



## شناسایی سیستم آشوبناک «لورنز» بر اساس همزمان سازی با استفاده از محاسبات مرتبه کسری

مهدی گمرکی<sup>۱</sup>، محمد عابدینی<sup>۲</sup>، حسن سالاریه<sup>۳\*</sup>، علی مقداری<sup>۴</sup>

۱- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
 ۲- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
 ۳- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
 ۴- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
 \* تهران، صندوق پستی ۹۵۶۷-۱۱۱۵۵، salarieh@sharif.edu

### چکیده

### اطلاعات مقاله

در این مقاله هدف شناسایی پارامترهای سیستم آشوبناک بر اساس همزمان سازی با استفاده از روش‌های مرتبه کسری است. روش استفاده شده برای همزمان سازی یکسان، بر اساس معیار پایداری لیپانوف به دست آمده و سپس با استفاده از دینامیک مرتبه کسری، روش کنترلی مورد نظر بهبود بخشیده شده است. به همین منظور به کمک یک تابع لیپانوف پیشنهادی و بر اساس معیارهای پایداری مجانبی تئوری لیپانوف قوانین تطبیق مناسب که منجر به شناسایی پارامترهای نامعلوم می‌گردد استخراج می‌گردد. روش موجود برای سیستم آشوبناک «لورنز» ارائه شده است و از آنجایی که هدف شناسایی سیستم بوده، در آن تمام پارامترها نامعلوم فرض شده‌اند. سپس نتایج به دست آمده نشان داده شده، بر روی آن‌ها بحث شده است و مشاهده شده که استفاده از محاسبات مرتبه کسری در کاهش نوسانات و سرعت همگرایی پارامتر مورد نظر تأثیرگذار بوده است. در انتها نیز پایداری سیستم با استفاده از قانون تطبیق مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده، قانون تطبیق مرتبه کسری پیشنهادی پایداری مجانبی را در همزمان سازی و قوانین تطبیق خدشه دار نمی‌کند، همچنان که شبیه سازی‌ها هم رفتار مناسبتری در تخمین و همزمان سازی نشان می‌دهد.

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: ۰۷ دی ۱۳۹۲  
 پذیرش: ۰۹ بهمن ۱۳۹۲  
 ارائه در سایت: ۱۰ مرداد ۱۳۹۳  
 کلید واژگان:  
 همزمان سازی سیستم‌های یکسان  
 شناسایی پارامتر  
 محاسبات و دینامیک مرتبه کسری  
 کنترل تطبیقی  
 کنترل مدل مرجع

## Identification of Lorenz chaotic system based on synchronization using fractional order calculus

Mehdi Gomroki, Mohammad Abedini, Hassan Salarieh\*, Ali Meghdari

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 11155-9567, Tehran, Iran, salarieh@sharif.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 28 December 2013  
 Accepted 29 January 2014  
 Available Online 01 August 2014

### Keywords:

Identical Synchronization  
 Parameter Identification  
 Fractional Calculus and Dynamics  
 Adaptive Control  
 Model Reference Control

### ABSTRACT

In this paper the goal is to identify the parameters of the Lorenz chaotic system, based on synchronization of identical systems using fractional calculus. The method which is used for synchronization is come from Lyapunov stability theorem and then by using fractional dynamics, control laws are improved. To this end, a Lyapunov function is presented and based on the Lyapunov stability theory and asymptotic stability criteria, some adaptation laws to estimate unknown parameters of the system are proposed. The introduced method is applied to the Lorenz chaotic system and since the goal is identification, all the parameters of the system are taken unknown. Using invariant set theory, it is proved that the parameter estimation errors converge to zero. Then the results of numerical simulations are shown and discussed and it is observed that fractional calculus has an essential effect on reducing fluctuations and settling time of the parameters convergence. At the end, the stability of the system by using fractional adaptation law is discussed. It is shown that the asymptotic stability of the synchronization error dynamics is proved using the fractional adaptation law, and this is confirmed through simulation.

### ۱- مقدمه

کرد. این مدل‌ها برای اولین بار توسط ادوارد لورنز معرفی شدند [۱]. وی برای اولین بار پدیده‌ای به نام آشوب را معرفی کرد و اثر حساسیت به شرایط اولیه را در این سیستم‌ها مشاهده نمود. حساسیت به شرایط اولیه به این معناست که اگر سیستم مورد نظر از دو شرط اولیه به اندازه دلخواه نزدیک به هم شروع به کار کند، پاسخ‌های سیستم در این دو حالت پس از گذشت مدتی به صورت نمایی از هم فاصله می‌گیرند. به این نما، نمای لیپانوف<sup>۱</sup> می‌گویند. در

آشوب پدیده‌ای است که در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی تحت شرایط خاصی بروز پیدا می‌کند. مهم‌ترین مشخصه سیستم‌های آشوبناک حساسیت به شرایط اولیه است. این مشخصه باعث شبیه شدن رفتار این سیستم‌ها به سیستم‌های تصادفی می‌شود. ولی در واقع این سیستم‌ها در گروه سیستم‌های یقینی طبقه‌بندی می‌شوند. در واقعیت، مدل‌های آشوبناک زیادی وجود دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به مدل‌های موجود برای پیش‌بینی آب و هوا اشاره

1- Lyapunov exponent

### Please cite this article using:

M. Gomroki, M. Abedini, H. Salarieh, A. Meghdari, Identification of Lorenz chaotic system based on synchronization using fractional order calculus, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 68-76, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

واقع یکی از راه‌های پی بردن به وجود آشوب در یک سیستم، وجود نمای لیاپانوف مثبت است. نکته مهم در واگرایی پاسخ‌ها این است که پاسخ‌های دو سیستم، بی‌کران نمی‌شوند و در محدوده خاصی از فضا باقی می‌مانند. در عمل همه یا بعضی از پارامترهای موجود در یک سیستم معلوم نمی‌باشند. مشخص نبودن پارامترها در یک سیستم آشوبناک با توجه به رفتار آن که پیش‌تر در مورد آن صحبت شد، مشکلات زیادی برای کار با آن سیستم به وجود می‌آورد. از این رو روش‌های مختلفی برای شناسایی پارامترهای یک سیستم وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی [۲]، کنترل تطبیقی [۳]، کنترل مقاوم [۴]، کمترین مربعات بازگشتی [۵] و غیره اشاره کرد. در برخی از روش‌ها که هدف نهایی کنترل سیستم است، پیدا کردن مقدار صحیح پارامترها مهم نبوده و فقط روشی برای تخمین پارامترها به کار برده می‌شود ولی در برخی دیگر تخمین‌های ارائه‌شده به مقادیر صحیح پارامترها مهم بوده و بنابراین نشان دادن این موضوع که تخمین پارامترها به مقادیر صحیح میل می‌کنند، ضروری است.

همزمان‌سازی<sup>۱</sup> به معنی یکسان کردن فاز دو سیستم است. در اصطلاح به این دو سیستم، گرداننده<sup>۲</sup> و پاسخ<sup>۳</sup> گفته می‌شود و هدف این است که مسیرهای حل سیستم پاسخ، مسیرهای حل سیستم گرداننده را دنبال کنند. همزمان‌سازی در سیستم‌های آشوبناک نیز کاربرد دارد و بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است [۶-۸]. در این زمینه می‌توان به کار پکورا و کارول [۹] اشاره کرد که در سال ۱۹۹۰ به عنوان آغازی بر همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک ارائه شد.

بر اساس یک نوع طبقه‌بندی، همزمان‌سازی در سیستم‌های آشوبناک به دو دسته تقسیم می‌شود. دسته نخست آن است که دو سیستم یکسان باشند و با عنوان همزمان‌سازی سیستم‌های یکسان<sup>۴</sup> شناخته می‌شود [۱۰]. در دسته دوم دو سیستم متفاوت بوده و همزمان‌سازی سیستم‌های غیریکسان<sup>۵</sup> نامیده می‌شود و مطلوب این است که با اعمال کنترل، سیستم پاسخ رفتار سیستم گرداننده را پیروی کند [۱۱]. یکی دیگر از انواع همزمان‌سازی که از طبقه‌بندی فوق خارج است، همزمان‌سازی با بهره است<sup>۶</sup> [۱۲، ۱۱]. این نوع همزمان‌سازی می‌تواند مانند طبقه‌بندی قبل به دو صورت یکسان [۱۱] و غیر یکسان [۱۲] انجام پذیرد. از انواع دیگر همزمان‌سازی می‌توان به همزمان‌سازی با تأخیر<sup>۷</sup> اشاره کرد [۱۳].

محاسبات مرتبه کسری تاریخچه‌ای حدود ۳۰۰ ساله دارد و با کارهای لایبنیتز<sup>۸</sup>، ریمان<sup>۹</sup> و سایرین آغاز شد. هرچند در آن زمان زیاد مورد استقبال قرار نگرفت ولی در سال‌های اخیر کاربردهای زیادی پیدا کرده است. از جمله می‌توان به مدل‌سازی سیستم‌های تعلیق و مواد ویسکوالاستیک اشاره کرد [۱۴-۱۷]. همچنین محاسبات مرتبه کسری به حوزه کنترل هم وارد شده است [۱۸-۲۱] و مزایایی را در آن به وجود آورده است. ارائه روشی در همزمان‌سازی که هم از سرعت قابل قبولی برخوردار باشد و هم کیفیت پاسخ‌گذاری مناسبی داشته باشد، دارای اهمیت زیادی است. از این رو در این مقاله سعی شده است با استفاده از روش‌هایی مبتنی بر

محاسبات مرتبه کسری، به شناسایی پارامترهای سیستم آشوبناک بر اساس همزمان‌سازی پرداخته شود. استفاده از محاسبات مرتبه کسری، پارامترهای جدیدی در اختیار طراح قرار می‌دهد. این پارامترهای اضافی به عنوان ابزاری در دست طراح، موجب به دست آمدن نتایج بهتری از همزمان‌سازی می‌شوند [۲۰-۲۲]. همچنین هدف این مقاله این است که با استفاده از روش ارائه شده بتوان کاربرد جدیدی برای همزمان‌سازی ارائه کرد. این کاربرد همان شناسایی سیستم‌هاست. برای این منظور می‌توان یک سیستم (سیستم پاسخ) مشابه با سیستمی (سیستم گرداننده) که در واقعیت در حال کار است را در کامپیوتر در نظر گرفت و با نامعلوم فرض کردن پارامترهای هر دو سیستم، به همزمان‌سازی دو سیستم و پیدا کردن پارامترهای نامعلوم آن‌ها پرداخت. همزمان‌سازی به کاررفته در این مورد از نوع همزمان‌سازی یکسان بوده قوانین تطبیق باید به گونه‌ای انتخاب شوند تا همگرایی پارامترها به مقادیر صحیح تضمین شود. در این نوع از همزمان‌سازی در واقع هدف شناسایی سیستم بوده و در نتیجه اثبات همگرایی پارامترها به مقادیر صحیح الزامی است.

## ۲- مفاهیم اولیه و تعاریف

مشقت و انتگرال مرتبه کسری، فرم تعمیم‌یافته مرتبه صحیح می‌باشند. عملگر انتگرال-مشقت‌گیر در محاسبات مرتبه کسری به طور کلی با نماد  $D_t^\alpha$  نشان

- 1- Synchronization
- 2- Drive
- 3- Response
- 4- Identical
- 5- Non-identical
- 6- Projective synchronization
- 7- Lag synchronization
- 8- Leibniz
- 9- Riemann

10- Incommensurate

(۵) همزمان شود و نقطه تعادل صفر برای دینامیک خطای سیستم  
 $(e_i = y_i - x_i; i = 1, 2, 3)$  به صورت مجانبی فراگیر پایدار است با این شرط  
 که طبق رابطه (۷):

$$k_2 > \max(g_1, g_2)$$

$$g_1 = \min_{\lambda} \left( \frac{(\lambda a + b + B_3)^2}{4\lambda a} - 1 \right) > 0$$

$$g_2 = \min_{\lambda} \left( \frac{c(\lambda a + b + B_3)^2}{4\lambda ac - B_2^2} - 1 \right) > 0 \quad (۷)$$

منظور از  $\min(\cdot)$  در عبارت فوق، کمینه عبارت داخل پرانتز به ازای  
 تغییرات  $\lambda$  است به شرطی که  $\lambda > B_2^2 / 4ac > 0$  برقرار باشد.  
 اثبات: دینامیک خطا با کم کردن رابطه (۵) از (۶) به صورت رابطه (۸) است:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = be_1 - e_2 - e_1e_3 - x_1e_3 - x_3e_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -ce_3 + e_1e_2 + x_2e_1 + x_1e_2 + u_3 \end{cases} \quad (۸)$$

تابع لیپانوف در اینجا به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$V_1(t) = \frac{1}{2}(\lambda e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (۹)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیپانوف بر حسب زمان رابطه (۱۰) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \lambda e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \\ &= \lambda e_1(ae_2 - ae_1 + u_1) \\ &\quad + e_2(be_1 - e_2 - e_1e_3 - x_1e_3 - x_3e_1 + u_2) \\ &\quad + e_3(-ce_3 + e_1e_2 + x_2e_1 + x_1e_2 + u_3) \\ &= -\lambda ae_1^2 - e_2^2 - ce_3^2 + e_1e_2(\lambda a + b - x_3) \\ &\quad + e_1e_3(x_2) + \lambda e_1u_1 + e_2u_2 + e_3u_3 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با جایگذاری  $u_2 = -k_2e_2$  و  $u_1 = u_3 = 0$  در معادلات بالا به رابطه (۱۱) می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \lambda e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \\ &= \lambda e_1(ae_2 - ae_1 + u_1) \\ &\quad + e_2(be_1 - e_2 - e_1e_3 - x_1e_3 - x_3e_1 + u_2) \\ &\quad + e_3(-ce_3 + e_1e_2 + x_2e_1 + x_1e_2 + u_3) \\ &= -\lambda ae_1^2 - e_2^2 - ce_3^2 + e_1e_2(\lambda a + b - x_3) \\ &\quad + e_1e_3(x_2) + \lambda e_1u_1 + e_2u_2 + e_3u_3 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که طبق رابطه (۱۲):

$$P = \begin{pmatrix} \lambda a & \frac{-(\lambda a + b + B_3)}{2} & \frac{-B_2}{2} \\ \frac{-(\lambda a + b + B_3)}{2} & 1 + k_2 & 0 \\ \frac{-B_2}{2} & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$e = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \end{pmatrix} \quad (۱۲)$$

در صورتی که شرایط موجود در رابطه (۷) و رابطه  $\lambda > B_2^2 / 4ac > 0$  برقرار  
 باشند، ماتریس  $P$  مثبت معین است و بنابراین  $\dot{V}_1(t) < 0$  و نقطه تعادل مبدأ  
 برای خطای همزمان‌سازی نقطه پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

#### ۴- همزمان‌سازی تطبیقی

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، معمولاً در واقعیت همه یا بعضی از  
 پارامترهای سیستم نامعلوم بوده و یا دارای عدم قطعیت می‌باشند. از این رو

داده می‌شود. در ادامه به بیان یکی از تعریف‌های متداول این عملگر پرداخته  
 می‌شود.

تعریف ۱. مشتق و انتگرال مرتبه کسری کاپوتو<sup>۱</sup> طبق رابطه (۱) تعریف  
 می‌شود [۲۳]:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & n-1 < \alpha < n \\ D^n f(t) & \alpha = n \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن  $n-1 \leq \alpha < n$  و  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما است:  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

تعریف ۲. سیستم دینامیکی مرتبه کسری به صورت رابطه (۲) تعریف  
 می‌شود:

$$F(t, y(t), {}^c D_t^{\alpha_1} y(t), \dots, {}^c D_t^{\alpha_n} y(t)) = g(t) \quad (۲)$$

که در آن  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  و توابع  $F(t, y_1, \dots, y_n)$  و  $g(t)$  توابع حقیقی  
 معلوم می‌باشند. این سیستم دینامیکی می‌تواند به صورت فضای حالت هم  
 نشان داده شود. طبق رابطه (۳) داریم:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{\alpha_i} x_i &= f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن برای  $0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$  می‌باشند. همچنین سیستم خطی  
 مرتبه کسری به این صورت است. طبق رابطه (۴) داریم:

$$\begin{pmatrix} {}^c D_t^{\alpha_1} x_1 \\ {}^c D_t^{\alpha_2} x_2 \\ \vdots \\ {}^c D_t^{\alpha_n} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (۴)$$

#### ۳- سیستم آشوبناک «لورنز»

سیستم آشوبناکی که به عنوان سیستم گرداننده مورد استفاده قرار گرفته  
 است، سیستم آشوبناک «لورنز» است. معادله دینامیکی این سیستم مطابق  
 رابطه (۵) است [۱]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - cx_3 \end{cases} \quad (۵)$$

که در آن پارامترهای سیستم به صورت  $a = 10, b = 28, c = 8.3$  می‌باشند.  
 از آنجایی که همزمان‌سازی مورد نیاز برای شناسایی سیستم از نوع  
 همزمان‌سازی یکسان است، سیستم پاسخ هم مانند سیستم گرداننده در نظر  
 گرفته می‌شود؛ بنابراین سیستم گرداننده به صورت رابطه (۶) خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = by_1 - y_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - cy_3 + u_3 \end{cases} \quad (۶)$$

که در آن  $u_1, u_2, u_3$  کنترل‌رهای هستند که برای همزمان‌سازی سیستم  
 پاسخ به کار می‌روند.

قضیه ۱. برای سیستم (۵)، فرض کنید که  $B_2$  و  $B_3$  به ترتیب حد بالا برای  
 متغیرهای حالت  $x_2$  و  $x_3$  در این سیستم هستند. برای  $\lambda > B_2^2 / 4ac > 0$ ،  
 سیستم (۶) با کنترلر  $u_1 = u_3 = 0$  و  $u_2 = -k_2(y_2 - x_2)$  می‌تواند با سیستم

1- Caputo

که در آن  $-e^T P e < \dot{V}_1(t)$  همان طور که در رابطه (۱۱) نشان داده شده است. با جایگذاری قوانین تطبیق (۱۴) در (۲۰)، رابطه (۲۱) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_1(t) - e^T P e \Rightarrow \dot{V}_2(t) \leq 0 \quad (21)$$

برای ادامه روند اثبات، لم ۱ به صورت زیر ارائه می‌گردد:

لم ۱. همه فرضیات قضیه ۱ را در نظر بگیرید. نقطه تعادل صفر برای دینامیک خطای سیستم (۱۵) با استفاده از قوانین تطبیق (۱۴) و کنترلر  $u_2 = -\tilde{k}_2 e_2$  به صورت مجانبی فراگیر پایدار است.

اثبات:  $P$  یک ماتریس متقارن مثبت معین است که می‌تواند به فرم رابطه (۲۲) نوشته شود.

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_1(t) - e^T P e \Rightarrow \dot{V}_2(t) \leq 0 \quad (22)$$

بنابراین طبق رابطه (۲۳):

$$\dot{V}_2(t) \leq -(Se)^T (Se) \quad (23)$$

که  $S$  یک ماتریس ثابت غیر تکین است. با در نظر گرفتن انتگرال طبق رابطه (۲۴):

$$I = \int_0^{\infty} -\dot{V}_2(t) dt = V_2(0) - V_2(\infty) \quad (24)$$

با توجه به این موضوع که  $\dot{V}_2$  نامثبت است لذا  $V_2(t)$  کاهشی است و از آنجایی که  $V_2(t)$  مثبت است؛ در نتیجه  $V_2(\infty)$  محدود بوده و انتگرال  $I$  در رابطه (۲۴) محدود است. بنابراین با توجه به رابطه (۲۳)، رابطه (۲۵) را داریم:

$$\int_0^{\infty} (Se)^T (Se) dt < I \quad (25)$$

که در نتیجه می‌توان طبق رابطه (۲۶) گفت:

$$(Se) \in L_2 \quad (26)$$

با توجه به رابطه (۲۱) و این که  $\dot{V}_2$  منفی نیمه معین است، همه خطاها و تخمین پارامترها محدود خواهند بود. بنابراین مشتقات زمانی موجود در

دینامیک خطای سیستم (۱۵) محدود خواهند بود و  $\frac{d(Se)}{dt} = S\dot{e}$  نیز محدود می‌ماند.

اکنون با استفاده از لم باربالات [۲۵] رابطه (۲۷) را داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Se(t) = 0 \quad (27)$$

با توجه به این موضوع که  $S$  غیر تکین است، می‌توان طبق رابطه (۲۸) گفت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (28)$$

بنابراین اثبات لم تکمیل می‌شود.

اکنون اگر معادله  $\dot{V}_2 = 0$  حل شود، طبق لم ۱، تنها پاسخ مجاز، پاسخ  $e(\infty) = 0$  خواهد بود. با اعمال این پاسخ به سیستم (۱۵) و دانستن این

موضوع از رابطه (۲۸) که  $\dot{e}(\infty) = 0$ ، رابطه (۲۹) بدست خواهد آمد:

$$e_a(\infty) = e_b(\infty) = e_c(\infty) = 0 \quad (29)$$

سپس با استفاده از قضیه مجموعه‌های ناوردای لاسال [۲۴]، مبدأ برای سیستم (۱۴) و (۱۵) با هم به صورت مجانبی فراگیر پایدار خواهد بود.

بنابراین با توجه به قضیه ۲، سیستم مجازی که در کامپیوتر ساخته می‌شود (۱۳) و به عنوان سیستم پاسخ در نظر گرفته می‌شود، با پارامترهای

نامشخص  $a_r, b_r, c_r$  می‌تواند با سیستم حقیقی نشان داده شده در رابطه (۵) با اندازه‌گیری همه متغیرهای حالت و با استفاده از پسخوراند برگرفته از تنها

یکی از متغیرهای حالت، همزمان شود. قضیه ۲ نشان می‌دهد که خطاها به صورت مجانبی به صفر و پارامترها نیز به مقادیر حقیقی میل می‌کنند. لازم

به ذکر است که کنترلر و تمامی قوانین تطبیق نیز در کامپیوتر، شبیه‌سازی و ساخته می‌شوند.

برای شناسایی پارامترهای نامعلوم از روش‌های تطبیقی استفاده می‌شود. به این ترتیب که پارامترهای سیستم‌های گرداننده و پاسخ نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و پارامترهای سیستم پاسخ با استفاده از قوانین تطبیق بهره‌ورزسانی می‌شوند. برای این منظور سیستم پاسخ به صورت رابطه (۱۳) است:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_r(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b_r y_1 - y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - c_r y_3 + u_3 \end{cases} \quad (13)$$

در این سیستم، پارامترهای  $a_r, b_r, c_r$  نامشخص در نظر گرفته می‌شوند. قضیه ۲. همه فرضیات ذکر شده در قضیه ۱ را در نظر بگیرید. سیستم

(۱۳) با کنترلر  $u_2 = -\tilde{k}_2(y_2 - x_2)$ ،  $u_1 = u_3 = 0$  می‌تواند با سیستم نشان داده شده در معادله (۵) همزمان شود که در نتیجه نقطه تعادل صفر از دینامیک خطای سیستم با استفاده از قانون تطبیق نوشته شده در (۱۴) به طور مجانبی و فراگیر پایدار خواهد بود و همگرایی پارامترها نیز حاصل می‌شود. طبق رابطه (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= -\lambda e_1 y_2 + \lambda e_1 y_1 \\ \dot{e}_b &= -y_1 e_2 \\ \dot{e}_c &= y_3 e_3 \\ \dot{\tilde{k}}_2 &= e_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

اثبات: دینامیک خطا مطابق قبل تعریف می‌شود و برای سیستم جدید به صورت رابطه (۱۵) است:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + e_a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = b e_1 - e_2 + e_1 e_3 - y_1 e_3 - y_3 e_1 + e_b y_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -c e_3 - e_1 e_2 + y_2 e_1 + y_1 e_2 - e_c y_3 + u_3 \end{cases} \quad (15)$$

در این رابطه  $e_a = a_r - a$  خطای تخمین پارامتر است. برای  $e_b, e_c$  هم به همین صورت است.

اکنون تابع لیاپانوف جدید به صورت رابطه (۱۶) قابل تعریف است:

$$V_2(t) = V_1^*(t) + \frac{1}{2}(e_a^2 + e_b^2 + e_c^2) + \frac{1}{2}(\tilde{k}_2 - k_2)^2 \quad (16)$$

که  $\tilde{k}_2$  تخمین بهره کنترلی است و  $V_1^*(t)$  به فرم معادله (۹) است. مشتق زمانی  $V_1^*(t)$  طبق رابطه (۱۷) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^*(t) &= \lambda e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \\ &= \lambda e_1 (a e_2 - a e_1 + e_a y_2 - e_a y_1 + u_1) \\ &\quad + e_2 (b e_1 - e_2 + e_1 e_3 - y_1 e_3 - y_3 e_1 + e_b y_1 + u_2) \\ &\quad + e_3 (-c e_3 - e_1 e_2 + y_2 e_1 + y_1 e_2 - e_c y_3 + u_3) \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین مشتق زمانی تابع لیاپانوف (۱۶) به صورت رابطه (۱۸) است:

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_1^*(t) + e_a \dot{e}_a + e_b \dot{e}_b + e_c \dot{e}_c + (\tilde{k}_2 - k_2) \dot{\tilde{k}}_2 \quad (18)$$

دوباره فرض می‌شود که  $u_2 = -\tilde{k}_2 e_2$  و  $u_1 = u_3 = 0$  با جایگذاری رابطه (۱۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= -\lambda a e_1^2 - (1 + k_2) e_2^2 - c e_3^2 \\ &\quad + e_1 e_2 (\lambda a + b - x_3) + e_1 e_3 (x_2) \\ &\quad + e_a (\lambda e_1 y_2 - \lambda e_1 y_1 + \dot{e}_a) + e_b (y_1 e_2 + \dot{e}_b) \\ &\quad + e_c (-e_3 y_3 + \dot{e}_c) + (\tilde{k}_2 - k_2) (\dot{\tilde{k}}_2 - e_2^2) \end{aligned} \quad (19)$$

بنابراین طبق رابطه (۲۰):

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \dot{V}_1(t) + e_a (\lambda e_1 y_2 - \lambda e_1 y_1 + \dot{e}_a) \\ &\quad + e_b (y_1 e_2 + \dot{e}_b) + e_c (-e_3 y_3 + \dot{e}_c) \\ &\quad + (\tilde{k}_2 - k_2) (\dot{\tilde{k}}_2 - e_2^2) \end{aligned} \quad (20)$$

همان‌طور که در بخش بعد مشاهده می‌شود، همگرایی پارامتر  $c$  به شدت نوسانی بوده و بنابراین فقط از  $\alpha_3 = 0.7$  استفاده می‌شود و سایر قوانین به صورت مرتبه صحیح باقی می‌مانند.

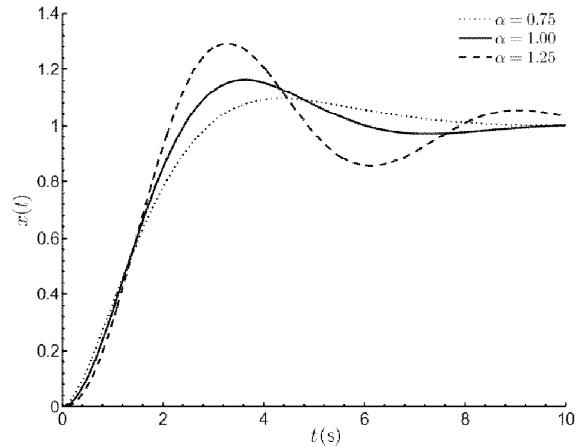
### ۶- شبیه‌سازی عددی

برای نشان دادن تأثیر و مزایای قانون تطبیق مرتبه کسری، در این بخش به شبیه‌سازی عددی و مقایسه دو روش مرتبه کسری و مرتبه صحیح پرداخته شده است. برای حل کردن دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری (۵)، (۱۳) و (۳۰)، از روش پیش‌بینی و تصحیح [۲۷] استفاده شده است. گام زمانی در این روش برابر با  $0.001$  در نظر گرفته شده است. روش اشاره‌شده، برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح مانند روش رانگ-کوتا<sup>۱</sup> مرتبه ۴ عمل می‌کند. شبیه‌سازی‌ها توسط کدهایی که در نرم‌افزار متلب نوشته شده‌اند انجام شده است. در قسمت مرتبه کسری برای قوانین موجود در رابطه (۳۰) تنها از مقدار  $\alpha_3 = 0.7$  استفاده شده و سایر معادلات به صورت مرتبه صحیح در نظر گرفته شده‌اند. زیرا شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد تخمین پارامتر  $c$  و به تبع آن خطای  $e_3$  دارای نوسانات شدید است و برای جلوگیری از این نوسان‌ها، دینامیک قانون تطبیق مربوطه، به صورت مرتبه کسری در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است می‌توان سایر قوانین تطبیق را نیز به صورت مرتبه کسری و حتی با مرتبه مشتق متفاوت در نظر گرفت، گرچه تأثیر چندانی در بهبود نتایج نخواهد داشت.

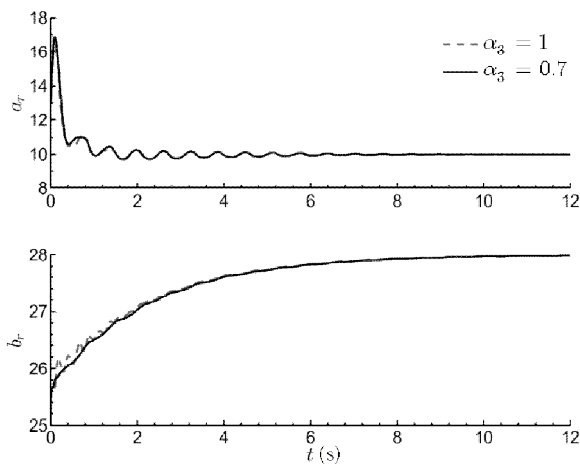
برای به دست آوردن نتایج، پارامترها با  $10\%$  درصد خطا نسبت به مقادیر واقعی کمتر در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر  $B_2 = 28, B_3 = 48$  اختیار شده و در معادله (۵)، پارامترها به صورت  $a = 10, b = 28, c = 8/3$  و شرایط اولیه به صورت  $x_0 = [10, 10, 25]^T$  انتخاب شده‌اند. همچنین برای معادلات (۱۳) و (۳۰) به ترتیب مقادیر  $y_0 = [0, 0, 15]^T, a_r(0) = 13, b_r(0) = 25$  و  $c_r(0) = 3$  به عنوان شرط اولیه در نظر گرفته شده‌اند. با استفاده از رابطه (۷) و در نظر گرفتن تخمینی از پارامترهای سیستم (به طوری که سیستم با این پارامترها همچنان آشوبناک بماند به طور مثال  $10\%$  درصد کمتر از مقادیر واقعی خود) می‌توان شرط اولیه بهره را حدس زد. در  $\lambda = 5.93, g_1 = 52.2$  و در  $\lambda = 26.7, g_2 = 157.4$  بدست آمده است و مقدار شرط اولیه بهره با توجه به آن،  $\tilde{K}_2(0) = 162$  انتخاب شده است.

لازم به ذکر است همانطور که در این رابطه دیده می‌شود، مقادیر پارامترها در محاسبه حد پایین بهره کنترلی تأثیر دارند و در ادامه سیستم تطبیقی، خودبه‌خود بهره را به مقدار مناسب میل خواهد داد.

در شکل ۲ تخمین پارامترهای  $a_r$  و  $b_r$  و در شکل ۳ تخمین پارامتر  $c_r$  نشان داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، پارامترها به مقدار صحیح خود میل کرده‌اند. همچنین تخمین پارامتر  $c_r$  با استفاده از روابط مرتبه صحیح دارای نوسانات زیادی است ولی در صورت استفاده از قوانین تطبیق مرتبه کسری، این نوسانات به طرز چشمگیری کاهش یافته‌اند و تخمین مورد نظر در زمان کوتاه‌تری به مقدار صحیح میل کرده است. در واقع زمان نشست با استفاده از قوانین تطبیق مرتبه کسری، حدود  $0.1$  این مقدار در حالت استفاده از روابط مرتبه صحیح است. به علاوه استفاده از دینامیک مرتبه کسری در تخمین پارامتر  $c_r$  نه تنها تأثیر منفی بر تخمین سایر پارامترها نداشته است، بلکه در تخمین  $b_r$  باعث کاهش نوسانات هم شده است.



شکل ۱ پاسخ پله واحد سیستم (۳۱) با  $\alpha$ های مختلف



شکل ۲ تخمین پارامترهای  $a_r$  و  $b_r$

### ۵- قانون تطبیق مرتبه کسری

با توجه به آن چه پیش‌تر اشاره شد، با استفاده از محاسبات مرتبه کسری می‌توان سرعت همزمان‌سازی و همگرایی پارامترها را افزایش داد؛ بنابراین برای شناسایی سریع‌تر سیستم قوانین تطبیق موجود در رابطه (۱۴) را طبق رابطه (۳۰) تغییر خواهند نمود:

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^{\alpha_1} e_a &= -\lambda e_1 y_2 + \lambda e_1 y_1 \\ {}_0^c D_t^{\alpha_2} e_b &= -y_1 e_2 \\ {}_0^c D_t^{\alpha_3} e_c &= y_3 e_3 \\ {}_0^c D_t^{\alpha_4} \tilde{K}_2 &= e_2^2 \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن برای  $0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, 4$  می‌باشند. می‌توان انتظار داشت که سیستم دینامیکی با مرتبه کسری کوچک‌تر از یک مانند یک سیستم میرا عمل می‌کند [۲۶، ۲۵]، لذا همزمان‌سازی مورد نظر، با قوانین تطبیق فوق پایدار باقی خواهد ماند و سریع‌تر و با نوسانات کمتر انجام شود. با این حال بررسی پایداری این سیستم به صورت دقیق‌تر در بخش ۷ آورده شده است.

برای نمونه سیستم (۳۱) را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{1}{1+s+s^{1+\alpha}} \quad (31)$$

که در آن  $\alpha$  به عنوان مرتبه مشتق سیستم شناخته می‌شود. در شکل ۱ برای  $\alpha$ های مختلف، پاسخ پله واحد این سیستم رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در  $\alpha = 0.75$  که کوچکتر از یک است، رفتار سیستم با میرایی بیشتری ملاحظه شده است.

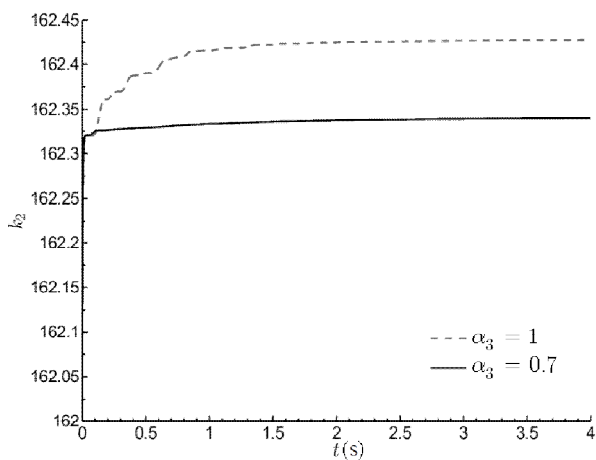
کاهش یافته‌اند، زمان نشست هم بسیار کوچک شده است. همچنین مانند قبل دینامیک مرتبه کسری باعث بهبود وضعیت در دو فاز دیگر هم شده است و نوسانات در این دو فاز هم کاهش یافته است.

در شکل ۶ نیز بهره کنترلی که به صورت تطبیقی به دست می‌آید، نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، در حالت مرتبه کسری بهره کنترلی کوچکتر بوده که نشان می‌دهد در این حالت انرژی کنترلی کمتری برای همزمان‌سازی دو سیستم مورد نیاز است.

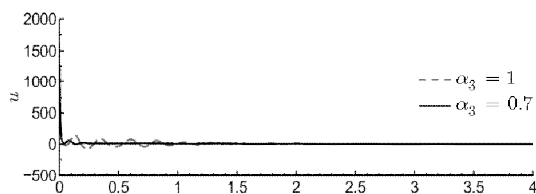
در شکل ۷ قانون کنترلی استفاده شده نشان داده شده است. همانطور که در بخش‌های قبل اشاره شد، این کنترلر در کامپیوتر شبیه‌سازی می‌شود. بنابراین نگرانی بابت زیاد بودن دامنه این کنترلر در ابتدا وجود ندارد. برای بهتر نشان دادن جزئیات، در قسمت پایین، شکل بزرگ‌شده نمایش داده شده است. در این شکل در کمتر از  $0.2$  واحد زمانی، دامنه کنترلی به زیر  $100$  واحد می‌رسد. همچنین در حالت مرتبه کسری با کمترین نوسانات این دامنه به صفر می‌رسد. حال آن که در حالت مرتبه صحیح نوسانات بسیار بیشتر بوده و دامنه دوباره به حدود  $150$  واحد می‌رسد.

### ۷- نتیجه گیری

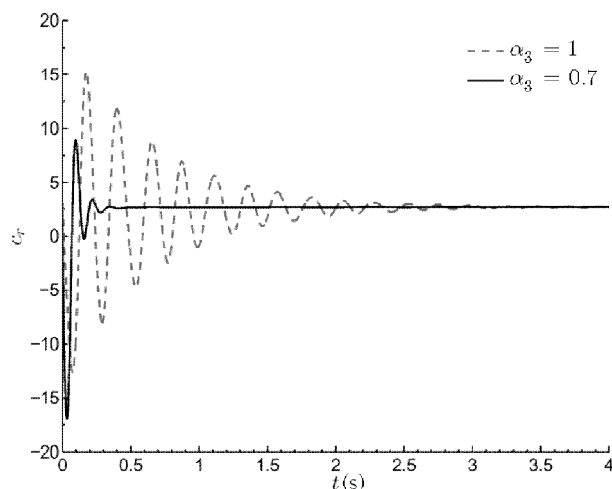
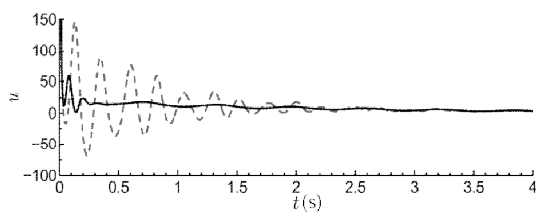
در این مقاله به شناسایی پارامترهای سیستم آشوبناک «لورنز» پرداخته شده است. روش مورد استفاده بر اساس همزمان‌سازی یکسان دو سیستم آشوبناک است. با استفاده از پسخوراند فقط یکی از متغیرهای حالت، همزمان‌سازی انجام شده و قوانین تطبیق به گونه‌ای انتخاب شده که تخمین پارامترها به مقدار صحیح خود میل کند.



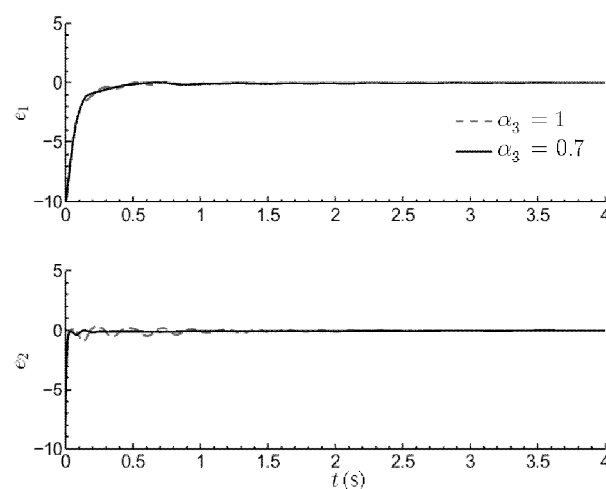
شکل ۶ بهره کنترلی



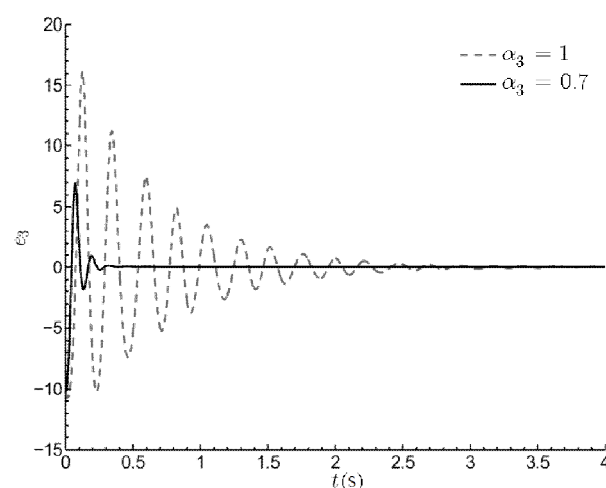
شکل ۷ قانون کنترلی



شکل ۳ تخمین پارامتر  $c_r$



شکل ۴ خطای همزمان‌سازی فازهای اول و دوم



شکل ۵ خطای همزمان‌سازی فاز سوم

در شکل ۴ خطای همزمان‌سازی برای فازهای اول و دوم سیستم و در شکل ۵ خطای همزمان‌سازی برای فاز سوم سیستم نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، این خطاها برای هر دو حالت مرتبه صحیح و کسری به صفر رسیده‌اند. ولی با توجه به این که تخمین پارامتر  $c_r$  به طور مستقیم روی فاز سوم تأثیر می‌گذارد، مشاهده می‌شود که این خطا در حالت مرتبه صحیح، نوسانات زیادی دارد و در حالت مرتبه کسری علاوه بر این که نوسانات

بنابراین در ادامه به بررسی علامت جمله دوم در سمت راست رابطه (۳۴) پرداخته می‌شود تا به وسیله آن پایداری سیستم با استفاده از قوانین تطبیق مرتبه کسری نیز اثبات شود. برای این منظور از تعریف مشتق کاپوتو در حالت مرتبه کسری استفاده شده است.

لم ۲. عبارت  $w(\tau)$  را مطابق رابطه (۳۵) در نظر بگیرید:

$$w(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)(t-\tau)^\beta} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \quad (35)$$

که در آن  $0 < \alpha < \beta < 1$ . در صورتی که  $0 \leq \tau \leq t$  و  $\beta \rightarrow 1$ ؛ آنگاه  $w(\tau)$  همواره منفی و نزولی خواهد بود.

اثبات. با مشتق‌گیری از  $w(\tau)$  نسبت به  $\tau$  طبق رابطه (۳۶):

$$\begin{aligned} \frac{dw(\tau)}{d\tau} &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)(t-\tau)^{\beta+1}} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\beta\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+1} - \alpha\Gamma(1-\beta)(t-\tau)^{\beta+1}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+\beta+2}} \end{aligned} \quad (36)$$

با توجه به مثبت بودن عبارت منفرجه و اینکه  $0 < \alpha < \beta < 1$ ، واضح است که عبارت صورت برای  $0 \leq \tau \leq t^*$  که در آن طبق رابطه (۳۷)،

$$t^* = t - \left( \frac{\Gamma(1-\alpha)\alpha}{\Gamma(1-\beta)\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \quad (37)$$

همواره منفی خواهد بود و زمانی که  $\beta \rightarrow 1$  مقدار  $t^*$  به  $t$  میل می‌کند. لذا  $w(\tau)$  زمانی که  $\beta \rightarrow 1$  در بازه  $0 \leq \tau \leq t$  نزولی است.

حال  $w(\tau)$  مجدداً بازنویسی می‌شود. طبق رابطه (۳۸) داریم:

$$w(\tau) = \frac{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha - \Gamma(1-\beta)(t-\tau)^\beta}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha \Gamma(1-\beta)(t-\tau)^\beta} \quad (38)$$

منفرجه این عبارت همواره مقداری مثبت دارد و مجدداً مشخص است که برای  $0 < \alpha < \beta < 1$  و  $\beta \rightarrow 1$  عبارت صورت منفی است. لذا  $w(\tau)$  منفی و نزولی است.

در ضمن باید توجه داشت که علاوه بر شرایط لم در صورتی که  $t \rightarrow \tau$ ، عبارت  $w(\tau)$  به منفی بینهایت میل می‌کند.

گزاره. عبارت  $e_c(\dot{e}_c - {}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c)$  در رابطه (۳۴) به گونه‌ای رفتار می‌کند که پایداری مجانبی سیستم کنترل شده با استفاده از قانون تطبیق مرتبه کسری، تضمین شده باقی خواهد ماند.

اثبات. در صورتی که در عبارت اشاره شده  $\dot{e}_c$  با  ${}^C_0 D_t^{\beta} e_c$  جایگزین شود که در آن  $\beta \rightarrow 1$ ، می‌توان طبق رابطه (۳۹) گفت:

$$\begin{aligned} e_c({}^C_0 D_t^{\beta} e_c - {}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c) &= e_c(t) \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{e}_c(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_3)} \int_0^t \frac{\dot{e}_c(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_3}} \\ &= e_c(t) \int_0^t \dot{e}_c(\tau) w(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

که در آن  $w(\tau)$  به عنوان یک تابع وزن بوده و در رابطه (۳۵) تعریف شده است و با توجه به لم ۲ منفی و نزولی است.

در ادامه برای راحتی کار دو متغیر  $A_i$  و  $I_i$  در رابطه (۴۰) تعریف شده است:

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} A_i(t, \tau) w(\tau) d\tau; i=1, \dots, N \\ A_i(t, \tau) &= e_c(\tau') \dot{e}_c(\tau); \tau \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن  $\theta_0 = 0$ ،  $\theta_N = t$ ، و بازه‌های  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در آن‌ها  $A_i(t, \tau)$  تغییر علامت نمی‌دهد. همچنین طبق رابطه (۴۱) داریم:

در نتیجه هدف اصلی که شناسایی سیستم بود، به دست آمد. همچنین نشان داده شده است که تغییر دینامیک یکی از قوانین تطبیق به مرتبه کسری، زمان نشست برای تخمین پارامتر  $C_r$  را تا حدود ۰/۱ حالت مرتبه صحیح کاهش داده است. در نتیجه زمان نشست در صفر شدن خطای همزمان‌سازی فاز سوم هم به همین اندازه کاهش یافته است. همچنین با استفاده از قوانین تطبیق مرتبه کسری، نوسانات به طرز چشمگیری کاهش یافته و بهره کنترلی هم کمتر از بهره کنترلی با قوانین تطبیق مرتبه صحیح به دست آمده است. حالت مرتبه صحیح در واقع بهبود روش ارائه شده در مقاله [۱۰] برای سیستم فوق‌آشوبناک «لو» است که در آن قوانین تطبیق به صورت عملی و قابل پیاده‌سازی به دست نیامده‌اند.

درانتها و در پیوست، برای پایداری سیستم با استفاده از قوانین تطبیق مرتبه کسری بحثی انجام شده است که نشان می‌دهد در صورت استفاده از این قوانین، همچنان پایداری سیستم باقی می‌ماند.

لازم به ذکر است مباحث انجام شده برای به دست آوردن کنترل‌رول قوانین تطبیق، قابل اعمال به سیستم‌های آشوبناک یا فوق‌آشوبناک دیگر نیز بوده و فقط کافی است شرایط لازم برای مثبت معین بودن ماتریس  $P$  در رابطه (۱۲) مانند رابطه (۷) به دست آیند. در مواقعی هم که در مشتق تابع لیاپانوف در رابطه (۱۱) مرتبه‌های بالاتری از خطای همزمان‌سازی ظاهر شود که نتوان آنرا به فرم درجه دو نوشت، با صرف نظر از آن‌ها، قضیه به حالت مجانبی محلی تغییر صورت می‌دهد.

#### ۸- پیوست: بررسی پایداری سیستم در حالت مرتبه کسری

همانطور که در بخش‌های قبل اشاره شد، برای بهبود شرایط همگرایی پارامترها، قانون تطبیق مربوط به تخمین پارامتر  $C$  به صورت رابطه (۳۲) تغییر کرد.

$${}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c = y_3 e_3 \quad (32)$$

بنابراین می‌توان رابطه (۲۰) را به صورت رابطه (۳۳) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \dot{V}_1(t) + e_a(\lambda e_1 y_2 - \lambda e_1 y_1 + \dot{e}_a) \\ &\quad + e_b(y_1 e_2 + \dot{e}_b) + (\bar{k}_2 - k_2)(\bar{k}_2 - e_2^2) \\ &\quad + e_c({}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c - e_3 y_3) + e_c(\dot{e}_c - {}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c) \end{aligned} \quad (33)$$

با جایگذاری قوانین تطبیق (۱۴)، رابطه بالا به صورت رابطه (۳۴) درمی‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \dot{V}_1(t) + e_c(\dot{e}_c - {}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c) \\ &\quad < -e^T P e + e_c(\dot{e}_c - {}^C_0 D_t^{\alpha_3} e_c) \end{aligned} \quad (34)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در سمت راست این عبارت علاوه بر آنچه در رابطه (۲۱) وجود دارد، جمله دیگری اضافه شده است. در صورتی که این جمله منفی باشد، پایداری سیستم مورد نظر تضمین می‌شود ولی در صورتی که این جمله اضافه مثبت شود، می‌تواند در علامت کلی  $\dot{V}_2(t)$  تأثیر بگذارد. اگر این تأثیر باعث مثبت شدن علامت  $\dot{V}_2(t)$  شود، در ادامه نشان داده می‌شود که خطاهای سیستم از بالا به یک کران محدود می‌شوند که این کران، خود نیز به سمت صفر میل می‌کند.

لازم به ذکر است که مثبت شدن مشتق یک تابع لیاپانوف به معنای ناپایداری سیستم نیست و فقط نشان می‌دهد که پایداری سیستم با استفاده از تابع لیاپانوف مورد نظر قابل اثبات نیست. برای آن که از مثبت بودن مشتق تابع لیاپانوف بتوان ناپایداری سیستم را نتیجه‌گیری کرد، لازم است نشان داده شود که این مشتق در دامنه‌ای از فضا که شامل مبدأ (یا نقطه تعادل) است، مثبت است.

حال در صورتی که  $A_1(t, \tau)$  منفی باشد، با توجه به این که  $e_c(\tau)$  تغییر علامت می‌دهد، علاوه بر این که  $A_2(t, \tau)$  مثبت و  $I_2$  منفی خواهند شد، علامت  $A_1(t, \tau)$  نیز به مثبت تغییر خواهد کرد و علامت  $I_1$  نیز منفی می‌شود. در این صورت با توجه با اینکه  $I$  منفی می‌شود، حالتی مشابه حالت ۱ در قسمت  $N = 1$  به وجود می‌آید که در آن  $A_1(t, \tau)$  مثبت بود و بنابراین پایداری سیستم برای حالت  $N = 2$  نیز تضمین می‌شود.

حال با فرض  $N = 3$  داریم:

اگر  $A_1(t, \tau)$  منفی باشد، در  $\theta_1$  علامت  $e_c(\tau)$  تغییر می‌کند و  $A_1(\theta_1, \tau)$  و  $A_2(t, \tau)$  هر دو مثبت می‌شوند. بنابراین در  $\theta_2$  علامت  $e_c(\tau)$  تغییر می‌کند و در نتیجه  $A_1(t, \tau)$  مثبت و  $A_2(t, \tau)$  نیز مثبت و  $A_3(t, \tau)$  منفی خواهد شد. بنابراین  $I_1$  منفی،  $I_2$  نیز منفی و  $I_3$  مثبت خواهد شد و از آنجایی که فقط در بازه آخر امکان مثبت شدن علامت  $\dot{V}_2(t)$  در رابطه (۳۴) وجود دارد و در این بازه  $A_3(t, \tau)$  منفی است، می‌توان طبق رابطه (۴۵) نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= -e^T Pe + I \\ &= -e^T Pe + I_1 + I_2 + I_3 \\ &< -e^T Pe + I_3 > 0 \\ &\Rightarrow e^T Pe < |I_3| = |e_c(t)| \int_{\theta_2}^t \dot{e}_c(\tau) w(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (45)$$

که با استدلالی مشابه حالت دوم در  $N = 1$  می‌توان ادعا کرد، سیستم پایدار خواهد شد.

اگر  $A_1(t, \tau)$  مثبت باشد، با توجه به تغییر علامت  $e_c(\tau)$  در  $\theta_1$ ، فقط  $A_2(t, \tau)$  منفی می‌شود و در  $\theta_2$  با توجه به تغییر علامت  $e_c(\tau)$ ، علاوه بر این که  $A_3(t, \tau)$  مثبت خواهد شد؛  $A_1(t, \tau)$  منفی و  $A_2(t, \tau)$  نیز مثبت می‌شوند. در نتیجه  $I_1$  مثبت،  $I_2$  منفی و  $I_3$  نیز منفی خواهند شد. از آنجایی که  $A_1(t, \tau)$  منفی بود، نمی‌توان از استدلالی مشابه قبل استفاده کرد. ولی با توجه به دو نکته می‌توان پایداری سیستم را توجیه کرد. اول آن که  $A_1(t, \tau)$  در  $\theta_1$  تغییر علامت داده است. پس با توجه به پیوستگی در  $e_c(\tau)$  و  $\dot{e}_c(\tau)$  می‌توان نتیجه گرفت که سیستم در بازه‌های قبل از بازه آخر نمی‌تواند ناپایدار شود. دوم این که با توجه به این موضوع که وقتی  $t \rightarrow \tau$  و در واقع در بازه آخر تغییر علامت  $A_1(t, \tau)$ ،  $w(\tau)$  به سمت منفی بینهایت میل می‌کند؛ می‌توان نتیجه گرفت که علامت بازه آخر بر دیگر بازه‌ها غالب خواهد بود و فقط کافی است پایداری سیستم براساس علامت همین بازه بررسی شود که بررسی آن به صورت کامل مشابه حالتی است که  $N = 1$  بود. بنابراین می‌توان ادعا کرد پایداری سیستم در حالت  $N = 3$  هم توجیه می‌شود.

استدلال موجود در آخرین قسمت قابل‌اعمال به سایر حالت‌های  $N$  هم است و همچنین تضادی با استدلال‌های ارائه شده در حالات قبلی هم ندارد. با توجه به همین استدلال‌ها می‌توان ادعا کرد که پایداری مجانبی سیستم کنترل شده با استفاده از قانون تطبیق مرتبه کسری، در صورتی که مقدار  $N$  باز هم افزایش یابد، قابل توجیه خواهد بود.

با توجه به این که در روند بررسی پایداری سیستم در حالت مرتبه کسری، به غیر از مثبت معین بودن ماتریس  $P$  و پیوستگی سیگنال‌های سیستم ( $e_c(\tau)$  و  $\dot{e}_c(\tau)$ )، استفاده دیگری از مدل سیستم نشده است؛ می‌توان از این استدلال برای بررسی پایداری سیستم‌های دیگر و فقط با شرط مثبت معین بودن ماتریس  $P$  و پیوستگی سیگنال‌های سیستم استفاده کرد و محدودیت دیگری در آن وجود ندارد.

### ۹- مراجع

[1] E. N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 20, No. 2, pp. 130-141, 1963/03/01, 1963.

$$I = e_c(t) \left\{ \int_0^t \dot{e}_c(\tau) w(\tau) d\tau \right\} = \sum_{i=1}^N I_i \quad (41)$$

با توجه به این موضوع که در سیگنال‌های  $e_c(\tau)$  و  $\dot{e}_c(\tau)$  پیوستگی وجود دارد، در هر تغییر علامت  $A_i(t, \tau)$  تنها یکی از عبارات  $e_c(\tau)$  یا  $\dot{e}_c(\tau)$  تغییر علامت می‌دهند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در صورتی که در بازه  $[\theta_{i-2}, \theta_{i-1}]$ ، علامت  $A_{i-1}(t, \tau)$  مثبت بوده باشد، سیستم به سمت ناپایداری حرکت می‌کند و در نتیجه در  $\theta_{i-1}$  فقط  $\dot{e}_c(\tau)$  تغییر علامت می‌دهد و در صورتی که علامت  $A_{i-1}(t, \tau)$  منفی بوده باشد، با توجه به این که خطا به سمت صفر می‌رود، در  $\theta_{i-1}$  فقط  $e_c(\tau)$  تغییر علامت می‌دهد. حال در نظر بگیرید که  $N = 1$  باشد. در این صورت دو حالت به وجود می‌آید:

۱- اگر  $A_1(t, \tau)$  مثبت باشد:  
 با توجه به نتیجه لم ۲ می‌توان رابطه (۴۲) را نوشت:

$$I < 0 \quad (42)$$

زیرا انتگرال یک عبارت منفی همواره منفی خواهد بود. در این صورت  $\dot{V}_2(t)$  در رابطه (۳۴) منفی باقی می‌ماند و خطای تخمین پارامترها و خطای همزمان‌سازی فازهای مختلف در بازه  $[0, \theta_1]$  به صفر نزدیک می‌شود.

۲- اگر  $A_1(t, \tau)$  منفی باشد:

در این صورت  $I$  مثبت خواهد شد و آنگاه در صورتی که  $\dot{V}_2(t)$  در رابطه (۳۴) منفی باقی بماند، حالتی مشابه قسمت قبل رخ می‌دهد. ولی در صورتی که  $\dot{V}_2(t)$  مثبت شود طبق رابطه (۴۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= -e^T Pe + e_c(\dot{e}_c - {}^C_0D_t^{\alpha_3} e_c) > 0 \\ &\Rightarrow e^T Pe < |e_c(\dot{e}_c - {}^C_0D_t^{\alpha_3} e_c)| \end{aligned} \quad (43)$$

عبارت (۴۳) در حقیقت نشان می‌دهد خطای همزمان‌سازی از بالا کران‌دار شده است؛ اما نشان داده خواهد شد این کران در شرایط ذکر شده، خود به سمت صفر میل می‌کند. از آنجایی  $e_c(t, \tau) = e_c(t)\dot{e}_c(\tau)$ ،  $A_1(t, \tau)$  منفی است،  $|e_c|$  به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه  $e^T Pe$  به صفر میل می‌کند. با توجه به این که  $P$  یک ماتریس مثبت معین است، نتیجه می‌شود که بردار  $e$  به صفر میل می‌کند. حال با استفاده از قضیه ناوردهای لاسل و مشابه قسمت پایانی اثبات قضیه ۲ همگرایی پارامترها به مقادیر صحیح هم اثبات می‌شود و در نتیجه سیستم با استفاده از دینامیک مرتبه کسری و در یک بازه، پایدار مجانبی باقی خواهد ماند.

پس در همه حالات در تک‌بازه  $[0, \theta_1]$ ، در صورتی که علامت  $A_1(t, \tau)$  تغییر نکند، خطای تخمین پارامترها و خطای همزمان‌سازی فازها به صفر نزدیک می‌شود.

در صورتی که پیش از صفر شدن خطاهای همزمان‌سازی و تخمین پارامترها، علامت  $A_1(t, \tau)$  در  $\theta_1$  تغییر کند، با فرض  $N = 2$  داریم:

در صورتی که  $A_1(t, \tau)$  مثبت باشد، از قبل داریم که  $\dot{e}_c(\tau)$  تغییر علامت می‌دهد. بنابراین  $A_2(t, \tau)$  منفی و در نتیجه  $I_2$  مثبت خواهد شد؛ همچنین  $A_1(t, \tau)$  مثبت و  $I_1$  منفی باقی خواهند ماند. در این صورت حالتی مشابه حالت ۲ در قسمت  $N = 1$  پیش می‌آید که در آن  $A_1(t, \tau)$  منفی بود. به این ترتیب که اگر  $I$  مثبت شود و بتواند علامت  $\dot{V}_2(t)$  در رابطه (۳۴) را مثبت کند، می‌توان طبق رابطه (۴۴) گفت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= -e^T Pe + I \\ &= -e^T Pe + I_1 + I_2 < -e^T Pe + I_2 > 0 \\ &\Rightarrow e^T Pe < |I_2| = |e_c(t)| \int_{\theta_1}^t \dot{e}_c(\tau) w(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

که با استدلالی مشابه قبل و با توجه به آن که  $A_2(t, \tau)$  منفی است، پایداری حاصل می‌شود و در غیر این صورت با منفی باقی ماندن  $\dot{V}_2(t)$  در رابطه (۳۴)، سیستم پایدار باقی می‌ماند.



- [15] A. E. Matouk, Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified Autonomous Van der Pol-Duffing circuit, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 2, pp. 975-986, 2011.
- [16] Y. Tang, X. Zhang, C. Hua, L. Li, Y. Yang, Parameter identification of commensurate fractional-order chaotic system via differential evolution, *Physics Letters A*, Vol. 376, No. 4, pp. 457-464, 2012.
- [17] H. Zhu, S. Zhou, J. Zhang, Chaos and synchronization of the fractional-order Chua's system, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, No. 4, pp. 1595-1603, 2009.
- [18] V. Çelik, Y. Demir, Effects on the chaotic system of fractional order PI controller, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 59, No. 1-2, pp. 143-159, 2010.
- [19] H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty, A. Meghdari, On the control of chaos via fractional delayed feedback method, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62, No. 3, pp. 1482-1491, 2011.
- [20] M. S. Tavazoei, M. Haeri, S. Bolouki, M. Siami, Using fractional-order integrator to control chaos in single-input chaotic systems, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 55, No. 1-2, pp. 179-190, 2009.
- [21] M. S. Tavazoei, M. Haeri, S. Jafari, Taming single input chaotic systems by fractional differentiator-based controller: Theoretical and experimental study, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 5, pp. 625-647, 2009.
- [22] M. S. Tavazoei, M. Haeri, S. Jafari, Fractional controller to stabilize fixed points of uncertain chaotic systems: Theoretical and experimental study, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 222, No. 3, pp. 175-184, 2008.
- [23] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*: Academic Press, 1999.
- [24] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*: Prentice Hall, 2002.
- [25] Y. E. Ryabov, A. Puzenko, Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation, *Physical Review B*, Vol. 66, No. 18, pp. 184201, 2002.
- [26] L. Gaul, P. Klein, S. Kemple, Damping description involving fractional operators, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, No. 2, pp. 81-88, 1991.
- [27] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, Y. Luchko, Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 6-8, pp. 743-773, 2005.
- [2] J. A. Suykens, B. L. R. De Moor, J. Vandewalle, Nonlinear system identification using neural state space models, applicable to robust control design, *International Journal of Control*, Vol. 62, No. 1, pp. 129-152, 1995.
- [3] Z. M. Ge, J. K. Lee, Chaos synchronization and parameter identification for gyroscope system, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 163, No. 2, pp. 667-682, 2005.
- [4] L. Shen, M. Wang, Robust synchronization and parameter identification on a class of uncertain chaotic systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 38, No. 1, pp. 106-111, 2008.
- [5] F. Motallebzadeh, M. R. Jahed Motlagh, Z. Rahmani Cherati, Synchronization of different-order chaotic systems: Adaptive active vs. optimal control, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 9, pp. 3643-3657, 2012.
- [6] M. R. Faieghi, H. Delavari, Chaos in fractional-order Genesio-Tesi system and its synchronization, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 2, pp. 731-741, 2012.
- [7] H. Kebriaei, M. Javad Yazdanpanah, Robust adaptive synchronization of different uncertain chaotic systems subject to input nonlinearity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 2, pp. 430-441, 2010.
- [8] M. Pourmahmood, S. Khanmohammadi, G. Alizadeh, Synchronization of two different uncertain chaotic systems with unknown parameters using a robust adaptive sliding mode controller, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 7, pp. 2853-2868, 2011.
- [9] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 8, pp. 821-824, 1990.
- [10] C. C. Yang, Adaptive synchronization of Lü hyperchaotic system with uncertain parameters based on single-input controller, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 63, No. 3, pp. 447-454, 2011.
- [11] M. Hu, Z. Xu, Adaptive feedback controller for projective synchronization, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 9, No. 3, pp. 1253-1260, 2008.
- [12] Y. Yu, H.-X. Li, Adaptive hybrid projective synchronization of uncertain chaotic systems based on backstepping design, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 12, No. 1, pp. 388-393, 2011.
- [13] Y. Xu, W. Zhou, J. a. Fang, W. Sun, Adaptive lag synchronization and parameters adaptive lag identification of chaotic systems, *Physics Letters A*, Vol. 374, No. 34, pp. 3441-3446, 2010.
- [14] A. S. Hegazi, A. E. Matouk, Dynamical behaviors and synchronization in the fractional order hyperchaotic Chen system, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 24, No. 11, pp. 1938-1944, 2011.