21] J. G. Wang, G. R. Liu, On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2611-2630, 2002.
- [22] O. Y. Bozkurt, B. Kanber, M. Z. AŞİk, Assessment of RPIM shape parameters for solution accuracy of 2D geometrically nonlinear problems, *International Journal of Computational Methods*, Vol. 10, No. 03, pp. 1350003, 2013.