مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1395، دوره 16، شماره 2، ص‌ص 120-128

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات آزاد میکروتیرهای اویلر-برنولی چرخان با استفاده از نظریه گرادیان کرنش

هادی آروین بروجنی

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

شهرکرد، صندوق پستی 115، hadi.arvin@eng.sku.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 آبان 1394

پذیرش: 25 دی 1394

ارائه در سایت: 19 بهمن 1394

کلید واژگان:

میکروتیرهای چرخان

تیرهای اویلر-برنولی

تئوری گرادیان کرنش

ضریب پواسون

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان بر مبنای تئوری گرادیان کرنش و فرضیات تیر اویلر برنولی پرداخته شده است. ابتدا، اصل همیلتون بر روابط به-دست آمده‌ی انرژهای کرنشی و جنبشی اعمال شده تا معادلات حاکم بر میکروتیر چرخان استخراج گردد. در ادامه با اعمال پارامترهای بدون بعد، معادلات بی‌بعد حرکت به-دست آمده است. سپس، با اعمال روش گلرکین بر معادلات دینامیکی، فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی محاسبه شده است. پس از آن، نتایج حاضر با نتایج مقالات موجود اعتبارسنجی شده است. پس از اعتبار سنجی نتایج حاضر، تأثیر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، سرعت چرخش و ضریب پواسون بر فرکانس‌های عرضی و طولی بررسی و نتایج تئوری گرادیان کرنش با نتایج تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک مقایسه گردیده است. نتایج نشان دهنده‌ی تأثیر بسیار زیاد نوع تئوری مورد استفاده در پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. اثر سرعت چرخش بر امکان وجود تشدید داخلی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در ضمن برای اولین بار اثر تئوری‌های مختلف ذکر شده، بر فرکانس‌های طبیعی طولی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند که با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش، تغییر ضریب پواسون، فرکانس‌های طولی را تغییر می‌دهد، در حالی‌که، تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک از پیش‌بینی هرگونه تغییری در فرکانس‌های طولی عاجز بوده و دو تئوری مذکور، نتایج یکسانی را برای فرکانس‌های طولی پیش‌بینی می‌نمایند.

Free vibration of micro rotating Euler-Bernoulli beams based on the strain gradient theory

Hadi Arvin Boroujeni

Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
P.O.B. 115 Shahrekord, Iran, hadi.arvin@eng.sku.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 November 2015
Accepted 15 January 2016
Available Online 08 February 2016

Keywords:
Micro Rotating Beams
Euler-Bernoulli Beams
Strain Gradient Theory
Poisson's Coefficient

ABSTRACT

In this paper, free vibration of rotating microbeams based on the strain gradient theory and Euler-Bernoulli beam assumptions is investigated. The Hamilton's Principle is applied on the attained strain and kinetic energy relations to obtain the equations of motion for the rotating microbeam. Then, by employing the adimensional parameters, the nondimensional form of the equations of motion is derived. After that, by applying the Galerkin approach on the dynamic equations of motion, the flapping and axial natural frequencies are calculated. Subsequently, the current results are validated by the existed papers results. After validation of the present results, the effects of the thickness to the material length scale parameter ratio, rotation speed and Poisson's coefficient on the flapping and axial frequencies are studied and the strain gradient theory results are compared with the modified couple stress and classical theories. The results show that the type of theory that is appointed has essential effects on the predicted natural frequencies. The effect of rotation speed on the possibility of the occurrence of internal resonances is also examined. In addition, for the first time, the effect of different mentioned theories on the axial natural frequencies are inspected. The presented results illustrate that, by considering the strain gradient theory, varying the Poisson's coefficient changes the axial frequencies, while the modified couple stress and classical theories are ineffectual in predicting any variations on the axial frequencies and the mentioned theories predict the same results for axial frequencies.

1- مقدمه

مطالعه و تجزیه تحلیل میکروتیرهای چرخان گامی مهم در مطالعه دینامیکی و ارتعاشاتی، شناخت و طراحی میکروسازه‌های چرخان مانند میکروتوربین‌ها می‌باشد. بر اساس جستجوی نویسنده مطالعات بسیار کمی در این زمینه انجام پذیرفته است و لذا به‌دلیل اهمیت پژوهشی و صنعتی این موضوع، در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای اویلر-برنولی چرخان بر مبنای تئوری گرادیان کرنش پرداخته می‌شود.

در میان مطالعات بسیاری که در زمینه استفاد از تئوری‌های مرتبه بالا جهت تحلیل سازه‌های میکرو انجام گرفته، بسیاری از نویسندگان بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده به مطالعه‌ی میکروتیرهای بدون چرخش پرداخته‌اند. کنگ و همکاران [1] تئوری کوپل تنش اصلاح شده را جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی میکروتیرهای اویلر- برنولی استفاده

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Arvin Boroujeni, Free vibration of micro rotating Euler-Bernoulli beams based on the strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 120-128, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

نمودند. ایشان با صرف‌نظر از اثرات اینرسی جرمی رابطه‌ای تحلیلی جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی میکروتیرها ارائه نمودند. کی و وانگ [2] به مطالعه‌ی پایداری دینامیکی میکروتیرهای تیموشنکوی ساخته شده از مواد درجه‌بندی شده بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداختند. آنها به بررسی تأثیر پارامترهای اثر اندازه ماده و نسبت طول به ضخامت بر روی ناپایداری دینامیکی این میکروتیرها پرداختند. الشتی و ابوالقاسمی [3] فرمولاسیونی برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای اویلر-برنولی بر اساس تئوری کوپل تنش ارائه نمودند. نتایج ایشان نشان دهنده‌ی بالاتر بودن مقدار پیش‌بینی شده برای فرکانس‌های طبیعی توسط تئوری مورد استفاده نسبت به تئوری کلاسیک بود. دهرویه سمنانی و نیکخواه بهرامی [4] اثر ضریب پواسون بر سفتی خمشی میکروتیر مدل شده بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده را مورد مطالعه قرار دادند. قنبری و بابایی [5] بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده، به بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی یکسرگیردار با جرم انتهایی پرداختند. نتایج ایشان نشان داد که افزایش جرم انتهایی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد.

تئوری گرادیان کرنش یکی دیگر از تئوری‌های مرتبه بالا جهت در نظر گرفتن اثرات مربوط به پارامتر اثر اندازه‌ی ماده نیز برای مدل نمودن میکروتیرهای بدون چرخش در مقیاس میکرو و نانو، بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. کنگ و همکاران [6] به تجزیه و تحلیلی استاتیکی و دینامیکی بر روی میکروتیرهای اویلر-برنولی بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. ایشان نشان دادند که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه‌ی ماده، اثرات اندازه قابل صرف‌نظر نمودن می‌گردد. طادی و کریمی‌پور [7] به مطالعه‌ی ناپایداری استاتیکی پولین (Pull-in) یک نانو تیر یکسرگیردار و اثر اندازه تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و نیروهای بین مولکولی (نیروی کازمیر و واندروالس) بر مبنای تئوری گرادیان کرنش، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل و روش عددی جهت حل معادلات حاکم پرداختند. نتایج ایشان نشان داد که نیروهای بین مولکولی، ولتاژ پولین را کاهش می دهد و اثر اندازه در مقیاس نانو باعث افزایش پارامترهای کشش می گردد. انصاری و همکاران [8] به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تیموشنکوی از جنس مواد درجه-بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها به بررسی اثرات ضخامت تیر، پارامتر اثر اندازه بدون بعد و نسبت رعنایی بر روی فرکانس‌های طبیعی پرداختند. نتایج نشان از اثر کاهشی افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر فرکانس‌های طبیعی سیستم بود. اصغری و همکاران [9] معادلات غیرخطی حاکم بر میکروتیرهای تیموشنکو با خیز بزرگ را بر پایه‌ی تئوری گرادیان کرنش ارائه نمودند و بر اساس آن به بررسی رفتار استاتیکی غیرخطی و ارتعاشات آزاد تیرهای دو سر ساده پرداختند. قایش و همکاران [10] به بررسی ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها پرداختند. معادلات غیرخطی حرکت بر اساس تئوری گرادیان کرنش، با استفاده از روش گلرکین جداسازی و سپس با تغییرمتغیر و استخراج معادلات دیفرانسیل درجه یک، با استفاده از روش پیوستگی شبه قوس، به بررسی پاسخ فرکانسی سیستم پرداختند. انصاری و همکاران [11] به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای خمیده از جنس موارد درجه‌بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها با استفاده از مدل تغییرشکل برشی مرتبه اول در کنار اصل همیلتون معادلات حرکت را به‌دست آورده و سپس اثرات درجه تغییرات ماده، پارامتر اندازه و نسبت منظری را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی نمودند. آنها نشان دادند که تفاوت تئوری‌های مختلف شامل تئوری گرادیان کرنش، تئوری کوپل تنش اصلاح شده و تئوری کلاسیک در مقادیر کوچک پارامتر اثر اندازه‌ی بدون بعد و مودهای بالا فاحش‌تر است. محمدی و محزون [12] به بررسی اثرات حرارت بر کمانش غیرخطی میکروتیرها بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها روابط غیرخطی فون-کارمن را جهت مرتبط نمودن کرنش و تغییرمکان مورد استفاده قرار داده و نشان دادند که تئوری گرادیان کرنشی نسبت به تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک، بار کمانش بزرگتری را پیش‌بینی می‌نماید. انصاری و همکاران [13] به مطالعه‌ی ویژگی‌های ارتعاشی میکروتیرهای بر مبنای مدل ردی، از جنس مواد درجه‌بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها با استفاده از روش ناویر فرکانس‌های طبیعی میکروتیر دو سر ساده را محاسبه نموده و اثرات ضخامت تیر، پارامتر اثر اتدازه بدون بعد و نسبت رعنایی را بر روی فرکانس‌های طبیعی ارائه نمودند. کارلیچیچ و همکاران [14] به بررسی ارتعاشات آزاد خمشی و کمانش نانولوله‌های کربنی بر اساس تئوری‌های گرادیان تنش، کرنش و کرنش-اینرسی پرداختند. آنها نشان دادند که افزایش نسبت منظری باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش می‌شود. کریمی‌پور و همکاران [15] به بررسی ناپایداری نانو تیر دو سر درگیر مدل شده بر مبنای تئوری گرادیان کرنش پرداختند. ایشان از روابط کرنش-تغییرمکان غیرخطی فون کارمن برای به‌دست آوردن معادله حاکم غیرخطی بر تیر استفاده و اثر نیروی واندروالس در معادلات حاکم را نیز در نظر گرفتند. آنها با به‌کارگیری روش تحلیلی پریشیدگی هوموتوپی به بررسی اثر نیروی جاذبه بین‌مولکولی واندروالس و اثر آن بر روی عملکرد ناپایداری سیستم، ازجمله خیز میانی ماکسیمم و ولتاژ ناپایداری پرداختند و نشان دادند که نیروی بین‌مولکولی واندروالس، ولتاژ ناپایداری را کاهش و پارامتر اثر اندازه در مقیاس‌های نانو منجر به افزایش پارامترهای ناپایداری ازجمله ولتاژ ناپایداری می‌گردد.

در میان پژوهش‌های انجام گرفته در زمینه‌ی ساخت سازه‌هایی در مقیاس میکرو، مهرا و همکاران [16] به طراحی و ساخت موتوری با میکروتوربین گازی از جنس سیلیکون پرداخته سپس با انجام آزمایش‌هایی بر روی آن، قابلیت زیست‌پذیری میکروموتور ساخته شده‌ی سیلیکونی را نشان دادند. به‌دلیل چگالی انرژی بسیار بیشتر میکروژنراتورهای استفاده کننده از سلول‌های سوختی نسبت به باطری‌های مورد استفاده در لپ‌تاپ‌ها و تلفن‌های همراه گروه‌های متعددی [17،18] به توسعه‌ی میکروتوربین‌ها پرداختند. تیم‌های متعددی نیز از دانشگاه‌های MIT [19]، استنفورد [20] و توکیو [21] به ساخت و توسعه‌ی میکروتوربین‌ها پرداختند.

با توجه هر چه بیشتر به میکرو و نانوسازه‌های چرخان در دهه‌ی اخیر، پژوهش‌های متعددی در بررسی ارتعاشات و پایداری آنها در سال‌های اخیر انجام پذیرفته است. در این راستا ارتعاشات نانوسازه‌های چرخان با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی ارینگن بیشترین سهم را در این پژوهش‌ها داشته است. بر اساس این تئوری، الاستیسیته‌ی غیرمحلی، پرادان و مورمو [22]، به بررسی ارتعاشات آزاد خمشی نانوتیرهای چرخان پرداختند. نارندار [23] به بررسی ارتعاشات آزاد عرضی نانولوله‌های چرخان با در نظر گرفتن اثرات تغییرشکل برشی و اینرسی چرخشی پرداخت. آراندا-رویبز و همکاران [24] به بررسی ارتعاشات عرضی نانوتیر با سطح مقطع متغیر خطی در طول نانوتیر چرخان پرداختند. ترکمان-اسدی و همکاران [25] به بررسی ارتعاشات آزاد و پایداری نانولوله‌های کربنی تک جداره چرخان، که قسمتی از آن بر روی بستر الاستیک قرار داشت، پرداختند.

در میان سازه‌های میکرو نیز، دوتا و گیورگیوتو [26] به نظارت سلامت

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

میکروماشین‌های دوار پرداختند. هاشمی و اصغری [27] مدلی 3-بعدی جهت بررسی ارتعاشات خمشی میکروشفت-دیسک چرخان به عنوان مدل ساده شده‌ای از یک میکروموتور با در نظر گرفتن اثرات اندازه ارائه نمودند. ایشان به بررسی اثر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم پرداختند. دهرویه-سمنانی [28] به بررسی ارتعاشات عرضی میکروتیرهای چرخان با در نظر گرفتن اثر اندازه بر اساس مدل تیموشنکو و استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده و به‌کارگیری روش المان محدود پرداخت.

در زمینه‌ی تحقیقات انجام پذیرفته در زمینه‌ی تیرهای چرخان بر مبنای تئوری کلاسیک، آروین و بختیاری‌نژاد [29] روابط کرنش-تغییرمکان غیرخطی فون-کارمن را برای به‌دست آوردن معادلات غیرخطی حاکم بر تیر اویلر-برنولی چرخان به‌کار گرفتند. آنها به تشکیل و بررسی پایداری مودهای نرمال غیرخطی تیرهای مورد مطالعه با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداختند. لاکاربونارا و همکاران [30] فرمولاسیون دقیق تیرهای چرخان را بر پایه‌ی تئوری کوزرات برای میله‌ها ارائه نمودند. آنها به مطالعه‌ی تأثیر سرعت چرخش و نیروی کریولیس بر فرکانس‌های طبیعی عرضی، عرضی خارج از صفحه، پیچشی و طولی پرداختند. نجفی و همکاران [31] به بررسی تشدید اعمال شده بر روی روتور پره‌دار چرخان واقع بر یاتاقانهای غیرخطی و الاستیک توسط پره‌های انعطاف‌پذیر متصل به آن، پرداختند.

در این مقاله با توجه به پیشینه‌ی تحقیقات ارائه شده، به مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان اویلر-برنولی بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداخته می‌شود. در این راستا ابتدا با توجه به روابط ارائه شده بر مبنای روابط تغییرمکان حاکم بر تیر اویلر-برنولی و بر اساس تئوری گرادیان کرنش، انرژی‌های کرنشی و جنبشی میکروتیر چرخان استخراج و سپس با معرفی پارامترهای بدون بعد، معادلات بی‌بعد حرکت به‌دست می‌آید. پس از آن، جهت به‌دست آوردن معادلات دینامیکی حول تغییرشکل استاتیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز، با مشخص نمودن تغییرشکل طولی به دو قسمت استاتیکی و دینامیکی، معادلات دینامیکی جدید حول پیکره‌بندی ناشی از نیروی گریز از مرکز استخراج می‌گردد. در ادامه با اعمال روش جداسازی گلرکین به محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی پرداخته می‌شود. پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر با نتایج مقالات موجود، به بررسی تأثیر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، سرعت چرخش و ضریب پواسون بر فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی با مقایسه‌ی نتایج تئوری‌های مختلف در کنار یکدیگر پرداخته می‌شود.

2- معادلات حرکت و حل آنها

2-1- معادلات حرکت

شماتیک یک میکرو تیر چرخان با شعاع روتور، ضخامت، عرض و طول، به‌ترتیب، R، h، b و L را که با سرعت Ω حول محور z می‌چرخد در شکل 1 نشان داده شده است. در این مقاله، حرکت عرضی (در راستای محور z، یعنی $w(x,t)$) و طولی (در راستای محور x، یعنی $u(x,t)$) در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای t و x به ترتیب پارامترهای اندازه‌گیری زمان و متغیر مکانی نشان دهنده‌ی موقعیت مرکز هر سطح مقطع نسبت به مرکز سطح مقطع متصل به روتور می باشد.

با فرض مدل اویلر- برنولی میدان تغییر مکان به‌صورت رابطه‌ی (1) در نظر گرفته می‌شود [29]:

$$u_1 = u(x,t) - z\cdot\frac{\partial}{\partial x}w(x,t), u_3 = w(x,t) \tag{1}$$

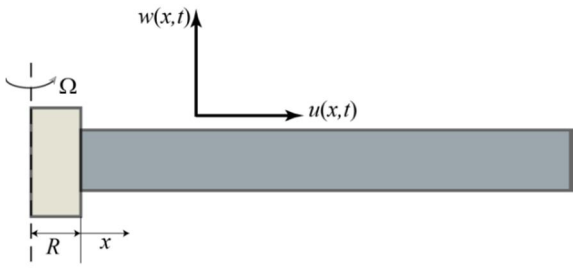

Fig. 1 A schematic of a rotating microbeam [29]

شکل 1 شماتیک میکروتیر چرخان [29]

انرژی کرنشی میکروتیر چرخان بر مبنای تئوری گرادیان کرنش برای میکروتیر ایزوتروپ الاستیک خطی به صورت رابطه‌ی (2) خواهد بود [6]:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} + p_i\,\gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)}\,\eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{s}\chi_{ij}^{s}\right) dV, i,j = 1,2,3 \tag{2}$$

که در این رابطه، ε_{ij}، γ_i، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^{s} به‌ترتیب تانسور کرنش، بردار گرادیان اتساع، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش متقارن بوده و به‌ترتیب توسط روابط (3) به‌دست می‌آیند [6]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3-الف}$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \tag{3-ب}$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}\right) - \frac{1}{15}\left[\delta_{ij}\left(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}\right) + \delta_{jk}\left(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}\right) + \delta_{ki}\left(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}\right)\right] \tag{3-ج}$$

$$\chi_{ij}^{s} = \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}\right) \tag{3-د}$$

که در این رابطه δ_{ij} و θ به‌ترتیب بیانگر تانسور دلتای کرونکر و بردار چرخش بوده که مولفه‌های این بردار از رابطه‌ی (4) به‌دست می‌آیند:

$$\theta = \frac{1}{2}\nabla \times F \tag{4}$$

که در این رابطه ∇ اپراتور گرادیان و F بردار میدان تغییر مکان می‌باشد.

دیگر پارامترهای ارائه شده در رابطه‌ی (2)، σ_{ij}، p_i، $\tau_{ijk}^{(1)}$ و m_{ij}^{s} به‌ترتیب تانسورهای تنش کوشی و تنش‌های مراتب بالاتر می‌باشند و به‌ترتیب توسط روابط (5) تعیین می‌گردند:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{mm} \tag{5-الف}$$

$$p_i = 2\mu\,l_0^2\,\gamma_i \tag{5-ب}$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu\,l_1^2\,\eta_{ijk}^{(1)} \tag{5-ج}$$

$$m_{ij}^{s} = 2\mu\,l_2^2\,\chi_{ij}^{s} \tag{5-د}$$

که در این روابط λ و μ ثابت‌های لامه و l_0، l_1 و l_2 نیز به‌ترتیب پارامترهای مستقل اثر اندازه‌ی طول مادی اضافی وابسته به گرادیان اتساع، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش می‌باشند.

با جایگذاری مولفه‌های بردار تغییر مکان، رابطه‌ی (1)، در رابطه‌ی (3-الف)، تنها مولفه‌ی غیر صفر تانسور کرنش به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{6}$$

که در این رابطه و از این به بعد به‌دلیل اختصار نویسی ترم (x,t) از معادلات حذف شده و می‌شود. جهت در نظر گرفتن اثرات نیروی مرکزگرا با استفاده از رابطه‌ی کرنش-تغییر مکان فون کارمن، رابطه‌ی (6) به‌صورت رابطه‌ی (7) در نظر گرفته می‌شود [29]:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{7}$$

از طرف دیگر با جایگذاری مولفه‌های بردار تغییر مکان، رابطه‌ی (1)، در رابطه‌ی (4) مولفه‌ی غیر صفر بردار چرخش به‌دست می‌آید:

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (7) در روابط (3-ب) و (3-ج) و جایگذاری رابطه‌ی (8) در رابطه‌ی (3-د) و سپس جایگذاری نتایج به‌دست آمده در روابط (5)، مولفه‌های تانسور تنش کوشی و مولفه‌های مرتبه بالاتر تنش به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب انرژی کرنشی میکروتیر از رابطه‌ی (2) قابل محاسبه است:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left(c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2 + c_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \right) dx \tag{9}$$

که در این رابطه $c_1 = E\,A$، $c_2 = EI_y + \mu\, A\left(2\, l_0^2 + \frac{8}{15}\, l_1^2 + l_2^2\right)$، $c_3 = 2\,\mu\, I_y\, \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2\right)$ و $c_4 = 2\,\mu\, A\, \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2\right)$ و $E = \lambda + 2\mu$ مدول الاستیسیته ماده‌ی میکروتیر می‌باشد. A و I_y نیز به‌ترتیب سطح مقطع و ممان اینرسی سطح میکروتیر حول محور y می‌باشند.

انرژی جنبشی میکروتیر چرخان را نیز می‌توان از رابطه‌ی (10) به‌دست آورد [29]:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2 + \Omega^2 (R + x + u_1)^2 \right) dV \tag{10}$$

که در این رابطه ρ چگالی جرمی میکروتیر می‌باشد. با جایگذاری مولفه‌های بردار تغییر مکان در رابطه‌ی (10) انرژی جنبشی میکروتیر به‌صورت رابطه‌ی (11) ساده می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \left(J\Omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + J\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right)^2 + m\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + m\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + m\Omega^2 (R + x + u)^2 \right) dx \tag{11}$$

که در این رابطه $m = \rho A$ و $J = \rho I_y$ نیز به‌ترتیب جرم بر واحد طول و ممان اینرسی جرمی میکروتیر حول محور y می‌باشند.

حال با به‌کارگیری روابط (9) و (11) و استفاده از اصل همیلتون [32]؛

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W_{\mathrm{nc}})\; dt = 0 \tag{12}$$

که در آن W_{nc} کار نیروهای خارجی است، معادلات حرکت میکروتیر چرخان به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$c_3\, \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - c_2\, \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c_4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - J\Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - J\, \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{13}$$

$$-c_4\, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_1\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m\,\Omega^2 (R + x + u) = m\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{14}$$

لازم به ذکر است که با حذف اثرات اندازه یعنی $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ معادلات حاکم بر تیر چرخان اویلر-برنولی بر مبنای تئوری کلاسیک، [29]، قابل استخراج است. در ضمن با حذف اثر چرخش معادلات حاکم بر میکروتیر اویلر-برنولی غیرچرخان، [6]، به‌دست می‌آید.

حال با تعریف پارامترهای بدون بعد؛

$$\hat{t} = \frac{t}{T}, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{w} = \frac{w}{L}, \hat{u} = \frac{u}{L}, \lambda_{\mathrm{R}} = \Omega \cdot T, \beta_{210} = \frac{c_2}{L^2 c_1}, \beta_{10} = \frac{c_3}{L^4 c_1}, \alpha_{10} = \frac{c_4}{L^2 c_1}, \eta = L\sqrt{\frac{m}{J}}, \mathrm{r} = \frac{R}{L} \tag{15}$$

که در این رابطه $T = L\sqrt{\frac{m}{c_1}}$ مشخصه‌ی زمان جهت بی‌بعدسازی است، معادلات بی‌بعد حرکت به‌دست می‌آیند.

جهت تحلیل ارتعاشی سازه‌های چرخان بایستی بردارهای تغییر مکان به‌صورت ترکیبی از تغییرمکان‌های استاتیکی، ناشی از نیروی گریز از مرکز و دینامیکی ناشی از ارتعاش در نظر گرفته شود. در تیرهایی از جنس ایزوتروپ و با سطح مقطع متقارن، نیروی گریز از مرکز تنها ایجاد تغییر شکل استاتیکی طولی می‌نماید و بنابراین $\hat{u} = \hat{u}_s(x) + \hat{u}_d(x,t)$ و $\hat{w} = \hat{w}_d(x,t)$ خواهد بود. بدین ترتیب معادلات بی‌بعد مشخص کننده‌ی حرکت ارتعاشی با حذف علامت " ^ "، (x,t)، (x) و زیرنویس d، جهت اختصار، به‌صورت روابط (16) و (17) به‌دست می‌آیند:

$$\beta_{10}\, \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \beta_{210}\, \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha_{10} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{\mathrm{s}}''' \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{\mathrm{s}}' \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\lambda_{\mathrm{R}}^2}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{16}$$

$$-\alpha_{10}\, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_{\mathrm{R}}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{17}$$

که دراین رابطه " ′ " نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به پارامتر x می‌باشد.

2-2- اعمال روش گلرکین

روش گلرکین جهت محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی در نظر گرفته شده است. جهت انجام روند مورد نیاز این روش ابتدا فرم تغییرشکل‌ها به‌صورت رابطه‌ی (18) در نظر گرفته می‌شود [32]:

$$w = \sum_{j=1}^{n} \psi_j^w(x) q_j^w(t)\,,\; u = \sum_{j=1}^{n} \psi_j^u(x) q_j^u(t) \tag{18}$$

که در این رابطه ψ_j^w و ψ_j^u به‌ترتیب j امین مود نرمال خطی عرضی تیر اویلر-برنولی و مود نرمال خطی محوری میله غیر چرخان می‌باشند و q_j^w و q_j^u به‌ترتیب j امین مختصات عمومی عرضی و طولی می‌باشند.

با جایگذاری روابط (18) در معادلات (16) و (17) و اعمال روش گلرکین معادلات جداسازی شده‌ی حرکت به‌دست می‌آیند:

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \tag{19}$$

که در این رابطه $q = \begin{bmatrix} q^w \\ q^u \end{bmatrix}$ برداری متشکل از q^w که شامل n مختصه‌ی عمومی عرضی، q_j^w، و q^u که شامل n مختصه‌ی عمومی طولی، q_j^u، و $\ddot{q}$ مشتق دوم q نسبت به زمان می‌باشند. M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی بوده و درایه‌های این دو ماتریس عبارتند از:

$$M(k,j) = -\int_0^1 \psi_k^w \left(\psi_j^w - \frac{1}{\eta^2}\psi_j^{w\prime\prime}\right) dx,$$
$$K(k,j) = \int_0^1 \psi_k^w \left(\beta_{10}\frac{d^6\psi_j^w}{dx^6} - \beta_{210}\frac{d^4\psi_j^w}{dx^4} - \alpha_{10}\frac{d}{dx}\left(u_{\mathrm{s}}'''\frac{d\psi_j^w}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(u_{\mathrm{s}}'\frac{d\psi_j^w}{dx}\right) - \frac{\lambda_{\mathrm{R}}^2}{\eta^2}\frac{d^2\psi_j^w}{dx^2}\right) dx, k = 1,\dots,n, j = 1,\dots,n \tag{20-الف}$$

$$M(k,j) = -\int_0^1 \psi_k^u (\psi_j^u)\, dx,$$
$$K(k,j) = \int_0^1 \psi_k^u \left(-\alpha_{10}\frac{d^4\psi_j^u}{dx^4} + \frac{d^2\psi_j^u}{dx^2} + \lambda_{\mathrm{R}}^2 \psi_j^u\right) dx, k = 1+n,\dots,2n,, j = 1+n,\dots,2n \tag{20-ب}$$

با محاسبه‌ی مقادیر و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های M و K می‌توان فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را استخراج نمود.

3- تجزیه و تحلیل عددی

1-3- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش به اعتبارسنجی نتایج حاضر پرداخته خواهد شد. اعتبارسنجی نتایج حاضر در سه مرحله انجام خواهد شد. در ابتدا با حذف ترم‌های مربوط به اثر اندازه، نتایج حاضر برای فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی، با نتایج مرجع [30]، که به‌بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای چرخان بر مبنای تئوری

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

کلاسیک پرداخته، مقایسه خواهد گردید. سپس با حذف ترم‌های مرتبط با اثرات چرخش، نتایج حاضر برای فرکانس‌های طبیعی عرضی، با نتایج مرجع [6]، که بر اساس تئوری گرادیان کرنش به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیر غیرچرخان پرداخته، مقایسه خواهد گردید. در نهایت، با در نظر گرفتن $l_0 = l_1 = 0$، نتایج به‌دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی عرضی، با نتایج ارائه شده از مرجع [28]، که بر پایه‌ی تئوری کوپل تنش اصلاح شده به بررسی ارتعاشات آزاد خمشی میکروتیر چرخان پرداخته، اعتبارسنجی خواهد گردید.

تیر چرخان در نظر گرفته شده در مرجع [30] از جنس آلومینیوم با مدول یانگ و برشی به‌ترتیب برابر 200 GPa و 69 GPa می‌باشد. این تیر دارای سرعت چرخش 1000 rpm بوده و طول، عرض و ضخامت تیر و شعاع روتور آن به‌ترتیب 2، 0.05، 0.005 و 0.1 متر می‌باشند. نتایج برای سه فرکانس اول عرضی و طولی در جدول 1 ارائه گردیده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج ارائه شده به دست آمده است. فرکانس‌های عرضی حاضر مقداری بیشتر از فرکانس‌های متناظر ارائه شده در مرجع [30] بوده که دلیل آن را می‌توان در مدل نرم‌تر ارائه شده در مرجع [30] دانست، در حالی که رفتار متفاوتی برای فرکانس‌های طولی پیش‌بینی شده که دلیل آن در درنظر نگرفتن اثرات نیروی کریولیس است که این نیرو دارای اثر سخت شوندگی بر فرکانس‌های طولی است [30].

پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر برای تیرهای چرخان، حال به اعتبارسنجی نتایج مرتبط با اثرات اندازه پرداخته می‌شود. در ابتدا، نتایج حاضر با نتایج مرجع [6] که در آن فرکانس‌های طبیعی عرضی یک میکروتیر اویلر-برنولی غیرچرخان بر مبنای تئوری گرادیان کرنش محاسبه گردیده است، اعتبارسنجی می‌گردد. مشخصات هندسی و ماده‌ای این میکروتیر در جدول 2 ارائه شده است. با فرض $l_0 = l_1 = l_2 = l$، $\frac{b}{h} = 2$ و $\frac{L}{h} = 20$، نتایج فرکانس‌های طبیعی عرضی اول تا سوم در جدول 3 برای دو ضخامت متفاوت 20 μm و 50 μm ارائه شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج بر تطابق خوب نتایج دلالت دارد. لازم به‌ذکر است که نتایج به‌دست آمده از مرجع [6]، از شکل ارائه شده در آن مرجع خوانده شده و نتایج عددی دقیق به‌صورت جدول در آن مرجع وجود نداشته است.

حال به اعتبارسنجی نتایج حاضر برای میکروتیرهای چرخان، پرداخته می‌شود. نتایج حاضر با نتایج مرجع [28] که در آن فرکانس‌های طبیعی عرضی یک میکروتیر چرخان بر اساس مدل اویلر-برنولی بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاح شده ارائه شده است، اعتبارسنجی می‌گردد. میکروتیر مورد مطالعه دارای مدول الاستیسیته‌ی 1.4 GPa، ضریب پواسون $\nu = 0.3$، $\rho = 1220\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ و پارامتر اثر اندازه $l = 17.6\ \mu\mathrm{m}$ می‌باشد.

جدول 1 نتایج حاضر برای سه فرکانس طبیعی عرضی و طولی اول در مقایسه با نتایج [30] ($\frac{\mathrm{rad}}{s}$)

Table 1 Current first three flapping and axial mode frequencies in comparison with those of [30] ($\frac{\mathrm{rad}}{s}$)

شماره مود	نتایج حاضر	نتایج [30]
عرضی اول	114.51	114.46
عرضی دوم	280.41	280.34
عرضی سوم	462.06	461.93
طولی اول	3997.68	4003.17
طولی دوم	11996.7	11998.53
طولی سوم	19994.98	19996.08

جدول 2 مشخصات مادی و هندسی میکرو تیر یکسرگیردار از جنس اپوکسی [6]

Table 2 Material and geometric properties of micro cantilever beam made of epoxy [6]

E (GPa)	ρ ($\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)	ν	l (μm)
1.44	1000	0.38	17.6

جدول 3 نتایج سه فرکانس طبیعی عرضی اول در مقایسه با نتایج [6]

Table 3 Current first three flapping mode frequencies in comparison with those of [6] ($\frac{\mathrm{krad}}{s}$)

شماره مود	ضخامت میکروتیر (μm)	نتایج حاضر	نتایج [6]	درصد اختلاف
عرضی اول		546.76	535.13	2.13
عرضی دوم	20	3425.15	3353.7	2.09
عرضی سوم		9581.86	9419.8	1.69
عرضی اول		103.77	102.99	0.76
عرضی دوم	50	649.88	638.89	1.69
عرضی سوم		1816.74	1803.4	0.73

با فرض $l_0 = l_1 = 0$ و $l_2 = l$، $\frac{l}{h} = 1$، $\frac{b}{h} = 2$، نسبت لاغری $L\sqrt{\frac{A}{I_y}} = 20$، سرعت چرخش بدون بعد $\Omega L^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI_y}} = 4$ و $r = 0$ نتایج فرکانس‌های طبیعی عرضی بدون بعد اول و دوم در جدول 4 ارائه شده است. مقدار بدون بعد ارائه شده بر اساس $\omega L^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI_y}}$ می‌باشد که در آن ω فرکانس طبیعی با بعد است. مشاهده‌ی نتایج، قابل اعتماد بودن نتایج حاضر را تأیید می‌کند. لازم به‌ذکر است که نتایج به‌دست آمده از مرجع [28]، از شکل‌های 3 و 5 مرجع مذکور برای میکروتیر اویلر-برنولی استنتاج شده است.

3-2- مطالعه‌ی موردی

پس از اعتبارسنجی نتایج و اطمینان از فرمولاسیون و راه حل ارائه شده به مطالعه‌ی اثرات ممان اینرسی جرمی، نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه‌ی ماده، ضریب پواسون و سرعت چرخش بر فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی پرداخته و امکان حضور تشدیدهای داخلی مختلف با تغییر سرعت چرخش بررسی می‌شود. در نتایج ارائه شده در این بخش در مواردی که پارامترهایی ذکر نشده باشند، پارامترهای مورد استفاده مطابق با جدول 2 بوده ولی $\rho = 1220\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ و $\frac{b}{l} = 2$، $\frac{L}{l} = 20$ و سرعت بی‌بعد چرخش $\lambda_R = 0.1086$ می‌باشد.

شکل‌های 2، 3 و 4 به‌ترتیب نشان دهنده‌ی اثر نسبت ضخامت به پارامتر اندازه بر روی سه فرکانس طبیعی اول عرضی است. در این شکل‌ها نتایج به‌دست آمده بر مبنای تئوری گرادیان کرنش، و با در نظر گرفتن $l_0 = l_1 = 0$ بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاح شده و با در نظر گرفتن $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ بر مبنای تئوری کلاسیک ارائه گردیده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری‌های مختلف می‌گردد. دلیل این امر سخت شدن سازه با افزایش ضخامت تیر می‌باشد. علاوه بر آن، با افزایش این نسبت، نتایج هر سه تئوری به‌سمت منطبق شدن بر یکدیگر میل می‌کنند که دلیل آن کاهش اثر پارامتر اندازه با افزایش ضخامت میکروتیر می‌باشد.

از طرف دیگر مشاهده می‌شود که ممان اینرسی جرمی بر فرکانس‌های طبیعی عرضی دارای اثری نرم‌کننده می‌باشد، و علت این امر افزایش انرژی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

جدول 4 نتایج دو فرکانس طبیعی عرضی اول بدون بعد در مقایسه با نتایج [28]

Table 4 Current first two adimensional flapping mode frequencies in comparison with those of [28]

شماره مود	نتایج حاضر	نتایج [28]	درصد اختلاف
عرضی اول	9.417	9.377	0.42
عرضی دوم	52.815	52.257	1.06

جنبشی میکروتیر و به‌دنبال آن افزایش جرم مؤثر سازه بوده که مطابق با رابطه‌ی ساده‌ی فرکانس طبیعی برای سیستم یک درجه آزادی، $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}$، باعث کاهش فرکانس طبیعی شده و این امر با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه و شماره‌ی مود این تأثیر واضح‌تر قابل مشاهده است.

جهت مشاهده‌ی بهتر روند نزدیک شدن سه فرکانس طبیعی عرضی اول پیش‌بینی شده توسط دو تئوری مرتبه بالا به تئوری کلاسیک با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، شکل‌های 5، 6 و 7 ارائه شده است.

اثر سرعت چرخش بر فرکانس‌های طبیعی اول عرضی و طولی، به‌ترتیب، در شکل‌های 8 و 9 نشان داده شده است. در این مطالعه نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه برابر 1 در نظر گرفته شده است. نتایج نشان دهنده‌ی افزایش سریع فرکانس‌های طبیعی عرضی بوده که به‌دلیل اثر سخت شوندگی افزایش

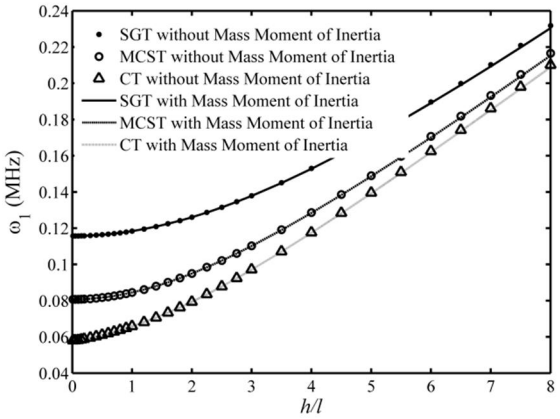

Fig. 2 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the first flapping frequency of the rotating microbeam

شکل 2 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی فرکانس طبیعی اول عرضی میکروتیر چرخان

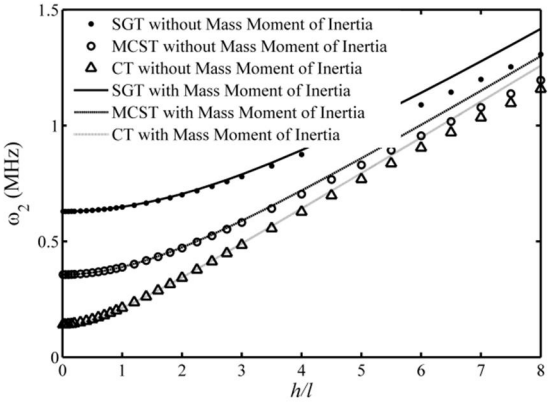

Fig. 3 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the second flapping frequency of the rotating microbeam

شکل 3 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی فرکانس طبیعی دوم عرضی میکروتیر چرخان

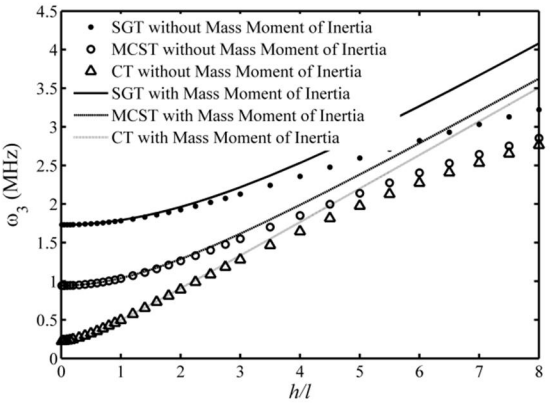

Fig. 4 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the third flapping frequency of the rotating microbeam

شکل 4 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی فرکانس طبیعی سوم عرضی میکروتیر چرخان

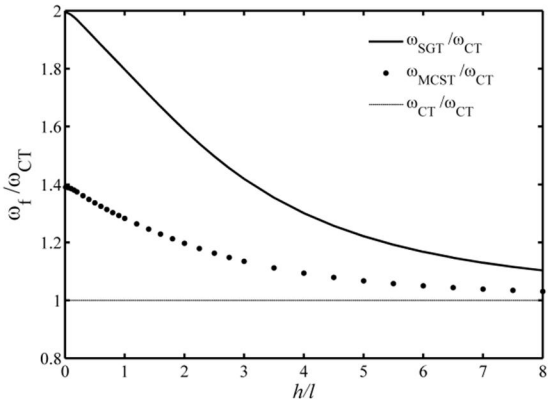

Fig. 5 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the ratio of the first flapping frequency predicted by strain gradient theory and modified couple stress theory to that calculated based on the classical theory of the rotating microbeam

شکل 5 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی نسبت فرکانس طبیعی اول عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس متناظر پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک برای میکروتیر چرخان

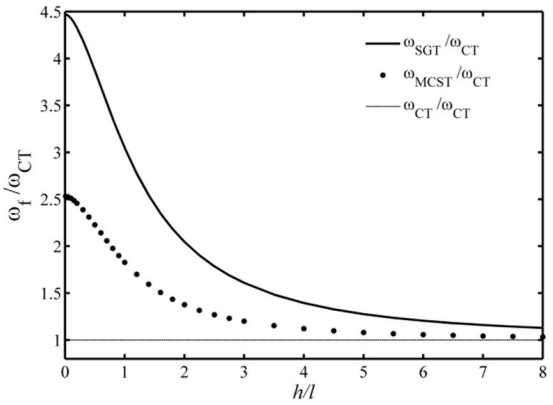

Fig. 6 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the ratio of the second flapping frequency predicted by strain gradient theory and modified couple stress theory to that calculated based on the classical theory of the rotating microbeam

شکل 6 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی نسبت فرکانس طبیعی دوم عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس متناظر پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک برای میکروتیر چرخان

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

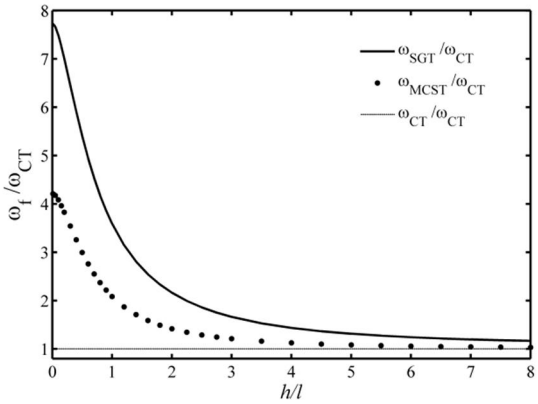

Fig. 7 Effect of the thickness to the material length scale ratio on the ratio of the third flapping frequency predicted by strain gradient theory and modified couple stress theory to that calculated based on the classical theory of the rotating microbeam

شکل 7 اثر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر روی نسبت فرکانس طبیعی سوم عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس متناظر پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک برای میکروتیر چرخان

سرعت چرخش بر رفتار خمشی سازه می‌باشد. از طرف دیگر با افزایش سرعت چرخش و سخت شدن سازه اثر پارامتر اندازه کاهش یافته و مقادیر پیش‌بینی شده توسط سه تئوری به یکدیگر نزدیک می‌گردند. در طرف مقابل، افزایش سرعت چرخش دارای اثر نرم‌شوندگی بر روی فرکانس‌های طولی می‌باشد که علت آن در نظر نگرفتن نیروی کریولیس در مدل حاضر ارائه شده بوده که دارای اثری سخت شونده در جهت طول تیر می‌باشد (جهت مشاهده‌ی اثر نیروی کریولیس بر سخت شوندگی طولی به [30] مراجعه گردد). نتایج کیفی مشابهی برای نسبت‌های دیگر ضخامت به پارامتر اثر اندازه به‌دست آمده که به دلیل اختصار ارائه نگردیده است.

سخت شوندگی سریع عرضی و نرم‌شوندگی طولی سبب نزدیک شدن فرکانس‌های طولی و عرضی شده که در سازه‌های چرخان این اثر بسیار مهم بوده و امکان تشدید داخلی را افزایش خواهد داد.

جهت روشن‌سازی امکان وقوع تشدید داخلی بین مودهای مختلف عرضی و عرضی و همچنین عرضی و طولی در میکرو سازه‌های چرخان در این بخش به بررسی اثر سرعت چرخش بر فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی به‌طور هم‌زمان پرداخته خواهد شد. امکان حضور تشدیدهای مختلف با تغییرات سرعت چرخش در شکل 10 نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد حضور تشدیدهای داخلی 3 به 1 بین مودهادی عرضی و طولی اول و عرضی اول و دوم و 1 به 1 بین مودهای طولی اول و عرضی دوم امکان پذیر خواهد بود. از طرف دیگر در صورت استفاده از تئوری‌های مرتبه پایین‌تر نسبت به تئوری گرادیان کرنش این امکان وقوع تشدید داخلی بین مودهای عرضی زودتر و بین مودهای عرضی با طولی دیرتر پیش‌بینی شده که باعث خطا در طراحی و پیش‌بینی فرکانس کاری دور از تشدید داخلی خواهد گردید که به نوبه‌ی خود بسیار حائز اهمیت بوده و گاه منجر به شکست سازه می‌گردد.

آخرین مطالعه‌ی صورت گرفته به بررسی اثر ضریب پواسون بر فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. افزایش ضریب پواسون به دلیل نرم‌تر شدن سازه و به‌دنبال آن کاهش سختی سازه، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی خواهد گردید. جهت مشاهده‌ی این اثر، تأثیر افزایش ضریب پواسون بر فرکانس اول عرضی میکروتیر چرخان برای سه نسبت مختلف ضخامت به پارامتر اثر اندازه، $\frac{h}{l} = 0.01, 0.5, 1$، برای تئوری‌های گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده، در شکل 11 نشان داده شده است. افزایش ضریب پواسون، همان‌گونه که انتظار می‌رفت، دارای اثر نرم‌شوندگی بر سختی سازه بوده و باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی عرضی می‌گردد. شایان ذکر است که تغییرات ضریب پواسون هیچ‌گونه تأثیری بر فرکانس‌های عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک نداشته و به همین دلیل نتایج آن ارائه نگردیده است. نکته‌ی قابل مشاهده‌ی دیگر میزان اختلاف فرکانس‌های پیش‌بینی شده توسط دو تئوری مذکور می‌باشد که با افزایش ضریب پواسون و نرم‌تر شدن سازه کاهش می‌یابد (جهت مشاهده‌ی واضح‌تر این مطلب، به میزان این اختلاف در $\nu = 0$ و $\nu = 0.5$ توجه گردد).

همان‌گونه که اشاره شد، بررسی فرکانس طولی در سازه‌های چرخان نقشی تعیین کننده در طراحی و حفظ سلامت این سازه‌ها خواهد داشت. بدین جهت در این بخش به بررسی اثر ضریب پواسون بر فرکانس‌های طولی پرداخته می‌شود. اثر ضریب پواسون بر نسبت فرکانس اول طولی میکروتیر چرخان پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده به مقدار متناظر پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک، و برای سه نسبت مختلف ضخامت به پارامتر اثر اندازه، $\frac{h}{l} = 0.01, 0.5, 1$، در شکل 12 نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد، تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک، تغییری برای فرکانس طولی با تغییر ضریب پواسون

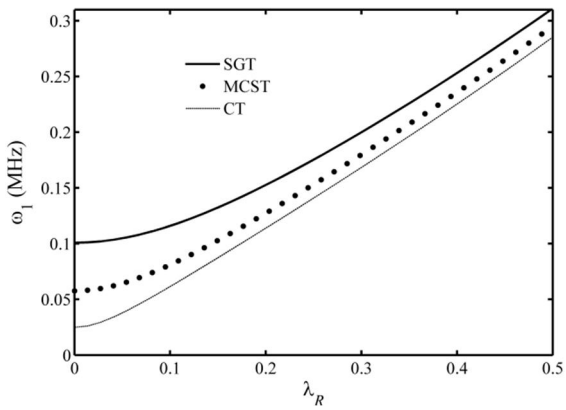

Fig. 8 Effect of non-dimensional rotation speed of the microbeam on the first flapping frequency

شکل 8 اثر سرعت بدون بعد چرخش میکروتیر بر اولین فرکانس طبیعی عرضی

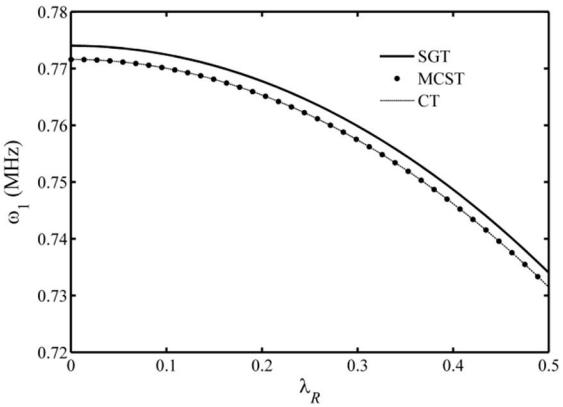

Fig. 9 Effect of non-dimensional rotation speed of the microbeam on the first axial frequency

شکل 9 اثر سرعت بدون بعد چرخش میکروتیر بر اولین فرکانس طبیعی طولی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

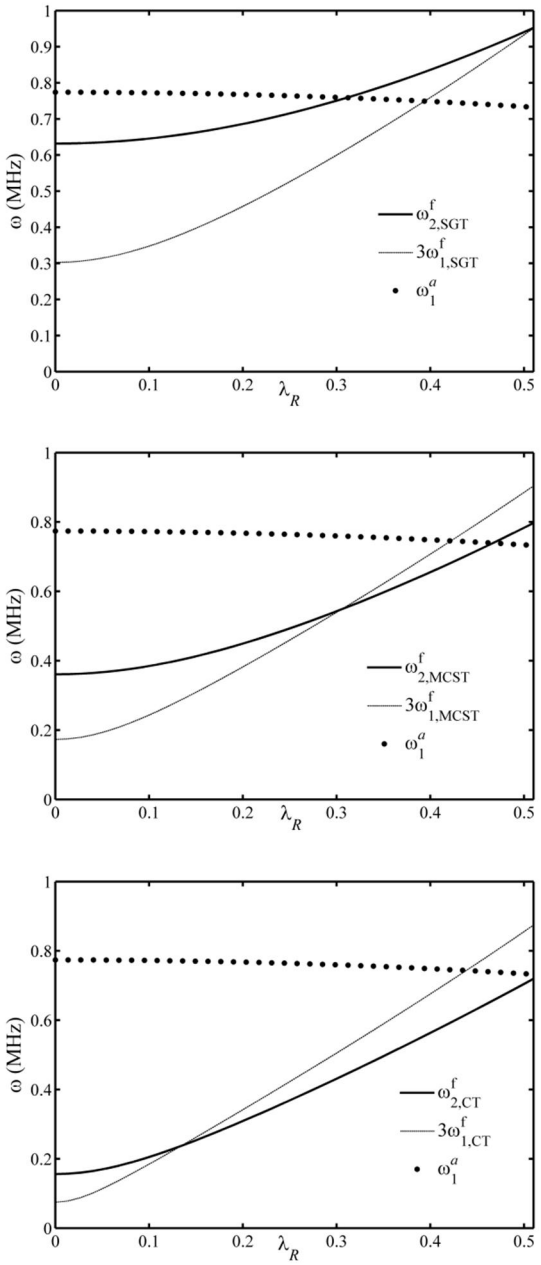

Fig. 10 Possibility of 1:1 (between the second flapping and the first axial modes) and 3:1 (between the first flapping and the first axial or second flapping modes) internal resonances for the rotating microbeam predicted by, respectively, the strain gradient, modified couple and classical theories

شکل 10 پیش‌بینی امکان تشدیدهای داخلی 1:1 (بین مود دوم عرضی و اول طولی) و 1:3 (بین مود اول عرضی و اول طولی یا دوم عرضی) برای میکروتیر چرخان به ترتیب توسط تئوری‌های گرادیان کرنش، کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک

پیش‌بینی ننموده در حالی که تئوری گرادیان کرنش، کاهش در فرکانس‌های طولی را با افزایش ضریب پواسون پیش‌بینی می‌نماید. کاهش پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش از آن جهت قابل اهمیت بوده که سبب نزدیک‌تر شدن هرچه بیشتر فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی به یکدیگر شده که احتمال تشدید داخلی را جلو می‌اندازد. قابل بیان است که افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، هیچگونه تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی طولی پیش‌بینی‌شده توسط تئوری‌های گرادیان کرنش، کوپل تنش اصلاح شده و

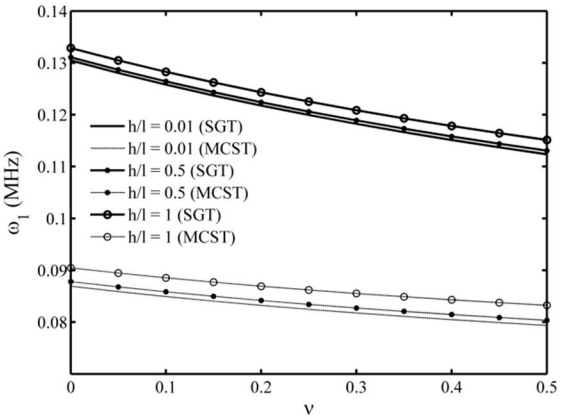

Fig. 11 The Poisson's effect on the first flapping frequency of the rotating microbeam

شکل 11 تأثیر ضریب پواسون بر فرکانس اول عرضی میکروتیر چرخان

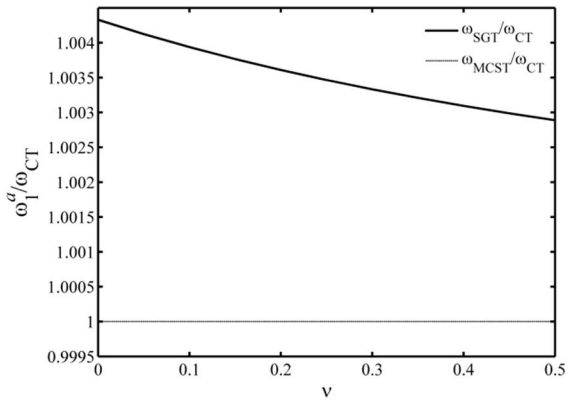

Fig. 12 The Poisson's effect on the ratio of the first axial frequency predicted by strain gradient theory and modified couple stress theory to that calculated based on the classical theory of the rotating microbeam

شکل 12 تأثیر ضریب پواسون بر روی نسبت فرکانس طبیعی اول طولی پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس متناظر پیش-بینی شده توسط تئوری کلاسیک برای میکروتیر چرخان

کلاسیک ندارد و بدین جهت در هر سه نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، نتایج یکسانی پیش‌بینی گردیده است.

4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارائه‌ی فرمولاسیونی برای میکروتیرهای چرخان ایزوتروپ اویلر-برنولی بر مبنای تئوری گرادیان کرنش و استفاده از اصل همیلتون پرداخته شد. روابط به‌دست آمده قادر به تبدیل شدن به روابط مشابه برای تیرهای اویلر-برنولی چرخان و غیرچرخان بر مبنای تئوری کلاسیک و میکروتیرهای اویلر-برنولی غیرچرخان بر مبنای تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش می‌باشد. جهت محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی روش گلرکین بر معادلات بدون بعد دینامیکی به‌دست آمده حول پیکره‌بندی ناشی از نیروی گریز از مرکز حرکت اعمال شد. سپس نتایج حاضر با نتایج مقالات موجود مقایسه و صحت فرمولاسیون و روش حل ارائه شده‌ی حاضر، تأیید شد. مطالعات موردی بر روی بررسی اثرات ممان اینرسی جرمی، نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، سرعت چرخش و ضریب پواسون بر روی فرکانس‌های طبیعی عرضی و طولی انجام شد که مهمترین نتایج به‌دست آمده از قرار زیر می‌باشند؛ 1- با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه،

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]

فرکانس‌های طبیعی عرضی افزایش یافته و نتایج هر سه تئوری، گرادیان کرنش، کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک، به‌سمت منطبق شدن بر یکدیگر میل می‌کنند؛ در حالی که این افزایش هیچگونه تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی طولی پیش‌بینی‌شده توسط تئوری‌های مذکور را ندارد. 2- ممان اینرسی جرمی بر فرکانس‌های طبیعی عرضی دارای اثری نرم‌کننده می‌باشد که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه و شماره‌ی مود این تأثیر ملموس‌تر می‌باشد. 3- افزایش سرعت چرخش دارای اثر سخت‌شوندگی بر فرکانس‌های عرضی می‌باشد، و با این افزایش مقادیر پیش‌بینی شده توسط سه تئوری مورد بررسی به یکدیگر نزدیک‌تر می‌گردند؛ در حالی که این افزایش دارای اثر نرم‌شوندگی بر روی فرکانس‌های طولی می‌باشد. 4- با تغییر سرعت چرخش، امکان حضور تشدیدهای داخلی 3 به 1 بین مودهادی عرضی و طولی اول و عرضی اول و دوم و 1 به 1 بین مودهای طولی اول و عرضی دوم وجود خواهد داشت. این امکان وقوع، در صورت استفاده از تئوری‌های مرتبه پایین‌تر نسبت به تئوری گرادیان کرنش بین مودهای عرضی در سرعت چرخش پایین‌تر و بین مودهای عرضی با طولی در سرعت چرخش بالاتر پیش‌بینی می‌گردد. 5- افزایش ضریب پواسون دارای اثر نرم‌شوندگی بر سختی سازه بوده و باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی عرضی می‌گردد. در ضمن، با افزایش ضریب پواسون و نرم‌تر شدن سازه، میزان اختلاف فرکانس‌های پیش‌بینی شده توسط دو تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده، کاهش می‌یابد. این مهم در حالی رخ می‌دهد که، تغییرات ضریب پواسون هیچ‌گونه تأثیری بر فرکانس‌های عرضی پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک ندارد. از طرف دیگر، تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک، تغییری برای فرکانس طولی با تغییر ضریب پواسون پیش‌بینی ننموده در حالی که تئوری گرادیان کرنش، کاهش در فرکانس‌های طولی را با افزایش ضریب پواسون پیش‌بینی می‌نماید.

5- مراجع

[1] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 427–437, 2008.

[2] L. L. Ke, Y. S. Wang, Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 342–350, 2011.

[3] A. R. Alashti, A. H. Abolghasemi, A size-dependent Bernoulli-Euler beam formulation based on a new model of couple stress theory, *International Journal of Engineering TRANSACTIONS C*, Vol. 27, No. 6, pp. 951–960, 2014.

[4] A. M. Dehrouyeh-Semnani, M. Nikkhah-Bahrami, A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 86, No. 1, pp. 20–25, 2015.

[5] A. Ghanbari, A. Babaei, The new boundary condition effect on the free vibration analysis of micro-beams based on the modified couple stress theory, *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, Vol. 9, No. 3, pp. 274-279, 2015.

[6] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.

[7] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012 (in Persian فارسی).

[8] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 221-228, 2011.

[9] M. Asghari, M. H. Kahrobaiyan, M. Nikfar, M. T. Ahmadian, A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory, *Acta Mechanica*, Vol. 223, No. 6, pp. 1233-1249, 2012.

[10] M. H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 63, No. 1, pp. 52-60, 2013.

[11] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Size-dependent vibration of functionally graded curved microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 10, pp. 1439-1449, 2013.

[12] H. Mohammadi, M. Mahzoon, Investigating thermal effects in nonlinear buckling analysis of micro beams using modified strain gradient theory, *IJST, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 38, No. M2, pp. 303-320, 2014.

[13] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Free vibration of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient reddy beam theory, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 15, No. 5, pp. 401-412, 2014.

[14] D. Karličić, P. Kozić, R. Pavlović, K. Mazaheri, Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 1, pp. 217-233, 2015.

[15] I. Karimipour, A.R. Karimipour,Y. Tadi Beni, Determination of size-dependent non-linear pull-in instability of clamped nano-Beam based on the modified strain gradient theory using HPM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 101-112, 2015 (in Persian فارسی).

[16] A. Mehra, X. Zhang, A. A. Ayón, I. A. Waitz, M. A. Schmidt, C. M. Spadaccini, A Six-Wafer Combustion System for a Silicon Micro Gas Turbine Engine, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9, No. 4, pp. 517-527, 2000.

[17] W. Y. Sim, G. Y. Kim, S. S. Yang, Fabrication of micro power source (MPS) using a micro direct methanol fuel cell (DMFC) for the medical application, *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Interlaken, Switzerland, January 21–25, 2001.

[18] J. Peirs, D. Reynaerts, F. Verplaetsen, A microturbine for electric power generation, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 113, No. 1, pp. 86–93, 2004.

[19] A. H. Epstein, S. A. Jacobson, J. M. Protz, L.G. Fréchette, Shirtbuttonsized gas turbines: the engineering challenges of micro high speed rotating machinery, *Proceedings of the 8th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, March 26–30, 2000.

[20] S. Kang, S.-J.J. Lee, F.B. Prinz, Size does matter, the pros and cons of miniaturization, *ASEA Brown Boveri Review*, Vol. 2, No. 2, pp. 54–62, 2001.

[21] E. Matsuo, H. Yoshiki, T. Nagashima, C. Kato, Development of Ultra Gas Turbines, *Technical Digest Power MEMS 2002, International Workshop on Power MEMS*, Tsukuba, Japan, November 12–13 2002.

[22] S. C. Pradhan, T. Murmu, Application of nonlocal elasticity and DQM in the flapwise bending vibration of a rotating nanocantilever, *Physica E: Lowdimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 42, No. 7, pp. 1944–1949, 2010.

[23] S. Narendar, Differential quadrature based nonlocal flapwise bending vibration analysis of rotating nanotube with consideration of transverse shear deformation and rotary inertia, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, No. 3, pp. 1232–1243, 2012.

[24] J. Aranda-Ruiz, J. Loya, J. Fernández-Sáez, Bending vibrations of rotating nonuniform nanocantilevers using the Eringen nonlocal elasticity theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 9, pp. 2990–3001, 2012.

[25] M. A. Torkaman-Asadi, M. Rahmanian, R.D. Firouz-Abadi, Free vibrations and stability of high-speed rotating carbon nanotubes partially resting on Winkler foundations, *Composite Structures*, Vol. 126, No. 1, pp. 52-61, 2015.

[26] S. Dutta, V. Giurgiutiu, Health monitoring and quality assurance for rotary micromachines and active sensors, *8th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, March 26-30 2000.

[27] M. Hashemi, M. Asghari, Investigation of the small-scale effects on the three-dimensional flexural vibration characteristics of a basic model for micro-engines, *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 9, pp. 3085–3096, 2015.

[28] A. M. Dehrouyeh-Semnani, The influence of size effect on flapwise vibration of rotating microbeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 94, No. 1, pp. 150-163, 2015.

[29] H. Arvin, F. Bakhtiar--Nejad, Nonlinear modal analysis of a rotating beam, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 46, No. 6, pp. 877-897, 2011.

[30] W. Lacarbonara, H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades - part 1: linear modal properties, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, No. 1, pp. 659-675, 2012.

[31] A. Najafi, M. R. Ghazavi, A. A. Jafari, Nonlinear analysis of resonance between the blade and rotor by the bifurcation equation and numerical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 43-51, 2014 (in Persian فارسی).

[32] L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibrations*, First Edittion, pp. 368-370, 400-405, 544-547, New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.32.7]