



## تحلیل ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخدار نسبتاً ضخیم تابعی مدرج دوبعدی بر بستر الاستیک

میلاذ رئوفی<sup>1</sup>، سعید جعفری مهرآبادی<sup>2\*</sup>، سهیل ساتوری<sup>1</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

\* اراک، صندوق پستی: 38135-567، s-jafari@iau-arak.ac.ir

### چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دو بعدی روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. فرض شده است که خواص ورق در دو جهت محیط و ضخامت به طور پیوسته براساس قانون توانی تغییر کند. در ابتدا معادلات حرکت براساس میدان تغییر مکان تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمده‌اند. برای حل معادلات مذکور از روش عددی مشتقات مربعی استفاده شده است. برای بررسی نتایج حاصل از این تحقیق در حل معادلات دو نوع شرط مرزی مختلف شامل تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج به دست آمده با نتایج مشابه در مقالات و حل به کمک نرم افزار انسیس (ANSYS) مقایسه شده و از صحت کار انجام شده اطمینان کافی حاصل شده است. در پایان اثر پارامترهای مختلف هندسی و خصوصیات بستر و در کنار آن‌ها تغییرات خواص مصالح بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق، مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی نتایج نشان می‌دهد که ثابت‌های قانون توانی و بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی سیستم اثرات قابل ملاحظه‌ای دارند. با انجام این تحقیق می‌توان دریافت که در سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوبعدی با استفاده از پارامترهای بیش‌تری می‌توان ویژگی‌های ارتعاشی سیستم را نسبت به مواد مدرج تابعی یک بعدی، کنترل کرد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 شهریور 1392

پذیرش: 24 آذر 1392

ارائه در سایت: 04 آبان 1393

کلیدواژگان:

ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دو بعدی

بستر الاستیک

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

روش عددی مشتقات مربعی

## Free vibration analysis of 2D-FGM annular sectorial moderately thick plate resting on elastic foundation using 2D-DQM solution

Milad Raoufi<sup>1</sup>, Saeed Jafari Mehrabadi<sup>2\*</sup>, Soheil Satouri<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University of Arak, Arak, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University of Arak, Arak, Iran

\* P.O.B. 38135-567 Arak, Iran, s-jafari@iau-arak.ac.ir.

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 September 2013  
Accepted 15 December 2013  
Available Online 26 October 2014

**Keywords:**  
Two-dimensional functionally graded annular sectorial plate  
Elastic foundation  
First order shear deformation theory  
The numerical differential quadrature method

### ABSTRACT

In this paper, free vibration of two-dimensional functionally graded (2D-FG) annular sectorial plate surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation has been investigated. It is assumed that the plate properties vary continuously through its both circumference and thickness according to power law distribution of the volume fraction. Primarily, we calculate the forces and resultant moments and then the total potential energy of system. Then, by applying the Hamilton's principal any by regarding the first order shear deformation plate theory (FSDT) the governing differential equations have been derived. The numerical differential quadrature method, (DQM), has been employed for solving the motion equations. Two different boundary conditions such as simply supported and clamp supported are considered. Initially, the obtained results were verified against those given in the literature and by ANSYS software and we confident from the obtain results. The effects of geometrical and elastic foundation parameters along with FG power indices effects on the natural frequencies have been studied. The study of results shows that, elastic foundation and FG parameters have significant effects on natural frequencies. By doing this research for 2D-FG materials the characteristic vibration of structure can be controlled by more parameters than 1D-FG materials.

### 1- مقدمه

می‌توان اجزای ساختاری دیسک و کلاچ‌های توربین‌ها را نام برد. جمع‌زاده و همکاران [1] در سال 2009 تحلیل خمش ورق قطاعی سوراخدار را با استفاده از یک راه‌حل تحلیلی انجام دادند. در این تحقیق معادلات پایه و تعادل براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمده‌اند. در این مطالعه اثر چگونگی توزیع ماده‌ی تابعی مدرج، ضخامت، شعاع داخلی و خارجی و شرایط مرزی روی خیز ورق مورد مطالعه قرار گرفته است.

در صنایع امروزی ورق‌ها کاربرد وسیعی دارند و از اجزای جدایی‌ناپذیر صنایع می‌باشند. وزن کم و مقاومت زیاد جزء خواص ذاتی ورق‌ها بوده و همین خواص باعث کاربرد وسیع آن‌ها در صنعت شده است. ورق‌های قطاعی سوراخدار در سازه‌های مهندسی کاربردهای زیادی دارند، مانند پل‌های هلالی، سازه‌های هوایی و دریایی، رآکتورهای هسته‌ای و در حالت ضخامت متغیر نیز

Please cite this article using:

M. Raoufi, S. Jafari Mehrabadi, S. Satouri, Free vibration analysis of 2D-FGM annular sectorial moderately thick plate resting on elastic foundation using 2D-DQM solution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 299-306, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

می‌شوند و خطوط عمود بر صفحه بعد از تغییر شکل در تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی به صورت خطوط مایل و در تئوری سوم مرتبه‌ی سوم تغییر شکل برشی به صورت منحنی در نظر گرفته می‌شوند.

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخدار نسبتاً ضخیم تابعی مدرج دو بعدی روی بستر الاستیک پسترناک با استفاده از تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی انجام شده است، جهت تغییر خواص در دو راستای ضخامت و محیط در نظر گرفته شده است که تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این تحقیق اثرات بستر الاستیک، پارامترهای هندسی و اندیس‌های توانی ماده‌ی تابعی مدرج روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

## 2- مواد تابعی مدرج

فرض می‌شود که خواص ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج در دو جهت ضخامت و محیط تغییر می‌کند، سطح تحتانی از مواد سرامیکی ساخته شده است که در جهت محیط از ماده‌ی سرامیک اول به ماده‌ی سرامیک دوم تغییر خواص می‌دهد، سطح بالایی نیز از مواد فلزی تشکیل شده است که، خواص آن در جهت محیط تبدیل می‌شود، همچنین خواص در جهت ضخامت از فلز به سرامیک تغییر می‌کند. بر این مبنا و بر اساس قانون توانی، کسرهای حجمی را به صورت رابطه 1 تعریف می‌کنیم [11].

$$\begin{aligned} V_{m1} &= \left[ 1 - \left( 0.5 + \left( \frac{z}{h} \right)^{n_z} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{\theta}{\alpha} \right)^{n_\theta} \right] \\ V_{m2} &= \left[ 1 - \left( 0.5 + \left( \frac{z}{h} \right)^{n_z} \right) \right] \left[ \left( \frac{\theta}{\alpha} \right)^{n_\theta} \right] \\ V_{c1} &= \left[ \left( 0.5 + \left( \frac{z}{h} \right)^{n_z} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{\theta}{\alpha} \right)^{n_\theta} \right] \\ V_{c2} &= \left[ \left( 0.5 + \left( \frac{z}{h} \right)^{n_z} \right) \right] \left[ \left( \frac{\theta}{\alpha} \right)^{n_\theta} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه 1،  $\theta$  زاویه در نقطه‌ی دلخواه روی قطاع و  $\alpha$ ، زاویه‌ی قطاع می‌باشد، زیروندهای  $m_1, m_2, c_1$  و  $c_2$  به ترتیب معرف فلز اول، فلز دوم، سرامیک اول و سرامیک دوم هستند.

خاصیت موثر برای مثال مدول الاستیسیته و چگالی به صورت جمع جبری حاصل ضرب خواص مواد پایه و کسرهای حجمی آنها به صورت رابطه 2 حساب می‌شود [11].

$$P = P_{m1} V_{m1} + P_{m2} V_{m2} + P_{c1} V_{c1} + P_{c2} V_{c2} \quad (2)$$

## 3- روابط پایه و معادلات حرکت ورق قطاعی سوراخ دار

یک ورق قطاعی سوراخدار با شعاع داخلی  $b$  و شعاع خارجی  $a$  به ضخامت  $h$  و اندازه زاویه قطاع  $\alpha$  به صورت شکل 1 در نظر گرفته شده است.

$u, v$  و  $w$  تغییر مکان‌های ورق قطاعی سوراخدار راستاهای  $r, \theta$  و  $z$  هستند که براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه 3 تعریف می‌شوند [1].

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z, t) &= u_0(r, \theta, t) + z \psi_r(r, \theta, t) \\ v(r, \theta, z, t) &= v_0(r, \theta, t) + z \psi_\theta(r, \theta, t) \\ w(r, \theta, z, t) &= w_0(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (3)$$

که در روابط فوق،  $u_0, v_0$  و  $w_0$  تغییر مکان‌های صفحه میانی به ترتیب در راستاهای  $r, \theta$  و  $z$ ، همچنین  $\psi_r$  و  $\psi_\theta$  به ترتیب توابع چرخش حول  $\theta$  و  $r$  هستند.

در سال‌های قبل در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش دهی و روکش نمودن قطعات تحت اثر دمایی کاری بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های مکانیکی وارده نداشتند. برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه لایه شدن می‌گردید. دانشمندان علم مواد برای اولین بار مواد تابعی مدرج را به عنوان ماده با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند و نخستین نمونه از این مواد را در سال 1984 در منطقه سندایی ژاپن در آزمایشگاه هوافضای نینو تولید کردند. یک ماده‌ی تابعی مدرج که معمولاً ترکیب یک فلز و یک سرامیک است دارای مقاومت بالا در برابر تنش‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشد و مشکل لایه لایه شدن را هم که در کامپوزیت‌ها دیده می‌شد ندارد.

در سال‌های اخیر دانشمندان مطالعات زیادی در مورد مواد تابعی مدرج انجام داده‌اند [2,9]، اما تعداد کمی از آنها به مواد تابعی مدرج دوبعدی پرداخته‌اند [10,11].

در سال 2011 عسگری و اخلاقی [11] ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم تابعی مدرج دو بعدی را براساس معادلات الاستیسیته سه‌بعدی بررسی کردند. در این مطالعه خواص ماده‌ی تابعی مدرج در دو جهت طول و ضخامت بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند. این تحقیق نشان می‌دهد که تغییر خواص ماده‌ی تابعی مدرج در دو راستای طول و ضخامت تأثیر به‌سزایی در مقدار فرکانس طبیعی دارد.

ورق‌های قطاعی سوراخدار به دلیل کاربرد گسترده آن‌ها در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند. در سال 2012 هدایتی و سبحانی عراق [12] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی ارتعاشات ورق قطاعی سوراخدار تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بر روی بستر الاستیک را بررسی کردند. در این مطالعه اثر نانو لوله‌های کربنی، بستر الاستیک و پارامترهای هندسی بر روی فرکانس سیستم بررسی شده است.

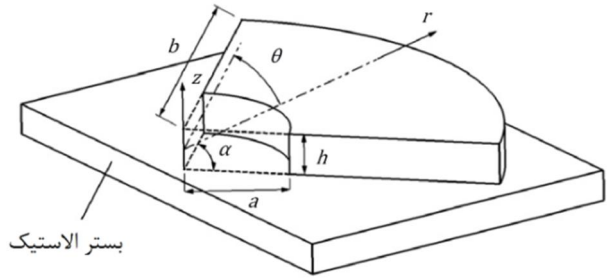
در سال‌های اخیر روش‌های حل عددی توسط محققان به شدت مورد مورد توجه قرار گرفته‌اند، روش مشتقات مربعی از جمله روش‌های عددی است که در حل مسائل مکانیک بسیار کارآمد می‌باشد که در آن با تعداد نقاط شبکه نچندان زیاد می‌توان به نتایج بسیار دقیق دست یافت. برت و مالیک<sup>1</sup> [13] در سال 1996 کاربرد روش عددی مشتقات مربعی را در مسائل مکانیک بررسی و به طور کامل بازبینی کردند و جزئیات را بیان نمودند.

در سال 2000 لی و لیو<sup>2</sup> [14] ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخدار ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی کردند. آن‌ها در این تحقیق روش مشتقات مربعی را به کار گرفتند و اثر پارامترهای هندسی را بر روی فرکانس شرح دادند.

تئوری کلاسیک ورق‌ها، تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی، تئوری مرتبه‌ی سوم تغییر شکل برشی و تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی تئوری‌هایی هستند که به‌طور معمول در تحلیل‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند، در تئوری کلاسیک از کرنش‌های برشی صرف نظر می‌شود و همچنین خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل به شکل عمودی باقی خواهند ماند. استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها در ورق‌های نازک نتایج قابل قبولی را به دست می‌دهد، اما در ورق‌های ضخیم خطاهای قابل توجهی در نتایج دیده می‌شود، برای رفع این مشکل از تئوری‌های مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی سوم تغییر شکل برشی استفاده می‌شود، در این تئوری‌ها کرنش‌های برشی در نظر گرفته

1- Bert and Malik

2- Liew and Liu



شکل 1 هندسه و سیستم مختصات ورق قطاعی سوراخ دار مفروض

کرنش‌های خطی نیز به صورت رابطه 4 تعریف می‌شوند [1].

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left( u_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{z}{r} \left( \psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial w_r}{\partial r} + \psi_r \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \psi_\theta \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \psi_\theta \right) \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه 4،  $\epsilon_i$  و  $\gamma_{ij}$  به ترتیب بیانگر مولفه‌های نرمال و برشی کرنش می‌باشند. تنش‌های صفحه‌ای براساس قانون هوک به صورت رابطه 5 تعریف می‌شوند [1].

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{r\theta}) \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{\theta z}), \quad \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{rz}) \end{aligned} \quad (5)$$

منتجه نیروها و گشتاورها به صورت رابطه 6 تعریف می‌شود [1].

$$\begin{aligned} (N_i, M_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(1, z) dz, \quad i = r, \theta \\ (N_{r\theta}, M_{r\theta}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta}(1, z) dz \\ Q_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dz, \quad i = rz, \theta z \end{aligned} \quad (6)$$

انرژی پتانسیل کل ورق قطاعی سوراخدار ( $U$ ) از جمع انرژی پتانسیل ورق قطاعی سوراخدار ( $U_s$ ) و انرژی پتانسیل بستر الاستیک ( $U_f$ ) به صورت رابطه 7 تعریف می‌شود:

$$U = U_s + U_f \quad (7)$$

انرژی پتانسیل ورق قطاعی سوراخدار به صورت رابطه 8 تعریف می‌شود [1].

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^\alpha \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta} \\ &\quad + \sigma_{rz} \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z}) r dz d\theta dr \end{aligned} \quad (8)$$

بستر الاستیک به صورت مدل دو پارامتری پسترناک مدل شده است. انرژی حاصل از بستر الاستیک طبق رابطه 9 قابل محاسبه است [2].

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^\alpha \left( K_w w - K_g \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) w r dr d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه‌ی فوق  $K_w$  مدول وینکلر و  $K_g$  مدول برشی بستر می‌باشند.

انرژی جنبشی ورق قطاعی سوراخ دار نیز از رابطه‌ی 10 قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^\alpha \int_0^a \rho(\theta, z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از اصل کار مجازی، رابطه‌ی 11 حاصل می‌شود.

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (11)$$

در رابطه فوق،  $V$  معرف کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است که در این جا برابر صفر است، چون ارتعاشات آزاد را بررسی می‌کنیم.

پس از جایگذاری جملات تغییر مکان در عبارات انرژی جنبشی و پتانسیل و اعمال اصل کار مجازی معادلات حرکت برحسب نیروهای منتجه به صورت رابطه 12 حاصل خواهند شد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) \\ &= I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\psi}_r \\ \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} N_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \\ &= I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\psi}_\theta \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) - Q_{rz} \\ &= I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\psi}_r \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} M_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_{\theta z} \\ &= I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\psi}_\theta \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} Q_{rz} - K_w w \\ &\quad + K_g \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \\ &= I_0 \ddot{w} \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه فوق،  $I_i$  با استفاده از رابطه 13 محاسبه می‌شود.

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i \rho(\theta, z) dz, \quad i = 0, 1, 2 \quad (13)$$

برای ساده‌سازی و حذف پارامتر زمان در معادلات حرکت، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه 14 فرض می‌شود [12].

$$\begin{aligned} u_0(r, \theta, t) &= \bar{u}(r, \theta) e^{i\omega t} \\ v_0(r, \theta, t) &= \bar{v}(r, \theta) e^{i\omega t} \\ w_0(r, \theta, t) &= \bar{w}(r, \theta) e^{i\omega t} \\ \psi_r(r, \theta, t) &= \bar{\psi}_r(r, \theta) e^{i\omega t} \\ \psi_\theta(r, \theta, t) &= \bar{\psi}_\theta(r, \theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری نیروها و گشتاورهای منتجه برحسب میدان جابه‌جایی در معادلات حرکت و همچنین حذف  $e^{i\omega t}$ ، از طرفین معادلات، معادلات نهایی حاصل خواهند شد.

#### 4- شرایط مرزی

در این مقاله دو حالت برای شرط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. نوع خواندن شرایط مرزی به این گونه است که از لبه‌ی  $r=b$  شروع می‌شود و به صورت پاد ساعت گرد می‌چرخد.

حالت اول: چهار طرف گیردار

$$u = v = w = \psi_r = \psi_\theta = 0, \quad r = a, b$$

$$u = v = w = \psi_r = \psi_\theta = 0, \quad \theta = 0, \alpha \quad (15)$$

حالت دوم: ساده-گیردار-ساده-گیردار

$$u = v = w = M_r = N_r = 0, \quad r = a, b.$$

$$u = v = w = \psi_r = \psi_\theta = 0, \quad \theta = 0, \alpha. \quad (16)$$

### 5- حل عددی به کمک روش عددی مشتقات مربعی (DQM)

در این مسئله ورق قطاعی سوراخ دار را در دو بعد به وسیله‌ی روش مشتقات مربعی شبکه‌بندی می‌کنیم. اگر یک شبکه  $N_r \times N_\theta$  از ناحیه فیزیکی را طوری در نظر بگیریم که در آن  $N_r$  تعداد نقاط شبکه در راستای شعاع و  $N_\theta$  نقاط شبکه در راستای محیط باشد قوانین مشتقات مربعی برای مشتقات یک تابع فرضی مانند  $f(r, \theta)$  به صورت رابطه 17 بیان می‌شود [13].

$$f_r^{(n)}(r_i, \theta_j) = \sum_{k=1}^{N_r} A_{ik}^{(n)} f(r_k, \theta_j)$$

$$f_\theta^{(m)}(r_i, \theta_j) = \sum_{l=1}^{N_\theta} B_{jl}^{(m)} f(r_i, \theta_l)$$

$$f_{r\theta}^{(n+m)}(r_i, \theta_j) = \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{l=1}^{N_\theta} A_{ik}^{(n)} B_{jl}^{(m)} f(r_k, \theta_l) \quad (17)$$

در رابطه 17،  $A_{ik}^{(n)}$  و  $B_{jl}^{(m)}$  ضرایب وزنی در راستای  $r$  و  $\theta$  می‌باشند.

بر اساس روش مشتقات مربعی تعمیم یافته، ضرایب وزنی به صورت رابطه 18 بدست می‌آیند [13].

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M(r_i)}{(r_i - r_j)M(r_j)}$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P(\theta_i)}{(\theta_i - \theta_j)M(\theta_j)} \quad (18)$$

$M(r)$  و  $P(\theta)$  به صورت رابطه 19 تعریف می‌شوند.

$$M(r_i) = \prod_{j=1}^{N_r} (r_i - r_j), \quad i \neq j$$

$$P(\theta_i) = \prod_{j=1}^{N_\theta} (\theta_i - \theta_j), \quad i \neq j \quad (19)$$

ضرایب وزنی مرتبه‌ی بالاتر نیز به صورت رابطه 20 به دست می‌آیند.

$$A_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_r} A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(1)}, \quad A_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_r} A_{ik}^{(2)} A_{kj}^{(1)}$$

$$A_{ij}^{(4)} = \sum_{k=1}^{N_r} A_{ik}^{(3)} A_{kj}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_r$$

$$B_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_\theta} B_{ik}^{(1)} B_{kj}^{(1)}, \quad B_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_\theta} B_{ik}^{(2)} B_{kj}^{(1)}$$

$$B_{ij}^{(4)} = \sum_{k=1}^{N_\theta} B_{ik}^{(3)} B_{kj}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\theta \quad (20)$$

چگونگی توزیع نقاط شبکه در بازه  $[0, \theta]$  در راستای محیط و در بازه‌ی  $[b, a]$  در راستای شعاع به صورت رابطه 21 می‌باشد [13].

$$r_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) (b-a) + a, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{M-1} \pi \right) \right) \theta, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

در نهایت معادلات حرکت و شرایط مرزی گسسته‌سازی شده، به فرم ماتریسی که در رابطه 22 آمده است، نوشته می‌شود:

جدول 1 فرکانس طبیعی بی‌بعد برای یک ورق قطاعی سوراخ دار همسانگرد برحسب

تعداد نقاط شبکه شعاعی و محیطی در سه مود اول			
مود سوم	مود دوم	مود اول	$N_r \times N_\theta$
342/249	284/772	277/591	12×12
280/393	246/503	244/654	15×15
266/355	240/096	240/096	17×17
261/180	239/188	238/859	21×21
261/180	239/188	238/859	25×25

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_b \\ d_d \end{Bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ dbg & ddg \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_b \\ d_d \end{Bmatrix} = 0 \quad (22)$$

در رابطه فوق،  $d_b$  میدان جابجایی نقاط مرزی،  $d_d$  میدان جابجایی نقاط دامنه،  $\omega$  فرکانس طبیعی،  $K_{bd}$  ضرایب نقاط دامنه در معادلات شرایط مرزی،  $K_{bb}$  ضرایب نقاط مرزی در معادلات شرایط مرزی،  $K_{dd}$  ضرایب نقاط دامنه در معادلات دامنه،  $K_{db}$  ضرایب نقاط مرزی در معادلات دامنه،  $dbg$  ضرایب نقاط مرزی در معادلات دامنه که ضریب  $\omega^2$  دارند و  $ddg$  ضرایب نقاط دامنه در معادلات دامنه که ضریب  $\omega^2$  دارند، می‌باشد.

برای حل معادلات به صورت یک مسئله‌ی مقدار ویژه رابطه 22 به صورت رابطه 23 بازنویسی می‌شوند:

$$[Z_1]^{-1} [Z_2] \{d_d\} + \omega^2 \{d_d\} = 0 \quad (23)$$

در رابطه فوق،  $Z_1$  و  $Z_2$  به صورت رابطه 24 تعریف می‌شوند.

$$[Z_1] = ddg - dbg K_{bb}^{-1} K_{bd}$$

$$[Z_2] = K_{dd} - K_{dd} K_{bb}^{-1} K_{bd} \quad (24)$$

### 6- بحث و مثال‌های عددی

در این قسمت صحت نتایج به‌دست آمده با استفاده از نتایج موجود در مراجع معتبر و نرم‌افزار انسیس مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله پارامتر بی‌بعد فرکانس به صورت زیر در نظر گرفته شده است. پارامتر بی‌بعد فرکانس در رابطه 25 تعریف می‌شود.

$$f = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_{m_2}}{D_{m_2}}} \quad (25)$$

در رابطه فوق،  $D_{m_2} = \frac{E_{m_2} h^3}{12(1-\nu^2)}$  می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً گفته شد نتایج کنونی با استفاده از روش مشتقات مربعی و شبکه‌بندی در جهات شعاع و محیط حاصل شده است، جدول 1 فرکانس طبیعی را برای یک ورق قطاعی سوراخ‌دار همسانگرد در سه مود اول با مشخصات  $h/a=0/01$  و  $\alpha=30^\circ$ ،  $b/a=0/25$  و  $\alpha=30^\circ$ ،  $b/a=0/25$  برحسب SCSC برحسب تعداد نقاط شبکه‌ی شعاعی و محیطی نشان می‌دهد.

همان‌طور که در جدول 1 مشاهده می‌شود، برای تعداد نقاط بیشتر از 21 در دو جهت نتایج همگرا شده‌اند. برای اطمینان بیشتر از صحت نتایج تعداد نقاط در دو جهت 25 در نظر گرفته می‌شود.

فرکانس طبیعی بی‌بعد  $(f = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c}{D_c}}, D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)})$  به‌دست آمده

برای یک ورق قطاعی سوراخ‌دار همسانگرد با نتایج مشابه با مرجع [14] در جدول 2 مقایسه شده است، مطابقت خوب نتایج، گویای صحت نتایج کنونی و دقت محاسبات می‌باشد.

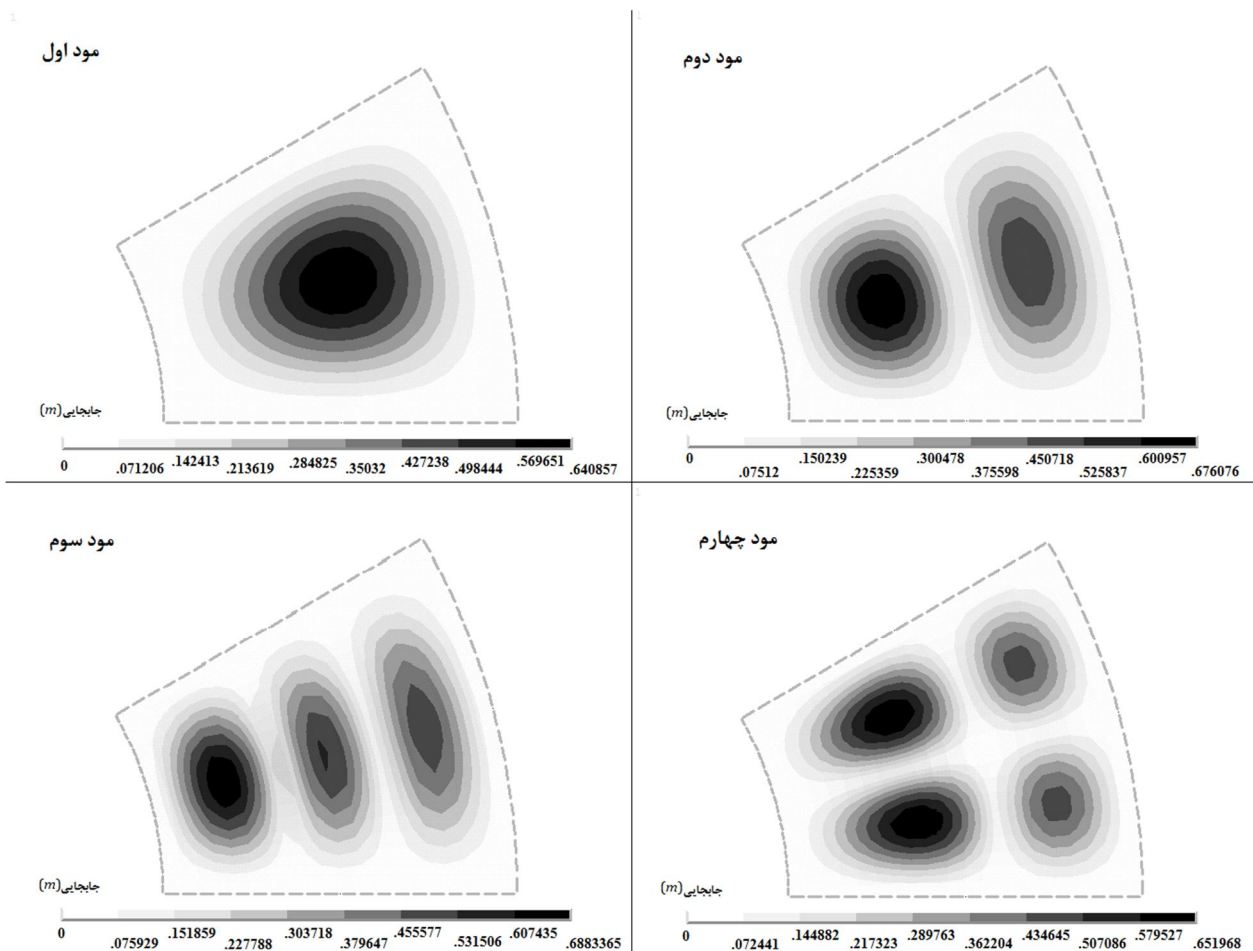
در این مقاله ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی مدرج دو بعدی با شرایط مرزی چهار طرف گیردار با استفاده از نرم‌افزار انسیس شبیه‌سازی شده و

نتایج حاصل با نتایج حل عددی مشتقات مربعی مقایسه گردیده است، برای این شبیه‌سازی المان Shell 281 در انسیس 12 که برطبق تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی می‌باشد، به‌کار گرفته شده است. در این شبیه‌سازی ورق قطاعی در جهت محیط و ضخامت به 12 قسمت مساوی تقسیم شده و برای هر قسمت با توجه به روابط 1 و 2 خواص به‌صورت جداگانه تعریف گردیده است. در این شبیه‌سازی مشخصات هندسی ورق قطاعی سوراخدار به صورت  $\alpha=30^\circ$ ،  $a=1m$ ،  $h=0/01a$  و  $b=0/5a$  می‌باشد. جدول 4، نتایج به‌دست آمده (با استفاده از روش مشتقات مربعی) برای یک ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دو بعدی (با خواص پایه‌ی مدرج در جدول 3) با شرایط مرزی چهار طرف گیردار را برحسب شماره‌ی مود و اندیس‌های توانی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار انسیس مقایسه می‌کند، کانتورهای تغییر مکان حاصل نیز

برای مدهای یک تا چهار در شکل 2 نمایش داده شده است (در این شبیه‌سازی عدد پواسون ثابت و برابر 0/3 می‌باشد).  
در کلیه‌ی مثال‌های عددی زیر اندیس‌های توانی به صورت  $n_\theta=1$  و  $n_\theta=2$  (با خواص پایه‌ی مدرج در جدول 3) در نظر گرفته می‌شود و ضریب پواسون ثابت و برابر 0/3 است، همچنین اثر تغییرات پارامترهای مختلف بر روی فرکانس طبیعی در مود اول بررسی خواهد شد.  
تغییرات فرکانس طبیعی برای قطاع دایره‌ای سوراخدار تابعی مدرج دو بعدی در شرایط مرزی چهار طرف گیردار بر حسب اندیس‌های توانی محیطی و ضخامتی در شکل 3 نمایش داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش اندیس‌های توانی در دو جهت فرکانس‌های طبیعی افزایش داشته‌اند و در مقادیر بالای اندیس‌های توانی به مقدار ثابتی همگرا شده‌اند.

جدول 2 مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ورق قطاعی سوراخدار همسانگرد در شرایط مرزی CCCC در حالت بدون بستر ( $\alpha=30^\circ$ ،  $h=0/01a$ )

شماره مود						$\frac{b}{a}$
6	5	4	3	2	1	
591/838	571/104	425/149	413/316	297/770	187/245	نتایج کنونی
590/374	569/715	424/333	412/551	297/335	187/056	مرجع [14]
591/789	571/128	425/163	413/312	297/772	187/245	نتایج کنونی
590/325	569/759	424/348	412/547	297/337	187/056	مرجع [14]
716/494	596/761	563/928	413/429	339/193	191/137	نتایج کنونی
714/458	595/274	562/649	412/663	338/662	190/942	مرجع [14]



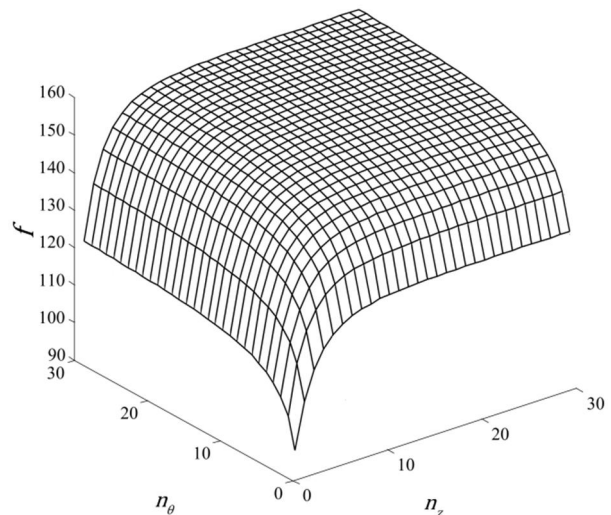
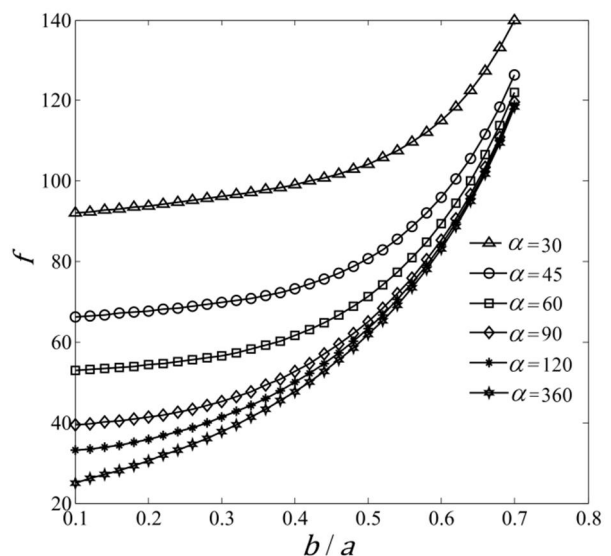
شکل 2 کانتور تغییر مکان با استفاده از نرم‌افزار انسیس در چهار مود اول

جدول 3 خواص مواد پایه ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی [12]

اجزا	مواد	$E$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
$m_1$	Ti6 Al4V	115	4515
$m_2$	Al 1,100	69	2715
$c_1$	SiC	440	3210
$c_2$	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	300	3470

جدول 4 مقایسه‌ی فرکانس طبیعی (Hz) برای ورق قطاعی سوراخدار

مرجع	مود 1	مود 2	مود 3	مود 4
انسیس	173/07	306/89	376/51	506/60
مشتقات مربعی	169/35	310/07	348/88	515/60
انسیس	221/81	400/83	479/47	670/88
مشتقات مربعی	230/83	406/72	486/55	670/48
انسیس	723/03	515/91	430/04	237/53
مشتقات مربعی	729/11	536/11	440/31	249/13

شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب اندیس‌های توانی ضخامت و محیط در مود اول در شرایط مرزی CCCC ( $h=0/2a$  و  $b=0/5a$ ,  $\alpha=60^\circ$ ).شکل 4 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت  $b/a$  برای زوایای مختلف قطاع برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی ( $h=0/2a$ )

باید این نکته را یادآور شد که با میل کردن اندیس‌های توانی محیطی  $n_\theta$  و

ضخامتی  $n_z$  به سمت بی‌نهایت، خواص مؤثر ورق قطاعی سوراخدار به خواص ماده‌ی سرامیک اول میل می‌کند.

تغییرات فرکانس ورق قطاعی تابعی مدرج دوبعدی با شرایط مرزی CCCC بر حسب نسبت  $b/a$  برای زاویه‌های قطاع مختلف در مود اول در شکل 4 رسم شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $b/a$  فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش یافته است، به عبارت دیگر با افزایش شعاع سوراخ ورق قطاعی سوراخدار، فرکانس طبیعی افزایش خواهد داشت. در مقادیر بالای نسبت  $b/a$  تغییرات زاویه اثر کمتری دارد و در زاویه قطاع بیشتر شیب تغییرات بیشتر می‌باشد، که این روند تغییرات شبیه به آن چه که در مرجع [12] آورده شده است می‌باشد. شکل 5 نیز تغییرات فرکانس طبیعی را بر حسب  $b/a$  در دو شرط مرزی CCCC و SCSC نمایش می‌دهد، همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابق انتظار فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CCCC بیشتر است.

تغییرات فرکانس بر حسب زاویه ی قطاع برای نسبت‌های مختلف  $b/a$  برای شرایط مرزی CCCC در مود اول در شکل 6 رسم شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش زاویه‌ی قطاع فرکانس طبیعی ابتدا با شیب زیاد و سپس با شیب ملایم کاهش یافته است و در مقادیر پایین زاویه‌ی قطاع تغییرات نسبت  $b/a$  اثر کمتری داشته است، که این روند تغییرات شبیه به آن چه که در مرجع [12] آورده شده است، می‌باشد. همچنین تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب زاویه‌ی قطاع در دو شرط مرزی مختلف CCCC و SCSC در مود اول در شکل 7 رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در زوایای کوچک‌تر مقادیر فرکانس در دو نوع شرط مرزی اختلاف کمتری دارند که می‌تواند به دلیل کوچک شدن لبه‌ها و کم شدن اثر تغییر شرایط مرزی باشد.

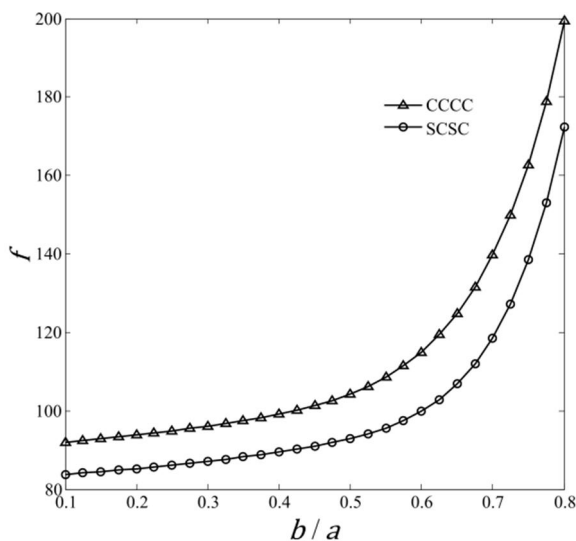
پارامترهای بی‌بعد بستر الاستیک به صورت رابطه 25 تعریف شده‌اند [12].

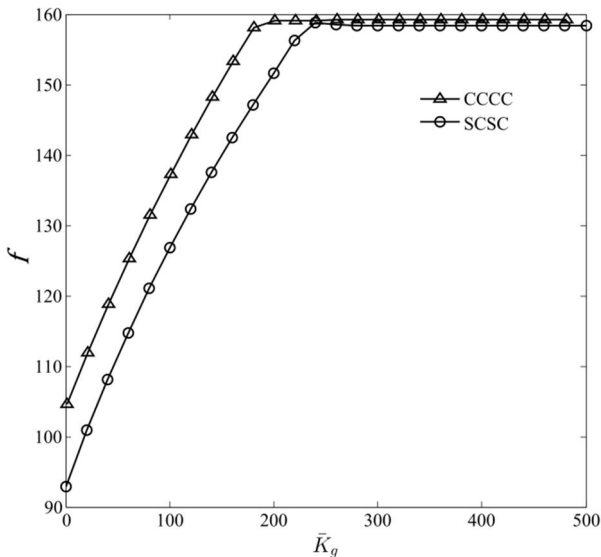
$$\bar{K}_w = K_w D_{m_2} / a^4, \quad \bar{K}_g = K_g D_{m_2} / a^2 \quad (25)$$

در رابطه فوق،  $D_{m_2}$  نیز به صورت رابطه 26 تعریف می‌شود:

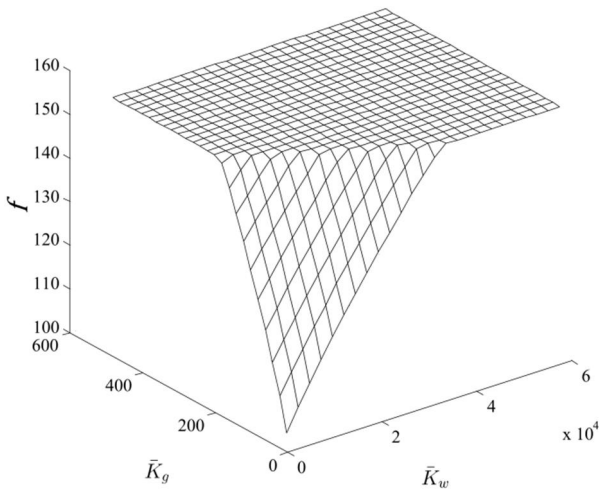
$$D_{m_2} = E_{m_2} h^3 / 12(1-\nu^2) \quad (26)$$

شکل‌های 8 و 9 تغییرات فرکانس طبیعی در مود اول را در دو نوع شرط مرزی CCCC و SCSC به ترتیب برحسب پارامترهای بی‌بعد وینکلر و پسترناک نمایش می‌دهند. همچنین تغییرات فرکانس طبیعی در مود اول برحسب پارامترهای بی‌بعد بستر الاستیک برای شرایط مرزی CCCC به صورت نمودار سه بعدی در شکل 10 نشان داده شده است.

شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت  $b/a$  برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی در مود اول ( $\alpha=30^\circ$  و  $h=0/2a$ )



شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب  $\bar{K}_g$  برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی ( $\bar{K}_w = 0, \alpha = 30^\circ, h = 0/2a, b = 0/5a$ )

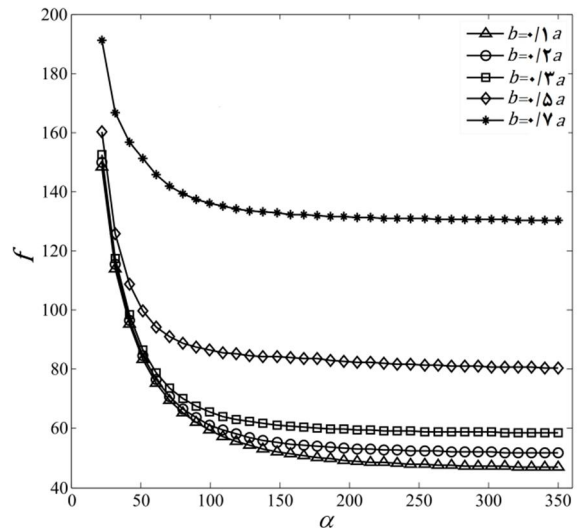


شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب  $\bar{K}_g$  و  $\bar{K}_w$  برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی ( $\alpha = 30^\circ, h = 0/2a, b = 0/5a$ )

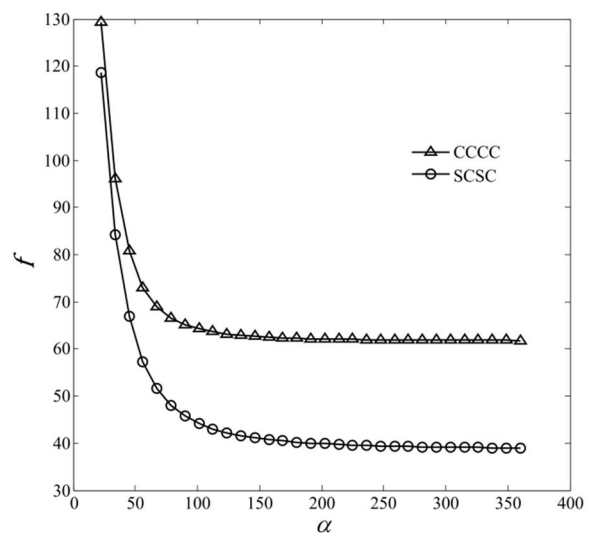
همان‌طور که در شکل‌های 8 تا 10 مشاهده می‌شود در مقادیر بالای پارامترهای بستر، فرکانس طبیعی به عدد خاصی همگرا شده است، که دلیل آن سفتی بیش از حد بستر الاستیک در اثر افزایش پارامترهای بستر می‌تواند باشد. همچنین در شکل 10 مشاهده می‌شود که شیب تغییرات برحسب پارامتر بی‌بعد مدول پسترناک بیشتر است و اثر پارامتر بی‌بعد پسترناک بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد بیشتر می‌باشد.

### 7- نتیجه‌گیری

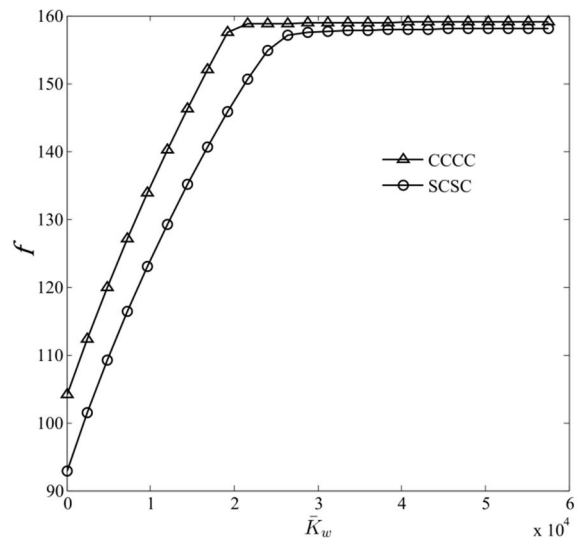
در این مقاله، فرکانس طبیعی ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی نسبتاً ضخیم روی بستر الاستیک با دو نوع شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا معادلات حرکت براساس تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی استخراج گردید، سپس با استفاده از روش عددی مشتقات مربعی و شبکه‌بندی در دو بعد حل شد. در گام بعدی صحت نتایج با مقالات معتبر و همچنین نرم‌افزار انسیس مورد ارزیابی قرار گرفت. در نهایت اثر پارامترهای هندسی ورق، پارامترهای بستر الاستیک، اندیس‌های توانی ماده‌ی تابعی مدرج و شرایط مرزی مورد مطالعه قرار داده شد. با بررسی جواب‌های حاصل



شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب زاویه قطاع (بر حسب درجه) برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی در نسبت‌های مختلف  $b/a$  ( $h = 0/2a$ )



شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب زاویه قطاع برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی ( $h = 0/2a$  و  $b = 0/5a$ )



شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب  $\bar{K}_w$  برای ورق قطاعی سوراخدار تابعی مدرج دوبعدی ( $\bar{K}_g = 0$  و  $\alpha = 30^\circ, h = 0/2a, b = 0/5a$ )

- [4] A. Abdollahifar, M.R. Nami, Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 138-150, 2013. (in Persian)
- [5] X.K. Xia, H.S. Shen, Vibration of post-buckled FGM hybrid laminated plates in thermal environment, *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 9, pp. 2420-2435, 2008.
- [6] A. Alibeigloo, W.Q. Chen, Elasticity solution for an FGM cylindrical panel integrated with piezoelectric layers, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 29, No.4, pp. 714-723, 2010.
- [7] M. Shariyat, Dynamic buckling of suddenly loaded imperfect hybrid FGM cylindrical shells with temperature-dependent material properties under thermo-electro-mechanical loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 12, pp. 1561-1571, 2008.
- [8] M. Shariyat, M. S. Khaghani, Nonlinear thermo-elasticity, vibration, and stress wave propagation analyses of thick FGM cylinders with temperature dependent material properties, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 29, No. 3, pp. 378-391, 2010.
- [9] M.M. Najafizadeh, H.R. Heydari, Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 23, No. 6, pp. 1085-1100, 2004.
- [10] M.R. Torshizian, M.H. Kargarnovin, Mode III fracture of an arbitrary oriented crack in two dimensional functionally graded material, *Mechanics Research Communication*, Vol. 38, No. 3, pp. 164-169, 2011.
- [11] M. Asgari, M. Akhlaghi, Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equations, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 2, pp. 72-81, 2011.
- [12] H. Hedayati, B. Sobhani Aragh, Influence of graded agglomerated CNTs on vibration of CNT-reinforced annular sectorial plates resting on Pasternak foundation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, pp. 8715-8735, 2012.
- [13] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied Mechanics Review*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.
- [14] K.M. Liew, F.L. Liu, Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No 2, pp. 335-356, 1999.

از این تحلیل نتایج زیر به صورت خلاصه به دست آمده‌اند:

1. با افزایش اندیس‌های توانی در دو جهت فرکانس‌های طبیعی افزایش داشته‌اند و در مقادیر بالای اندیس‌های توانی به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند، زیرا خواص به سمت خواص یکی از مواد پایه میل می‌کند و افزایش اندیس‌های توانی اثری در خواص مؤثر نخواهد داشت، لذا با انتخاب درست مواد پایه و جهت تغییرات خواص آنها در ورق می‌توان فرکانس طبیعی را افزایش داد.
2. اضافه کردن بستر موجب افزایش فرکانس می‌شود، بنابراین می‌توان با اضافه کردن بستر الاستیک فرکانس طبیعی سیستم را افزایش داد، اما افزایش مدول‌های وینکلر و پسترناک تا حد مشخصی فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد و بعد از آن افزایش آنها تأثیری در مقدار فرکانس نخواهد داشت، زیرا بستر به حالت صلب خواهد شد و افزایش پارامترهای وینکلر و پسترناک بی‌اثر خواهد شد.
3. در این تحقیق مشاهده شد که روش مشتقات مربعی با تعداد کم نقاط شبکه همگرا می‌شود و نتایج دقیقی را به دست می‌دهد و راهی کارآمد و دقیق در حل مسائل ارتعاشات می‌باشد.

## 8- مراجع

- [1] E. Jomehzadeh, A.R. Saeidi, S.R. Atashipour, An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates, *Materials and design*, Vol. 30, No. 9, pp. 3679-3685, 2009.
- [2] A.H. Sofiyev, Buckling analysis of FGM circular shells under combined loads and resting on the Pasternak type elastic foundation, *Mechanic research communication*, Vol. 37, No. 6, pp. 539-544, 2010.
- [3] M.H. Ebrahimi, M.M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, pp. 27-38, 2013. (in Persian)