مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1395، دوره 16، شماره 1، ص‌ص 248-256

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

استخراج منحنی‌های دیسپرژن امواج لمب در یک میکرو-ورق آلومینیوم نیترید (AlN) با استفاده از تئوری تنش کوپلی سازگار

بهنام قدرتی[1]، امین یاقوتیان[2*]، افشین قنبر زاده[2]، حمید محمد صدیقی[2]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

* اهواز، صندوق پستی 6135743337، a.yaghootian@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 14 مهر 1394

پذیرش: 19 آذر 1394

ارائه در سایت: 23 دی 1394

کلید واژگان:

تئوری تنش کوپلی سازگار

امواج لمب

پارامتر طول مشخصه

نمودار دیسپرژن

میکرو-ورق آلومینیوم نیترید

چکیده

در این پژوهش معادلات انتشار امواج لمب در یک میکرو ورق همسانگرد بی‌نهایت با در نظر گرفتن اثر تنش‌های کوپل و با استفاده از تئوری تنش کوپلی سازگار استخراج شده است. اثر اندازه میکرو ورق، با استفاده از پارامتر طول مشخصه، در معادلات مذکور لحاظ شده است که بدین ترتیب می‌توان تأثیر ابعاد مختلف ورق را در نحوه دیسپرژن امواج لمب مشاهده نمود. به دلیل کاربرد میکرو ورق‌های آلومینیوم نیترید در محرک‌های صوتی سطحی، انتشار امواج لمب در این مواد موردتوجه قرار گرفته است. در این مطالعه ابتدا بی‌بعدسازی روابط با استفاده از تعریف پارامترهای بی‌بعد، انجام شده است؛ بنابراین نمودارهای به‌دست‌آمده برای تمام ضخامت‌ها، طول‌موج‌های انتشاری و اندازه‌های پارامتر طول مشخصه یک میکرو ورق قابل استفاده است؛ سپس بر اساس تقریب شبه استاتیک، نمودارهای دیسپرژن امواج لمب برای دو مود متقارن و پادمتقارن اول در میکرو ورقی از جنس آلومینیم نیترید ترسیم شده و با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک مقایسه شده است. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده و داده‌های تجربی صحت روابط را نشان می‌دهد. درنهایت، با توجه به اینکه تعیین پارامتر طول مشخصه نقش اساسی در استفاده از تئوری تنش کوپلی سازگار دارد، روشی برای مشخص نمودن این اندازه با استفاده از نمودارهای دیسپرژن و داده‌های تجربی گزارش‌شده، پیشنهاد شده است.

Extraction of dispersion curves for Lamb waves in an aluminium nitride (AlN) micro plate using consistent couple stress theory

Behnam Ghodrati, Amin Yaghootian*, Afshin Ghanbar Zadeh, Hamid Mohammad Sedighi

Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.
* P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, a.yaghootian@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 October 2015
Accepted 10 December 2015
Available Online 13 January 2016

Keywords:
Consistent couple stress theory
Lamb waves
Charactristic length
Dispersion curve
Aluminium nitride micro-plate

ABSTRACT

The equations of Lamb wave propagation in an infinite isotropic micro plate on the basis of consistent coupled stress theory is presented in this study. By employing the characteristic length scale parameter, the effect of micro-plate size is considered, and thereby the effects of different plate dimensions on the dispersion of Lamb waves is illustrated. Lamb wave propagation velocity in aluminum nitride micro-plates has received much interest due to its applications in surface acoustic resonators. In the current work, at first, the dimensionless relations are developed through the definition of dimensionless parameters where the extracted curves can be applied to all thicknesses, propagation wavelengths and characteristic length scale parameters of a micro-plate. In addition, using the quasi-static approximation, the Lamb wave dispersion curves in both symmetric and asymmetric modes for an aluminum nitride micro plate are plotted and compared with the results from the classical theory. The integrity of the present formulation is verified by comparing the obtained results with the experimental data in the literature. Finally, by employing the dispersion curves and the reported experimental data, a novel method has been proposed to determine the size of characteristic length parameter in the consistent coupled stress theory.

1- مقدمه

امروزه میکرو ساختارها به‌خوبی جایگاه خود را در صنایع مختلف و فناوری‌های گوناگون پیداکرده‌اند. از کاربرد آن‌ها در پیشرفته‌ترین صنایع نظامی و هوافضا [1] گرفته تا مصارفی مانند ارتباطات مخابراتی [2]، شتاب‌سنج‌ها [3] و حس‌گرهای مورداستفاده در صنعت [4] و فناوری‌های نوین بیوشیمیایی و بیوزیستی [5]، می‌توان به اهمیت سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی[1]، میکرو حس‌گرها، میکرو محرک‌ها [6] و ابزارهای تولید امواج صوتی سطحی[2] پی‌برد. ازآنجاکه میکرو ورق‌ها یکی از اجزای اصلی در ساخت ریزساختارها محسوب می‌شوند، بررسی رفتار و خواص آن‌ها در شرایط مختلف امری ضروری به شمار می‌آید.

1- Micro-nano electromechanical systems (MEMS/NEMS)
2- Surface Acoustic Waves (SAW)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

B. Ghodrati, A. Yaghootian, A. Ghanbar Zadeh, H. Mohammad Sedighi, Extraction of dispersion curves for Lamb waves in an aluminium nitride (AlN) micro plate using consistent couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 248-256, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

استفاده از امواج با طول‌موج‌های در ابعاد میکرو در دهه‌های اخیر به دلیل خواصی مانند مصرف و اتلاف انرژی پایین و توانایی استفاده در میکرو ساختارها درزمینه‌ی ارتباطات موبایل و بی‌سیم به‌شدت موردتوجه قرار گرفته است. برای تولید این امواج عموما از دو ساختار با نام‌های محرک‌های امواج صوتی سطحی[1] و محرک‌های امواج صوتی حجمی در لایه‌نازک[2] استفاده می‌شود. هرکدام از این ساختارها دارای مزایا و معایبی می‌باشند. از مزایای محرک‌های امواج صوتی سطحی به‌طور مثال می‌توان به توانایی تولید فرکانس‌های بالا در بازه گیگاهرتزی، کیفیت مناسب ذخیره‌سازی و انتشار انرژی و همچنین هزینه پایین ساخت و از معایب آن می‌توان به ناسازگار بودن با فناوری مدارهای مجتمع[3] اشاره کرد. همچنین، در مورد مزایای ساختار محرک‌های امواج صوتی حجمی در لایه‌نازک می‌توان به کیفیت بالا در فرکانس‌های پایین و اتلاف انرژی کمتر نسبت به محرک‌های امواج صوتی سطحی و همچنین سازگار بودن با فناوری مدارهای مجتمع اشاره کرد. از اشکالات اساسی ساختار محرک‌های امواج صوتی حجمی در لایه‌نازک هم می‌توان حساسیت بالای فرکانس به عیوب به وجود آمده هنگام ساخت و عدم تولید فرکانس‌های بالا را نام برد. درنتیجه‌ی تحقیقات صورت گرفته در سالیان اخیر نوع جدیدی از محرک‌ها به نام محرک امواج لمب[4] معرفی شده است که در آن اصول عملکرد محرک‌های امواج صوتی سطحی با شکل ساختاری محرک‌های امواج صوتی حجمی در لایه‌نازک ترکیب شده و به‌این‌ترتیب مزایای هر دو محرک حاصل می‌شوند [7]. این محرک با نام محرک صوتی لایه‌نازک ورقی[5] نیز شناخته می‌شود [8].

امواج لمب دسته‌ای از امواج هدایت‌شده هستند که در ضخامت ورق‌ها انتشار می‌یابند. ازآنجاکه این امواج حین انتشار با مرزهای بالایی و پایینی ورق برخورد می‌کنند، بسته به فرکانس یا طول‌موج، با مودها و سرعت‌های مختلفی انتشار می‌یابند که به این پدیده دیسپرژن امواج لمب گفته می‌شود. برای بیان سرعت انتشار این امواج نیز از دو مفهوم سرعت فاز و سرعت گروه استفاده می‌گردد. سرعت فاز به معنای سرعت حرکت یک نقطه ثابت بر روی موج انتشاری بوده و سرعت گروه نیز به معنای سرعت حرکت دسته‌ای از امواج مانند جبهه موج در محیط می‌باشد. اگرچه این خاصیت چند مودی و دیسپرسیو، تولید، کنترل و اندازه‌گیری آن‌ها را در قیاس با امواج حجمی دشوارتر ساخته است اما کاربرد این امواج در زمینه‌هایی مانند آزمون‌های غیر مخرب، تعیین خواص مواد و همچنین میکرو محرک‌های امواج لمب باعث شده است که در چند دهه اخیر بررسی گسترده‌ای بر روی خواص و نحوه انتشار این امواج صورت پذیرد [9].

امروزه پیشرفت‌های حاصل‌شده در رشد غشای آلومینیوم نیترید در محرک‌های امواج لمب، بررسی نحوه انتشار و به دست آوردن خواص دیسپرسیو این امواج در این ورق‌ها را به موضوعی با اهمیت مبدل ساخته است [10]. محرک‌های امواج لمب آلومینیوم نیترید با استفاده از پایین‌ترین مود متقارن (S_0) توانایی تولید سرعت فازهای در حدود 10000 متر بر ثانیه را دارند که استفاده از آن‌ها را در کاربردهای فرکانس بالا و با پهنای باند کم سیستم‌های بی‌سیم ایده‌آل می‌سازد. برای نمایش نحوه وابستگی سرعت انتشار هر مود از موج لمب به فرکانس یا طول‌موج آن از نمودار دیسپرژن استفاده می‌شود. برای رسم این نمودار در مواد همسانگرد از تئوری کلاسیک الاستیسیته [11,9] و در مواد پیزوالکتریک از روش ماتریس [12] و فرمولاسیون تابع گرین [13] استفاده می‌شود؛ اما ازآنجاکه محرک‌های امواج لمب در بازه فرکانس‌های گیگاهرتزی در ابعاد میکرو یا کوچک‌تر ساخته می‌شوند و در این ابعاد ریزساختار مواد نیز نقش مهمی در تعیین خواص آن‌ها بازی می‌کند، نیاز به روشی که در آن تأثیر این ریزساختارها در نحوه انتشار امواج لمب بررسی گردد احساس می‌شود.

نتایج آزمایشگاهی مؤید آن است که در ابعاد میکرو و کوچک‌تر خواص مکانیکی مواد با خواصی که آن‌ها در ابعاد معمول از خود نشان می‌دهند تفاوت دارد [14]. این تفاوت به‌گونه‌ای است که قابل صرف‌نظر نبوده و باید به روشی در محاسبات مربوط به مدل‌سازی در ابعاد میکرو لحاظ گردد. ازآنجاکه تئوری کلاسیک قادر به پیش‌بینی دقیق رفتار ریزساختارها نمی‌باشد تلاش‌های مختلفی برای اصلاح آن صورت گرفت. ویت [15] اولین کسی بود که به تأثیر تنش‌های کوپلی در مواد اشاره کرد. پس از وی برادران کسرات [16] روابط ریاضی برای در نظر گرفتن تأثیر این تنش‌های کوپلی را ارائه کردند به این صورت که علاوه بر سه درجه آزادی انتقالی هر المان از ماده، سه درجه آزادی چرخشی نیز در نظر گرفته می‌شود. پس از آن‌ها محققان در سالیان متمادی به توسعه و بهبود این مدل‌ها در قالب تئوری‌هایی مانند تئوری تنش کوپلی میندلین و تیرستن [17]، کویتر [18]، تئوری تنش کوپلی اصلاح شده یانگ و همکاران [19]، تئوری میکروپولار [20] و تئوری‌های گرادیان کرنش [22,21] پرداختند. یکی از جدیدترین این مدل‌ها، مدل ارائه‌شده توسط حاج اسفندیاری و درگوش [23] است که در آن به دلیل صرف‌نظر از مؤلفه‌های نرمال تانسور تنش کوپلی در یک المان حجمی از محیط پیوسته، این تانسور پادمتقارن می‌گردد و به این دلیل از بخش کروی این تانسور که در تئوری‌های تنش کوپلی ارائه‌شده پیشین به‌صورت نامعین باقی می‌ماند صرف‌نظر می‌شود. همچنین معادلات ارائه‌شده توسط این مدل تنها شامل یک پارامتر طول مشخصه جهت در نظر گرفتن تأثیر ریزساختار می‌باشند. این مدل با نام تئوری تنش کوپلی سازگار شناخته می‌شود.

شارما و کومار [24] با استفاده از تئوری تنش کوپلی ارائه‌شده توسط حاج اسفندیاری و درگوش [23] انتشار امواج لمب در یک ورق را مدل‌سازی نمودند و معادله مشخصه‌ای برای نمایش نحوه دیسپرژن امواج لمب در آن به دست آوردند، آن‌ها سپس با حل عددی معادله فوق نمودارهای دیسپرژن امواج لمب را تنها برای مود پادمتقارن و ورقی با جنس استخوان در ابعاد میلی‌متر ارائه کردند.

گودرزی و همکاران [25] با استفاده از تئوری تنش کوپلی نامعین میندلین [17] و تئوری تنش کوپلی سازگار [23] به بررسی میدان الاستودینامیک ناشی از تفرق موج برشی الاستیک برون صفحه‌ای با فرکانس بالا توسط نانو حفره استوانه‌ای محصور در محیط الاستیک بی نهایت پرداختند و نتایج به‌دست‌آمده با در نظر گرفتن اثر اندازه را با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک مقایسه نمودند.

همچنین یانچو [8] به‌صورت تجربی به بررسی اثر تغییر پارامترهای مختلف بر عملکرد محرک امواج صوتی حجمی در لایه‌نازک پرداخت و سرعت انتشار مود اول متقارن موج لمب در یک میکرو ورق از جنس آلومینیوم نیترید را به دست آورد و مشاهده نمود که این سرعت بیشتر از سرعت پیش‌بینی‌شده توسط تئوری کلاسیک است.

1- SAW resonators
2- Thin Film Bulk Acoustic Resonators (FBAR)
3- Integrated Circuit (IC)
4- Lamb Wave Resonator (LWR)
5- Thin Film Plate Acoustic Resonator (FPAR)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

در تحقیق پیش رو پس از یک مرور کلی بر تئوری تنش کوپلی سازگار، معادلات بی‌بعد مربوط به مدل‌سازی مودهای متقارن و پادمتقارن انتشار امواج لمب در یک ورق بی‌نهایت با ضخامت محدود به دست آورده می‌شوند. سپس با استفاده از تقریب شبه استاتیک[1] ماتریس سفتی سخت شده[2] برای ماده پیزوالکتریک آلومینیوم نیترید [26] و با کمک روش‌های عددی، معادلات مشخصه به‌دست‌آمده برای یک میکرو ورق از جنس آلومینیوم نیترید با جهت‌گیری در راستای c[3] حل شده و نمودارهای دیسپرژن برای مودهای متقارن اول (S_0) و پادمتقارن اول (A_0) رسم می‌گردند. سپس نتایج به‌دست‌آمده با کمک رابطه به‌دست‌آمده توسط شارما [24] و نتایج تجربی یانچو [8] صحت سنجی شده و درنهایت روشی برای تعیین طول مشخصه مورد استفاده در تئوری تنش کوپلی بر اساس سرعت انتشار امواج لمب در ورق پیشنهاد می‌گردد.

2-تئوری تنش کوپلی سازگار

بر اساس تئوری ارائه‌شده توسط حاج اسفندیاری و درگوش [23] برای یک ماده پیوسته تنش‌های ایجاد شده به‌وسیله نیروها و کوپل‌های سطحی در یک المان حجمی را می‌توان به کمک تانسورهای پادمتقارن تنش نیرو و تنش کوپلی به ترتیب به‌صورت روابط (1) و (2) نشان داد.

$$\sigma_{ji} = \sigma_{(ji)} + \sigma_{[ji]} \tag{1}$$

$$\Gamma_{ji} = \Gamma_{(ji)} + \Gamma_{[ji]} \tag{2}$$

که در آن‌ها $\sigma_{(ji)}$ و $\Gamma_{(ji)}$ بیانگر بخش متقارن و $\sigma_{[ji]}$ و $\Gamma_{[ji]}$ بیانگر بخش پادمتقارن به ترتیب تانسور تنش نیرو و تنش کوپلی می‌باشند.

با در نظر گرفتن تغییر شکل کوچک در یک حجم واحد از ماده پیوسته، تانسور گرادیان جابجایی را می‌توان به‌وسیله مجموع دو بخش متقارن و پادمتقارن به‌صورت رابطه (3) نمایش داد.

$$u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij} \tag{3}$$

که در آن:

$$e_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{4}$$

$$\omega_{ij} = u_{[i,j]} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{5}$$

در رابطه (3)، $u_i, i = 1,2,3$ بیانگر مؤلفه‌های جابجایی در جهت‌های اصلی و در تغییر شکل‌های کوچک، e_{ij} برابر تانسور کرنش و ω_{ij} برابر تانسور چرخش می‌باشند. همچنین بردار دوگانه[4] تانسور چرخش نیز از رابطه (6) به دست می‌آید.

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u_{k,j} \tag{6}$$

ε_{ijk} در رابطه (6) بیانگر تانسور جایگشت[5] می‌باشد.

همانند تانسور گرادیان جابجایی، تانسور گرادیان چرخش را نیز می‌توان به‌صورت جمع دو بخش متقارن و پادمتقارن مطابق رابطه (7) نمایش داد.

$$\omega_{i,j} = \chi_{ij} + \kappa_{ij} \tag{7}$$

که در آن:

$$\chi_{ij} = \omega_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}\right) \tag{8}$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}\left(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}\right) \tag{9}$$

در رابطه (7) اعضای قطری ماتریس χ_{ij} بیانگر پیچش خالص حول محور مختصات بوده و اعضای غیر قطری آن بیانگر انحراف از حالت کرویت هستند، این تانسور تأثیر چندانی در تغییر شکل نداشته و به همین دلیل در رابطه انرژی کرنشی منظور نمی‌گردد؛ اما از سوی دیگر در تئوری تنش کوپلی، تانسور انحناء κ_{ij} نقش مهمی را در رابطه انرژی کرنش ایفا می‌کند. بردار دوگانه این تانسور مطابق رابطه (10) به دست می‌آید.

$$\kappa_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\kappa_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{k,j} \tag{10}$$

برای یک ماده همسانگرد بخش متقارن تانسور تنش در رابطه (1) مانند تانسور تنش در حالت کلاسیک بوده و به‌صورت رابطه (11) نوشته می‌شود.

$$\sigma_{(ji)} = \nu e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{11}$$

که در آن ν و μ ثوابت لامه می‌باشند.

ازآنجاکه تانسور تنش کوپلی پادمتقارن است بردار دوگانه این تانسور را می‌توان به‌صورت رابطه (12) تعریف کرد.

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Gamma_{kj} \tag{12}$$

برای مواد همسانگرد خطی، اسفندیاری و درگوش [23] نشان دادند که تنش نیرو و تنش کوپلی به ترتیب از روابط (13) و (14) به دست می‌آیند.

$$\sigma_{ji} = \nu e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 2\eta\nabla^2\omega_{ji} \tag{13}$$

$$\Gamma_{ji} = -8\eta\kappa_{ij} = 4\eta\left(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}\right) \tag{14}$$

در روابط (13) و (14) برای مواد همسانگرد، تنها پارامتر وابسته به اندازه که مابین تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپلی سازگار تفاوت ایجاد می‌کند ثابت $\eta = \mu l^2$ می‌باشد. در اینجا پارامتر l بیانگر اندازه طول مشخصه در ماده بوده که برای هر ماده و هر بعد اندازه (میکرو، نانو و...) مقادیر متفاوتی را به خود می‌گیرد. با صفر فرض کردن این پارامتر، معادلات تنش به‌دست‌آمده به معادلات حالت کلاسیک تبدیل خواهند شد. این پارامتر معمولا توسط روش‌های مختلف آزمایشگاهی مانند آزمون خمش یا آزمون ضربه در ابعاد مختلف و شرایط کاری گوناگون به کمک دستگاه‌های پیشرفته و میکروسکوپ‌های قدرتمند الکترونی به دست می‌آید. همین امر به دست آوردن پارامتر طول مشخصه را در ریزساختارهای گوناگون به امری زمان‌بر و پرهزینه مبدل ساخته است. در بخش 4-1 نشان داده خواهد شد که چگونه به کمک انتشار امواج لمب و اندازه‌گیری سرعت انتشار این امواج در مواد می‌توان پارامتر طول مشخصه l را با روشی ساده‌تر به دست آورد.

3- مدل‌سازی انتشار امواج لمب در یک میکرو-ورق بی‌نهایت

امواج لمب، امواجی از نوع هدایت‌شده هستند که در یک ورق انتشار می‌یابند. معادله حاکم بر حرکت ذرات به‌صورت رابطه (15) نوشته می‌شود [9].

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho\ddot{u}_i \tag{15}$$

با جایگذاری مؤلفه تنش از رابطه (11) در رابطه (15)، معادله حاکم بر حرکت ذرات و انتشار موج بر اساس تئوری تنش کوپلی به‌صورت رابطه (16) به دست می‌آید.

$$(\nu + \mu + \eta\nabla^2)u_{k.ki} + (\mu - \eta\nabla^2)\nabla^2 u_i + \rho F_i = \rho\ddot{u}_i \tag{16}$$

که در آن ρ بیانگر چگالی ماده و F بیانگر نیروهای حجمی می‌باشند.

1- Qusi-static approximation
2- Piezoelectrically stiffend stiffness matrix
3- C-oriented aluminium nitride
4- Dual vector
5- Permutation tensor

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

حال برای به دست آوردن روابط مربوط به دیسپرژن امواج لمب در یک ورق بی‌نهایت همگن و همسانگرد، هندسه مسئله به‌صورت "شکل 1" در نظر گرفته شده است. مرکز مختصات کارتزین در میانه ضخامت ورق در نظر گرفته شده است به‌طوری‌که صفحه x-y صفحه میانی ورق بوده و محور z عمود بر آن باشد. سطوح $z = \pm h$ سطوح بدون نیرو و تنش هستند و فرض می‌شود که انتشار امواج در جهت x است.

یکی از روش‌های حل معادله حرکت (رابطه 16) استفاده از توابع پتانسیل برای تجزیه میدان جابجایی u به دو میدان است که یکی از آن‌ها مربوط به امواج طولی و دیگری مربوط به امواج عرضی است. با توجه به اینکه هر میدان برداری را می‌توان به دو بخش چرخشی و اتساعی تجزیه کرد، بنابراین بردار جابجایی $\vec{u} = (u_1, 0, u_3)$ به‌صورت رابطه (17) بیان می‌شود.

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi}, \qquad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \tag{17}$$

که ϕ، تابع اسکالر پتانسیل سرعت امواج طولی و $\vec{\psi} = (0, \psi, 0)$ تابع پتانسیل برداری سرعت امواج عرضی در جامدات می‌باشند.

ازآنجاکه فرض می‌شود که امواج لمب در صفحه x-z انتشار می‌یابند، بنابراین رفتار امواج مستقل از جهت y بوده و داریم $u_2 = 0, \partial/\partial y = 0$. با استفاده از تجزیه میدان جابجایی هلمهولتز، جابجایی در راستاهای x و z مطابق روابط (18) و (19) به دست می‌آید [9].

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{18}$$

$$u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{19}$$

با جایگذاری روابط (18) و (19) در رابطه‌های (13) و (14)، تنش‌های حاصل از نیروها و کوپل روی سطح ورق مطابق روابط (20) تا (22) به دست می‌آیند.

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2\partial z^2}\right) \tag{20}$$

$$\sigma_{zz} = \mu\left(\frac{c_L^2}{c_T^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right) \tag{21}$$

$$\Gamma_{zy} = -2\eta\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial z\,\partial x^2}\right) \tag{22}$$

که در آن c_L و c_T بیانگر سرعت انتشار امواج طولی و عرضی در ماده همسانگرد بوده که طبق روابط (23) و (24) با استفاده از ثوابت لامه و یا

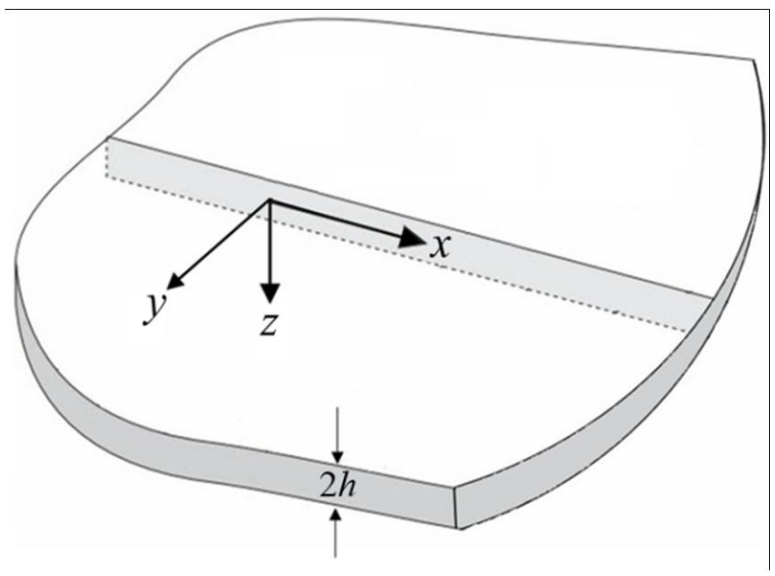

Fig. 1 Geometry of an infinite micro-plate

شکل 1 هندسه میکرو ورق بی‌نهایت

ضرایب ماتریس سفتی ماده به دست می‌آیند [9].

$$c_L = \sqrt{\frac{\nu + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \tag{23}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \tag{24}$$

که در آن C_{11} و C_{44} ثوابت ماتریس سفتی ماده همسانگرد می‌باشند.

شارما [24] نشان داد که بازنویسی رابطه (16) بر اساس توابع پتانسیل به‌صورت روابط (25) و (26) خواهد بود.

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{25}$$

$$\nabla^2\psi - l^2\nabla^4\psi = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{26}$$

توابع ϕ و ψ برای انتشار امواج در جهت x به‌صورت روابط (27) و (28) حدس زده می‌شوند:

$$\phi = f(z)e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{27}$$

$$\psi = g(z)e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{28}$$

در روابط فوق c_p برابر با سرعت فاز انتشار امواج لمب، ξ بیانگر عدد موج و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد.

با جایگذاری روابط (27) و (28) در روابط (25) و (26) و حل آن‌ها توابع ϕ و ψ به‌صورت روابط (29) و (30) به دست می‌آیند.

$$\phi = (A_1\cos\alpha z + A_2\sin\alpha z)e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{29}$$

$$\psi = (A_3\cos\beta z + A_4\sin\beta z + A_5\cos\gamma z + A_6\sin\gamma z)e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{30}$$

سپس با استفاده از روابط (18) و (19) جابجایی‌های افقی و قائم به‌صورت روابط (31) و (32) به دست می‌آیند.

$$u_1 = [(A_1\cos\alpha z + A_2\sin\alpha z) - (-A_3\beta\sin\beta z + A_4\beta\cos\beta z - A_5\gamma\sin\gamma z + A_6\gamma\cos\gamma z)]e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{31}$$

$$u_3 = [(-A_1\alpha\sin\alpha z + A_2\alpha\cos\alpha z) + (A_3\cos\beta z + A_4\sin\beta z + A_5\cos\gamma z + A_6\sin\gamma z)]e^{i\xi(x - c_p t)} \tag{32}$$

همچنین ضرایب α, β, γ از حل هم‌زمان روابط (33) تا (35) به دست می‌آیند.

$$\alpha^2 = \xi^2\left(\frac{{c_p}^2}{c_L^2} - 1\right) \tag{33}$$

$$(\beta^2 + \gamma^2) = -\left(2\xi^2 + \frac{1}{l^2}\right) \tag{34}$$

$$\beta^2\gamma^2 = \frac{\xi^2}{l^2}\left(1 + \xi^2 l^2 - \frac{{c_p}^2}{c_T^2}\right) \tag{35}$$

برخلاف روابط و نتایج ارائه‌شده توسط شارما [24]، در این تحقیق برای سادگی و جلوگیری از خطاهای محاسباتی و همچنین قابلیت تعمیم نتایج برای ورق‌های با ضخامت‌های مختلف و طول‌موج انتشاری گوناگون، تلاش شد که معادلات به‌صورت بی‌بعد ارائه شوند، بدین منظور ابتدا پارامترهای بی‌بعد موردنظر مطابق رابطه (36) تعریف می‌گردد.

$$\bar{l} = \frac{h}{l}, \bar{c}_P = \frac{c_P}{c_T}, \bar{c}_L = \frac{c_L}{c_T}$$
$$\bar{\omega} = \frac{\omega h}{c_T}, \bar{\xi} = \xi h = \frac{\omega}{\bar{c}_P h}, \bar{\alpha} = \alpha h, \bar{\beta} = \beta h, \bar{\gamma} = \gamma h \tag{36}$$

در روابط فوق ω برابر با فرکانس زاویه‌ای امواج است.

معادلات (37) تا (39) در صورتی پاسخ غیر بدیهی دارند که دترمینان

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

ماتریس ضرایب A_1 تا A_6 برابر صفر باشد. حال برای به دست آوردن مودهای متقارن و پادمتقارن معادله مشخصه انتشار امواج لمب، روابط (31) و (32) مربوط به مؤلفه‌های جابجایی در نظر گرفته می‌شوند. حرکت موج در صورتی متقارن (نسبت به صفحه میانی ورق)، خواهد بود که مؤلفه حرکت در جهت x یعنی u_1 تنها شامل کسینوس بوده و در صورتی پادمتقارن خواهد بود که u_1 تنها شامل سینوس باشد. برعکس این امر برای مؤلفه حرکت در راستای z یعنی u_3 وجود دارد [9]؛ بنابراین برای یافتن معادله مشخصه انتشار امواج لمب با استفاده از ماتریس ضرایب a_{ij} مطابق رابطه (40) برای مودهای پادمتقارن دترمینان ضرایب $A_2,\ A_3,\ A_5$ و برای مودهای متقارن دترمینان ضرایب $A_1,\ A_4,\ A_6$ برابر صفر قرار داده می‌شوند و معادله به‌دست‌آمده برای هر مود با کمک روش‌های عددی حل شده و نمودارهای دیسپرژن سرعت فاز امواج لمب در میکرو ورق آلومینیوم نیترید به دست می‌آیند.

$$[a_{ij}]_{6\times 6}[A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6]^{\mathrm{T}} = 0 \tag{40}$$

مقادیر مربوط به a_{ij} با توجه به روابط (37) تا (39) به‌راحتی قابل به دست آوردن هستند. همچنین نمودار دیسپرژن سرعت گروه را می‌توان با استفاده از مقادیر سرعت فاز و از طریق رابطه (41) استخراج نمود [9]:

$$c_g = {c_p}^2\left[c_p - \omega\frac{dc_p}{d\omega}\right]^{-1} \tag{41}$$

4-نتایج عددی و بحث

در این تحقیق برای مدل‌سازی انتشار امواج لمب در یک ورق بی‌نهایت از خواص ماده پیزوالکتریک آلومینیوم نیترید با جهت‌گیری در راستای c استفاده شده است. به دلیل تقارن شش‌وجهی و ساختار 6mm آلومینیوم نیترید، انتشار امواج لمب در صفحه x-z ورقی با این جنس همانند ماده همسانگرد خواهد بود [27]. با استفاده از خواص به‌دست‌آمده توسط مک نیل [28] برای آلومینیوم نیترید و با استفاده از تقریب شبه استاتیک برای مواد پیزوالکتریک که در آن ثوابت ماتریس سفتی توسط اضافه کردن مقادیری برحسب ثوابت پیزوالکتریک و دی‌الکتریک ماده افزایش می‌یابند، ماتریس سفتی به‌صورت پیزوالکتریک سخت شده برای آلومینیوم نیترید به دست می‌آید، هرچند که تأثیر این ثوابت پیزوالکتریک و دی‌الکتریک بر روی مقادیر ماتریس سختی بسیار ناچیز است و تغییر چندانی در مقادیر سرعت‌های طولی و عرضی ایجاد نمی‌کنند [26]. به کمک این ماتریس و استفاده از روابط (23) و (24) سرعت‌های طولی و عرضی انتشار موج در ورق برابر با c_L = 11225 m/s و c_T = 6220 m/s به دست می‌آیند. پس از مشخص شدن سرعت‌های طولی و عرضی، معادلات به‌دست‌آمده برای مودهای متقارن و پادمتقارن (روابط 39-37) در شش حالت مختلف از نسبت ضخامت ورق به پارامتر طول مشخصه آن حل شده و منحنی‌های دیسپرژن برای مود متقارن اول S_0 و مود پادمتقارن اول A_0 ترسیم شده است؛ سپس این نتایج با منحنی‌های دیسپرژن به‌دست‌آمده از تئوری کلاسیک الاستیسیته مقایسه می‌شوند. برای رسم نمودارهای دیسپرژن امواج لمب با استفاده از تئوری کلاسیک الاستیسیته از رابطه (42) معروف به رابطه فرکانسی ریلی-لمب استفاده می‌گردد [9]:

$$\frac{\mathrm{tg}\, qh}{\mathrm{tg}\, ph} = -\left[\frac{4\xi^2 pq}{(q^2-\xi^2)}\right]^{\pm 1} \tag{42}$$

در رابطه (42) علامت + برای مودهای متقارن و علامت − برای مودهای پادمتقارن است که در آن p و q مطابق روابط (43) و (44) به دست می‌آیند.

$$p^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_L}\right)^2 - \xi^2 \tag{43}$$

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{c_T}\right)^2 - \xi^2 \tag{44}$$

در ابتدا صحت بی‌بعدسازی معادلات (39-37) بررسی شد که نتایج آن در جدول 1 آورده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در ورق‌های با ضخامت و طول مشخصه گوناگون، در نسبت‌های یکسان $2h/l$ و $2h/\lambda$، نتایج یکسانی در مقایسه با معادلات با بعد [24] به دست می‌آید.

در شکل‌های 2 تا 5 نتایج حاصل از حل عددی معادلات دیسپرژن امواج لمب به ترتیب برای سرعت فاز مود اول متقارن S_0 و پادمتقارن A_0 و سرعت گروه مود اول پادمتقارن A_0 و متقارن S_0 با استفاده از تئوری‌های تنش کوپلی سازگار و کلاسیک الاستیسیته ترسیم شده است. در این منحنی‌ها محور افقی، نسبت بی‌بعد ضخامت به طول‌موج $2h/\lambda$ می‌باشد.

جدول 1 مقایسه سرعت فاز (c_p) به‌دست‌آمده از معادلات با بعد [24] و بی‌بعد حاضر برحسب (m/s) برای حالت $2h/l = 2, 2h/\lambda = 0.5$

Table 1 Comparison of obtained phase velocity using dimensional [24] and current non-dimensional equations in m/s in case of $2h/l = 2, 2h/\lambda = 0.5$

$2h$ (μm)	λ (μm)	l (μm)	c_p [24]	c_p نتایج حاضر
2	4	1	10480	10480
4	8	2	10480	10480
6	12	3	10480	10480

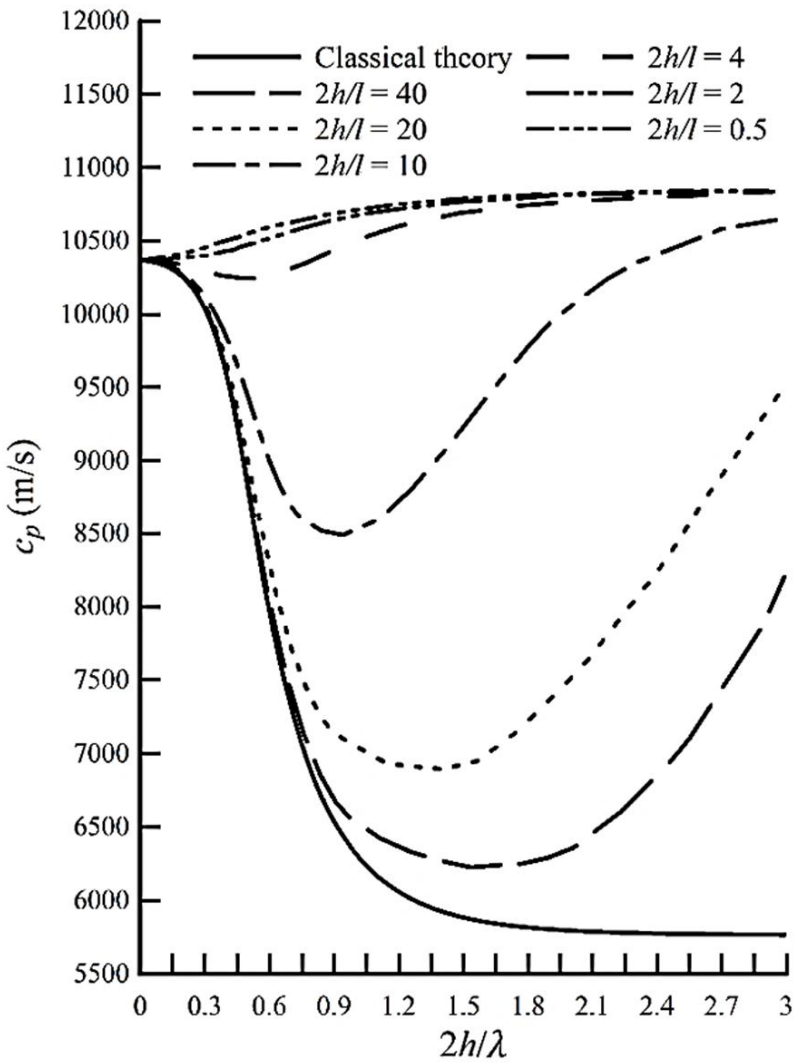

Fig. 2 Dispersion curve of phase velocity for first symmetric mode in different thickness to characteristic length ratios

شکل 2 نمودار دیسپرژن سرعت فاز برای مود اول متقارن در نسبت‌های مختلف ضخامت به پارامتر طول مشخصه

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

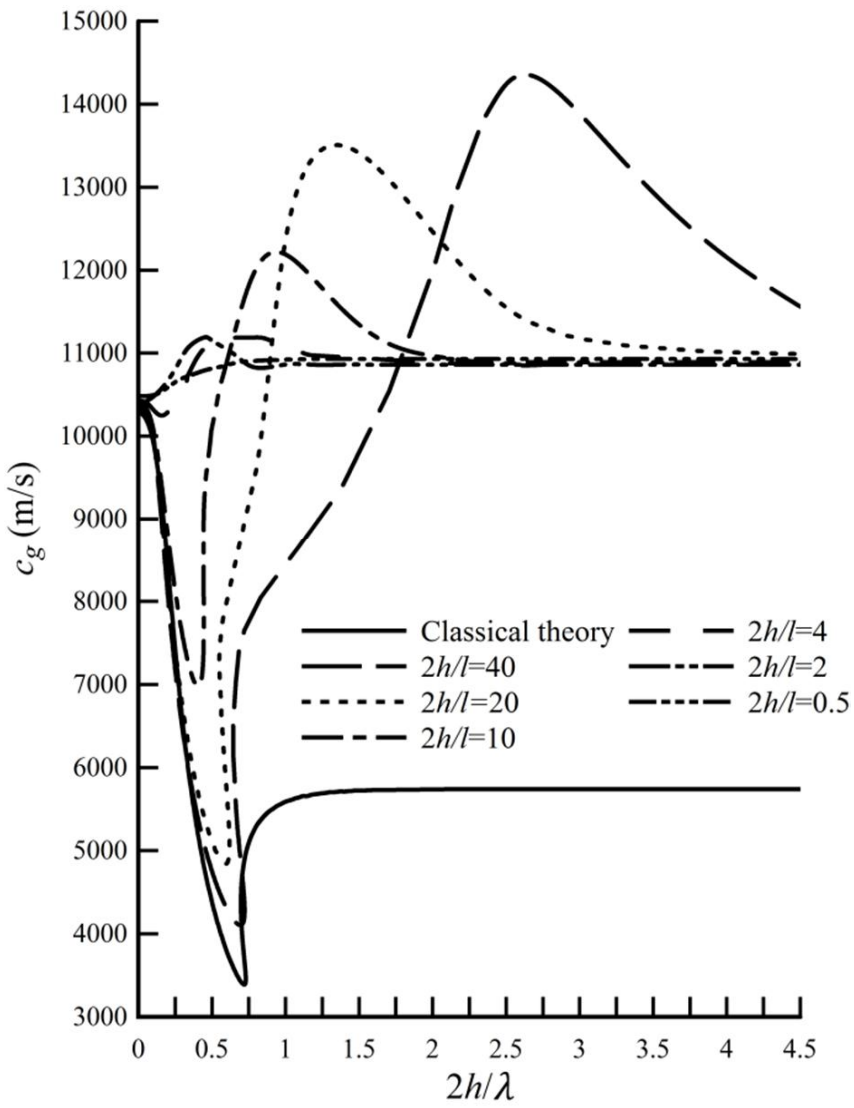

Fig. 5 Dispersion curve of group velocity for first symmetric mode in different thickness to characteristic length ratios

شکل 5 نمودار دیسپرژن سرعت گروه برای مود اول متقارن در نسبت‌های مختلف ضخامت به پارامتر طول مشخصه

به دلیل سرعت بالای انتشار مود اول متقارن امواج لمب در ورق‌ها در نسبت‌های پایین $2h/\lambda$، این مود بیشترین استفاده را در محرک‌های صوتی سطحی دارد، ازاین‌رو نمودار دیسپرژن این مود از اهمیت بالاتری نسبت به سایر مودها برخوردار است. همان‌طور که در "شکل 2" قابل مشاهده است با کاهش نسبت $2h / l$ نمودار دیسپرژن از حالت کلاسیک فاصله گرفته و به سمت سرعت‌های فاز بالاتر منحرف می‌گردد به‌گونه‌ای که با افزایش نسبت $2h/\lambda$ نرخ افزایش این اختلاف نیز بیشتر می‌شود. نمودارهای رسم شده برای نسبت‌های متفاوت $2h / l$ تا یک نسبت معین همگی دارای یک نقطه مینیمم هستند که در یک نسبت $2h/\lambda$ خاص رخ می‌دهد و پس‌ازاین نقطه نمودار به‌صورت صعودی درمی‌آید و به سمت سرعتی در حدود سرعت موج طولی c_L که از این به بعد به آن سرعت نهایی گفته می‌شود همگرا می‌شود. در محاسبات عددی انجام‌شده برای ماده آلومینیوم نیترید این سرعت برابر 10835 m/s به دست آمد. همچنین از "شکل 2" می‌توان دریافت که با کاهش هرچه بیشتر نسبت $2h / l$، مینیمم‌ها به سمت نسبت‌های کمتر $2h/\lambda$ حرکت می‌کنند و هم‌زمان از میزان تقعر نمودارها کاسته می‌شود تا جایی که از یک نسبت $2h/l$ خاص به بعد نمودارها صرفا به‌صورت صعودی بوده و فاقد مینیمم می‌باشند. برای ماده آلومینیوم نیترید این نسبت خاص برابر با $2h/l =$ 2.3 به دست آمد. لازم به ذکر است که در شکل‌های 2 و 5 نسبت‌های ضخامت به طول‌موج بیشتر از $2h/\lambda = 1$ صرفا برای نمایش نحوه تغییر نمودارها و تقعر آن‌ها ترسیم شده و در عمل انتشار امواج لمب در این شرایط امکان‌پذیر نمی‌باشد. در جدول 2 نتایج به‌دست‌آمده برای مقادیر سرعت فاز مود S_0 در $2h/\lambda = 0.166$ بر اساس آزمایش تجربی یانچو [8]

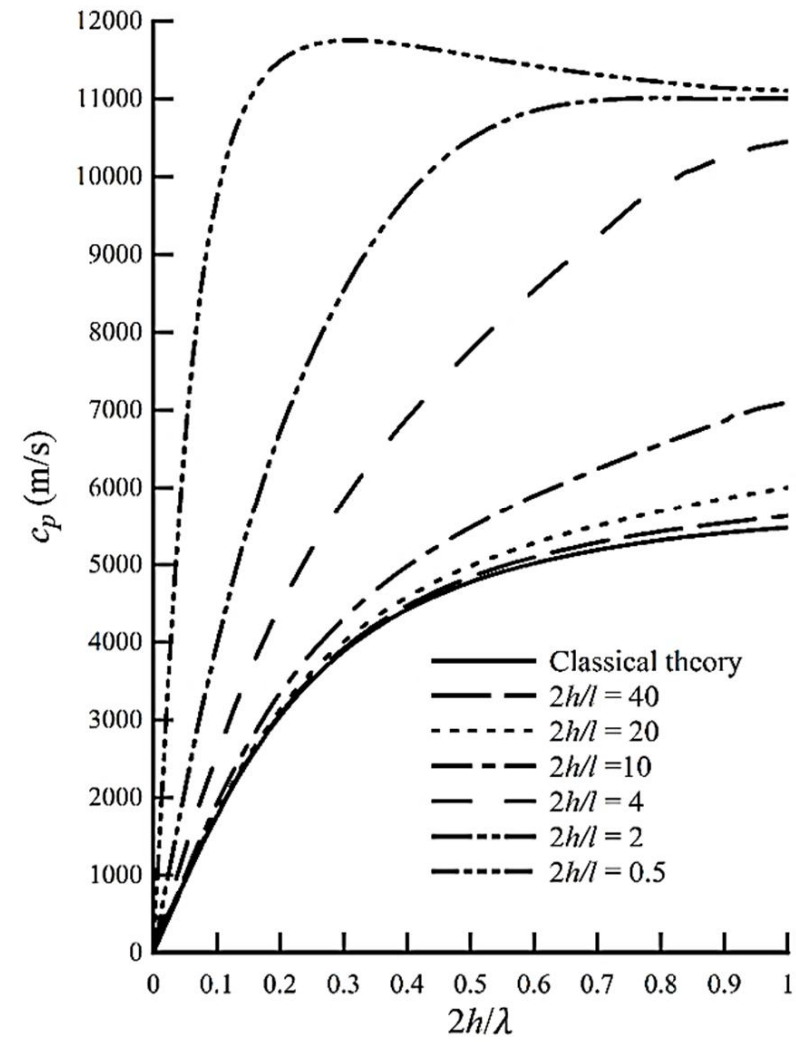

Fig. 3 Dispersion curve of phase velocity for first anti-symmetric mode in different thickness to characteristic length ratios

شکل 3 نمودار دیسپرژن سرعت فاز برای مود اول پادمتقارن در نسبت‌های مختلف ضخامت به پارامتر طول مشخصه

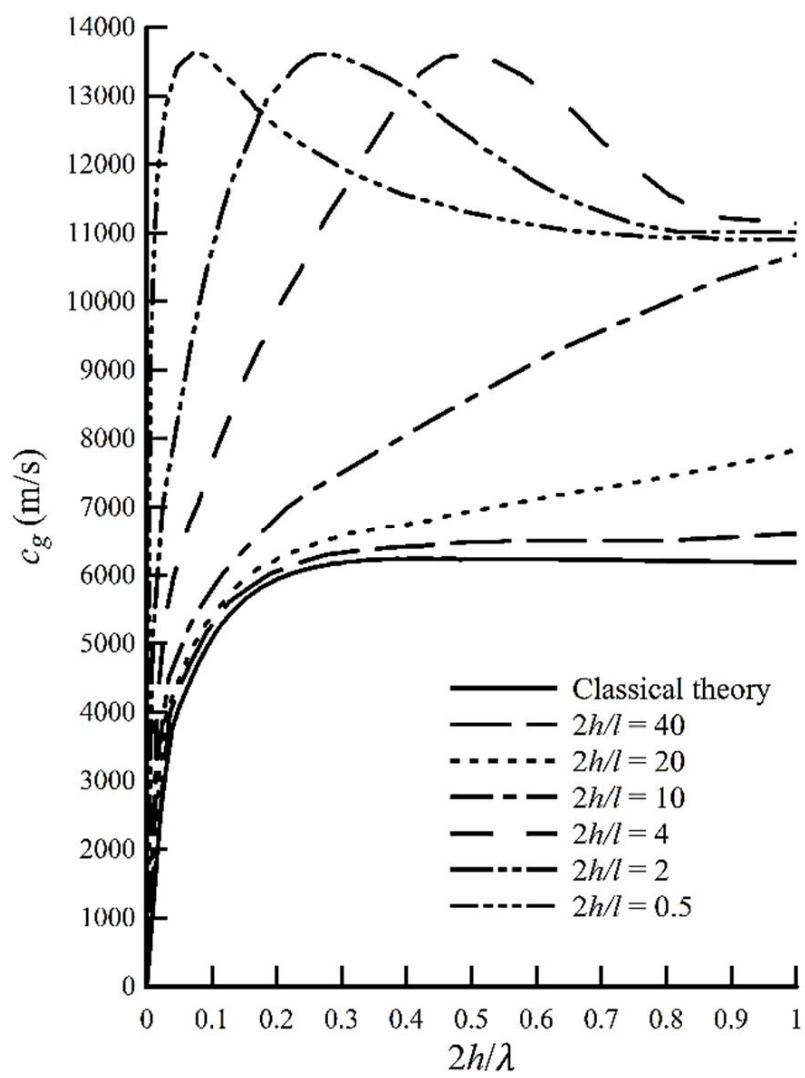

Fig. 4 Dispersion curve of group velocity for first anti-symmetric mode in different thickness to characteristic length ratios

شکل 4 نمودار دیسپرژن سرعت گروه برای مود اول پادمتقارن در نسبت‌های مختلف ضخامت به پارامتر طول مشخصه

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

با نتیجه حاصل از تئوری کلاسیک و نتایج حاصل از تئوری تنش کوپلی سازگار برای نسبت‌های مختلف ضخامت به پارامتر طول مشخصه $2h/l$ با یکدیگر مقایسه شده است.

"شکل 3" نمایانگر نمودار دیسپرژن مود پادمتقارن اول A_0 در ورق آلومینیوم نیترید برای نسبت‌های مختلف $2h/l$ می‌باشد. همان‌طور که از این شکل برمی‌آید شرایطی مشابه نمودارهای مود S_0 بر نمودارهای مود A_0 نیز حاکم است با این تفاوت که در این مود نقطه مینیمم وجود ندارد و برای نسبت‌های $2h/l$ نزدیک به 2 و پایین‌تر مقادیر سرعت فاز با سرعت بیشتری از سرعت‌های کلاسیک دور شده و به مقدار سرعت نهایی که در این مود هم برابر 10835 m/s به دست آمده است، همگرا می‌گردند.

نمودار دیسپرژن سرعت گروه به‌دست‌آمده از رابطه (41) برای مود اول پادمتقارن و متقارن در نسبت‌های مختلف $2h/l$ در شکل‌های 4 و 5 ترسیم شده است. در "شکل 4" با کاهش نسبت $2h/l$ به مقادیر نزدیک به 2 مشاهده می‌شود که در مقادیر پایین نسبت $2h/\lambda$ نمودارها پس از یک صعود شدید تا مقادیر بالاتر از سرعت c_L، کاهش یافته و به سمت سرعت نهایی 10835 m/s همگرا می‌شوند. همین همگرا شدن برای نسبت‌های بالای $2h/l$ نیز رخ می‌دهد با این تفاوت که در این مقادیر از صعود شدید اولیه خبری نیست و نمودارها مانند نمودار حاصل از تئوری کلاسیک با شیب ملایمی به سرعت نهایی همگرا می‌شوند.

در "شکل 5" نمودارها رفتاری مانند نمودارهای رسم شده برای سرعت فاز مود اول متقارن در "شکل 2" از خود نشان می‌دهند، با این تفاوت که تا مقادیر $2h/l$ برابر با 4 نمودارها پس از رسیدن به نقطه مینیمم خود صعودی شده و پس از رسیدن به یک نقطه ماکزیمم به سمت سرعت نهایی 10835 m/s همگرا می‌شوند؛ اما در نسبت‌های $2h/l$ کوچک‌تر از 4 دیده می‌شود که نمودارها فاقد نقطه مینیمم بوده و پس از یک صعود اندک به مقدار سرعت نهایی همگرا می‌گردند.

در رابطه با علت همگرا شدن نمودارهای فوق به یک سرعت خاص با توجه به اینکه در تئوری کلاسیک سرعت انتشار امواج لمب با افزایش فرکانس و یا ضخامت ورق به سرعت انتشار امواج ریلی همگرا می‌گردد [9] و همچنین بر اساس پژوهش انجام‌شده توسط اتوسن و همکاران [29] که در آن بیان می‌شود در تئوری تنش کوپلی، برخلاف تئوری کلاسیک سرعت موج ریلی دیسپرسیو بوده و با افزایش فرکانس و همچنین پارامتر طول مشخصه افزایش می‌یابد؛ لذا سرعت نهایی به‌دست‌آمده در نتایج این پژوهش می‌تواند به دلیل همگرا شدن سرعت امواج به مقداری در حدود سرعت ریلی در فرکانس‌های بالا، بر اساس مقادیر حاصل از تئوری تنش کوپلی باشد.

بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در شکل‌های 2 تا 5 می‌توان به این نتیجه کلی رسید که سرعت‌های به‌دست‌آمده توسط تئوری تنش کوپلی سازگار از سرعت‌های پیش‌بینی‌شده در حالت کلاسیک بیشتر می‌باشند و ازآنجاکه سرعت انتشار امواج با افزایش سختی ماده افزایش می‌یابد، پس می‌توان نتیجه گرفت که تئوری تنش کوپلی سازگار با رابطه‌ای مستقیم بسته به اندازه پارامتر طول مشخصه سختی بیشتری را برای ماده پیش‌بینی می‌کند.

4-1- تعیین پارامتر طول مشخصه

یکی از مهم‌ترین و در عین حال مشکل‌ترین مسائل در استفاده از انواع تئوری‌های تنش کوپلی تعیین پارامتر طول مشخصه است. تحقیقات زیادی درزمینه‌ی اندازه‌گیری این پارامتر به‌صورت تجربی با روش‌هایی مانند آزمون میکرو خمش، میکرو پیچش و میکرو ضربه با استفاده از تئوری‌هایی مانند گرادیان کرنش [31,30] و تئوری میکروپولار [14] انجام شده است که در همه آن‌ها درنهایت این نتیجه حاصل شده است که در مواد مختلف خواص به‌دست‌آمده در ابعاد میکرو سخت‌تر از خواص پیش‌بینی‌شده توسط تئوری‌های کلاسیک می‌باشند. بنا بر مطالعات انجام‌شده تاکنون، نتایج تجربی مبتنی بر تئوری تنش کوپلی سازگار برای تعیین پارامتر طول مشخصه با روش‌های نام برده شده ارائه نگردیده است، ازاین‌رو در این قسمت ضمن مقایسه نتایج به‌دست‌آمده برای سرعت فاز انتشار امواج لمب با نتایج تجربی ارائه‌شده توسط یانچو، روشی برای تعیین پارامتر طول مشخصه در ورق بر اساس نتایج آزمایشگاهی پیشنهاد شده است.

طبق نتایج عملی به‌دست‌آمده توسط یانچو [8] برای یک ورق آلومینیوم نیترید با ضخامت 2 μm و نسبت $2h/\lambda = 0.166$، سرعت فاز مود اول متقارن S_0 برابر با 10485 m/s به دست آمد. همان‌طور که در جدول 2 مشاهده می‌شود با کاهش نسبت $2h/l$ مقادیر سرعت به‌دست‌آمده از تئوری تنش کوپلی به مقدار حاصل از آزمایش یانچو نزدیک‌تر می‌شوند به‌طوری‌که در مقدار $2h/l = 0.5$ کمترین اختلاف مشاهده می‌گردد. واضح است که هرچه مقدار $2h/l$ به صفر نزدیک شود جواب به مقدار عملی نزدیک‌تر خواهد شد؛ اما مشخصا پارامتر طول مشخصه را نمی‌توان بر این اساس تعیین نمود؛ زیرا با هرچه کمتر شدن نسبت $2h/l$، پارامتر طول مشخصه l تا حدی نامعین و غیرقابل‌قبول بزرگ‌تر خواهد شد؛ بنابراین نیاز است تا اندازه‌گیری سرعت انتشار امواج در میکرو ورق در فرکانس‌های متفاوتی انجام شود تا بتوان با قطعیت بیشتری اندازه پارامتر طول مشخصه را معین نمود.

مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های اندازه‌گیری پارامتر طول مشخصه مانند آزمون ضربه میکرو و یا آزمون خمش میکرو که پارامتر طول مشخصه را تنها به‌صورت محلی محاسبه می‌کنند این است که در این روش پارامتر طول مشخصه به‌صورت میانگینی از اندازه این پارامتر در کل ساختار به دست می‌آید. بر اساس اطلاعات به‌دست‌آمده تاکنون هیچ نتیجه تجربی درزمینه‌ی اندازه‌گیری پارامتر طول مشخصه در ماده آلومینیوم نیترید بر اساس تئوری تنش کوپلی ارائه نشده است. با توجه به اینکه نتایج

جدول 2 مقایسه سرعت فازهای مود S_0 به‌دست‌آمده از تئوری تنش کوپلی سازگار و تئوری کلاسیک الاستیسیته با مشاهده تجربی در $2h/\lambda = 0.166$ برحسب (m/s)

Table 2 Comparison of mode S_0 phase velocities obtained using consistent couple stress theory and classical theory with experimental results in $2h/\lambda = 0.166$

سرعت فاز	تئوری کلاسیک	مشاهده تجربی [8]	$2h/l$						
			2.3*	0.5	2	4	10	20	40
c_p (m/s)	10287	10485	10370	10402	10381	10345	10310	10299	10295

* مقداری که پس از آن منحنی سرعت فاز مود متقارن اول S_0 صعودی بوده و فاقد مینیمم می‌باشد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

تجربی در مورد انتشار امواج لمب در نسبت‌های $2h/\lambda$ نزدیک به 1 وجود ندارد و برای نسبت‌های $2h/\lambda$ پایین نیز با شرایط موردنظر این پژوهش بسیار محدود است، روش مذکور برای تعیین پارامتر طول مشخصه را می‌توان در آینده با انجام آزمایش‌های بیشتر مورد بررسی قرار داد تا بتوان به‌صورت قطعی‌تری در مورد اندازه پارامتر طول مشخصه بر اساس تئوری تنش کوپلی اظهارنظر کرد.

5-نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

تئوری تنش کوپلی سازگار این قابلیت را دارد که به کمک تنها یک پارامتر طول مشخصه تأثیر ریزساختار مواد در معادلات مربوط به انتشار امواج لمب در میکرو ورق‌ها را بررسی کند. در این تحقیق با استفاده از این تئوری معادلات مشخصه بی‌بعد برای انتشار امواج لمب در مودهای متقارن و پادمتقارن به دست آمده که پس از حل به کمک روش‌های عددی نمودارهای دیسپرژن برای مقادیر مختلف نسبت بی‌بعد ضخامت به پارامتر طول مشخصه و با استفاده از خواص ماده آلومینیوم نیترید رسم شده است. برخلاف پژوهش‌های پیشین بی‌بعد بودن روابط موجب می‌شود که نمودارهای به‌دست‌آمده برای انواع نسبت‌های ضخامت به طول‌موج و ضخامت به طول مشخصه قابل استفاده باشند. در نتایج به‌دست‌آمده مشاهده گردید که تئوری تنش کوپلی سازگار بر اساس اندازه‌ی پارامتر طول مشخصه نسبت به تئوری کلاسیک سختی بیشتری برای ماده پیش‌بینی می‌کند، به‌گونه‌ای که در یک ورق با ضخامت ثابت با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه نتایج به تئوری کلاسیک نزدیک شده و با کاهش این مقدار، سرعت انتشار امواج در ورق به میزان قابل‌توجهی افزایش می‌یابد، این افزایش به‌نحوی است که در مقادیر بالای نسبت ضخامت ورق به طول‌موج انتشاری، سرعت انتشار امواج به مقداری در حدود سرعت موج طولی در تئوری کلاسیک همگرا می‌گردد؛ همچنین به‌وسیله اندازه‌گیری تجربی سرعت‌های فاز یا گروه امواج لمب در فرکانس‌های مختلف و مقایسه با منحنی‌های دیسپرژن رسم شده، روشی برای یافتن پارامتر طول مشخصه در تئوری تنش کوپلی سازگار با استفاده از داده‌های تجربی ارائه گردید که می‌تواند علاوه بر کاهش هزینه آزمایش‌ها در تعیین دقیق‌تر خواص میکرو ورق‌ها با استفاده از انتشار امواج لمب مؤثر باشد.

6-فهرست علائم

c_g	سرعت گروه (m/s)
c_p	سرعت فاز (m/s)
c_L	سرعت انتشار موج طولی در ماده همسانگرد (m/s)
c_T	سرعت انتشار موج عرضی در ماده همسانگرد (m/s)
C_{ij}	تانسور سفتی ماده همسانگرد
e_{ij}	تانسور کرنش
F	برآیند نیروهای حجمی (N)
h	نصف ضخامت ورق (m)
l	اندازه طول مشخصه (m)

علائم یونانی

Γ_{ji}	تانسور تنش کوپلی
η	ثابت ماده همسانگرد در تئوری تنش کوپلی
κ_{ij}	تانسور انحناء
λ	طول‌موج (m)
μ	ثابت لامه
ν	ثابت لامه
ξ	عدد موج (m^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
σ_{ji}	تانسور تنش نیرو
ϕ	تابع اسکالر پتانسیل سرعت امواج طولی
χ_{ij}	تانسور پیچش
$\vec{\psi}$	تابع پتانسیل برداری سرعت امواج عرضی
ω_{ij}	تانسور چرخش
ω	فرکانس زاویه‌ای ($Rads^{-1}$)

7-مراجع

[1] G. Ma, F. Han, P. You, L. Zhang, X. Yan, Experimental study of a low-g micromachined electrostatically suspended accelerometer for space applications, *Microsystem Technologies*, Vol. 21, No. 1, pp. 29-39, 2015.

[2] A. Amar, D. Bahloul, F. Gagnon, A. Kouki, MEMS filter's design and modeling based on width-extensional mode plate resonator for wireless applications, *Microsystem Technologies*, Vol. 21, No. 7, pp. 1567-1576, 2015.

[3] S. Gonseth, F. Rudolf, C. Eichenberger, D. Durrant, P. Airey, Miniaturized high-performance MEMS accelerometer detector, *CEAS Space Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 263-270, 2015.

[4] M. B. Nagaraju, S. Sridaran, A. R. Lingley, J. D. Larson, B. P. Otis, R. C. Ruby, Comparison of acoustic wave pressure sensors for TPMS applications, *Proceedings of Frequency Control Symposium & the European Frequency and Time Forum (FCS) Joint Conference*, Denver: IEEE, pp. 205-208, 2015.

[5] S. Bhattacharya, J. Jang, L. Yang, D. Akin, R. Bashir, Biomems and nanotechnology-based approaches for rapid detection of biological entities, *Journal of Rapid Methods & Automation in Microbiology*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-32, 2007.

[6] A. Uranga, J. Verd, N. Barniol, CMOS–MEMS resonators: from devices to applications, *Microelectronic Engineering*, Vol. 132, No. 1, pp. 58-73, 2015.

[7] V. Yantchev, I. Katardjiev, Thin film Lamb wave resonators in frequency control and sensing applications: a review, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 23, No. 4, pp. 043001, 2013.

[8] V. Yantchev, I. Katardjiev, Micromachined thin film plate acoustic resonators utilizing the lowest order symmetric lamb wave mode, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 54, No. 1, pp. 87-95, 2007.

[9] J. L. Rose, *Ultrasonic waves in solid media*, pp. 77-106, Cambridge: Cambridge university press, 2004.

[10] C. M. Lin, V. Yantchev, Y. Y. Chen, V. V. Felmetsger, A. P. Pisano, Characteristics of AlN Lamb wave resonators with various bottom electrode configurations, *Proceedings of Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Joint Conference*, San Fransisco: IEEE, pp. 1-5, 2011.

[11] H. Lamb, On waves in an elastic plate, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, Vol. 93, No. 648, pp. 114-128, 1917.

[12] E. L. Adler, Matrix methods applied to acoustic waves in multilayers, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 485-490, 1990.

[13] S. Joshi, Y. Jin, Excitation of ultrasonic Lamb waves in piezoelectric plates, *applied physics*, Vol. 69, No. 12, pp. 8018-8024, 1991.

[14] A. W. McFarland, J. S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1060-1067, 2005.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]

[15] W. Voigt, *Theoretical studies in the elastic behavior of crystals*, pp. 3-52, Göttingen: Gesellschaft der Wissenschaften, 1892. (in German)

[16] E. Cosserat, F. Cosserat, *Theory of Deformable Bodies*, pp. 953-1173, Paris: Hermann et Fils, 1909. (in French)

[17] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.

[18] W. T. Koiter, Couple-stresses in the theory of elasticity, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Vol. 67, No. 1, pp. 17-44, 1964.

[19] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.

[20] A. C. Eringen, *Theory of micropolar elasticity*, pp. 621-729, New York: Academic Press, 1968.

[21] R. D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *Solids and Structures*, Vol. 1, No. 4, pp. 417-438, 1965.

[22] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109-124, 1968.

[23] A. R. Hadjesfandiari, G. F. Dargush, Couple stress theory for solids, *Solids and Structures*, Vol. 48, No. 18, pp. 2496-2510, 2011.

[24] V. Sharma, S. Kumar, Velocity dispersion in an elastic plate with microstructure: effects of characteristic length in a couple stress model, *Meccanica*, Vol. 49, No. 5, pp. 1083-1090, 2014.

[25] A. Goodarzi, H. Mohammadi Shodja, B. Hashemian, The effect of couple-stresses on the elastodynamic field of a diffracted wave by an embedded nano-cavity in an infinite medium, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 1-9, 2015. (in Persian فارسی)

[26] B. A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids*, Vol. 1, pp. 298-305, New York: Wiley, 1973.

[27] F. D. Pietrantonio, M. Benetti, D. Cannata, R. Beccherelli, E. Verona, Guided lamb wave electroacoustic devices on micromachined AlN/Al plates, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 57, No. 5, pp. 1175-1182, 2010.

[28] L. E. McNeil, M. Grimsditch, R. H. French, Vibrational spectroscopy of aluminum nitride, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 76, No. 5, pp. 1132-1136, 1993.

[29] N. S. Ottosen, M. Ristinmaa, C. Ljung, Rayleigh waves obtained by the indeterminate couple-stress theory, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 19, No. 6, pp. 929-947, 2000.

[30] J. Gomez, C. Basaran, Determination of strain gradient plasticity length scale for microelectronics solder alloys, *Journal of electronic packaging*, Vol. 129, No. 2, pp. 120-128, 2007.

[31] M. Zhao, W. S. Slaughter, M. Li, S. X. Mao, Material length scale controlled nanoindentation size effects due to strain gradient plasticity, *Acta Materialia*, Vol. 51, No. 15, pp. 4461-4469, 2003.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.33.6]