



## بررسی مسیر گسترش ترک در شیارهای V شکل نوک گرد تحت بارگذاری مرکب I/II

جواد اکبردوست<sup>1\*</sup>، سید محمد حسین مهاجرانی<sup>2</sup>، علیرضا ترابی<sup>3</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی تهران، کرج، ایران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی تهران، کرج، ایران

3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

\*کد پستی 37551-31979، akbardoost@khu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 آذر 1394

پذیرش: 14 بهمن 1394

ارائه در سایت: 12 اسفند 1394

کلید واژگان:

مسیر گسترش ترک

شیار V شکل نوک گرد

زاویه شروع شکست

روش المان محدود توسعه یافته

روش گام به گام

### چکیده

هدف از این پژوهش، بررسی عددی مسیر گسترش ترک در قطعات شیاردار نوک گرد تحت بارگذاری مرکب کششی - برشی می‌باشد. برای این منظور از دو روش المان محدود توسعه یافته و روشی موسوم به روش گام به گام استفاده می‌شود. در روش اول، شکست از نوک شیار بر اساس مدل ناحیه چسبناک شروع و رشد می‌کند. در این راستا، یک رابطه خطی برای تابع نرم‌شوندگی در نظر گرفته شده است و پارامترهای آن با استفاده از روابط علم مکانیک شکست برای قطعات ترک‌دار محاسبه می‌شود. در روش دوم که یک روش مرحله‌ای و گام به گام است، زاویه شروع شکست در هر مرحله متناسب با معیار حداکثر تنش محیطی محاسبه می‌شود و ترکی در این راستا به قطعه اضافه می‌گردد. نتایج حاصل از تخمین مسیر رشد شکست توسط این دو روش، با نتایج حاصل از نمونه‌های آزمایشگاهی گرافیت مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند. نتایج ارزیابی‌ها نشان می‌دهد که اولاً هر دو روش قادر به تخمین مناسب از مسیر گسترش ترک در قطعات گرافیتی هستند. ثانیاً، روش گام به گام که متکی بر مفاهیم معیار بیشینه تنش محیطی است، می‌تواند تخمین دقیق‌تری از زاویه شروع شکست نسبت به روش المان محدود توسعه یافته ارائه کند.

## Investigation of fracture trajectory in blunt V-notched specimens under mixed mode I/II loading

Javad Akbardoost<sup>1\*</sup>, Seyed Mohammad Hosein Mohajerani<sup>1</sup>, Ali Reza Torabi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Karaj, Iran.

2- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 3197937551, Karaj, akbardoost@khu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 06 December 2015

Accepted 03 February 2016

Available Online 02 March 2016

#### Keywords:

Fracture path

Blunt V-notch

Fracture initiation angle

Extended finite element method

Incremental method

### ABSTRACT

In this paper, the fracture trajectory in blunt V-notched specimens under mixed mode loading is investigated by using two numerical approaches: 1) the extended finite element method (XFEM), 2) the incremental method. The first approach is an extended form of the finite element method in which the fracture takes place and grows according to the cohesive zone model. The second one is also an increment approach in which the fracture initiation angle for notched specimen is first determined according to the concept of the maximum tangential stress (MTS) criterion. Afterward, a small crack is added to the notched specimen along the fracture direction and then a new cracked specimen is generated. In the next step, the fracture initiation angle is calculated from MTS criterion and another small crack is again added to the cracked specimen. These steps are continued until the crack reaches to the back boundary. To evaluate these methods, the fracture paths of the rounded-tip V-notched Brazilian disk (RV-BD) specimens under mixed mode loading are predicted by both XFEM and incremental method. It is shown that the incremental method can provide estimates more accurately than XFEM for the fracture initiation angle of the notched samples. It is also demonstrated that both methods can predict the fracture trajectory in good agreement with the experimental results.

### 1- مقدمه

لذا ممکن است قطعه پیش از رسیدن به بار نامی خود بشکند؛ بنابراین لازم است تا شکست قطعات شیاردار مورد توجه و بررسی قرار گیرد. به طور کلی، در مطالعه شیارها می‌توان چهار گام کلی را طی نمود؛ نخست به تعیین حوزه تنش اطراف شیارها پرداخت. به عنوان مثال ویلیامز [1] روابط حوزه تنش در شیارهای V شکل نوک تیز را در قالب یک سری توانی ارائه کرد. با توجه به اینکه تمرکز تنش در اطراف شیارهای V شکل

شیارها یکی از الزامات طراحی هستند که در طراحی مهندسی برخی از تجهیزات و قطعات صنعتی، وجود دارند. با وجود ترک که بصورت ناخواسته در قطعه بوجود می‌آید و رشد آن سبب شکست قطعه می‌شود، عموماً شیارها با توجه به اهداف معینی در قطعات طراحی می‌شوند. با توجه به تمرکز تنش در نوک شیارها، این نقاط مکان مستعدی برای جوانه‌زنی و رشد ترک می‌باشد و

Please cite this article using:

J. Akbardoost, S. M. H. Mohajerani, A. R. Torabi, Investigation of fracture trajectory in blunt V-notched specimens under mixed mode I/II loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 161-172, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

J. Akbardoost, S. M. H. Mohajerani, A. R. Torabi, Investigation of fracture trajectory in blunt V-notched specimens under mixed mode I/II loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 161-172, 2016 (in Persian)

نتایج آن به کمک انجام آزمایش‌های شکست ارزشیابی شده اند، از مهمترین آن‌ها می‌توان به معیار گومز و الیسز [24] اشاره نمود. اخیراً شکست ترد در شیارهای V شکل نوک گرد تحت بارگذاری مود I خالص توسط آیت‌اللهی و ترابی [25] نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

اما در حالت بارگذاری مود ترکیبی I/II، تعداد معیارهایی که مطرح شده است محدود می‌باشد. از جمله این معیارها می‌توان به معیار ارائه شده توسط دان و همکارانش [26] اشاره کرد که تعمیمی از معیار آنها در حالت مود خالص I بوده است. معیار دیگری که در این زمینه مطرح شده است معیار سورین و لوکازویچ [14] می‌باشد؛ این معیار نیز قادر به تخمین شکست در شرایط بارگذاری نزدیک به مود II خالص نمی‌باشد. از مهمترین معیارهایی که ارائه شده است می‌توان به معیار لگیلون و یوسیباش [27]، معیارهای یوسیباش و همکارانش [28,29] اشاره کرد که قادر است دامنه وسیعتری از نسبت ترکیب مودها را زیر پوشش قرار دهد. یوسیباش و همکارانش در سال 2007 با تعمیم معیار خود با نام  $GSED^4$  [30]، معیاری را ارائه دادند که قادر است در محدوده نسبت ترکیب مودهای بالا (مود II غالب) نیز شکست را پیش بینی کند. اخیراً معیار دیگری بر مبنای ماکزیمم تنش محیطی، توسط آیت‌اللهی و همکارانش [31] ارائه شده است که قادر است طیف کاملی از ترکیب مودها را پوشش دهد. از دیگر تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌توان به تحقیقات چن [12] و اوزاکی و چن [32] اشاره نمود که به تعیین چقرمگی شکست شیارهای V شکل با استفاده از معیارهای مختلف پرداختند.

گام چهارم، تخمین مسیر رشد شکست پس از رسیدن به شرایط شکست می‌باشد. پیش بینی مسیر رشد ترک، نقش مهمی در تخمین شکل نهایی قطعات و سازه‌های شکسته شده دارد. بعنوان مثال، تخمین مسیر گسترش ترک می‌تواند به مهندسی هوایی کمک کند تا روش‌های جلوگیری از ترک همانند سوراخکاری را بطور مناسب تر و مطلوب تری بکار گیرند. در برخی موارد، شکست قطعات در راستاها و شکل‌های مناسب باعث کاهش هزینه‌ها و سهولت در انجام پروژه‌های صنعتی می‌شود. در برخی موارد دیگر، باید طراحان از شکست قطعات در راستاهای نامناسب جلوگیری کنند تا از خسارت‌های جبران ناپذیر بعدی جلوگیری شود. در نتیجه با آگاهی از مسیر رشد شکست، می‌توان قطعات و سازه‌ها را با ایمنی بیشتری طراحی نمود و به سؤالاتی از قبیل شرایط بارگذاری و کارکرد اولیه سازه‌های در معرض تخریب، پاسخ مناسبی ارائه کرد.

باوجود اهمیت ویژه‌ای که تخمین مسیر گسترش ترک در قطعات شیاردار دارد، تاکنون تحقیقات زیادی در این زمینه صورت نگرفته است و عموماً فقط به بیان زاویه شروع شکست بسنده شده است و یا توسط آزمایش‌هایی مسیر گسترش ترک را نشان داده‌اند. بنابراین در این مقاله، به بررسی و بیان روش‌های عددی برای تخمین مسیر رشد و گسترش شکست در قطعات شیاردار پرداخته می‌شود. در این راستا از دو روش عددی المان محدود توسعه یافته<sup>5</sup> و یک روش گام به گام استفاده می‌شود. روش نخست روشی بر مبنای المان محدود است که در تابع شکل هر المان یک تابع تخریب تعریف می‌شود. عموماً در روش المان محدود توسعه یافته، از تابع تخریب مربوط به مدل ناحیه چسبناک<sup>6</sup> استفاده می‌گردد. روش دوم نیز یک روش عددی و چند مرحله‌ای است که در هر مرحله زاویه شروع شکست توسط معیارهای شکست محاسبه شده و ترکی در راستای محاسبه شده، به قطعه اضافه

نوک تیز بسیار زیاد است و احتمال شکست آن‌ها تحت اعمال بار زیاد است، به منظور کاهش تمرکز تنش و در نتیجه افزایش مقاومت این قطعات در برابر شکست ترد، معمولاً در طراحی شیارهای V شکل، نوک آن را گرد می‌کنند. در واقع در کاربردهای عملی، بیشتر از شیارهای V شکل نوک گرد استفاده می‌شود. در این زمینه نیز روابط حوزه تنش در اطراف شیار V شکل نوک گرد، توسط لازارین و تووو استخراج شده است [2]. این روابط به دلیل آن که شرایط فیزیکی حاکم بر مسأله را فقط در ناحیه محدودی از اطراف نوک شیار ارضا می‌کردند، حل دقیقی نبوده و یک حل تقریبی به شمار می‌روند. محاسبات المان محدود نشان می‌داد که هر چه زاویه دهانه شیار بزرگتر می‌شود، دقت این روابط نیز کاهش می‌یابد. اصلاح این روابط و افزایش دقت آن در محدوده وسیعی از زوایای دهانه شیار تا چندین سال مورد توجه محققان بود تا اینکه روابط دقیق تری توسط فیلیپی و همکارانش [3] در سال 2002 به شکل مدرن و در قالب یک فرمول بندی تقریبی ارائه می‌شود.

در گام دوم، بدست آوردن ضرایب شدت تنش شیارها، که از الزامات کاربرد معیارهای شکست شیارها می‌باشند، مورد توجه قرار گرفته است. نکته اساسی در اکثر معیارهای شکست، محاسبه ضرایب شدت تنش شیار برای قطعات مختلف می‌باشد که این امر به سه طریق قابل انجام است: 1) روش تحلیلی، 2) روش تجربی، 3) روش عددی. به دلیل ناتوانی روش‌های تحلیلی در محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها در هندسه‌ها و بارگذاری‌های پیچیده، روش‌های تجربی و عددی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند. در زمینه محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها با استفاده از روش‌های تجربی، می‌توان به روش‌های فوتوالاستیسیته [4]، روش کاستیک<sup>1</sup> [5]، روش  $CGS^2$  [6]، روش تداخل سنجی هولوگرافی، روش برش نگاری دیجیتالی [7]، روش برهم نگاری دیجیتالی [8] و روش استفاده از کرنش‌سنج‌ها [9] اشاره کرد.

از روش‌های عددی بکار گرفته شده در زمینه محاسبه ضرایب شدت تنش شیارها، می‌توان به روش تجمع مرزی<sup>3</sup> توسط گراس و مندلسون [10]، روش استفاده از انتگرال مستقل از مسیر H و روش اجزاء محدود توسط اتکینسون [11]، روش نیروی حجمی توسط چن [12]، روش استفاده از انتگرال مستقل از مسیر H و روش اجزاء مرزی توسط اشتراندربرگ [13] و سورین [14]، روش زاپالورتو و همکارانش [15] که با استفاده از حل عددی ضرایب شدت تنش را برای شیارهای V و U شکل با شعاع‌های نوک شیار متفاوت، محاسبه کردند، اشاره نمود.

گام سوم در بررسی شیارها، بکار بردن معیاری مناسب برای تحلیل شرایط شکست شیارها می‌باشد. بعد از اینکه ویلیامز روابطی برای محاسبه میدان تنش در همسایگی شیار نوک تیز مطرح کرد، تا کنون معیارهای گوناگونی مطرح شده است که اکثراً مربوط به بارگذاری مود I خالص می‌باشد. از جمله این معیارها می‌توان به معیار تنش متوسط [16]، معیار ضریب شدت تنش بحرانی [17]، معیار مطرح شده توسط لازارین و زامباردی [18]، معیار لگیلون [19]، معیار اشتراندربرگ [20]، معیارهای گومز و الیسز [21,22] و معیار لیوری [23] اشاره نمود. اساس کار اکثر این معیارها، ارائه ضریب شدت تنش بحرانی برای شیار بوده است؛ یعنی در صورتی که ضریب شدت تنش تعیین شده در این معیارها به مقدار بحرانی خود برسد، شکست اتفاق می‌افتد. در رابطه با شیارهای V شکل نوک گرد نیز در سال‌های اخیر تعدادی معیار برای پیش بینی چقرمگی شکست تحت بارگذاری مود I ارائه شده است و

<sup>4</sup> Generalized strain energy density

<sup>5</sup> Extended finite element method (XFEM)

<sup>6</sup> Cohesive zone model

<sup>1</sup> Caustics

<sup>2</sup> Coherent Gradient Sensing

<sup>3</sup> Boundary Collocation

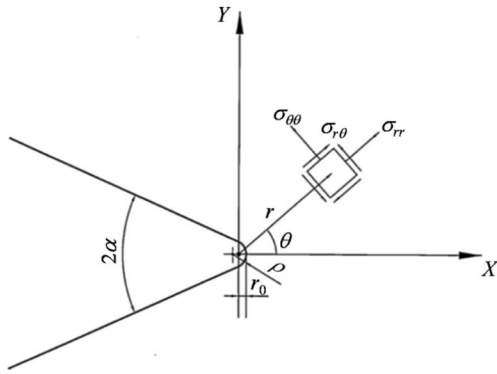


Fig. 1 Round-tip V-notch and its polar coordinate system.

شکل 1 هندسه شیار با نوک گرد در دستگاه قطبی.

2-2- زاویه شروع شکست در معیار RV-MTS

برای بررسی رفتار شکست ترد در قطعات دارای شیار V شکل نوک گرد تحت اعمال بارهای ترکیبی I/II، تاکنون معیارهای اندکی ارائه شده است که بعضاً فقط قابلیت پیش بینی شکست در شیارهای V شکل با شعاع‌های نوک شیار خیلی کوچک را دارند [34].

جهت تعمیم و گسترش معیار بیشینه تنش محیطی برای شیارهای V شکل نوک گرد، معیاری به نام RV-MTS توسط آیت‌اللهی و ترابی [35] مطرح شده است و نتایج موفقی هم در حالت بارگذاری ترکیبی کششی - برشی (I/II) به همراه داشت. بر طبق این معیار، شکست در قطعه شیاردار زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار تنش محیطی در فاصله بحرانی  $r_{c,v}$  از نوک شیار، به مقدار بحرانی خود  $(\sigma_{\theta\theta})_c$  برسد که  $r_{c,v}$  جزء خواص ماده بوده و مستقل از هندسه نمونه شیاردار و شرایط بارگذاری می‌باشند. پارامتر  $(\sigma_{\theta\theta})_c$  برای مواد ترد و شبه ترد عموماً برابر با استحکام نهایی قطعه در حالت کشش ( $\sigma_U$ ) در نظر گرفته می‌شود. ایشان رابطه (2) را که برای تنش‌های اطراف شیار بیان شده بود، به صورت رابطه (3) ساده‌سازی و بیان نموده‌اند [35]:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^S}} [L(R\cos S\theta + \chi_{b1}S\cos R\theta)] + \frac{K_I^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^S}} \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^P M(\chi_{a1}V\cos W\theta + \chi_{c1}\cos V\theta) \right] + \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^U}} [N(T\sin U\theta + \chi_{b2}T\sin T\theta)] + \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^U}} \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^Q O(\chi_{a2}X\sin Y\theta + \chi_{c2}\sin X\theta) \right] \quad (3)$$

که پارامترهای این رابطه در جدول الف 1 در پیوست الف به طور مبسوط بیان شده است.

در حالت بارگذاری مرکب، در ابتدا باید زاویه شروع شکست را محاسبه کرد؛ برای این منظور می‌بایست مشتق اول تنش محیطی نسبت به زاویه  $\theta$  صفر شود و همچنین مشتق دوم آن نسبت به زاویه  $\theta$  منفی گردد تا حداکثر مقدار تنش محیطی حاصل شود.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta^2} < 0 \quad (4)$$

با جاگذاری رابطه (3) در رابطه (4) و با جاگذاری  $r_{c,v}$  به جای  $r$  و جاگذاری  $\theta_0$  به جای  $\theta$  در رابطه (3) می‌توان به رابطه (5) دست پیدا کرد که طبق این رابطه زاویه شروع شکست در شیار V شکل نوک گرد  $(\theta_0)$  برحسب ضرایب شدت تنش شیار، بدست می‌آید.

می‌گردد. با توجه به پر کاربرد بودن شیارهای V شکل نوک گرد، تمرکز اصلی این مقاله نیز در تخمین مسیر رشد شکست این دسته از شیارها می‌باشد. با توجه به اینکه در روش دوم باید شناختی از حوزه تنش اطراف شیارها داشت، در ابتدا به بررسی حوزه تنش الاستیک در اطراف شیار V شکل نوک گرد پرداخته می‌شود. برای ارزیابی هر دو روش، از نتایج آزمایشگاهی مربوط به قطعه دیسک برزلی با شیار نوک گرد مرکزی از جنس گرافیت استفاده می‌گردد. در انتها نشان داده خواهد شد که هر دو روش می‌توانند تخمین مناسبی از مسیر گسترش ترک در قطعات گرافیتی داشته باشند. همچنین نشان داده خواهد شد که روش گام به گام علی‌رغم سادگی در اجرا، می‌تواند تخمین دقیق‌تری نسبت به روش XFEM از زاویه شروع شکست داشته باشد.

2- شیارهای V شکل نوک گرد

با توجه به اینکه در این پژوهش، مسیر رشد شکست در یکی از پر کاربردترین نوع شیارها که شیارهای V شکل نوک گرد می‌باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد، لازم است که به معرفی این نوع شیارها، حوزه تنش اطراف آن‌ها، معیار مناسب شکست برای آن‌ها و زاویه شروع شکست در شیار پرداخته شود.

1-2- میدان تنش اطراف شیارهای V شکل نوک گرد

همان‌طور که ذکر شد میدان تنش اطراف شیار V شکل نوک گرد توسط فیلیپی [3] استخراج شده است. روابط تنش ارائه شده به گونه‌ای است که به ازای شعاع نوک شیار صفر ( $\rho = 0 \text{ mm}$ )، میدان تنش منطبق بر حل ویلیامز [1] برای شیارهای نوک تیز می‌باشد. در شکل 1 هندسه شیار V شکل نوک گرد در دستگاه مختصات قطبی نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل 1 مشهود است، زاویه  $\theta$  که متعلق به زاویه دلخواه تنش اعمالی به شیار می‌باشد، از نیم‌ساز اعمالی به شعاع گردشگی نوک شیار V شکل با نوک گرد محاسبه می‌شود. در ضمن  $r_0$  فاصله نوک شیار از مبدأ مختصات قطبی است نه از انتهای شیار، و مقدار آن از معادله (1) معین می‌شود. در رابطه (1)،  $\alpha_2$  زاویه دهانه ناچ و  $\rho$  شعاع گردشگی نوک شیار است.

$$r_0 = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi - 2\alpha} \rho \quad (1)$$

حوزه میدان تنش در اطراف شیار نوک گرد، تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II را می‌توان با استفاده از حل فیلیپی و همکارانش [3] بصورت رابطه (2) نوشت.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_1}}} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta}(\theta) \\ m_{rr}(\theta) \\ m_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^I + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} n_{\theta\theta}(\theta) \\ n_{rr}(\theta) \\ n_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^I + \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_2}}} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta}(\theta) \\ m_{rr}(\theta) \\ m_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{II} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} \begin{Bmatrix} n_{\theta\theta}(\theta) \\ n_{rr}(\theta) \\ n_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{II} \quad (2)$$

در این رابطه  $K_{II}^{V,\rho}$  و  $K_I^{V,\rho}$  ضرایب شدت تنش شیار در حالت مودهای I و II خالص و توابع  $m_{ij}$  و  $n_{ij}$  توابعی بر حسب زاویه  $\theta$  هستند که مقادیر آن‌ها از روابط ذکر شده در پیوست الف، بدست خواهد آمد [33]. همچنین  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$  و  $\mu_2$  مقادیر ویژه هستند که مقدار عددی آن‌ها وابسته به زاویه دهانه شیار می‌باشد [33]. برای محاسبه ضرایب شدت تنش شیار می‌توان از حوزه‌ی تنش اطراف شیار که به کمک تحلیل اجزا محدود به دست آمده‌اند، استفاده نمود. در اینجا به دلیل اختصار از ذکر جزئیات صرف نظر شده و می‌توان برای توضیحات بیشتر به مرجع [33] مراجعه نمود.

شروع به رشد می کند.

$$f(0) = f_t \quad (8)$$

انرژی شکست چسبیده عبارت است از انرژی خارجی مورد نیاز برای ایجاد یک صفحه ترک چسبیده که برابر است با مساحت زیر منحنی نرم شوندگی، که در رابطه (9) بیان شده است که در این رابطه  $w_c$  بازشدگی بحرانی ترک می باشد.

$$G_f = \int_0^{w_c} f(w) dw \quad (9)$$

برای تابع نرم شوندگی تا به حال روابط مختلفی همچون رابطه خطی [40]، رابطه دو خطی [41] و نمایی [42] ارائه شده است. برای مواد گرافیت مورد نظر که رفتار ترد از خود نشان می دهد، بهتر است از رابطه خطی استفاده شود.

### 3-2- روش گام به گام

برای درک بهتر از این روش، در ابتدا شماتیکی از روند محاسباتی آن در شکل 2 به نمایش گذاشته شده است. همان طور که از اسم این روش پیداست، روش گام به گام روشی مرحله به مرحله است که در هر مرحله زاویه شروع شکست با استفاده از معیارهای متداول مکانیک شکست همانند بیشینه تنش محیطی، کمینه نرخ انرژی کرنشی و غیره محاسبه می شود. پس از بدست آوردن زاویه شروع شکست در هر مرحله، یک ترک کوچک به قطعه در راستای محاسبه شده اضافه می شود و یک قطعه با ترک جدید بدست می آید. حال زاویه شروع شکست برای قطعه با طول ترک جدید محاسبه می شود. این روند تا رسیدن ترک به مرزهای خارجی قطعه ادامه پیدا می کند. هر چقدر طول ترک های اضافه شده کوچکتر باشد، مسیر رشد ترک با دقت بیشتری تخمین زده خواهد شد. باید توجه داشت که در مرحله نخست محاسبه زاویه شروع شکست از روابط مربوط به محاسبه زاویه شروع شکست شیارها استفاده می شود (رابطه 5) و در مراحل بعدی تا انتهای شکست قطعه، از روابط مربوط به قطعات ترک دار استفاده می شود.

در این پژوهش زاویه شروع شکست برای قطعات ترک دار توسط معیار کلاسیک بیشینه تنش محیطی، محاسبه می شود. نحوه محاسبه زاویه شروع ترک در معیار MTS با توجه به رابطه (10) توسط سیه و اردگان [43] ارائه گردیده است.

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (10)$$

در روش گام به گام پارامترهای مربوط به ضرایب جملات منفرد  $K_I^{V,p}$  و

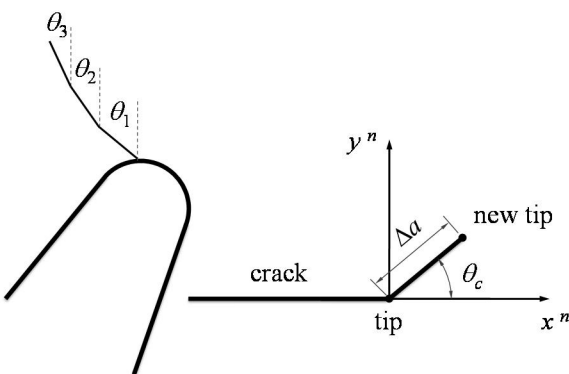


Fig. 2 Schematic of incremental method steps.

شکل 2 شماتیکی از مراحل روش گام به گام.

$$\begin{aligned} & \frac{K_I^{V,p}}{\sqrt{2\pi r_{c,v}^S}} [L(-RS \sin S \theta_0 - RS \chi_{b1} \sin R \theta_0)] \\ & + \frac{K_I^{V,p}}{\sqrt{2\pi r_{c,v}^S}} \left[ \left( \frac{r_{c,v}}{r_0} \right)^p M(-\chi_{a1} V W \sin W \theta_0 - V \chi_{c1} \sin V \theta_0) \right] \\ & + \frac{K_{II}^{V,p}}{\sqrt{2\pi r_{c,v}^U}} [N(TU \cos U \theta_0 + T^2 \chi_{b2} \cos T \theta_0)] \\ & + \frac{K_{II}^{V,p}}{\sqrt{2\pi r_{c,v}^U}} \left[ \left( \frac{r_{c,v}}{r_0} \right)^q O(Y \chi_{a2} X \cos Y \theta_0 - X \chi_{c2} \cos X \theta_0) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

برای محاسبه مقدار شعاع بحرانی در رابطه (5) می توان از روابط مربوط به شکست در حالت بارگذاری کشش خالص بهره برد. آیت الهی و ترابی [35] با استفاده از همین نکته، رابطه (6) را برای محاسبه فاصله بحرانی شیارهای V شکل نوک گرد، ارائه کرده اند.

$$r_{c,v} = \left[ \frac{K_{Ic}^{V,p} \left[ L(R + \chi_{b1} S) + \left( \frac{r_{c,v}}{r_0} \right)^p M(\chi_{a1} V + \chi_{c1}) \right]^{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\pi} (\sigma_{\theta\theta})_c} \right]^{\frac{1}{s}} \quad (6)$$

### 3-3 روش های مورد استفاده برای پیش بینی مسیر رشد و گسترش شکست

همان طور که پیش تر مطرح شد، مطالعات انجام شده بیشتر به بیان شرایط و زاویه شروع شکست بسنده کرده اند و در مورد تخمین مسیر گسترش ترک در قطعات شیاردار به صورت عددی تحقیقاتی وجود ندارد، لذا هدف از این بخش بررسی روش المان محدود توسعه یافته و یک روش گام به گام می باشد. روش گام به گام، پیش تر برای قطعات ترک دار استفاده شده است و در این جا نیز برای تخمین مسیر رشد شکست قطعات شیاردار مورد استفاده قرار می گیرد.

#### 3-1- روش المان محدود توسعه یافته

یکی از روش های عددی که می توان از آن برای تخمین شرایط شکست و همچنین مسیر گسترش استفاده نمود، روش المان محدود توسعه یافته یا XFEM می باشد. این روش، اولین بار توسط بلیتشکو و بلک [36] مطرح گردید و تاکنون در مسایل زیادی از حوزه مکانیک شکست مورد استفاده قرار گرفته است [37-38]. در این روش، تخریب مادی به صورت یک تابع غنی شده برای هر المان تعریف می شود و زمانیکه ماده دچار تخریب موضعی می شود، تابع غنی سازی باعث حذف المان از سیستم محاسباتی مسأله می شود. این نکته یکی از نقاط قوت روش XFEM بوده و می تواند شرایط شکست و تخریب قطعات مختلف (چه دارای ناپیوستگی همانند شیار، ترک و حفره باشند و یا نباشند) را پیش بینی کند.

برای آغاز و ادامه رشد ترک باید یک معیار یا مدل تخریب برای المانها تعریف نمود. در روش XFEM معمولاً مدل ناحیه چسبناک برای معیار تخریب استفاده می شود. این مدل اولین بار توسط بارنبتل [39] معرفی و عرضه گردید. به صورت کلی در بسیاری از مقالات علمی رفتار ترک چسبناک بصورت رابطه (7) بیان می شود.

$$\sigma = f(w) \quad (7)$$

که در این رابطه  $\sigma$  تنش چسبیده،  $w$  جابجایی عمودی لبه های ترک مجازی و  $f(w)$  تابع نرم شوندگی می باشد. تابع نرم شوندگی  $f(w)$ ، به عنوان خاصیت ماده در نظر گرفته می شود. دو خاصیت تابع نرم شوندگی که می توان این تابع را از روی آن ها پیدا کرد عبارتند از: مقاومت کششی  $f_t$  و انرژی شکست  $G_f$ . مقاومت کششی عبارت است از تنشی که در آن ترک ایجاد و

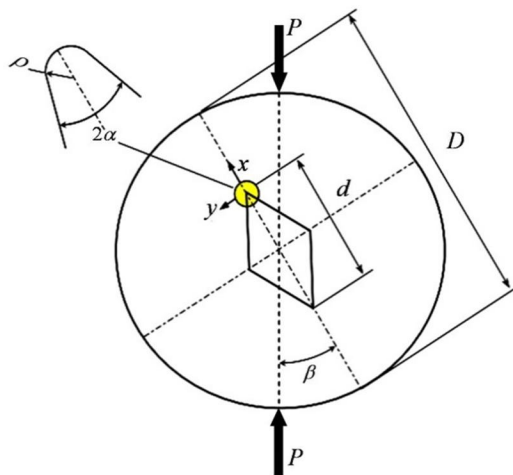


Fig. 3 The schematic of the RV-BD specimen.

شکل 3 نمای نمونه دیسک برزلی دارای شیار V شکل (RV-BD).

جدول 1 خواص فیزیکی و مکانیکی گرافیت مورد آزمایش [47].

Table 1 The physical and mechanical properties of tested graphite [47].

مقدار	خصوصیت
1710	چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )
27.5	میانگین استحکام کششی (MPa)
8.05	مدول یانگ (GPa)
1	چقرمگی شکست در حالت کرنش صفحه ای ( $\text{MPa m}^{0.5}$ ) ( $K_{Ic}$ )
0.2	ضریب پواسون ( $\nu$ )

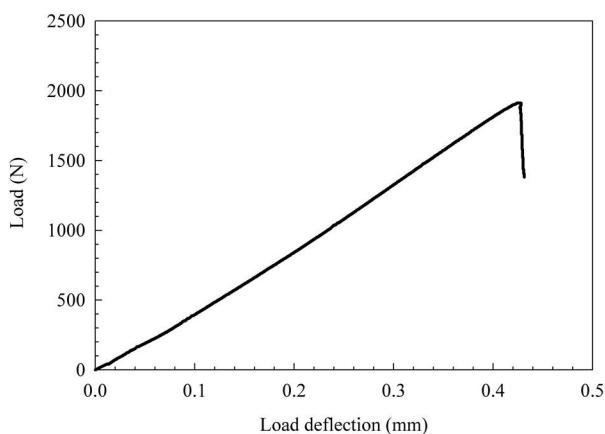


Fig. 4 A sample of load-displacement curve obtained from V-notched graphite specimen [47].

شکل 4 نمونه ای از منحنی بار-جابجایی محل اعمال بار و رفتار خطی گرافیت در نمونه شیار V شکل نوک گرد [47].

جدول 2 ابعاد و مقدار بار شکست برای قطعه گرافیتی RV-BD [47].

Table 2 The specimen dimensions and the mean fracture loads for the RV-BD graphite samples [47].

بار شکست ( $P_f$ ) (N)	راستای اعمال بار ( $\beta$ )	شعاع گردشگی (mm)	زاویه دهانه شیار ( $2\rho$ )	مود بارگذاری
2023	0°	1	30°	I
2085	10°	1	30°	I/II
2190	25°	1	30°	II
1439	0°	1	60°	I
1654	15°	1	60°	I/II
2040	30°	1	60°	II
909	0°	1	90°	I
1153	15°	1	90°	I/II
2396	35°	1	90°	II

$K_{II}^{V,p}$  برای شیارهای V شکل نوک گرد) در مرحله نخست و همچنین ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  مربوط به مراحل بعدی که قطعه دارای ترک می‌شود، باید متناسب با هر قطعه محاسبه شود. با توجه به هندسه پیچیده قطعات و شرایط بارگذاری آن‌ها، بهترین روش برای محاسبه آن‌ها روش‌های عددی و استفاده از نرم‌افزارهای المان محدود می‌باشد.

نکته نهایی در مورد روش گام به گام، دقت روابط محاسبه زاویه شروع شکست می‌باشد. در برخی مواد همانند گرافیت، سرامیک و غیره که تردی بیشتری دارند روابط کلاسیک زاویه شروع شکست، دقت مناسبی دارند اما در موادی همچون سنگ و بتن که شبه ترد می‌باشند، استفاده از روابط کلاسیک سبب بوجود آمدن خطا در محاسبه زاویه شروع شکست می‌شود [44].

به دلیل سادگی، این روش بارها برای تخمین مسیر رشد ترک مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال، این روش توسط علیها و رضایی [45] برای به دست آوردن مسیر رشد ترک در نمونه BD از جنس سنگ استفاده شده است. همچنین علیها و همکاران [44] از این روش برای پیش بینی مسیر رشد ترک در نمونه SCB<sup>1</sup> استفاده کرده‌اند. زیداکسی و همکاران [46] روش گام به گام را بر روی معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی، پیاده سازی کرده و مسیر رشد ترک در نمونه خمش سه نقطه‌ای به دست آورده‌اند.

#### 4- بررسی نتایج آزمایشگاهی

برای تحلیل آزمایشگاهی بر روی نمونه‌های دارای شیار V شکل نوک گرد، توسط آیت الهی و ترابی [47] و همچنین توسط سندان<sup>2</sup> و ترابی [48] تحقیقاتی مبسوطی انجام پذیرفته است.

به منظور ارزیابی و بررسی دو روش بیان شده، از نتایج آزمایشگاهی که توسط آیت الهی و ترابی گزارش شده است، استفاده می‌گردد. نمونه‌های مورد استفاده توسط ایشان، قطعه دیسکی شکل با شیار نوک گرد که در مرکز دیسک قرار دارد، می‌باشد. شکل 3 شماتیکی از این قطعه که اصطلاحاً به آن قطعه RV-BD<sup>3</sup> گفته می‌شود، را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود بار به شکل متمرکز و فشاری از بالا و پایین به نمونه اعمال می‌شود. زوایای دهانه شیار و شعاع نوک شیار می‌توانند متفاوت باشد. برای هر زاویه دهانه شیار مشخص ( $2\alpha$ ) مقدار پارامتر  $K_{IC}^{V,p}$  به کمک آزمون شکست مود خالص I (زاویه بارگذاری  $\beta = 0^\circ$ )، به علت وجود تقارن در بارگذاری و هندسه بدست می‌آید. با تغییر زاویه نیمساز شیار نسبت به راستای بارگذاری ( $\beta$ ) به تدریج آثار مود II خالص ظاهر می‌شود و در این بین بارگذاری بصورت ترکیبی I/II (کششی - برشی) می‌باشد.

قطعات مورد آزمایش از جنس گرافیت با مشخصات جدول 1 ساخته و مورد آزمایش قرار گرفته‌اند [47]. گرافیت ماده‌ای ترد می‌باشد و رابطه بین نیرو و جابجایی در آن از لحظه شروع اعمال بار تا لحظه شکست خطی است، بنابراین می‌توان برای تحلیل و بررسی آن از روابط مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM) استفاده نمود. نمودار نیرو-جابجایی محل اعمال بار برای یک قطعه RV-BD در نمودار شکل 4 نشان داده شده است. ابعاد هندسی نمونه گرافیتی RV-BD و بار شکست آن مطابق مرجع [47]، در جدول 2 بیان شده است. نمونه، دارای قطر (D) 60 mm، عمق شیار ( $d/2$ ) 15 mm و ضخامت 8 mm است.

در قسمت بعد، با استفاده از دو روش المان محدود توسعه یافته و گام به گام سعی خواهد شد تا مسیر رشد شکست نمونه‌های گرافیتی تخمین زده شود.

<sup>1</sup> Semi-circular bend specimen

<sup>2</sup> Cendon

<sup>3</sup> Rounded V-shape notch Brazilian Disk

### 5- بررسی نتایج

همان‌طور که گفته شد، در این پژوهش مسیر رشد ترک در قطعات شیاردار گرافیتی RV-BD با زوایای دهانه شیار مختلف، با استفاده از دو روش XFEM و گام به گام تخمین زده می‌شود.

#### 1-5- شبیه‌سازی توسط روش XFEM

هدف از این قسمت، تخمین مسیر گسترش ترک در قطعات RV-BD به کمک روش XFEM می‌باشد. با توجه به اینکه، نرم‌افزار آباکوس این روش را به خوبی در خود جای داده است و می‌تواند تحلیل‌های مناسبی را ارائه دهد، در این تحقیق نیز از ماژول‌های نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. برای بررسی مسیر رشد شکست توسط روش XFEM نیاز به یک معیار تخریب می‌باشد، که در این پژوهش از معیار ناحیه چسبناک استفاده می‌شود. در مدل ناحیه چسبناک، نمودار کشش-جدایش سه پارامتر اساسی دارد که برای تحلیل، این سه پارامتر باید استخراج شوند. این سه پارامتر اصلی عبارتند از: 1) حداکثر تنش ( $\sigma_{max}$ ) که نقطه اوج یا قله نمودار کشش-جدایش می‌باشد؛ 2) سطح زیر نمودار کشش-جدایش که معرف انرژی کرنشی شکست ( $G_f$ ) می‌باشد؛ 3) تابع نرم شوندگی که با توجه به رفتار خطی گرافیت، برای تابع نرم شوندگی از یک تابع درجه یک (تابع خطی) استفاده می‌شود.

با توجه به خاصیت ریز ساختاری گرافیت، پیشنهاد شده است که مقدار  $\sigma_{max}$  برابر با استحکام کششی ماده در نظر گرفته شود [49]. پارامتر دوم مورد نیاز، انرژی شکست است. انرژی شکست را می‌توان با توجه به مقدار چقرمگی شکست و رابطه اروین که در رابطه (11) ذکر شده است محاسبه نمود [49].

$$G = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \rightarrow \begin{cases} E' = E & \text{For Plane stress} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{For Plane strain} \end{cases} \quad (11)$$

با توجه به مقادیر جدول 1 پارامترهای مورد نیاز در مدل ناحیه چسبناک ( $G_f$  و  $\sigma_{max}$ ) برای گرافیت، محاسبه شده و در جدول 3 به نمایش گذاشته شده است. مدل مادی المان‌ها قبل از تخریب به صورت الاستیک خطی در نظر گرفته شده‌اند و مقادیر  $E$  و  $\nu$  که در این مدل مادی مورد نیاز هستند، در جدول 3 برای گرافیت مورد نظر بیان شده است.

برای شبکه‌بندی قطعات شیاردار از المان‌های CPS4R در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است که یک المان چهارضلعی 4 گرهی می‌باشد. دلیل انتخاب این نوع المان نیز مربوط به محدودیت‌های نرم‌افزار آباکوس است که مسایل مربوط به روش XFEM را با المان‌ها 4 گرهی حل می‌کند. همچنین شرایط مرزی در تحلیل‌های انجام شده به این صورت می‌باشد که نقطه‌ی پایینی قطعه (محل اتصال قطعه با فک پایینی دستگاه) در دو جهت X و Y، و نقطه‌ی بالایی قطعه تنها در جهت X مقید شده است. به منظور اعمال شرایط بارگذاری، یک جابجایی مشخص به نقطه بالایی قطعه وارد می‌شود. در انتها نیز نمودار تغییرات نیروی همان نقطه نسبت به جابجایی اعمال شده از نرم-افزار استخراج می‌گردد.

جدول 3 پارامترهای مورد نیاز جهت مدل مادی و مدل تخریب.

Table 3 The required parameters for cohesive zone model

$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$	$\sigma_{max}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$G_f$ (N/mm)
8050	0.2	27.5	0.125

معمولاً برای صحت‌سنجی نتایج شبیه‌سازی XFEM، نمودار نیرو-جابجایی محل اعمال نیرو استخراج شده از نرم‌افزار را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کرده و چنانچه هم‌خوانی بین دو نمودار، بخصوص در نقطه اوج نمودار که معرف بار شکست است، وجود داشته باشد، می‌توان گفت که شبیه‌سازی به درستی صورت گرفته است. در این تحقیق، به دلیل نبودن تمامی نمودارها در مرجع [47]، فقط مقدار بار شکست برای صحت‌سنجی مورد توجه قرار گرفته است. در جدول 4 مقادیر بار شکست برای حالت‌های مختلف که توسط XFEM به دست آمده‌اند با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. برای نمونه، در شکل 5 نمودار نیرو-جابجایی محل اعمال نیرو قطعات با زاویه شیار 60 درجه و در حالت‌های مختلف بارگذاری، نشان داده شده است.

#### 2-5- روش گام به گام

روش دوم برای تخمین مسیر رشد شکست، روش گام به گام می‌باشد. در

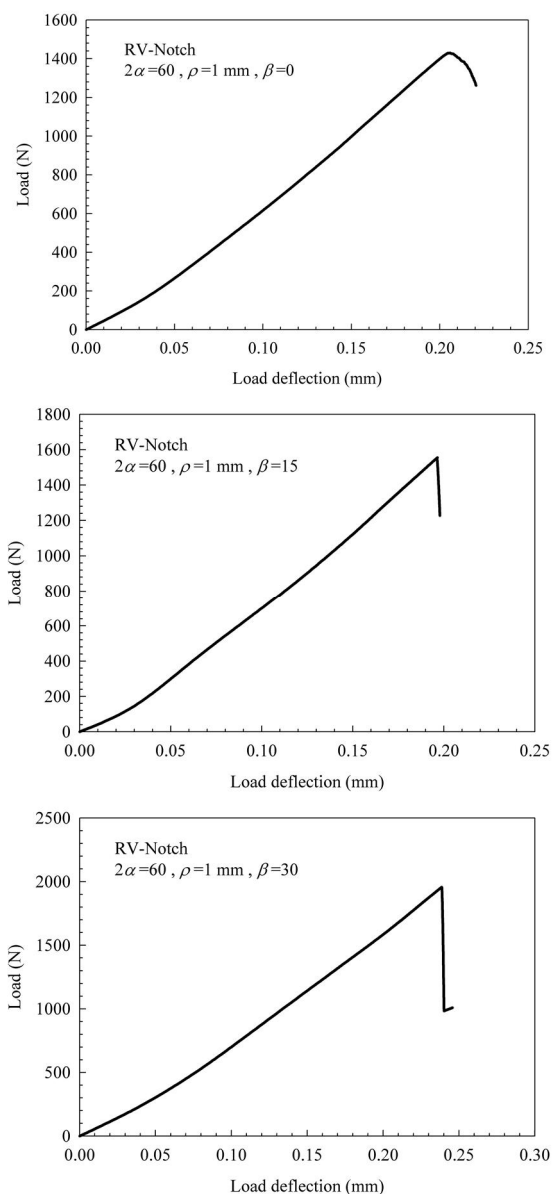


Fig. 5 The load-displacement of load point curves for RV-BD with  $2\alpha=60^\circ$  and different mode mixities obtained from XFEM.

شکل 5 نمودار نیرو-جابجایی محل اعمال نیرو شیار V شکل نوک گرد 60 درجه در حالات مختلف بارگذاری حاصل از روش XFEM.

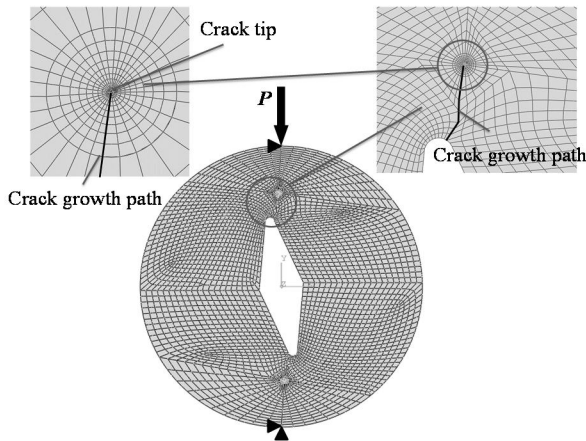


Fig. 6 The typical mesh pattern used for modeling the RV-BD specimens together with the crack tip mesh pattern.

شکل 6 شبکه بندی قطعی شیاردار به همراه المان ها نوک ترک.

جدول 5 ضرایب شدت تنش و زوایای شکست در هر مرحله برای قطعه RV-BD با شیار 90 درجه و زاویه بارگذاری 15 درجه.

Table 5 The stress intensity factors and crack initiation angles for RV-BD sample with  $2\alpha=90^\circ$  and  $\beta=15$  obtained in each increment.

$\theta_0$ degrees	$K_{II}$ (MPa $\cdot\sqrt{m}$ )	$K_I$ (MPa $\cdot\sqrt{m}$ )	شماره گام محاسباتی
-0.28	-0.0104	4.28	1
-7.6	0.29	4.98	2
-8.08	0.0238	0.33	3
15.7	-0.84	5.89	4
15.49	-0.89	6.35	5
-26.8	1.78	6.68	6
-4.3	0.29	7.92	7
7.7	-0.59	8.54	8
-5.81	0.48	9.44	9

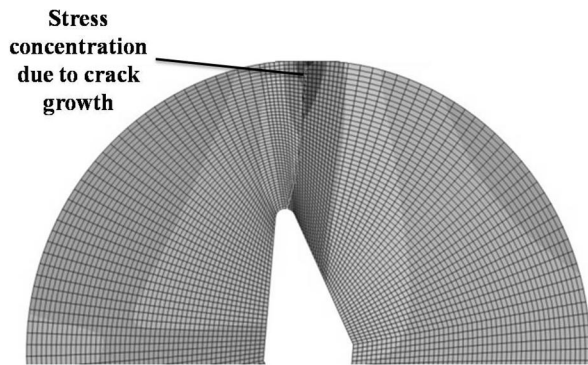


Fig. 7 The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=30^\circ$  under mixed mode loading ( $\beta=10^\circ$ ) obtained from XFEM.

شکل 7 مسیر گسترش ترک در شیار 30 درجه به روش XFEM در مود ترکیبی ( $\beta=10^\circ$ ).

شیارهای 30 درجه، تحت اعمال بارگذاری مود خالص (I)، مود مرکب (I/II) و مود خالص (II) دارند.

در شکل 9 نیز نمایی از قطعه RV-BD شبکه بندی شده دارای شیار 60 درجه در محیط آباکوس، به همراه مسیر گسترش ترک آن به روش المان محدود توسعه یافته، به نمایش گذاشته شده است.

در شکل 10 می توان مسیر شکست به روش های گام به گام و المان محدود توسعه یافته برای شیار 60 درجه را مشاهده و با مسیر شکست واقعی نمونه آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار داد. در این حالت نیز می توان بیان نمود که هر دو روش XFEM و گام به گام، به خوبی مسیر گسترش ترک را

جدول 4 مقایسه بار شکست حاصل از شبیه سازی با نتایج آزمایشگاهی

Table 4 Comparison of fracture loads obtained from XFEM and experiments

زاویه دهانه شیار ( $2\alpha$ )	شعاع گرد شدگی ( $\rho$ ) (mm)	زاویه اعمال بار ( $\beta$ )	میانگین بار شکست تست (N) [47]	بار شکست XFEM (N)	درصد خطا (%)
30°	1	0°	2023	1882	6.93
30°	1	10°	2085	1846	11.46
30°	1	25°	2190	1773	19.04
60°	1	0°	1439	1430	0.66
60°	1	15°	1654	1553	6.12
60°	1	30°	2040	1955	4.15
90°	1	0°	909	860	5.48
90°	1	15°	1153	1014	12.1
90°	1	35°	2396	2382	0.59

مرحله نخست در این روش برای هر قطعه شیاردار، باید زاویه شروع شکست شیار را از رابطه (5) محاسبه کرد.

آیت الهی و ترابی [47] برای نمونه آزمایش شده مقادیر زاویه شروع شکست را محاسبه نمودند که در تحقیق حاضر از مقادیر گزارش شده استفاده می شود؛ سپس یک ترک کوچک به اندازه 0.8 میلیمتر در راستای محاسبه شده به قطعه اضافه گردیده و قطعه شیاردار تبدیل به یک قطعه ترک دار می شود. در گام بعدی با استفاده از معیار MTS (رابطه 10)) زاویه شروع شکست محاسبه شده و یک ترک کوچک دیگر با همان اندازه 0.8 میلیمتر در راستای محاسبه شده به قطعه اضافه گردید. این روند تا شکست نهایی قطعه ادامه پیدا کرد. در هر مرحله ضرایب شدت تنش با استفاده از نرم افزار المان محدود آباکوس محاسبه شده است. در این راستا از المان های چهارضلعی 8 گرهی (CPS8) برای شبکه بندی قطعه استفاده شده است. همچنین، در نوک ترک با استفاده از المان های تکین<sup>1</sup>، شبکه بندی صورت گرفته است. شکل 6 نمونه ای از شبکه بندی قطعه و نوک ترک را نشان می دهد. شرایط مرزی در این حالت، همانند روش XFEM در دو نقطه بالا و پایین قطعه اعمال شده است. یک بار متمرکز نیز در نقطه ی بالایی قطعه و در راستای y به عنوان شرایط بارگذاری به قطعه اعمال شده است. شرایط مرزی و شرایط بارگذاری اعمالی، به طور شماتیک در شکل 6 نشان داده می شود. به عنوان یک نمونه از روند محاسباتی، ضرایب شدت تنش محاسبه شده، به همراه زوایای شکست برای قطعه RV-BD با شیار 90 درجه و زاویه بارگذاری 15 درجه در جدول 6 بیان شده است. همانطور که در جدول 6 مشاهده می شود، تمامی مقادیر مربوط به ضریب شدت تنش مود I ( $K_I$ ) مثبت می باشد و این بدان معنا است که لبه های ترک تحت کشش قرار دارند و از هم باز می شوند. بنابراین، تماسی بین لبه های ترک وجود ندارد و نیازی به تعریف ضرایب اصطکاک و ضرایب تماس نمی باشد.

### 3-5- بررسی مسیر گسترش ترک در شیار V شکل نوک گرد

نمایی از نحوه شبکه بندی و تخمین مسیر گسترش ترک شیار 30 درجه تحت اعمال بارگذاری مود ترکیبی، در شکل 7 نشان داده شده است. همچنین در شکل 8 مسیرهای شکست تخمین زده شده توسط دو روش گام به گام و XFEM در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، قابل مشاهده است. به دلیل اینکه در حالت مود I بارگذاری ترک در راستای نیمساز زاویه شیار رشد می کند، روش گام به گام برای آن بیان نشده است. همان طور که در این شکل مشاهده می شود، هر دو روش تخمین مناسبی از مسیر رشد شکست در

<sup>1</sup> singular collapse elements



محدود توسعه یافته برای شیار 90 درجه را مشاهده و با مسیر شکست واقعی نمونه آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار داد. در این حالت نیز تخمین خوبی از هر دو روش XFEM و گام به گام، برای مسیر شکست شیارهای 90 درجه نوک گرد، در هر سه حالت بارگذاری مود خالص (I)، مود ترکیبی (I/II) و مود خالص (II)، مشاهده می‌شود.

#### 4-5- بررسی زاویه شروع شکست در شیارهای V شکل نوک گرد

همان طور که در شکل‌های 6 تا 11 مشاهده می‌شود، روش XFEM شکست را از ریشه شیار شروع می‌کند و تا انتهای قطعه پیش می‌رود، بنابراین می‌تواند زاویه شروع شکست را بیان کند. قبلاً آیت الهی و ترابی [47] توانایی معیار RV-MTS در تخمین زاویه شروع شکست برای قطعات شیاردار V شکل نوک گرد را بیان کرده‌اند و نشان دادند که این معیار قادر است زاویه شروع شکست را به خوبی تخمین بزند. حال، سعی بر این است تا توانایی روش XFEM برای پیش بینی زاویه شروع شکست مورد بررسی قرار گیرد. در جدول 6 می‌توان زاویه شروع شکست در شیارهای V شکل نوک گرد را که به وسیله روش XFEM محاسبه شده است و همچنین مقایسه آن با نتایج تجربی را مشاهده کرد. همان طور که در این جدول مشاهده می‌شود، معیار RV-MTS می‌تواند دقت بهتری نسبت به روش XFEM برای زاویه شروع شکست داشته باشد.

#### 6- بحث و نتیجه‌گیری

در اغلب تحقیقاتی که تاکنون برای شکست قطعات شیاردار انجام شده است،

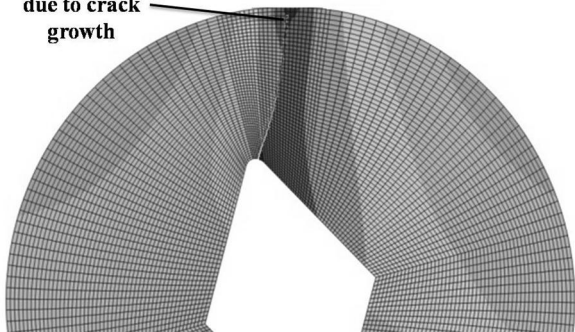
جدول 6 مقایسه زاویه شروع شکست در نمونه‌ها با روش XFEM و معیار

RV-MTS

**Table 6** The comparison of the fracture initiation angles predicted by XFEM and RV-MTS.

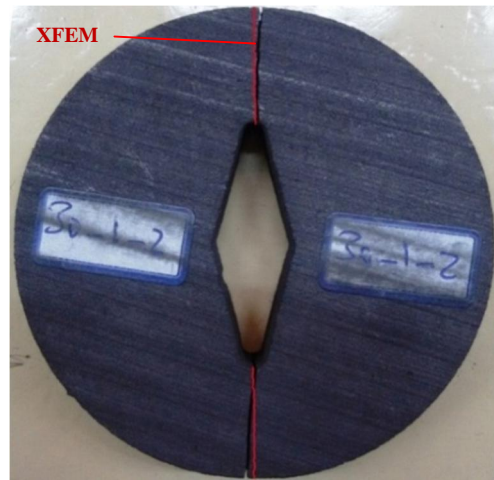
زاویه شروع شکست در معیار RV-MTS [47]	زاویه شروع شکست با روش XFEM	زاویه شروع شکست در نمونه آزمایشگاهی [47]	زاویه اعمال بار ( $\beta$ )	شعاع گرد شدگی ( $\rho$ )	زاویه شیار دهانه ( $\alpha_2$ )
42°	39°	44°	10°	1	30°
58°	78°	60°	25°	1	30°
42°	31°	38°	15°	1	60°
53°	63°	56°	30°	1	60°
31°	41°	28°	15°	1	90°
49°	74°	52°	35°	1	90°

Stress concentration due to crack growth

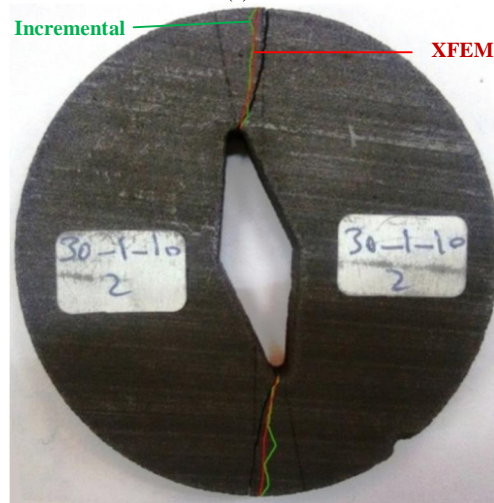


**Fig. 9** The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=60^\circ$  under mixed mode loading ( $b=15^\circ$ ) obtained from XFEM.

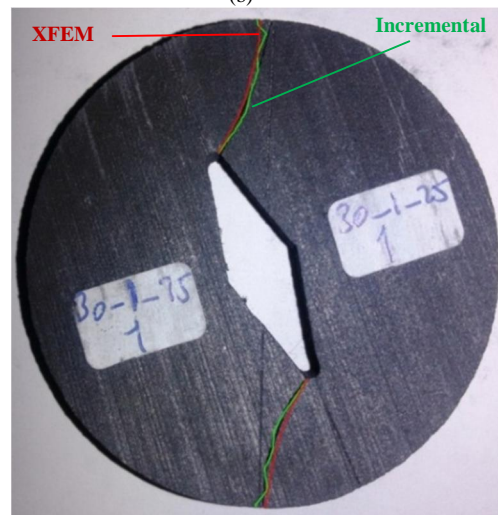
شکل 9 مسیر گسترش ترک در شیار 60 درجه به روش XFEM در مود ترکیبی ( $\beta=15^\circ$ ).



(a)



(b)



(c)

**Fig. 8** The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=30^\circ$  under a) pure mode I ( $\beta=0^\circ$ ), b) mixed mode I/II ( $\beta=10^\circ$ ), c) pure mode II loading ( $\beta=25^\circ$ ) obtained from XFEM, incremental method and experiments.

شکل 8 مقایسه مسیر رشد شکست در شیار 30 درجه تحت بارگذاری ا مود I ( $\beta=0^\circ$ )، مود مرکب I/II ( $\beta=10^\circ$ )، مود II ( $\beta=25^\circ$ ).

پیش بینی کرده‌اند.

در شکل 11 مسیر گسترش ترک به روش XFEM در محیط آباکوس و همچنین در شکل 12 می‌توان مسیر شکست به روش‌های گام به گام و المان



تخمین مسیر رشد شکست نمود. در این راستا دو روش المان محدود توسعه یافته (XFEM) و روش گام به گام، برای بررسی مسیر رشد شکست در قطعات شیاردار مورد توجه قرار گرفت. به منظور ارزیابی این دو روش، از نتایج آزمایشگاهی بر روی قطعات گرافیتی دیسکی شکل با شیار مرکزی (RV-BD) تحت شرایط بارگذاری‌های مختلف که در مراجع علمی گزارش شده بود، استفاده گردید.

در ابتدا پارامترهای مورد نیاز مدل تخریب ناحیه چسبناک (CZM) که برای روش XFEM لازم است، محاسبه گردید، سپس مسیر رشد شکست توسط دو روش XFEM و گام به گام تعیین شدند، با نتایج آزمایشگاهی در سه زاویه شیار 30 و 60 و 90 درجه، تحت شرایط بارگذاری مود I خالص، مود II خالص و مود ترکیبی I/II مقایسه گردید و نشان داده شد که هر دو روش قادر به تخمین مناسبی از مسیر رشد شکست هستند. به منظور صحت سنجی بار شکست حاصل از روش XFEM، با بار شکست نمونه‌های آزمایشگاهی گزارش شده، مورد مقایسه قرار گرفتند. در این مقایسه می‌توان بیان کرد که به جز یک مورد، در بقیه موارد روش XFEM تخمین خوبی از بار شکست قطعات RV-BD دارد و بنابراین می‌توان گفت که روش مذکور از دقت قابل توجهی برخوردار است.

در انتها، زاویه شروع شکست که از روش XFEM بدست آمده است با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید و مشخص شد که روش XFEM به خوبی معیار شکست RV-MTS نمی‌تواند زاویه شروع شکست را تخمین بزند اما با این وجود تخمین مناسبی می‌تواند از مسیر گسترش ترک داشته باشد. هر چند استفاده از روش XFEM مستلزم مهارت‌های نرم‌افزاری می‌باشد، ولی روش گام به گام راحت‌تر می‌تواند مسیر گسترش ترک را تخمین بزند. حساس بودن به نحوه اعمال شرایط مرزی، انتخاب دقیق نوع و اندازه شبکه‌بندی قطعه بخصوص در ناحیه گسترش شکست، استخراج دقیق پارامترهای مدل ناحیه چسبناک به ویژه تابع  $f(w)$  و تعریف درست گام‌های زمانی برای حل مسأله از جمله مهمترین مشکلات برای تخمین درست و دقیق مسیر شکست به روش XFEM می‌باشد که موجب افزایش زمان حل مسأله می‌شود. در صورتی که، در روش گام به گام نیاز به این نوع مهارت‌ها نیست و با چندین مرتبه بکارگیری روش کانتور انتگرال، می‌توان تخمین مناسبی از مسیر گسترش ترک را به نمایش گذاشت. بنابر نتایج این مقاله و مشکلات بیان شده برای روش XFEM، می‌توان بیان کرد که روش گام به گام که زاویه شروع شکست در شیار با استفاده از معیار RV-MTS محاسبه

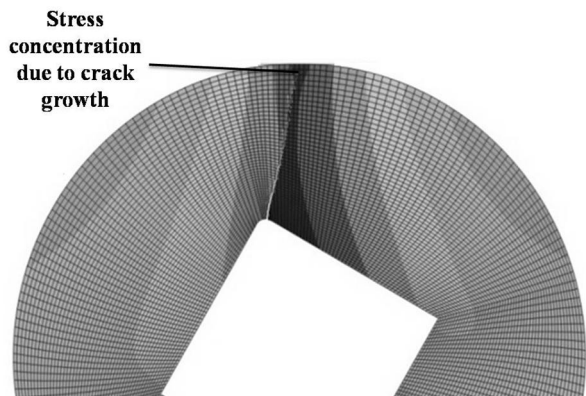
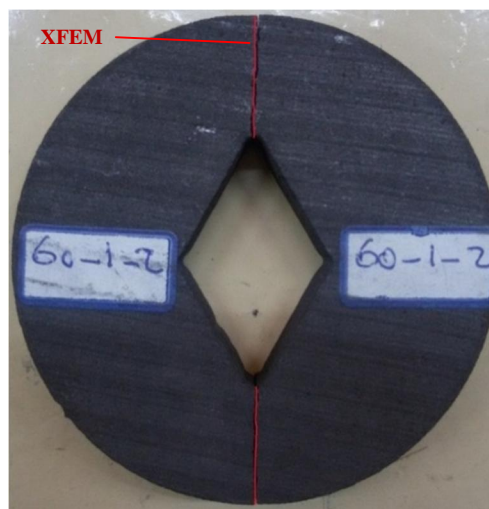
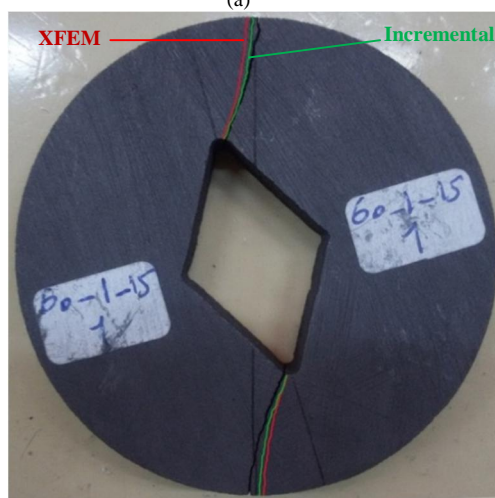


Fig. 11 The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=90^\circ$  under mixed mode loading ( $\beta=15^\circ$ ) obtained from XFEM.

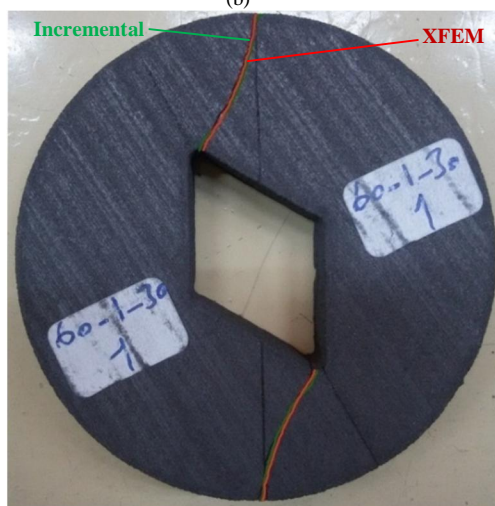
شکل 11 مسیر گسترش ترک در شیار 90 درجه به روش XFEM در بارگذاری ترکیبی ( $\beta=15^\circ$ ).



(a)



(b)



(c)

Fig. 10 The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=60^\circ$  under a) pure mode I ( $\beta=0^\circ$ ), b) mixed mode I/II ( $\beta=15^\circ$ ), c) pure mode II loading ( $\beta=30^\circ$ ) obtained from XFEM, incremental method and experiments.

شکل 10 مقایسه مسیر رشد شکست در شیار 60 درجه تحت بارگذاری (a) مود I ( $\beta=0^\circ$ ), (b) مود مرکب I/II ( $\beta=15^\circ$ ) (c) مود II ( $\beta=30^\circ$ ).

به بیان زاویه شروع شکست در شیارها تحت اعمال بارگذاری متفاوت، بسنده کرده‌اند و از بیان پیش روی و گسترش شکست در شیارها، خودداری شده است. بنابراین لازم است تا با بهره‌گیری از روش‌های نوین عددی، اقدام به

می‌شود، یک روش عددی مناسب برای تخمین مسیر رشد شکست در قطعات شیاردار می‌باشد.

7- فهرست علائم

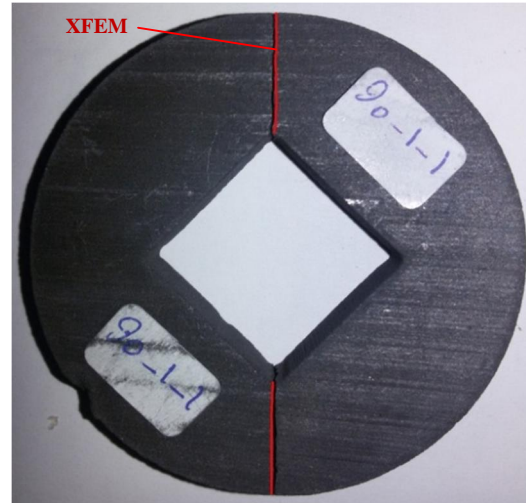
مدول الاستیسیته	$E$
انرژی کرنشی شکست	$G_f$
ضرایب شدت تنش مود I و مود II برای ترک	$K_{II}$ و $K_I$
ضریب شدت تنش مود I شیار V شکل نوک گرد	$K_I^{V,\rho}$
ضریب شدت تنش مود II شیار V شکل نوک گرد	$K_{II}^{V,\rho}$
ضریب شدت تنش بحرانی برای شیار V شکل نوک گرد	$K_{IC}^{V,\rho}$
فاصله شعاعی از مرکز مختصات قطبی شیار	$r_0$
علائم یونانی	
زاویه دهانه شیار	$2\alpha$
زاویه اعمال بار	$\beta$
شعاع گردشدگی نوک شیار V شکل	$\rho$
مؤلفه تنش شعاعی	$\sigma_{rr}$
مؤلفه تنش محیطی	$\sigma_{\theta\theta}$
مؤلفه تنش برشی	$\sigma_{r\theta}$
زاویه شروع شکست	$\theta_0$
ضریب پواسون	$\nu$

8- پیوست الف: پارامترهای مورد نیاز جهت محاسبه تنش اطراف شیار V شکل نوک گرد

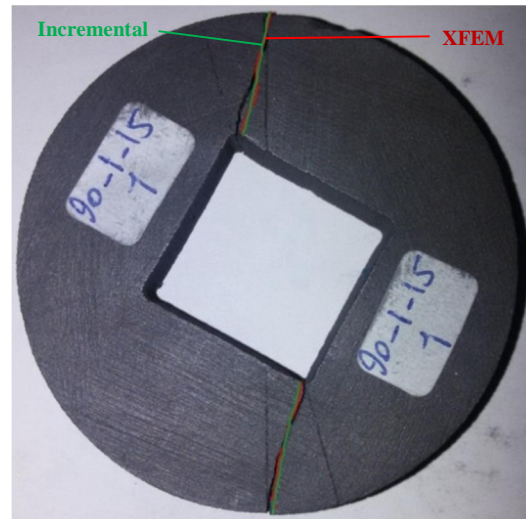
$$\begin{Bmatrix} m_{\theta\theta} \\ m_{rr} \\ m_{r\theta} \end{Bmatrix}^I = \frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]} \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1 - \lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} m_{\theta\theta} \\ m_{rr} \\ m_{r\theta} \end{Bmatrix}^{II} = \frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)]} \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{b2}(1 + \lambda_2) \begin{Bmatrix} \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{Bmatrix}$$

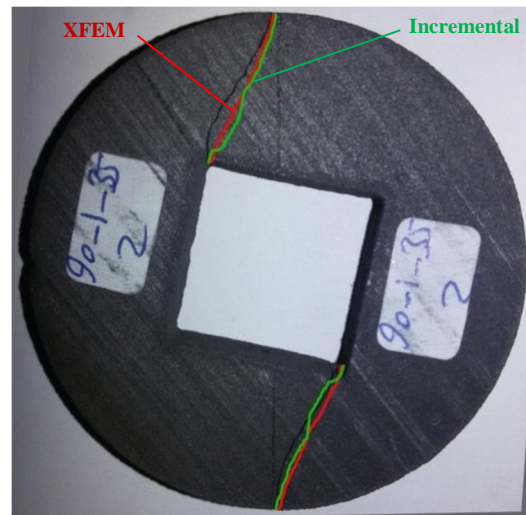
$$\begin{Bmatrix} n_{\theta\theta} \\ n_{rr} \\ n_{r\theta} \end{Bmatrix}^I = \frac{1}{4(q-1)[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]} \left[ \chi_{a1} \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{c1} \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} \right]$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 12 The fracture trajectory of RV-BD with  $2\alpha=90^\circ$  under a) pure mode I ( $\beta=0^\circ$ ), b) mixed mode I/II ( $\beta=15^\circ$ ), c) pure mode II loading ( $\beta=35^\circ$ ) obtained from XFEM, incremental method and experiments.

شکل 12 مقایسه مسیر رشد شکست در شیار 90 درجه تحت بارگذاری (a) مود I ( $\beta=0^\circ$ )، (b) مود مرکب I/II ( $\beta=15^\circ$ )، (c) مود II ( $\beta=35^\circ$ ).

Mechanical Engineering Department, University of Tehran, 2013 (in Persian فارسی).

[9] T. Kondo, M. Kobayashi, H. Sekine, Strain gage method for determining stress intensities of sharp-notched strips, *Experimental Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 1-7, 2001.

[10] B. Gross, A. Mendelson, Plane elastostatic analysis of V-notched plates, *International Journal of Fracture*, Vol. 8, No. 3, pp. 267-276, 1972.

[11] C. Atkinson, J. M. Bastero, J. M. Martinez-Esnaola, Stress analysis in sharp singular notches using auxiliary fields, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 31, No. 4, pp. 637-646, 1998.

[12] D. H. Chen, Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending, *International Journal of Fracture*, Vol. 70, No. 1, pp. 81-97, 1995.

[13] M. Strandberg, A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen, *International Journal of Fracture*, Vol. 100, No. 4, pp.329-342, 1999.

[14] A. Seweryn, A. Lukaszewicz, Verification of brittle fracture criteria for elements with V-notch, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, No. 13, pp. 673-681, 2002.

[15] M. Zappalorto, P. Lazzarin, F. Berto, Notch stress intensity factors Applied to U and V-shaped radiused notches under in-plane shear loading, *Procedia Engineering*, Vol. 10, No. 1, pp.1115-1120, 2011.

[16] A. Seweryn, Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, No. 5, pp. 673-681, 1994

[17] M. L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 29, pp. 3873-3883, 1997.

[18] P. Lazzarin, R. Zambardi, A finite Volume energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-notches. *International Journal of Fracture*, Vol. 112, No. 3, pp. 275-298, 2001.

[19] D. Leguillon, A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser IIb*, Vol. 329, No. 2, pp. 97-102, 2001.

[20] M. Strandberg, Fracture at V-notches with contained plasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, No. 3, pp. 403-415, 2002.

[21] F. J. Gomez, M. Elices, A Fracture criterion for sharp V-notches samples. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 123, No. 3, pp. 163-175, 2003.

[22] F. J. Gomez, M. Elices, Fracture of components with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, No. 14, pp.1913-1927, 2003.

[23] P. Livieri, A new path independent integral applied to notched components under mode I loading. *International Journal of Fracture*, Vol. 123, No. 3, pp.107-125, 2003.

[24] F. J. Gomez, M. Elices, A Fracture criterion for blunted V-notched samples, *International Journal of Fracture*, Vol. 127, No. 3, pp. 239-264, 2004.

[25] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, Investigation of brittle fracture in rounded tip V-notches subjected to pure mode I loading, *The 17<sup>th</sup> International Conference Mechanics Engineering*, Tehran University, Iran, 2009 (in Persian فارسی).

[26] M. L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, C. May, Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 84, No. 4, pp.367-381, 1997.

[27] D. Leguillon, Z. Yosibash, Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius. *International Journal of Fracture*, Vol. 122, No. 1, pp. 1-21, 2003.

[28] Z. Yosibash, A. Bussiba, I. Gilad, Failure criteria for brittle elastic materials. *International Journal of Fracture*, Vol. 125, No. 3, pp. 307-33, 2004.

[29] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon, A failure criterion for brittle elastic materials under mixed mode loading. *International Journal of Fracture*, Vol. 141, No. 1, pp. 291-312, 2006.

[30] E. Priel, A. Bussiba, A. Gilad, Z. Yosibash, Mixed mode failure criteria for brittle elastic V-notched structures. *International Journal of Fracture*, Vol. 144, No. 4, pp. 247-65, 2007.

[31] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, P. Azizi, A criterion for brittle fracture in sharp v-notches under tensile-shear loading, in *The 8<sup>th</sup> International Conference of Iranian Aerospace Society*, malek ashtar university, Esfahan, Iran, 2009 (in Persian فارسی).

[32] D. H. Chen, S. Ozaki, Investigation of failure criteria for a sharp notch. *International Journal of Fracture*, Vol. 152, No. 2, pp. 63-74, 2008.

[33] F. J. Gomez, M. Elices, F. Berto, P. Lazzarin, Local strain energy to assess the static failure of U-notches in plates under mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 145, No. 1, pp. 29-45, 2007.

[34] E. Priel, Z. Yosibash, D. Leguillon, Failure initiation at a blunt V-notch tip under mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 149, No. 2, pp. 143-173, 2008.

[35] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi, Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 16, pp. 3087-3104, 2010.

[36] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601-620, 1998.

[37] J. Dolbow, *An extended finite element with discontinuous enrichment*, Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, NorthWestern University, Illinois, 1999.

جدول الف 1 پارامترهای مهم در روابط شیار V شکل نوک گرد به همراه علائم اختصاری [35].

**Table A1** The symbols used for simplifying the mathematical equations for rounded V-notch [35].

پارامتر	علامت اختصاری
$\mu_1 - \lambda_1$	P
$\mu_2 - \lambda_2$	Q
$\frac{T_{c,V}}{r_0}$	H
$\frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]}$	L
$\frac{q}{4(q - 1)[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]}$	M
$\frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)]}$	N
$\frac{q}{4(\mu_2 - 1)[1 - \lambda_2 + \chi_{b2}(1 + \lambda_2)]}$	O
$1 - \lambda_1$	S
$1 + \lambda_1$	R
$1 - \lambda_2$	U
$1 + \lambda_2$	T
$1 - \mu_1$	W
$1 + \mu_1$	V
$1 - \mu_2$	Y
$1 + \mu_2$	X

$$\begin{Bmatrix} n_{\theta\theta} \\ n_{rr} \\ n_{r\theta} \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \frac{1}{4(q - 1)[1 + \lambda_2 + \chi_{b2}(1 - \lambda_2)]} \left[ \chi_{a2} \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \\ (3 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} + \chi_{c2} \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_2) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} \right] \quad \text{(الف-1)}$$

### 9- مراجع

[1] M. L. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal Applied Mechanics*, Vol. 74, No. 1, pp. 526-528, 1952.

[2] P. Lazzarin, R. Tovo, A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches, *International Journal of Fracture*, Vol.78, No. 1, pp. 3-19, 1996.

[3] S. Filippi, P. Lazzarin, R. Tovo, Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *International Journal of Solid and Structure*, Vol. 39, No. 17, pp. 4543-4565, 2002.

[4] M. Mahinfallah, L. Zackery, Photoelastic determination of mixed mode stress intensity factors for sharp reentrant corners, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, No. 4, pp. 639-645, 1995.

[5] J. N. Prassianakis, P. S. Theocaris, Stress intensity factors at V-notch elastic symmetrically loaded plates by the method of caustics. *Journal of Applied Physics*, Vol. 13, pp. 1043-1053, 1980.

[6] X. F. Yao, H. Y. Yeh, W. Xu, Fracture investigation at V-notch tip using coherent gradient sensing (CGS), *International journal of solids and structures*, Vol. 43, No. 5, pp. 1189-1200, 2006.

[7] H. Hamidi, N. Soltani, Determination of stress intensity factors in composite materials by means of optical experimental technique of digital shearography, *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 4, No. 4, pp. 15-26, 2009 (in Persian فارسی).

[8] M. R. Yadegari-Dehnavi, *Study of cracked tip V notch's parameters in PMMA materials using digital image correlation method*, M.Sc. Thesis,

- 2010.
- [45] M. R. M. Aliha, M. Rezaei, Experimental and theoretical study of fracture paths in brittle cracked materials subjected to pure mode II loading, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 70, No. 1, pp.159-164, 2011.
- [46] G. S. Xeidakis, I. S. Samaras, D. A. Zacharopoulos, G. E. Papakaliatakis, Trajectories of unstably growing cracks in mixed mode I-II loading of marble beams, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 30, No. 1, pp. 19-33, 1997.
- [47] M. R. Ayatollahi, A. R. Torabi., Failure assessment of notched polycrystalline graphite under tensile-shear loading. *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 528, No. 18, pp. 5685-5695, 2011.
- [48] D. A. Cendeon, A. R. Torabi and M. Elices. Fracture assessment of graphite V-notched and U-notched specimens by using the cohesive crack model. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, Vol. 38, No. 5, pp. 563-573, 2014.
- [49] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 1, pp. 361-364, 1957.
- [38] Y. Abdelaziz, A. Nabbou, A. Hamouine, A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, No. 12, pp. 4269- 4282, 2009.
- [39] G. I. Barenblatt, The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 55-129, 1962.
- [40] A. Hillerborg, M. Modeer, P. E. Petersson, Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, No. 6, pp. 773-781, 1976.
- [41] K. Park, G. H. Paulino, J. R. Roesler, Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 13, pp. 3806-3818, 2008.
- [42] M. Ortiz, A. Pandolfi, Finite-deformation irreversible cohesive elements for three dimensional crack-propagation analysis, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 9, pp. 1267-1282, 1999.
- [43] F. Erdogan, G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Basic Engineering, Transactions of ASME*, Vol. 85, No. 4, pp. 519-525, 1963.
- [44] M. R. M. Aliha, M. R. Ayatollahi, D. J. Smith, M. J. Pavier, Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 11, pp. 2200-2212.