



## تحلیل اجزا محدود برای رفتار تیر پلیمری حافظه دار تیموشنکو

امیرحسین اسکندری<sup>1</sup>، مصطفی باغانی<sup>2\*</sup>، مجید بنی اسدی<sup>2</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 4563-11155، baghani@ut.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 تیر 1396

پذیرش: 02 مرداد 1396

ارائه در سایت: 20 مرداد 1396

کلید واژگان:

پلیمر حافظه دار

تیر تیموشنکو

المان محدود

در این مقاله با استفاده از یک مدل ساختاری ترمومکانیکی برای پلیمرهای حافظه دار، یک المان تیر از جنس پلیمر حافظه دار با فرضیات سینماتیکی تیموشنکو ارائه شده است. نیاز به المان تیر تیموشنکو از آن جایی پررنگ تر می شود، که با توجه به سفتی نسبتاً پایین پلیمرهای حافظه دار، بایستی از تیرهای نسبتاً ضخیم در فرآیند طراحی این سازه های هوشمند بهره برد. در فرآیندهای طراحی و بهینه سازی این سازه ها که نیازمند تعداد دفعات تحلیل متعدد می باشد، نمی توان به تحلیل های سه بعدی که به مقدار قابل توجهی زمان بر هستند تکیه کرد. به منظور صحت گذاری فرمول بندی استخراج شده، نتایج عددی این مدل سازی با نتایج مدل سازی سه بعدی اجزا محدود که توسط همین نویسندگان قبلاً منتشر شده است، مقایسه شده و بر این اساس، اثر پارامترهای مختلف ماده و بارگذاری شامل کسر حجمی بخش سخت، تاثیر اعمال نیروی مکانیکی در مرحله گرم کردن و ضریب ویسکوزیته فاز لاستیکی و غیره بر روی رفتار ترمومکانیکی یک تیر I-شکل کوتاه مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه حداکثر خطای خیز تیر در یکی از مثال های حل شده، برای تیر اوپلر-برنولی 7.3 درصد و برای تیر تیموشنکو 1.5 درصد نسبت به حل سه بعدی می باشد. بدیهی است هر چه ضخامت تیر بیشتر و یا تیر کوتاه تر باشد، خطای تیر اوپلر-برنولی بیشتر خواهد بود. المان تیر ارائه شده در این مقاله می تواند جایگزینی سریع و قابل اعتماد برای مدل سازی های سه بعدی با هزینه محاسباتی و پیچیدگی زیاد، به منظور شبیه سازی سازه های تقویت شده با پلیمرهای حافظه دار و همچنین بررسی اثر تغییر پارامترهای هندسی و مادی این سازه ها، باشد.

## A finite element analysis for shape memory polymer Timoshenko beams

Amir Hossein Eskandari, Mostafa Baghani\*, Majid Baniassadi

School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

\* P.O.B. 4563-11155, Tehran, Iran, baghani@ut.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 27 June 2017

Accepted 24 July 2017

Available Online 11 August 2017

## Keywords:

Shape memory polymer

Timoshenko beam

Finite element method

## ABSTRACT

In this paper, employing a thermomechanical constitutive model for shape memory polymers (SMP), a beam element made of SMPs is presented based on the kinematic assumptions of Timoshenko beam theory. Considering the low stiffness of SMPs, the necessity for developing a Timoshenko beam element becomes more prominent. This is due to the fact that relatively thicker beams are required in the design procedure of smart structures. Furthermore, in the design and optimization process of these structures which involves a large number of simulations, we cannot rely only on the time consuming 3D finite element (FE) analyses. In order to properly validate the developed formulations, the numeric results of the present work are compared with those of 3D finite element results of the same authors, previously available in the literature. The parametric study on the material parameters, e.g., hard segment volume fraction, viscosity coefficient of different phases, and the external force applied on the structure (during the recovery stage) is conducted on the thermomechanical response of a short I-shape SMP beam. For instance, the maximum beam deflection error in one of the studied examples for the Euler-Bernoulli beam theory is 7.3%, while for the Timoshenko beam theory, is 1.5% with respect to the 3D FE solution. It is noted that for thicker or shorter beams, the error of the Euler-Bernoulli beam theory increases even more. The proposed beam element in this work, could be a fast and reliable tool for modeling 3D computationally expensive simulations.

## 1- مقدمه

به محرک های خارجی مانند دما، الکتروسیسته، مغناطیس و نور پاسخ نشان می دهند. این مواد می توانند به صورت مکانیکی تغییر شکل داده و سپس با تحریک دمایی به حالت اولیه خود برگردند. پدیده ذخیره شدن و رها شدن کرنش در این مواد را اثر حافظه شکلی می نامند [1]. پلیمرهای حافظه دار در مقایسه با انواع دیگر مواد حافظه دار مانند آلیاژهای حافظه دار<sup>3</sup>، قابلیت تغییر

پلیمرهای حافظه دار<sup>1</sup> نوعی از پلیمرها می باشند که از خود خاصیت حافظه شکلی<sup>2</sup> نشان می دهند. این مواد در دهه های گذشته به عنوان یکی از انواع اصلی مواد حافظه دار مورد توجه محققین قرار گرفته اند. پلیمرهای حافظه دار

<sup>1</sup> Shape Memory Polymers (SMPs)<sup>2</sup> Shape Memory Effect<sup>3</sup> Shape Memory Alloys (SMAs)

## Please cite this article using:

A. H. Eskandari, M. Baghani, M. Baniassadi, A finite element analysis for shape memory polymer Timoshenko beams, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 351-359, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در این مقاله، ما یک حل المان محدود یک بعدی، برای تیرهای از جنس پلیمرهای حافظه‌دار براساس تئوری تیر تیموشنکو در یک بارگذاری اختیاری ارائه می‌دهیم. این فرمول‌بندی برای مدل‌سازی سازه‌های از جنس پلیمر حافظه‌دار کاربرد دارد. با استفاده از المان ارائه شده، امکان تحلیل پارامتری (پارامترهای هندسی و یا مادی) و نیز بهینه‌سازی سازه‌هایی که با پلیمرهای حافظه‌دار ساخته و یا تقویت شده اند با هزینه محاسباتی و زمان حل کمتر از المان سه‌بعدی، فراهم می‌آید. نیاز به المان تیر تیموشنکو از آنجایی پررنگ تر می‌شود، که با توجه به سفتی نسبتاً پایین پلیمرهای حافظه‌دار، بایستی از تیرهای نسبتاً ضخیم در فرآیند طراحی این سازه‌های هوشمند بهره برد. در فرآیندهای طراحی و بهینه‌سازی این سازه‌ها که نیازمند تعداد دفعات تحلیل متعدد می‌باشد، نمی‌توان به تحلیل‌های سه‌بعدی که به شکل قابل توجهی زمان بر هستند تکیه کرد. این مجموعه علل، نویسندگان این مقاله را بر آن داشت تا به ارائه فرمول‌بندی المان پلیمری حافظه‌دار با فرضیات سینماتیک تیر تیموشنکو بپردازند.

این مقاله در چهار بخش ارائه شده است. در بخش 2، معادلات ساختاری سه‌بعدی، با استفاده از فرضیات تئوری تیموشنکو، کاهش داده شده و فرمول‌بندی مربوطه برای یک المان تیر تیموشنکو استخراج می‌شوند. در بخش 3 نتایج عددی حل المان ارائه شده برای یک تیر کوتاه، با نتایج مدل‌سازی سه‌بعدی و نیز تیر اویلر-برنولی [31] صحنه‌سنجی و مقایسه می‌شود. همچنین در این بخش، اثر پارامترهای مختلف ماده و بارگذاری بر روی نتایج بحث و بررسی می‌شود. و در نهایت در بخش 4، یک خلاصه و نتیجه‌گیری بر روی نتایج و حل، ارائه می‌گردد.

## 2- فرمول‌بندی معادلات حاکم بر تیر پلیمری حافظه‌دار

### 2-1- معادلات ساختاری رفتار وابسته به زمان پلیمر حافظه‌دار

جزئیات مشخصات رفتار ترمومکانیکی پلیمرهای حافظه‌دار در مراجع [22-24] توسط نویسنده، ارائه و بررسی شده است. در این مقاله از مدل ساختاری که توسط باغانی و همکارانش [23,24] برای کرنش‌های کوچک و همچنین شرایط بارگذاری وابسته به زمان، ارائه شده است، استفاده می‌شود. در این مدل فرض شده است که فازهای شیشه‌ای<sup>۵</sup> و لاستیکی<sup>۵</sup> می‌توانند تحت تحریک دمایی به یکدیگر تبدیل شوند.

بردارهای تنش و کرنش با فرضیات تیموشنکو برای یک تیر در علامت گذاری Voigt [32]، به صورت رابطه (1) قابل تعریف می‌باشند:

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, [\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

کرنش به چهار بخش زیر قابل تجزیه می‌باشد [24]:

$$[\varepsilon] = \phi_p [\varepsilon]^p + \phi_h [\varepsilon]^h + [\varepsilon]^i + [\varepsilon]^T \quad (2)$$

که در آن اندیس‌های  $p$  و  $h$  به ترتیب مربوط به بخش پلیمر حافظه‌دار و فاز سخت (شامل ذرات میکرو یا نانو به منظور افزایش سفتی ماده) می‌باشند. همچنین  $\varepsilon^i$ ،  $\varepsilon^p$ ،  $\varepsilon^T$ ، به ترتیب نشان‌دهنده کرنش‌های برگشت ناپذیر، کرنش در بخش پلیمری و کرنش انبساط حرارتی می‌باشند.  $\phi_h$  و  $\phi_p$  به ترتیب کسر حجمی بخش‌های پلیمر و سخت را نشان می‌دهند. به علاوه کرنش در بخش پلیمری مطابق رابطه (3) به سه بخش تقسیم می‌شود [33]:

$$[\varepsilon]^p = \varphi_r [\varepsilon]^r + \varphi_g [\varepsilon]^g + [\varepsilon]^{is} \quad (3)$$

که در این معادله:

شکل بیشتری دارند (حدود 50 برابر) [2] و خاصیت زیست‌تخریب‌پذیری بالایی دارند [3]. این مزیت‌ها باعث می‌شود تا این مواد در کاربردهایی نظیر عملگر<sup>۱</sup> [4,5]، تجهیزات پزشکی [6-10]، سیستم‌های میکرو-الکترو-مکانیکی [11] و سازه‌های هوشمند فضایی [12] مورد استفاده قرار گیرند.

با توجه به سفتی مکانیکی نسبتاً پایین این مواد در دمای بالاتر از دمای انتقال شیشه‌ای، معمولاً تیرهای ساخته شده از این مواد به کمک روش‌های مختلف مانند: مواد کامپوزیتی [13]، استفاده از ذرات نانو [14] و یا با تغییر پارامترهای هندسی مانند افزایش ضخامت نسبت به طول تیر، تقویت می‌شوند. برای نمونه از این مواد در بال‌های تغییر شکل‌پذیر<sup>۲</sup> - تحریک بال یک پرند با استفاده از تغییر دما - استفاده می‌شود [15,16].

بررسی رفتاری پلیمرهای حافظه‌دار به صورت آزمایشگاهی - محدود به گستره کرنش‌های کوچک و به صورت یک‌بعدی - از سال 1996 توسط توبوشی و همکارانش آغاز شد و بر این اساس، یک مدل ویسکوالاستیسیته خطی بر مبنای نتایج آزمایشگاهی ارائه شد [17]. این مدل با افزودن اثرات دمایی به صورت کامل‌تر در سال 2000 توسط توبوشی و همکارانش ارائه گردید [18]. لیو و همکارانش نیز در سال‌های 2003 و 2004 نتایج آزمایشگاهی تک‌محوره را برای نوعی از پلیمرهای حافظه‌دار ارائه دادند [19,20]. همچنین در سال 2006 لیو و همکارانش مدلی سه‌بعدی را بر مبنای تغییر فاز داخلی ارائه کردند که اولین مدل سه‌بعدی ارائه شده برای پلیمرهای حافظه‌دار بود. این مدل برای شرایط بارگذاری تک‌محوره اعتبارسنجی شده است و یکی از مدل‌های پایه‌ای برای پلیمرهای حافظه‌دار می‌باشد به طوری که تعداد قابل توجهی از مدل‌هایی که پس از سال 2006 ارائه شده‌اند فرضیات اساسی این مدل را در بردارند [21].

در سال‌های 2012 و 2013 باغانی و همکارانش، به کمک ترمودینامیک محیط‌های پیوسته، مدلی سه‌بعدی برای پیش‌بینی رفتار پلیمرهای حافظه‌دار در تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از روش اجزا محدود، رفتار چند سازه مختلف از جنس پلیمرهای حافظه‌دار را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی نمودند [22-24].

در زمینه بررسی سازه‌های پلیمری حافظه‌دار نیز مطالعات مختلفی در سال‌های اخیر انجام گرفته است. مسئله پیچش میله‌ای با مقطع مستطیلی توسط دیانی و همکارانش در سال 2012 به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفت [25]. باغانی و همکارانش در سال 2012 برای فنرهای مارپیچ کششی و فشاری ساخته شده از جنس پلیمرهای حافظه‌دار حل تحلیلی ارائه کردند و مسئله پیچش یک لوله استوانه‌ای و پیچش میله‌ای با مقطع مستطیل (با نوشتن زیرروال یومت<sup>۳</sup> در نرم‌افزار آباکوس) را تحت بارگذاری‌های چرخه‌ای به روش اجزا محدود مورد بررسی قرار دادند [26]. باغانی و همکاران در سال 2014 [27] یک حل تحلیلی استاتیکی برای پلیمرهای حافظه‌دار با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی ارائه نمودند. همچنین باغانی و طاهری در سال 2015 [28]، حل ارائه شده در [27] را برای تیرهای کامپوزیتی پلیمری حافظه‌دار توسعه دادند. در سال 2013 گوش و همکارانش براساس مدل رفتاری ارائه شده توسط [29]، تئوری تیر اویلر-برنولی را برای تیرهای از جنس پلیمر حافظه‌دار توسعه دادند و المان تیر چهار درجه آزادی را نیز برای حل اجزا محدود آن معرفی کردند [30]. باغانی و همکاران در سال 2017 براساس مدل ساختاری خود [24]، یک المان تیر چهار درجه آزادی را با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی ارائه دادند [31].

<sup>1</sup> Actuator

<sup>2</sup> Morphing Wing

<sup>3</sup> UMAT

<sup>4</sup> Glassy Phase  
<sup>5</sup> Rubbery Phase

دوم ترمودینامیک در شکل نابرابری کلازیوس-دوهم<sup>1</sup>، داریم [24]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \psi_{r_b}^{eq}}{\partial \varepsilon_{xx}^r} + \frac{\partial \psi_{r_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{er}} = \frac{\partial \psi_{g_b}^{eq}}{\partial \varepsilon_{xx}^g} + \frac{\partial \psi_{g_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{eg}} = \frac{\partial \psi_{h_b}^{eq}}{\partial \varepsilon_{xx}^h} + \frac{\partial \psi_{h_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{eh}} \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi_{r_s}^{eq}}{\partial \gamma_{xz}^r} + \frac{\partial \psi_{r_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{er}} = \frac{\partial \psi_{g_s}^{eq}}{\partial \gamma_{xz}^g} + \frac{\partial \psi_{g_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{eg}} = \frac{\partial \psi_{h_s}^{eq}}{\partial \gamma_{xz}^h} + \frac{\partial \psi_{h_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{eh}} \quad (13)$$

علاوه بر این، مطابق با رفتار ویسکوالاستیک پلیمرها، روابط رشد ارائه شده در زیر، شرایط کافی برای ارضای نابرابری کلازیوس-دوهم می‌باشند [34]:

$$\varepsilon_{xx}^{ir} = \frac{1}{\eta_r} \frac{\partial \psi_{r_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{er}}, \quad \varepsilon_{xx}^{ig} = \frac{1}{\eta_g} \frac{\partial \psi_{g_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{eg}} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xx}^{ih} = \frac{1}{\eta_h} \frac{\partial \psi_{h_b}^{neq}}{\partial \varepsilon_{xx}^{eh}}, \quad \varepsilon_{xx}^{i} = \frac{1}{\eta_i} \sigma_{xx}$$

$$\dot{\gamma}_{xz}^{ir} = \frac{1}{\eta_r} \frac{\partial \psi_{r_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{er}}, \quad \dot{\gamma}_{xz}^{ig} = \frac{1}{\eta_g} \frac{\partial \psi_{g_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{eg}}$$

$$\dot{\gamma}_{xz}^{ih} = \frac{1}{\eta_h} \frac{\partial \psi_{h_s}^{neq}}{\partial \gamma_{xz}^{eh}}, \quad \dot{\gamma}_{xz}^i = \frac{1}{\eta_i} \tau_{xz} \quad (15)$$

که در آن  $\eta_r, \eta_g, \eta_h, \eta_i$  به ترتیب ضرایب ویسکوزیته بخش‌های لاستیکی، شیشه‌ای، بخش سخت و بخش برگشت ناپذیر هستند.

## 2-2- استخراج معادلات المان تیر تیموشنکو از جنس پلیمر حافظه دار

در این بخش فرض می‌شود که انرژی‌های کرنشی الاستیک تعادلی و غیرتعادلی به شکل زیر می‌باشند:

$$\psi_{\beta_b}^{eq}(\varepsilon_{xx}^\beta) = \frac{1}{2} E_\beta^{eq} (\varepsilon_{xx}^\beta)^2$$

$$\psi_{\beta_b}^{neq}(\varepsilon_{xx}^{e\beta}) = \frac{1}{2} E_\beta^{neq} (\varepsilon_{xx}^{e\beta})^2$$

$$\psi_{\beta_s}^{eq}(\gamma_{xz}^\beta) = \frac{1}{2} G_\beta^{eq} (\gamma_{xz}^\beta)^2$$

$$\psi_{\beta_b}^{neq}(\gamma_{xz}^{e\beta}) = \frac{1}{2} G_\beta^{neq} (\gamma_{xz}^{e\beta})^2$$

$$\beta = r, g, h \quad (16)$$

که در آن‌ها  $E_\beta^{neq}$  و  $E_\beta^{eq}$  مدول الاستیک تعادلی و غیرتعادلی هر فاز بوده و  $G_\beta^{neq}$  و  $G_\beta^{eq}$  نیز به ترتیب، مدول برشی تعادلی و غیرتعادلی در هر فاز می‌باشند.

بر اساس فرضیات سینماتیک تئوری تیر تیموشنکو، خمش تیرهای با کرنش‌ها و دوران‌های کوچک، از میدان جابجایی زیر پیروی می‌کند:

$$u_1 = -z\theta(x), u_2 = 0, u_3 = w(x) \quad (17)$$

که در آن  $u_{i=1,2,3}$  جابجایی‌های نقطه‌ای ماده در مکان  $x, y, z$  و  $w$  و  $\theta$  به ترتیب جابجایی‌های عرضی (روی محور  $z$ ) و چرخش بردار نرمال سطح مقطع تیر هستند.

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی، میدان کرنش حاصل از میدان جابجایی مذکور، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{d\theta}{dx}, \gamma_{xz} = k \left( -\theta + \frac{dw}{dx} \right) \quad (18)$$

به علت این که کرنش برشی حقیقی در عرض تیر ثابت نیست، از ضریب تصحیح  $k$  استفاده می‌شود که وابسته به هندسه سطح مقطع است.

برای حل معادلات ساختاری پلیمر حافظه دار، ابتدا باید گسسته‌سازی انجام شود. شکل ضمنی گسسته شده زمانی برای معادله (4) به صورت زیر

- اندیس‌های  $g$  و  $r$  به ترتیب نشان‌دهنده فازهای لاستیکی و شیشه‌ای
- $\varphi_r$  و  $\varphi_g$  به ترتیب کسر حجمی فازهای لاستیکی و شیشه‌ای و وابسته به دما
- $\varepsilon^{is}$  کرنش ذخیره شده در ماده

می‌باشد و به شکل رابطه (4) نشان داده می‌شوند [24]:

$$[\varepsilon]^{is} = \varphi_g \left( k_1 [\varepsilon]^r + k_2 \frac{[\varepsilon]^{is}}{\varphi_g} \right);$$

$$\begin{cases} k_1 = 1, k_2 = 0; \dot{T} < 0 \\ k_1 = 0, k_2 = 1; \dot{T} > 0 \\ k_1 = 0, k_2 = 0; \dot{T} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

در این رابطه، علامت دات نشان‌دهنده مشتق زمانی می‌باشد.

جهت ارزیابی رفتار ویسکوالاستیک پلیمرهای حافظه دار در محدوده کرنش‌های کوچک، کرنش فازهای شیشه‌ای، لاستیکی و فاز سخت مطابق رابطه (5) تجزیه می‌شوند:

$$[\varepsilon]^r = [\varepsilon]^{er} + [\varepsilon]^{ir}$$

$$[\varepsilon]^g = [\varepsilon]^{eg} + [\varepsilon]^{ig}$$

$$[\varepsilon]^h = [\varepsilon]^{eh} + [\varepsilon]^{ih} \quad (5)$$

که بالانویس‌های  $e\beta$  و  $i\beta$  ( $\beta = r, g, h$ ) به ترتیب بخش‌های الاستیک و غیرالاستیک (ویسکوالاستیک) کرنش در همه فازها را نشان می‌دهند. با استفاده از قانون مخلوطها، تابع چگالی انرژی آزاد ( $\Psi$ ) برای یک آمورف تقویت شده با پلیمر حافظه دار برای بخش خمشی و برشی به این صورت معرفی می‌شوند:

$$\Psi_b(\varepsilon_{xx}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_g, \phi_r, \varepsilon_{xx}^r, \varepsilon_{xx}^{er}, \varepsilon_{xx}^g, \varepsilon_{xx}^{eg}, \varepsilon_{xx}^h, \varepsilon_{xx}^{eh}, \varepsilon_{xx}^{is}) = \phi_h \Psi_{h_b}(\varepsilon_{xx}^h, \varepsilon_{xx}^{eh}) + \Psi_T(T) + \phi_p [\varphi_r \Psi_{r_b}(\varepsilon_{xx}^r, \varepsilon_{xx}^{er}) + \varphi_g \Psi_{g_b}(\varepsilon_{xx}^g, \varepsilon_{xx}^{eg})] + \Psi_{h_b}(\varepsilon_{xx}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_r, \phi_g, \varepsilon_{xx}^r, \varepsilon_{xx}^{er}, \varepsilon_{xx}^g, \varepsilon_{xx}^{eg}, \varepsilon_{xx}^h, \varepsilon_{xx}^{eh}, \varepsilon_{xx}^{is}) \quad (6)$$

$$\Psi_s(\gamma_{xz}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_g, \phi_r, \gamma_{xz}^r, \gamma_{xz}^{er}, \gamma_{xz}^g, \gamma_{xz}^{eg}, \gamma_{xz}^h, \gamma_{xz}^{eh}, \gamma_{xz}^{is}) = \phi_h \Psi_{h_s}(\gamma_{xz}^h, \gamma_{xz}^{eh}) + \phi_p [\varphi_r \Psi_{r_s}(\gamma_{xz}^r, \gamma_{xz}^{er}) + \varphi_g \Psi_{g_s}(\gamma_{xz}^g, \gamma_{xz}^{eg})] + \Psi_{h_s}(\gamma_{xz}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_r, \phi_g, \gamma_{xz}^r, \gamma_{xz}^{er}, \gamma_{xz}^g, \gamma_{xz}^{eg}, \gamma_{xz}^h, \gamma_{xz}^{eh}, \gamma_{xz}^{is}) \quad (7)$$

که در رابطه بالا، اندیس‌های  $b$  و  $s$  به ترتیب نشان‌دهنده سهم خمشی و برشی بوده و  $\Psi_r$  و  $\Psi_g$  و  $\Psi_h$  به ترتیب توابع چگالی انرژی آزاد هلمهولتز برای فازهای لاستیکی، شیشه‌ای و فاز سخت می‌باشند. همچنین دما با  $T$  نشان داده می‌شود و  $\Psi_T$  نشان‌دهنده انرژی حرارتی می‌باشد. به علاوه جهت ارضای روابط (2)، (3) و (5)، با استفاده از ضرایب لاگرانژ، جمله  $\Psi_\lambda$  به انرژی آزاد اضافه می‌شود:

$$\Psi_{\lambda_b}(\varepsilon_{xx}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_r, \phi_g, \varepsilon_{xx}^r, \varepsilon_{xx}^g, \varepsilon_{xx}^h, \varepsilon_{xx}^{is}, \varepsilon_{xx}^i) = \lambda_b [\varepsilon_{xx} - \phi_p (\varphi_r \varepsilon_{xx}^r + \varphi_g \varepsilon_{xx}^g + \varepsilon_{xx}^{is}) - \phi_h \varepsilon_{xx}^h - \varepsilon_{xx}^i - \varepsilon^T] \quad (8)$$

$$\Psi_{\lambda_s}(\gamma_{xz}, T, \phi_p, \phi_h, \phi_r, \phi_g, \gamma_{xz}^r, \gamma_{xz}^g, \gamma_{xz}^h, \gamma_{xz}^{is}, \gamma_{xz}^i) = \lambda_s [\gamma_{xz} - \phi_p (\varphi_r \gamma_{xz}^r + \varphi_g \gamma_{xz}^g + \gamma_{xz}^{is}) - \phi_h \gamma_{xz}^h - \gamma_{xz}^i] \quad (9)$$

که در آن  $\lambda_b$  و  $\lambda_s$  ضرایب لاگرانژ می‌باشند. هم چنین عبارت‌های زیر نیز برای بخش خمشی و برشی تعریف می‌شوند:

$$\Psi_{\beta_b}(\varepsilon_{xx}^\beta, \varepsilon_{xx}^{e\beta}) = \Psi_{\beta_b}^{eq}(\varepsilon_{xx}^\beta) + \Psi_{\beta_b}^{neq}(\varepsilon_{xx}^{e\beta}) \quad (10)$$

$$\Psi_{\beta_s}(\gamma_{xz}^\beta, \gamma_{xz}^{e\beta}) = \Psi_{\beta_s}^{eq}(\gamma_{xz}^\beta) + \Psi_{\beta_s}^{neq}(\gamma_{xz}^{e\beta}) \quad (11)$$

که در آن‌ها، بالانویس‌های  $eq$  و  $neq$  به ترتیب نشان‌دهنده بخش‌های تعادلی و غیرتعادلی (وابسته به زمان)  $\Psi_\beta(\varepsilon^\beta, \varepsilon^{e\beta})$  می‌باشند همچنین  $\beta = r, g, h$  می‌باشد. در این مدل‌سازی  $\varphi_r, \varphi_g, \varphi_h, \varepsilon^{ir}, \varepsilon^{ig}, \varepsilon^{ih}, \varepsilon^{is}$  و  $\varepsilon^i$  متغیرهای داخلی می‌باشند. بنابراین قوانین رشد در قالب ترمودینامیک محیط‌های پیوسته برای متغیرهای داخلی، باید معرفی شوند. با ارضای قانون

<sup>1</sup> Clausius-Duhem inequality

$$\begin{aligned} \chi_{3s} &= \left( \left( (1 + b_{gs})\phi_p\varphi + b_{ic_{gs}} \right) c_{hs} + \right. \\ &\quad \left. (b_{hs} + 1)(1 - \phi_p)c_{gs} \right) k_3 c_{rs} + \\ &\quad (k_3(1 - \varphi) + k_4)(b_{rs} + 1)\phi_p c_{gs} c_{hs} \\ A_b &= \varepsilon_{xxn}^{is} + k_3(b_{nb}\varepsilon_{xxn}^{ih} - b_{gb}\varepsilon_{xxn}^{ig}\varphi) \\ A_s &= \gamma_{xz n}^{is} + k_3(b_{ns}\gamma_{xz n}^{ih} - b_{gs}\gamma_{xz n}^{ig}\varphi) \\ B_b &= b_{rb}\varepsilon_{xxn}^{ir}(k_3(\varphi - 1) - k_4) \\ B_s &= b_{rs}\gamma_{xz n}^{ir}(k_3(\varphi - 1) - k_4) \\ C_b &= (\varepsilon_{xxn}^i - b_h\varepsilon_{xxn}^{ih} - \varepsilon_{xx}^m)k_3 \\ C_s &= (\gamma_{xz n}^i - b_{hs}\gamma_{xz n}^{ih} - \gamma_{xz}^m)k_3 \\ D_b &= c_{hb}(b_{gb} + 1)b_{gb}\varepsilon_{xxn}^{ig}E_g\phi_p\varphi \\ D_s &= c_{hs}(b_{gs} + 1)b_{gs}\gamma_{xz n}^{ig}G_g\phi_p\varphi \\ E_b &= (1 - \phi_p)(b_{hb} + 1)b_{hb}\varepsilon_{xxn}^{ih}E_h c_{gb} \\ E_s &= (1 - \phi_p)(b_{hs} + 1)b_{hs}\gamma_{xz n}^{ih}G_h c_{gs} \\ F_b &= (k_3 + k_4 - k_3\varphi)(b_{rb} + 1)b_{rb}\phi_p\varepsilon_{xxn}^{ir}E_r c_{gb} c_{hb} \\ F_s &= (k_3 + k_4 - k_3\varphi)(b_{rs} + 1)b_{rs}\phi_p\gamma_{xz n}^{ir}G_r c_{gs} c_{hs} \end{aligned} \quad (25)$$

با بازنویسی معادلات (22) و (23) برحسب مولفه‌های جابجایی، خواهیم

داشت:

$$\sigma_{xx} = \chi_{1b}(-z\theta') + \chi_{2zb}z = z(-\chi_{1b}\theta' + \chi_{2zb}) \quad (26)$$

$$\tau_{xz} = -k\chi_{1s}\theta + k\chi_{1s}w' + \chi_{2s} \quad (27)$$

که علامت پریم نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر  $x$  می‌باشد. با توجه به معادله (26)، می‌توان دریافت که تنش در این حالت نیز به صورت خطی با ضخامت تیر تغییر می‌کند. با محاسبه گشتاور حول محور  $y$  و نیروی برشی خواهیم داشت:

$$M = - \int_A \sigma_{xx} z dA = (\chi_{1b}\theta' - \chi_{2zb})I \quad (28)$$

$$V = \int_A \tau_{xz} dA = (-k\chi_{1s}\theta + k\chi_{1s}w' + \chi_{2s})A \quad (29)$$

که در آن  $M$ ،  $I$ ،  $A$  و  $V$  به ترتیب نشان‌دهنده ممان اینرسی، ممان حول محور  $y$ ، مساحت سطح مقطع تیر و نیروی برشی می‌باشند. معادلات (26) و (27) چنین بازنویسی می‌شوند:

$$M = \psi_{1b}\theta' + \psi_{2b}; \quad \psi_{1b} = \chi_{1b}I, \quad \psi_{2b} = -\chi_{2zb}I \quad (30)$$

$$V = -\psi_{1s}\theta + \psi_{1s}w' + \psi_{2s}; \quad \psi_{1s} = k\chi_{1s}A, \quad \psi_{2s} = \chi_{2s}A \quad (31)$$

با استفاده از اصل کار مجازی و همچنین درجات آزادی نشان داده شده در "شکل 1" برای المان تیر تیموشنکو داریم:

$$\begin{aligned} \delta W^e &= \int_A \int_0^{l^e} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dx dA + \int_A \int_0^{l^e} \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dx dA - \\ &\quad \int_0^{l^e} q(x) \delta w dx - \sum_{i=1}^4 Q_i \delta \Omega_i \end{aligned} \quad (32)$$

که  $l^e$  نشان‌دهنده طول المان،  $q(x)$  نشان‌دهنده بارگذاری گسترده عرضی بر واحد طول تیر،  $Q_i$  ها نشان‌دهنده نیروهای متمرکز و  $\delta \Omega_i$  نشان‌دهنده جابجایی‌های تعمیم یافته و مجازی گره‌های المان می‌باشند. بنابراین با توجه به تعاریف، عبارت کار مجازی برای تیر تیموشنکو چنین خواهد شد:

$$\int_A \int_0^{l^e} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dx dA = - \int_0^{l^e} \frac{d(\delta\theta)}{dx} \int_A \sigma_{xx} z dA dx \quad (33)$$

$$\int_A \int_0^{l^e} \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dx dA =$$

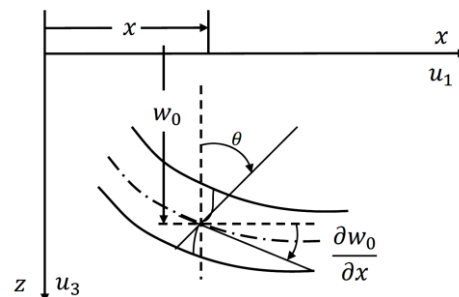


Fig. 1 The schematics of the Timoshenko beam element together with the defined degrees of freedom

شکل 1 شماتیک المان تیر تیموشنکو به همراه درجات آزادی

می‌باشد:

$$[\varepsilon]^{is}(1 - k_2\varphi^{-1}\Delta\varphi) = [\varepsilon]_n^{is} + k_1\Delta\varphi[\varepsilon]^r \quad (19)$$

علاوه بر این، با گسسته‌سازی معادلات (14) و (15) و بازنویسی معادله (19)، روابط زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{ib} &= c_{\beta b}^{-1}(\sigma_{xx} + E_{\beta} b_{\beta b} \varepsilon_{xxn}^{ib}) \\ \gamma_{xz}^{ib} &= c_{\beta s}^{-1}(\tau_{xz} + G_{\beta} b_{\beta s} \gamma_{xz n}^{ib}) \\ \varepsilon_{xx}^i &= \varepsilon_{xxn}^i + b_i \\ \gamma_{xz}^i &= \gamma_{xz n}^i + b_i \\ \varepsilon_{xx}^{is} &= k_3^{-1}(\varepsilon_{xxn}^{is} + k_4((b_{rb} + 1)\varepsilon_{xxn}^{ir} - b_{rb}\varepsilon_{xxn}^{ir})) \\ \gamma_{xz}^{is} &= k_3^{-1}(\gamma_{xz n}^{is} + k_4((b_{rs} + 1)\gamma_{xz n}^{ir} - b_{rs}\gamma_{xz n}^{ir})) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} b_{\beta b} &= \frac{\eta_{\beta}}{\Delta t E_{\beta}^{neq}}, b_i = \frac{\Delta t}{\eta_{\beta}}, c_{\beta b} = E_{\beta} b_{\beta b} + E_{\beta}^{eq}, \\ E_{\beta} &= E_{\beta}^{eq} + E_{\beta}^{neq} \\ b_{\beta s} &= \frac{\eta_{\beta}}{\Delta t G_{\beta}^{neq}}, c_{\beta s} = G_{\beta} b_{\beta s} + G_{\beta}^{eq}, G_{\beta} = G_{\beta}^{eq} + G_{\beta}^{neq} \\ k_3 &= 1 - k_2\varphi^{-1}\Delta\varphi \\ k_4 &= k_1\Delta\varphi \\ \beta &= r, g, h \end{aligned} \quad (21)$$

معادلات (19) تا (21)، نحوه بروزسانی متغیرهای داخلی در هر  $\Delta t$  را نشان می‌دهند. بنابراین بعد از ساده‌سازی‌ها و مرتب‌سازی‌های ریاضی، رابطه تنش محوری و تنش برشی به‌روزرسانی شده چنین بازنویسی می‌گردند:

$$\sigma_{xx} = \chi_{1b}\varepsilon_{xx}^m + \chi_{2b}z, \varepsilon_{xx}^m = \varepsilon_{xx} - \varepsilon^T \quad (22)$$

$$\tau_{xz} = \chi_{1s}\gamma_{xz}^m + \chi_{2s}, \gamma_{xz}^m = \gamma_{xz} \quad (23)$$

و  $\gamma_{xz}^m$  و  $\varepsilon_{xx}^m$  به ترتیب نشان‌دهنده بخش مکانیکی کرنش کل و کرنش برشی می‌باشند. پارامترهای  $\chi_{1s}$ ،  $\chi_{2b}$ ،  $\chi_{1b}$ ،  $\chi_{2s}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \chi_{1b} &= \frac{c_{rb}c_{gb}c_{hb}k_3}{\chi_{3b}} \\ \chi_{2b} &= \chi_{2zb}z = \frac{-1}{\chi_{3b}} \left[ \begin{aligned} &([A_b + B_b]\varphi_p + C_b)c_{rb}c_{gb}c_{hb} \\ &+ (D_b + E_b)c_{rb}k_3 \\ &+ F_b \end{aligned} \right] \\ \chi_{3b} &= \left( \left( (1 + b_{gb})\phi_p\varphi + b_{ic_{gb}} \right) c_{hb} + \right. \\ &\quad \left. (b_{nb} + 1)(1 - \phi_p)c_{gb} \right) k_3 c_{rb} + \\ &\quad (k_3(1 - \varphi) + k_4)(b_{rb} + 1)\phi_p c_{gb} c_{hb} \\ \chi_{1s} &= \frac{c_{rs}c_{gs}c_{hs}k_3}{\chi_{3s}} \\ \chi_{2s} &= \frac{-1}{\chi_{3s}} \left[ \begin{aligned} &([A_s + B_s]\varphi_p + C_s)c_{rs}c_{gs}c_{hs} \\ &+ (D_s + E_s)c_{rs}k_3 \\ &+ F_b \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$+ \int_0^{l^e} \frac{d\bar{N}_i}{dx} \left[ \psi_{1b} \sum_{j=1}^4 (d\bar{N}_j/dx) \Omega_j + \psi_{2b} \right] dx - \int_0^{l^e} q(x) N_i dx - Q_i = 0 \quad (41)$$

جهت ارائه شکل ماتریسی برای سختی المان و بردارهای نیرو، رابطه (43) در نهایت چنین بازنویسی می‌شود:

$$[K_{ij}]\{\Omega_j\} = \{F_i\} \quad (42)$$

که داریم:

$$K_{ij} = \psi_{1b} \int_0^{l^e} \frac{d\bar{N}_i}{dx} \frac{d\bar{N}_j}{dx} dx + \psi_{1s} \int_0^{l^e} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx - \psi_{1s} \int_0^{l^e} \frac{dN_i}{dx} \bar{N}_j dx + \psi_{1s} \int_0^{l^e} \bar{N}_i \frac{dN_j}{dx} dx - \psi_{1s} \int_0^{l^e} \bar{N}_i \frac{dN_j}{dx} dx$$

$$F_i = -\psi_{2b} \int_0^{l^e} \frac{d\bar{N}_i}{dx} dx - \psi_{2s} \int_0^{l^e} \frac{dN_i}{dx} dx + \psi_{2s} \int_0^{l^e} \bar{N}_i dx + \int_0^{l^e} q(x) N_i dx + Q_i \quad (43)$$

و در آخر نیز توابع شکل  $N_i$  و  $\bar{N}_i$  با فرض یک تابع مرتبه 3 برای جابجایی طولی و یک تابع مرتبه 2 برای چرخش چنین بیان می‌شوند:

$$N_1 = 1 - \frac{12gx + 3l^e x^2 - 2x^3}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$N_2 = \frac{(l^e + 6g)l^e x - (2l^e + 6g)x^2 + l^e x^3}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$N_3 = \frac{12gx + 3l^e x^2 - 2x^3}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$N_4 = \frac{-6gl^e x + (6g - l^e)x^2 + l^e x^3}{l^e(l^e + 12g)} \quad (44)$$

$$\bar{N}_1 = \frac{6x^2 - 6l^e x}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$\bar{N}_2 = \frac{l^e + 12gl^e - (4l^e + 12g)x + 3l^e x^2}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$\bar{N}_3 = \frac{6l^e x - 6x^2}{l^e(l^e + 12g)}$$

$$\bar{N}_4 = \frac{3l^e x^2 - (2l^e - 12g)x}{l^e(l^e + 12g)} \quad (45)$$

که در آن  $g$  برابر است با:

$$g = \frac{\psi_{1b}}{\psi_{1s}} \quad (46)$$

### 3- نتایج عددی

در این بخش با استفاده از المان معرفی شده از جنس پلیمر حافظه دار، به عنوان یک مثال به بررسی رفتار یک تیر یک سرگیردار از جنس پلیمر حافظه دار می‌پردازیم. طول این تیر 50 میلی‌متر و سطح مقطع آن I-شکل (ضخامت، ارتفاع و عرض به ترتیب 1، 10 و 10 میلی‌متر) می‌باشد (شکل 3). پارامترهای خواص ماده در جدول 1 نشان داده شده است. به منظور صحت‌سنجی نتایج این پژوهش، معادله ساختاری سه بعدی پلیمر

$$\int_0^{l^e} \left( -\delta\theta + \frac{d(\delta w)}{dx} \right) \int_A \tau_{xz} dA dx \quad (34)$$

با جایگذاری معادلات (33) و (34) در معادله (32) داریم:

$$W^e = \int_0^{l^e} \frac{d(\delta\theta)}{dx} M(x) dx + \int_0^{l^e} \left( -\delta\theta + \frac{d(\delta w)}{dx} \right) V(x) dx - \delta \int_0^{l^e} q(x) \delta w dx - \sum_{i=1}^4 Q_i \delta \Omega_i = 0 \quad (35)$$

با توجه به معادلات (28)، (29) و (33)، می‌توان نوشت:

$$\int_0^{l^e} \frac{d(\delta\theta)}{dx} [\psi_{1b} \theta' + \psi_{2b}] dx + \int_0^{l^e} \left( -\delta\theta + \frac{d(\delta w)}{dx} \right) [-\psi_{1s} \theta + \psi_{1s} w' + \psi_{2s}] dx - \int_0^{l^e} q(x) \delta w dx - \sum_{i=1}^4 Q_i \delta \Omega_i = 0 \quad (36)$$

با استفاده از توابع شکل  $N_i$  و  $\bar{N}_i$  جابجایی عرضی تیر و چرخش آن برحسب چهار درجه آزادی  $\Omega_i$  تقریب زده می‌شوند:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i \Omega_i, \delta w = \sum_{i=1}^4 N_i \delta \Omega_i \quad (37)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \Omega_i, \delta \theta = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \delta \Omega_i \quad (38)$$

که این درجات آزادی مطابق با "شکل 2"، عبارتند از:

$$\Omega_1 = w(0), \Omega_2 = \theta(0), \Omega_3 = w(l^e), \Omega_4 = \theta(l^e) \quad (39)$$

که با جایگذاری معادلات (37) و (38) در معادله (36) و ساده و مرتب سازی‌های ریاضی خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l^e} \frac{dN_i}{dx} [-\psi_{1s} \theta + \psi_{1s} \frac{dw}{dx} + \psi_{2s}] dx - \int_0^{l^e} \bar{N}_i [-\psi_{1s} \theta + \psi_{1s} \frac{dw}{dx} + \psi_{2s}] dx + \int_0^{l^e} \frac{d\bar{N}_i}{dx} [\psi_{1b} \frac{d\theta}{dx} + \psi_{2b}] dx - \int_0^{l^e} q(x) N_i dx - Q_i \right) \delta \Omega_i = 0 \quad (40)$$

با در نظر گرفتن معادلات (37) و (38) برای  $w, \theta$ ، معادله (40) چنین بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^{l^e} \frac{dN_i}{dx} \left[ -\psi_{1s} \sum_{j=1}^4 \bar{N}_j \Omega_j + \psi_{1s} \sum_{j=1}^4 (dN_j/dx) \Omega_j + \psi_{2s} \right] dx - \int_0^{l^e} \bar{N}_i \left[ -\psi_{1s} \sum_{j=1}^4 \bar{N}_j \Omega_j + \psi_{1s} \sum_{j=1}^4 (dN_j/dx) \Omega_j + \psi_{2s} \right] dx$$

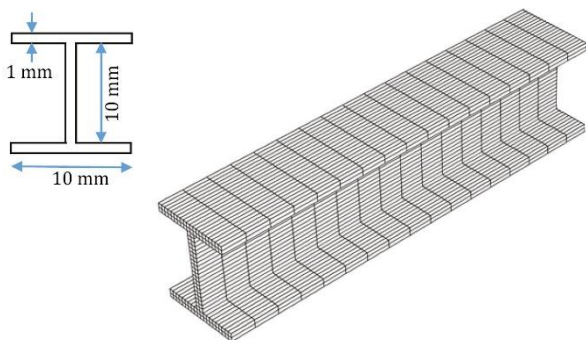


Fig. 3 The beam cross section geometry as well as the mesh used in FE analysis

شکل 3 هندسه سطح مقطع تیر به همراه مش بندی تیر در تحلیل سه بعدی

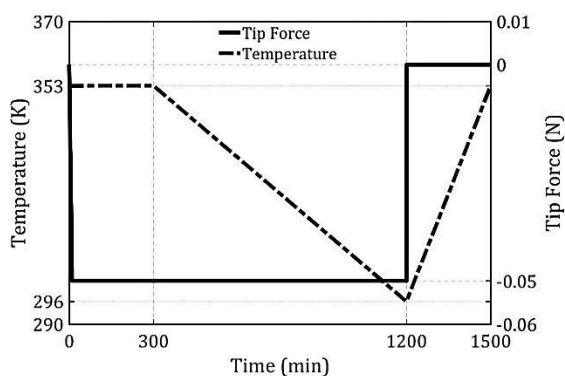


Fig. 4 History of the force and temperature applied to the beam

شکل 4 نحوه تغییر بارگذاری نیرو و حرارت با زمان

به دلیل  $L/D$  کمتر از 10 - فاصله‌ی زیادی نسبت به حل المان محدود سه بعدی دارد. حداکثر خطای خیز تیر برای  $\phi_h = 0$  در انتهای مرحله‌ی سرد کردن اتفاق می‌افتد. علت این پدیده، نرم تر بودن رفتار تیر و در نتیجه خیز بیشتر در حالت  $\phi_h = 0$  می‌باشد. این خطا برای تیر اویلر-برنولی 7.3 درصد و برای تیر تیموشنکو 1.5 درصد نسبت به حل سه بعدی می‌باشد. بدیهی است هر چه ضخامت تیر بیشتر و یا تیر کوتاه‌تر باشد، خطای تیر اویلر-برنولی بیشتر خواهد بود.

بخش b از "شکل 5"، شکل موقت تیر در پایان مرحله خنک کردن (زمان 1200 دقیقه) را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که با افزایش  $\phi_h$  خیز تیر کمتر می‌شود.

با افزایش  $\phi_h$ ، کرنش برشی هر مرحله کاهش می‌یابد (بخش c از شکل 5). مقدار بیشینه کرنش برشی به ازای افزایش  $\phi_h$  به ترتیب برابر با 0.4%، 0.32% و 0.24% می‌باشد. همچنین به ازای تمامی مقادیر  $\phi_h$ ، مقدار کرنش برشی کمتر از کرنش محوری می‌باشد. کرنش برشی در کل تاریخچه زمانی بارگذاری، در سه مرحله افزایش پیدا می‌کند و در انتها با یک افت ناگهانی مواجه می‌شود. ولی با این وجود، کرنش برشی در انتهای فاز بارگذاری به صورت کامل از بین نمی‌رود که به علت عدم بازیابی تیر در طول تاریخچه بارگذاری می‌باشد.

با افزایش کسر حجمی بخش سخت ( $\phi_h$ ) (به ترتیب 0، 0.2 و 0.4) حداکثر کرنش محوری تیر کاهش می‌یابد (به ترتیب برابر با 1.63%، 1.31% و 0.98%). همچنین مشاهده می‌شود که فرض کرنش‌های کوچک در این مساله صادق می‌باشد (بخش d از شکل 5).

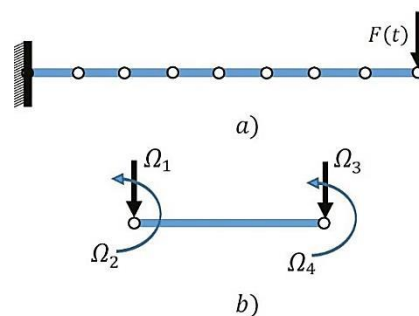


Fig. 2 - a) Schematics of the SMP beam element, relevant loading and boundary conditions, b) The degrees of freedom of Timoshenko beam element

شکل 2- a) شماتیک المان تیر تیموشنکو، بارگذاری و شرایط مرزی (b) درجات آزادی المان تیر تیموشنکو

جدول 1 جدول خواص پلیمر حافظه‌دار - باغانی [24]

Table 1 Material parameters reported by Baghani et al. [24]

واحد	مقدار	پارامترهای ماده
[MPa]	1.3, 15, 70000, 0.2, 247, 1000	$E_r^{eq}, E_g^{eq}, E_h^{eq}, E_r^{neq}, E_g^{neq}, E_h^{neq}$
[MPaMin]	$5.30 \times 10^6, 30 \times 10^9$	$\eta_r, \eta_g, \eta_h$
[-]	0.49, 0.3, 0.3	$\nu_r, \nu_g, \nu_h$
[K]	296, 344, 353	$T_l, T_g, T_h$
[-]	$(0.5542 \times 10^{-3}T - 0.01083456 - 7 \times 10^{-7}T^2)I$	$\epsilon^T$
[-]	$1 - \frac{1}{1 + \exp(-0.66(T - T_g))}$	$\phi_g$
[-]	0.4	$\phi_h$

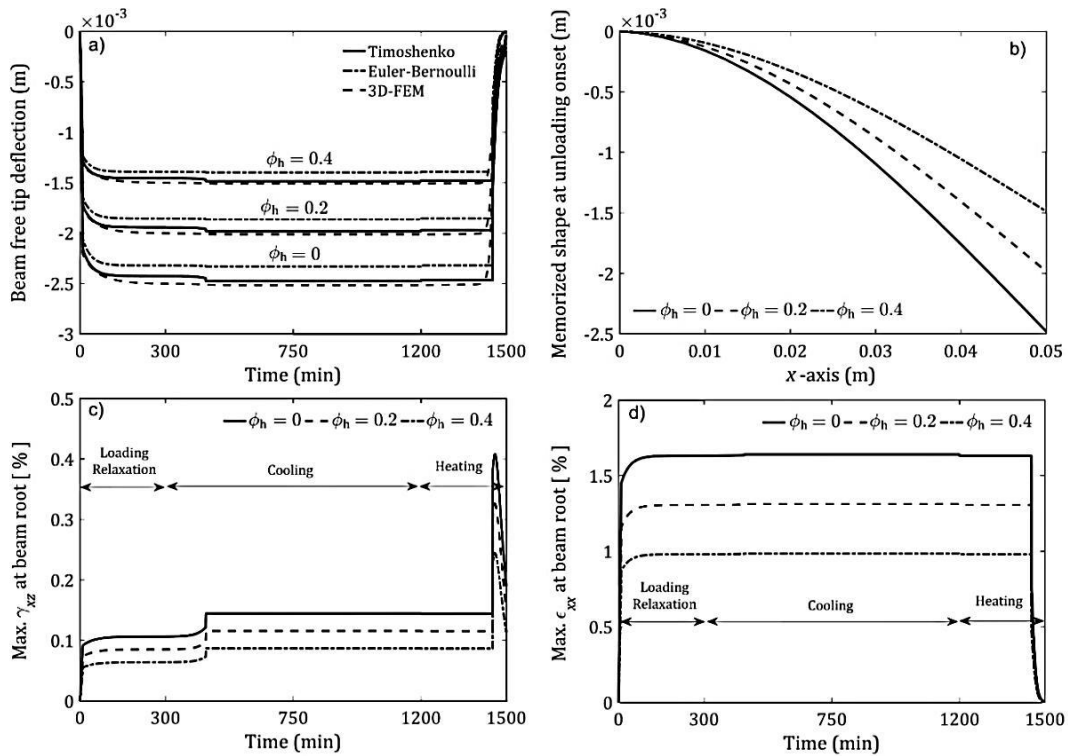
حافظه‌دار، در نرم‌افزار آباکوس با استفاده از زیرروال یومت<sup>1</sup> پیاده‌سازی شده است [24]. سپس هندسه تیر معرفی شده به صورت سه بعدی (2040 المان جنرال سه بعدی (C3D8) در محیط این نرم‌افزار مدل‌سازی شده (شکل 3) و نتایج آن با نتایج مدل المان محدود ارائه شده مقایسه می‌شود.

مراحل بارگذاری مکانیکی و حرارتی تیر مطابق مراحل زیر بوده و در "شکل 4" نمایش داده شده است.

- 1- از زمان صفر تا 10 دقیقه: بارگذاری مکانیکی در دمای  $T_h$  (بارگذاری<sup>4</sup>)
- 2- از 10 دقیقه تا 300 دقیقه: ثابت نگه‌داشتن بار مکانیکی و دما (استراحت<sup>5</sup>)
- 3- از 300 دقیقه تا 1200 دقیقه: خنک کردن تا دمای  $T_l$  در بار مکانیکی ثابت (سرد کردن<sup>4</sup>)
- 4- از 1200 ثانیه تا 1500 دقیقه: گرم کردن و رسیدن مجدد به دمای  $T_h$  پس از حذف بار مکانیکی (باربرداری و گرمادهی<sup>5</sup>)

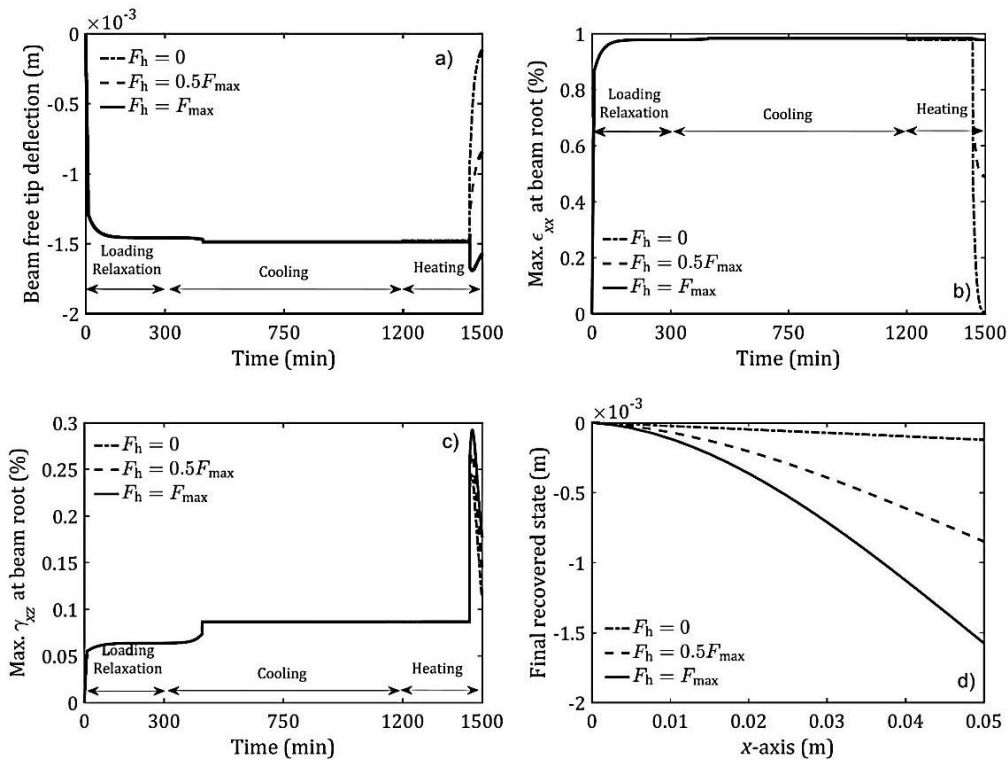
مقایسه رفتار ویسکوالاستیک تیر در "شکل 5" به ازاء مقادیر مختلف کسر حجمی بخش سخت ( $\phi_h = 0, 0.2, 0.4$ ) نشان داده شده است. همان‌طور که از بخش a از "شکل 5" مشاهده می‌شود، نتایج المان تیر تیموشنکو انطباق مناسبی با نتایج حل المان محدود سه بعدی دارد در حالی که زمان حل از حدود 30 دقیقه برای حل سه بعدی به حدود 10 ثانیه با استفاده از فرمول بندی ارائه شده، کاهش پیدا می‌کند. نتایج تیر اویلر-برنولی

<sup>1</sup> UMAT  
<sup>2</sup> Loading  
<sup>3</sup> Relaxation  
<sup>4</sup> Cooling  
<sup>5</sup> Unloading and heating



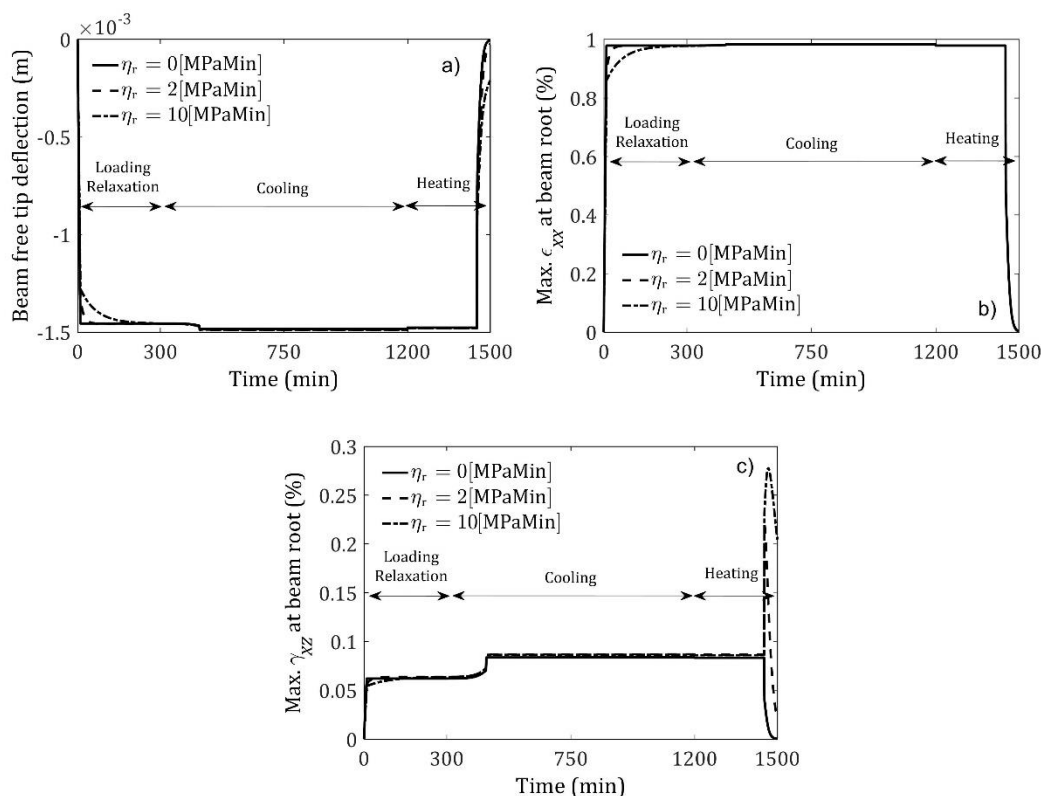
**Fig. 5** Effect of  $\phi_h$  on (a) the free tip displacement results of the Timoshenko SMP beam model together with those of the 3D modeling and Euler-Bernoulli beam model, (b) the temporary memorized shape of the beam after unloading, (c) Variation of maximum shear stress (d) variation of maximum axial strain at the beam root

شکل 5 بررسی اثر کسر حجمی بخش سخت ( $\phi_h$ ) بر روی (a) خیز سر آزاد تیر تیموشنکو به همراه نتایج مدل‌سازی سه‌بعدی و تیر اویلر-برنولی، (b) شکل موقت تیر در شروع مرحله باربرداری، (c) تغییرات کرنش برشی بیشینه و (d) تغییرات کرنش محوری بیشینه در تیر



**Fig. 6** Effect of  $F_h$  on (a) the free tip displacement results of the Timoshenko SMP beam, (b) the temporary memorized shape of the beam after unloading, (c) Variation of maximum shear stress, (d) variation of maximum axial strain at the beam root

شکل 6 بررسی تاثیر اعمال نیروی مکانیکی در مرحله گرم کردن ( $F_h$ ) بر روی (a) جابجایی سر آزاد تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار (b) تغییرات کرنش محوری بیشینه در تیر (c) تغییرات کرنش برشی بیشینه در تیر (d) شکل بازیابی شده تیر در پایان تاریخچه بارگذاری



**Fig. 7** Effect of  $\eta_r$  on (a) the free tip displacement results of the SMP beam, (b) variation of maximum axial strain at the beam root, (c) variation of maximum shear stress

شکل 7 بررسی اثر ضریب ویسکوزیته فاز لاستیکی ( $\eta_r$ ) بر روی (a) جابجایی سر آزاد تیر از جنس پلیمر حافظه‌دار (b) کرنش محوری بیشینه و (c) کرنش برشی بیشینه در تیر

در انتهای تیر مشاهده می‌شود (شکل 7a). تغییر این پارامتر در کرنش برشی زمان‌های دیگر تأثیری قابل توجهی ندارد. همچنین این پارامتر اثری بر روی شکل موقت تیر در شروع مرحله باربرداری ندارد. تغییرات نیرو-جابجایی-دما برای بارگذاری اشاره شده، در "شکل 8" نمایش داده شده است. همان‌گونه که از شکل مشاهده می‌شود، پس از افزایش دما به صورت نامقید، تا حد نسبتاً زیادی تیر شکل اولیه خود را پس از یک چرخه حافظه داری، بازیابی می‌کند.

#### 4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار با استفاده از مدل ساختاری ارائه شده توسط باغانی و همکاران [24] برای پلیمرهای حافظه‌دار، یک المان تیر جدید با فرضیات سینماتیک تیموشنکو ارائه شده است. المان ارائه شده در طول یک سیکل بارگذاری مکانیکی-حرارتی انطباق بسیار خوبی با نتایج حل المان محدود سه‌بعدی را نشان می‌دهد. در حالی که المان تیر اویلر-برنولی ارائه شده توسط [31]، اختلاف قابل توجهی را در  $L/D < 10$  نشان می‌دهد. افزایش کسر حجمی بخش سخت ( $\phi_h$ ) باعث افزایش سفتی تیر و کاهش کرنش‌های محوری و برشی در تیر می‌شود. کاهش نیروی مکانیکی در مرحله گرمایش، قابلیت بازیابی شکل تیر به حالت اولیه را بیشتر می‌کند اما برخلاف رفتار تیر اویلر-برنولی - به‌علت وجود کرنش برشی ذخیره شده - با حذف بارگذاری مکانیکی، تیر در پایان تاریخچه بارگذاری، قابلیت بازیابی کامل به شکل اولیه خود را ندارد. همچنین افزایش ضریب ویسکوزیته فاز لاستیکی ( $\eta_r$ )، زمان موردنیاز برای رسیدن به شرایط پایدار را کم می‌کند. فرمول‌بندی و المان تیر ارائه شده در این مقاله می‌تواند جایگزین

مطابق "شکل 6a" هنگامی که نیرویی در مقابل بازیابی وضعیت اولیه تیر در حین گرم کردن تیر، مقاومت نمی‌کند ( $F_h = 0$ )، سازه تقریباً به حالت اولیه خود برمی‌گردد. ولی زمانی که نیرویی برابر نیروی مورد استفاده در بارگذاری مرحله اولیه بر نوک آزاد تیر وارد می‌شود ( $F_h = F_{max}$ )، تیر تقریباً بیشتر توانایی بازیابی شکل خود را، صرف غلبه بر این نیرو نموده و لذا بازیابی شکل چندانی مشاهده نمی‌شود. در حالت سوم که  $F_h = 0.5F_{max}$  همان‌گونه که مورد انتظار است بخشی از جابجایی ذخیره شده بازیابی می‌شود، ولی تیر توانایی مورد نیاز برای بازیابی شکل اولیه خود را به‌صورت کامل ندارد. افزایش نیروی مکانیکی در مرحله گرمایش، بازیابی شکل تیر به حالت اولیه را کمتر می‌کند (شکل 6). در مورد "شکل 6b و 6c" نیز همان‌گونه که قابل مشاهده است، مقدار کرنش‌های محوری و برشی حداکثر در  $F_h = 0$  به ترتیب حدود 1 درصد و 0.25 درصد می‌باشد. مطابق شکل 6-b-6 کل کرنش محوری تقریباً بازیابی شده است. ولی در حالت برشی مطابق با "شکل 6c" حدود 0.11 درصد کرنش بازیابی نشده است. تیر در بازه زمانی 1500 دقیقه کاملاً به حالت اولیه خود باز نمی‌گردد، البته با توجه به رفتار ویسکوالاستیک این مواد اگر زمان حل مقداری بیشتر در نظر گرفته شود، این بازیابی به صورت کامل اتفاق می‌افتد.

مطابق با "شکل 7a و 7b"، با افزایش ضریب ویسکوزیته فاز لاستیکی ( $\eta_r$ )، سازه هوشمند زمان بیشتری جهت مقابله با تنش نیاز دارد و نیز مقدار کرنش برشی مکانیکی در اواخر مرحله گرم کردن، بیشتر می‌شود (شکل 7c). به ازاء  $\eta_r = 10\text{MPaMin}$  کرنش برشی به علت افزایش بیش از حد، در پایان تاریخچه زمانی صفر نمی‌شود و مقداری تنش برشی (0.2%) در تیر باقی می‌ماند. در نتیجه تیر به شکل اولیه ی خود بر نمی‌گردد و مقداری خیز



- [13] J. Sun, Y. Liu, J. Leng, Mechanical properties of shape memory polymer composites enhanced by elastic fibers and their application in variable stiffness morphing skins, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 15, pp. 2020-2027, 2015.
- [14] M. Taherzadeh, M. Baghani, M. Baniassadi, K. Abrinia, M. Safdari, Modeling and homogenization of shape memory polymer nanocomposites, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 91, pp. 36-43, 2016.
- [15] C. Thill, J. A. Etches, I. P. Bond, K. D. Potter, P. M. Weaver, Composite corrugated structures for morphing wing skin applications, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 12, pp. 124009, 2010.
- [16] W. Yin, J. Liu, J. Leng, Deformation analysis of shape memory polymer for morphing wing skin under airflow, *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, Vol. 4, No. 4, pp. 447, 2009.
- [17] H. Tobushi, T. Hashimoto, S. Hayashi, E. Yamada, Thermomechanical constitutive modeling in shape memory polymer of polyurethane series, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 8, No. 8, pp. 711-718, 1997.
- [18] H. Tobushi, N. Ito, K. Takata, S. Hayashi, Thermomechanical constitutive modeling of polyurethane-series shape memory polymer, *Proceeding of Trans Tech Publications*, pp. 343-346, 19-21 May, 1999.
- [19] Y. Liu, K. Gall, M. L. Dunn, P. McCluskey, Thermomechanical recovery couplings of shape memory polymers in flexure, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12, No. 6, pp. 947, 2003.
- [20] Y. Liu, K. Gall, M. L. Dunn, P. McCluskey, Thermomechanics of shape memory polymer nanocomposites, *Mechanics of Materials*, Vol. 36, No. 10, pp. 929-940, 2004.
- [21] Y. Liu, K. Gall, M. L. Dunn, A. R. Greenberg, J. Diani, Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling, *International Journal of Plasticity*, Vol. 22, No. 2, pp. 279-313, 2006.
- [22] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 21-32, 2012.
- [23] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, S. Sohrabpour, A constitutive model for shape memory polymers with application to torsion of prismatic bars, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, No. 2, pp. 107-116, 2012.
- [24] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, S. Sohrabpour, A thermodynamically-consistent 3D constitutive model for shape memory polymers, *International Journal of Plasticity*, Vol. 35, pp. 13-30, 2012.
- [25] J. Diani, P. Gilormini, C. Frédy, I. Rousseau, Predicting thermal shape memory of crosslinked polymer networks from linear viscoelasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 5, pp. 793-799, 2012.
- [26] M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, A semi-analytical study on helical springs made of shape memory polymer, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 4, pp. 045014, 2012.
- [27] M. Baghani, H. Mohammadi, R. Naghdabadi, An analytical solution for shape-memory-polymer Euler-Bernoulli beams under bending, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 84-90, 2014.
- [28] M. Baghani, A. Taheri, An analytic investigation on behavior of smart devices consisting of reinforced shape memory polymer beams, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 11, pp. 1385-1394, 2015.
- [29] P. Ghosh, A. Srinivasa, A two-network thermomechanical model of a shape memory polymer, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 9, pp. 823-838, 2011.
- [30] P. Ghosh, J. Reddy, A. Srinivasa, Development and implementation of a beam theory model for shape memory polymers, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 3, pp. 595-608, 2013.
- [31] M. Baghani, R. Dolatabadi, M. Baniassadi, Developing a finite element beam theory for nanocomposite shape memory polymers with application to sustained release of drug, *Scientia Iranica*, Vol. 24, No. 1, pp. 249, 2017.
- [32] P. Hehnwein, Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and fourth-order tensors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 22, pp. 2753-2770, 2001.
- [33] W. Xu, G. Li, Constitutive modeling of shape memory polymer based self-healing syntactic foam, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 9, pp. 1306-1316, 2010.
- [34] A. Lendlein, V. P. Shastri, Stimuli-sensitive polymers, *Advanced Materials*, Vol. 22, No. 31, pp. 3344-7, 2010.

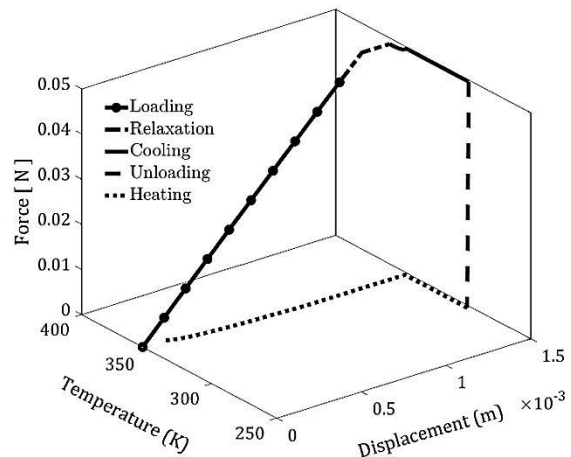


Fig. 8 Force-Displacement-Temperature diagram in a free stress strain recovery cycle

شکل 8 تغییرات نیرو- جابجایی- دما در طول تاریخچه بارگذاری

مناسبی به جای مدل‌سازی‌های سه‌بعدی- که هزینه محاسباتی و پیچیدگی بسیار بیشتری دارند - به منظور بررسی رفتار پلیمرهای حافظه دار و همچنین اثر تغییر پارامترهای هندسی و مادی برای تیرهای تقویت شده با این مواد، باشد.

## 5- مراجع

- [1] H. Meng, G. Li, A review of stimuli-responsive shape memory polymer composites, *Polymer*, Vol. 54, No. 9, pp.2199-2221, 2013.
- [2] H. J. Qi, T. D. Nguyen, F. Castro, C. M. Yakacki, R. Shandas, Finite deformation thermo-mechanical behavior of thermally induced shape memory polymers, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 5, pp. 1730-1751, 2008.
- [3] A. Lendlein, S. Kelch, Shape-memory polymers, *Angewandte Chemie International Edition*, Vol. 41, No. 12, pp. 2034-2057, 2002.
- [4] T. Xie, Recent advances in polymer shape memory., *Polymer*, Vol. 52, No. 22, pp. 4985-5000, 2011.
- [5] G. Monkman, Advances in shape memory polymer actuation, *Mechatronics*, Vol. 10, No. 4, pp. 489-498, 2000.
- [6] F. El Feninat, G. Laroche, M. Fiset, D. Mantovani, Shape memory materials for biomedical applications, *Advanced Engineering Materials*, Vol. 4, No. 3, pp. 91-104, 2002.
- [7] Y. Feng, M. Behl, S. Kelch, A. Lendlein, Biodegradable multiblock copolymers based on oligodepsipeptides with shape-memory properties, *Macromolecular Bioscience*, Vol. 9, No. 1, pp. 45-54, 2009.
- [8] Q. Zhao, H. J. Qi, T. Xie, Recent progress in shape memory polymer: New behavior, enabling materials, and mechanistic understanding, *Progress in Polymer Science*, Vol. 49, pp. 79-120, 2015.
- [9] D. Ratna, J. Karger-Kocsis, Recent advances in shape memory polymers and composites: A review, *Journal of Materials Science*, Vol. 43, No. 1, pp. 254-269, 2008.
- [10] C. M. Yakacki, R. Shandas, C. Lanning, B. Rech, A. Eckstein, K. Gall, Unconstrained recovery characterization of shape-memory polymer networks for cardiovascular applications, *Biomaterials*, Vol. 28, No. 14, pp. 2255-2263, 2007.
- [11] K. Gall, P. Kreiner, D. Turner, M. Hulse, Shape-memory polymers for microelectromechanical systems, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 472-483, 2004.
- [12] F. Pilate, A. Toncheva, P. Dubois, J. M. Raquez, Shape-memory polymers for multiple applications in the materials world, *European Polymer Journal*, Vol. 80, pp. 268-294, 2016.