مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 16، ص‌ص 243-251

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل پایداری سیستم‌های تصادفی قطعه قطعه خطی و بررسی آن با معادلات فوکر پلانک تعمیم یافته

کاوه مرآت [1]، حسن سالاریه [2*]، آریا الستی [3]، علی مقداری [3]

1- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
3- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
*تهران، صندوق پستی، salarieh@sharif.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 30 تیر 1393
پذیرش: 28 شهریور 1393
ارائه در سایت: 17 آبان 1393

کلید واژگان:
سیستم هیبرید تصادفی
پایداری تصادفی
معادلات فوکر پلانک
تابع چگالی احتمال

چکیده

در این مقاله به موضوع پایداری سیستم‌های تصادفی قطعه قطعه هموار که زیر مجموعه‌ای از سیستم‌های هیبرید تصادفی هستند، پرداخته می‌شود. در اینجا سیگنال‌های نویز در زیرسیستم‌های به صورت جمعی در نظر گرفته می‌شود که دامنه آن‌ها در نقطه تعادل سیستم صفر نمی‌شود. این نویزها مانع پایداری نمایی تصادفی سیستم‌های هیبرید تصادفی می‌شوند که این نوع پایداری نمایی به صورت گسترده در مقالات مورد بحث قرار گرفته است. همچنین پرش‌های بین زیرسیستم‌ها در این دسته از سیستم‌ها وابسته به متغیرهای پیوسته سیستم بوده که فرآیند بررسی پایداری را پیچیده‌تر می‌کند. قضیه ارائه شده با در نظر گرفتن نویز جمعی و پرش‌های وابسته به متغیرهای حالت، برای سیستم‌های تصادفی قطعه‌قطعه غیرخطی، حد بالایی برای ممان دوم تصادفی یا واریانس متغیرهای حالت سیستم به ارائه می‌دهد و همچنین تضمین می‌کند که تابع چگالی احتمال پاسخ یک سیستم پایدار به حالت پایا می‌رسد. سپس مسأله برای حالت خطی در این دسته از سیستم‌ها بررسی شده، شرایط پایداری با نامساوی ماتریسی خطی ارائه می‌شود، که در نتیجه آن حد بالایی روی کوواریانس متغیرهای حالت به دست می‌آید. سپس برای بررسی درستی قضیه پیشنهاد شده، حل معادلات فوکر پلانک که تحول تابع چگالی احتمال سیستم را مشخص می‌کند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای مشکل ناشی از پرش‌های تصادفی در شرایط مرزی این دسته از سیستم‌ها، راه حل مناسب و ابتکاری ارائه شده است، و با روش حجم محدود معادلات با مشتقات پاره‌ای مذکور در یک مثال حل شده تا صحت نتایج قضیه به صورت عددی بررسی شوند.

Stability Analysis for Stochastic Piecewise Affine Systems with Verification via Generalized Fokker Planck Equations

Kaveh Merat[1], Hassan Salarieh[2*], Aria Alasty[3], Ali Meghdari[3]

1- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
3- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
*P.O.B. 123456789 Tehran, Iran,salarieh@sharif.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 July 2014
Accepted 19 September 2014
Available Online 08 November 2014

Keywords:
Stochastic Hybrid Systems
Stochastic Stability
Fokker Planck Equations
Probability Density Function

ABSTRACT

In this article, stability analysis for Stochastic Piecewise Affine Systems which are a subclass of stochastic hybrid systems is investigated. Here, additive noise signals are considered that does not vanish at equilibrium points. These noises will prohibit the exponential stochastic stability discussed widely in literature. Also, the jumps between the subsystems in this class of stochastic hybrid systems are state-dependent which make stability analysis more complex. The presented theorem considering both additive noise and state-dependent jumps, gives upper bounds for the second stochastic moment or variance of Stochastic Piecewise Nonlinear Systems trajectories and guarantees that stable systems have a steady state probability density function. Then, linear case of such systems is studied where the stability criterion is obtained in terms of Linear Matrix Inequality (LMI) and an upper bound on state covariance is obtained for them. Next, to validate the proposed theorem, solving the Fokker Plank equations which describes the evolution of probability density function, is addressed. A solution for the problem of boundary conditions that arises from jumps in this class of systems is given and then with finite volume method the corresponding partial differential equations are solved for a case study to check the results of the presented theorem numerically.

1- مقدمه

سیستم هیبرید به سیستمی اطلاق می‌شود که شامل تعدادی شمارا زیرسیستم با متغیرهای پیوسته بوده و تحت قوانینی، پرش از یک زیرسیستم به زیرسیستم دیگر صورت می‌پذیرد. آنالیز پایداری و کنترل سیستم‌های هیبرید تصادفی در دهه گذشته توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده است. در موردسیستم‌های هیبرید، ابتدا آنالیز پایداری سیستم‌های

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

K. Merat, H. Salarieh, A. Alasty, A. Meghdari, Stability Analysis for Stochastic Piecewise Affine Systems with Verification via Generalized Fokker Planck Equations, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 243-251, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.34.3]

هیبرید یقینی[1] مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از روش‌های که بیشتر در این زمینه بیشتر به کار گرفته شده است، روش توابع لیاپانوف چندگانه است[2,1]. همچنین مطالعات زیادی بر روی پایداری و کنترل سیستم‌های قطعه‌قطعه خطی یقینی نیز انجام شده است [3-7].

سیستم‌های هیبرید تصادفی تعمیم سیستم‌های هیبرید هستند که یک خاصیت تصادفی به آن‌ها اضافه شده است. این خاصیت تصادفی هم می‌تواند در قانون مربوط به پرش‌ها وارد شود و هم به صورت نویز در زیرسیستم‌های ظاهر شود. یکی از ساختارهای کلی برای سیستم‌های هیبرید تصادفی که مشتمل بر تصادفی بودن پرش‌ها و زیرسیستم‌ها است در مرجع [8] معرفی شده است. در همان مرجع، مولد دیفرانسیلی این سیستم‌های تعمیم‌یافته هیبرید تصادفی استخراج شده است که در تحلیل‌های پایداری کاربرد فراوان دارد.

از طرف دیگر پایداری سیستم‌های تصادفی نیز به صورت گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. از میان پژوهش‌های شاخص می‌توان به مرجع [9] اشاره کرد که چندین تئوری پایداری تصادفی مبتنی بر فرمول دانکین[2] در آن اثبات شده است. در مقاله [10] قضایای پایداری مبتنی بر لیاپانوف مرور شده است که به پایداری تصادفی و پایداری ممان‌های تصادفی در معادلات دیفرانسیلی تصادفی ایتو[3] می‌پردازند.

استخراج شرایط پایداری برای دسته‌های مختلفی از سیستم‌های هیبرید تصادفی نیز اخیراً انجام شده است. به طور مثال درمرجع [11] شرایط پایداری مجانبی برای سیستم‌های هیبرید تصادفی با پرش‌های تصادفی مارکوف[4] ارائه شده است که امید ریاضی زمان بین پرش‌ها دارای یک مقدار حداقلی باشد. قضیه پایداری تصادفی لیاپانوفی برای سیستم‌های با پرش‌های دلخواه و یا به عبارتی کاملاً تصادفی درمرجع [12] نیز ارائه شده است که بدلیل لحاظ نکردن قوانین مربوط به پرش بین زیرسیستم‌ها شرط بسیار محافظه‌کارانه و محدود کننده‌ای دارد. به صورت مشابهی در [13] قضیه پایداری برپایه لیاپانوف‌های چندگانه پیشنهاد شده است که در آن پرش‌ها را دلخواه در نظر گرفته است که اثبات قضیه مربوط به پایداری را ساده‌تر می‌کند. برای تضمین پایداری نیز حدی برای تفاوت بین امید ریاضی توابع لیاپانوف، وقتی که وارد یک زیرسیستم می‌شوند، در نظر گرفته شده است. البته بررسی آن شرط در اکثر سیستم‌ها کار بسیار دشواری است.

پایداری نمایی تقریباً مطمئن[5] برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی تصادفی ایتو با پرش‌های مارکوف در مرجع [14] اثبات شده است. در شرایط این قضیه لازم است که نویز تصافی حول نقطه تعادل به صفر میل کند، در صورتی که اکثر نویزها به این صورت رفتار نمی‌کنند. البته لازم به ذکر است که پایداری مجانبی و نمایی که به آنها اشاره شد، بدون صفر شدن دامنه نویز در نقطه تعادل نهایی امکان‌پذیر نیست. بدلیل اینکه خاصیت تصادفی نویز مانع رسیدن دقیق پاسخ به نقطه تعادل می‌شود، مرجع [15] یک حداقل میانگین برای زمان بین پرش‌ها درنظر گرفته است ودوباره قضیه پایداری مجانبی را ارائه کرده است که نیاز به حذف شدن نویز تصادفی در مبداء دارد. تعمیم قضیه لاسل[6] نیز برای سیستم‌های هیبرید تصادفی در مرجع [16] آورده شده است که مجدداً پایداری نمایی تصادفی را تضمین می‌کند. علاوه براین در مرجع [17] یک قضیه پایداری نمایی تقریباً مطمئن برای سیستم‌های هیبرید تصادفی با پرش‌های مارکوف داده شده است که بر طبق آن برای نوع خطی، طراحی کنترلری با روش نامساوی‌های ماتریسی خطی[7] پیشنهاد شده است.

بیشتر مقالات ارائه شده برای پایداری سیستم‌های هیبرید تصادفی به پرش‌های مارکوف و یا دلخواه پرداخته‌اند و کمتر پرش‌های وابسته به متغیرهای پیوسته هر یک از زیرسیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته است. همچنین به ندرت اثر نویز جمعی که در نقطه تعادل صفر نمی‌شود، در سیستم‌های هیبرید تصادفی بررسی شده است. بنابراین در این مقاله برای یک دسته از سیستم‌های هیبرید تصادفی یعنی سیستم‌های قطعه قطعه خطی تصادفی که دارای پرش‌های وابسته به متغیرهای پیوسته بوده و دارای نویز جمعی هستند، یک قضیه پایداری ارائه شده است. در این قضیه پایداری که در ابتدا برای سیستم‌های هیبرید تصادفی غیرخطی مطرح شده است به جای پایداری مجانبی یک حد بالا برای مجموع واریانس‌های متغیرهای پیوسته سیستم بدست می‌آید. همچنین این قضیه تضمین می‌کند در صورت برقراری شرایط پایداری، تابع چگالی احتمال متغیرهای پیوسته به یک حالت پایا می‌رسد. سپس قضیه دیگری بر پایه قضیه قبل برای نوع خطی این سیستم‌ها پیشنهاد می‌شود که شروط آن را نامساوی‌های ماتریسی خطی تشکیل می‌دهند. بنابراین به راحتی می‌توان شرایط این قضیه را برای تمام سیستم‌های تصادفی قطعه‌قطعه خطی به کار بست.

سپس برای بررسی صحت قضیه‌پیشنهادی، از معادلات مشتقات پاره‌ای فوکر پلانک[8] استفاده می‌شود که تغییرات زمانی تابع چگالی احتمال یک سیستم تصادفی را توصیف می‌کند. البته برای این حل این معادله مشتقات پاره‌ای برای سیستم‌های تصادفی قطعه‌قطعه خطی باید به دشواری اعمال شرایط مرزی خاصی که به دلیل پرش‌ها در این سیستم‌ها اتفاق می‌افتد نیز توجه شود. در مرجع [18] با استفاده از روش تفاضل‌های محدود[9] روشی برای حل معادلات فوکر پلانک دو بعدی برای سیستم‌های پیوسته غیر هیبرید ارائه شده است که پایداری و دقت روش پیشنهادی مورد مطالعه قرار گرفته است. البته برای حل عددی معادلات فوکر پلانک مقالات زیاد دیگر نیز وجود دارد ولی در مقاله [19] به صورت خاص برای دسته‌ای از سیستم‌های هیبرید تصادفی قطعه‌قطعه‌ای که نویز در زیرسیستم‌ها وجود دارد، معادلات فوکر پلانک تعمیم یافته استخراج شده است که شامل یک سری شرایط مرزی است. سپس در همان مقاله با روش حل حجم محدود[10] یک مثال عددی حل شده است که در اعمال شرایط مرزی در حل عددی دچار مشکل شده است که در مورد آن بحث می‌شود. در ادامه کار قبلی در مرجع [20] پرش‌های تصادفی نیز برای سیستم لحاظ شده و معادلات کلی‌تری که شامل شرایط مرزی جدیدی می‌شوند، ارائه شده است. در مقاله حاضر نیز برای سیستم‌های تصادفی قطعه‌قطعه خطی مشابه [19] معادلات فوکر پلانک به همراه شرایط مرزی مربوطه آورده شده است و سپس در مورد اعمال صحیح آن‌ها در روش عددی بحث می‌شود.

این مقاله شامل هفت بخش می‌شود، که در بخش دوم به تعریف سیستم‌های تصادفی هیبرید پرداخته شده و برخی خواص آنها بررسی می‌شود. در بخش بعد قضیه کلی‌تر پایداری تصادفی برای سیستم‌های هیبرید تصادفی غیرخطی آمده است که در همان بخش اثبات مربوطه آورده شده است. سپس در بخش چهارم با استفاده از بهره‌گیری از نامساوی‌های ماتریسی

1- Deterministic Hybrid Systems
2- Dynkin
3- Ito stochastic differential equations
4- Markov
5- Almost sure exponential Stability
6- LaSalle Theorem
7- Linear Matrix Inequalities
8- Fokker Planck
9- Finite Difference Method
10- Finite Volume Method

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.34.3]

برای حالت خطی قضیه‌ای ارائه شده است که بررسی شرایط آن به صورت سیستماتیک برای این دسته از سیستم‌ها میسر است. حل معادلات فوکر پلانک برای این دسته از سیستم‌ها و شرایط مرزی مختص آن‌ها در بخش پنجم مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ششم نیز حل عددی معادلات فوکر پلانک به منظور استخراج پاسخ زمانی تابع چگالی احتمال انجام شده و سپس صحت نتایج قضیه پیشنهادی بررسی شده است. در نهایت نیز به نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

2- تعریف مسأله

منظور از سیستم‌های هیبرید تصادفی، مجموعه‌ای از چندین معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل ایتو است که هر کدام در ناحیه‌ای از فضای حالت اعتبار دارند که در رابطه(1) ارائه شده‌اند:

$$dx = f_i(x)dt + g_i(x,t)d\omega \quad for\ x\in\Omega_i\,,\ i\in I \tag{1}$$

که درآن $\{\Omega_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{R}^n$ یک افراز از فضای حالت را مشخص می‌کند که برای مثال زیرسیستم با اندیس یا حالت گسسته i در ناحیه Ω_i فعال است و I مجموعه این اندیس‌ها است. لازم به ذکر است که این افراز کل فضا را پوشش می‌دهد یا به عبارتی $\bigcup_i\Omega_i=\mathbb{R}^n$. $x(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای حالت زمان پیوسته سیستم است و $\omega(t)$ یک بردار q-تایی فرآیند وینر است با $E[d\omega]=0$ و $E[d\omega^2]=I_q dt$ که I_q بردار همانی $q\times q$ است، و در تمام زیرسیستم‌ها $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ و $g_i:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n\times q}$ محدود و با خاصیت لیپشیتز[1] هستند تا وجود و یکتایی جواب برای این سیستم تضمین شود، همچنین فرض می‌شود که این سیستم هیچ پاسخی ندارد که به صورت لغزشی روی مرز بین زیرسیستم‌ها حرکت کند.

برای هر یک از زیرسیستم‌های موجود در معادله (1) مولد دیفرانسیلی بر روی تابع اسکالر $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ که دو مرتبه مشتق پذیر است به صورت رابطه(2) تعریف می‌شود [9]:

$$L_iV(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x}f_i(x,t)+\frac{1}{2}tr\left(g_i^T(x)\frac{\partial^2V(x)}{\partial x^2}g_i(x)\right) \tag{2}$$

که $tr(\cdot)$ تابع جمع قطری ماتریس است و $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ ژاکوبین و $\frac{\partial^2V(x)}{\partial x^2}$ هسین[2] تابع $V(x)$ نسبت به متغیرهای حالت، x، است.

3- قضیه پایداری سیستم‌های تصادفی غیرخطی هیبرید

در این بخش قضیه اصلی ذیل مربوط به قضیه پایداری تصادفی در سیستم‌های سیستم‌های تصادفی غیرخطی هیبرید ذکر می‌شود.

قضیه-1. (قضیه پایداری تصادفی) سیستم هیبرید تصادفی تعریف شده در معادله (1) را در نظر بگیرید. اگر توابع لیاپانوف دو بار مشتق‌پذیر مثبت $V_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ به همراه عدد $d>0$ و تابع اسکالر نیمه مثبت معین $h(x)$ یافت شوند که

1- به ازای تمام مرزهای بین زیرسیستم‌ها توابع لیاپانوف روی مرزهای مشترک برابر باشند یا به عبارتی:

$$\forall x\in\Omega_i\bigcap\Omega_j\ ,\ V_i(x)=V_j(x)$$

2- شرط زیر برقرار باشد(رابطه(3)):

1- Lipchitz
2- Hessian

$$L^iV^i(x)\le -h(x)+d \quad ,\ \forall x\in\Omega_i, \tag{3}$$

آنگاه خواهیم داشت(رابطه(4)):

$$\lim_{t\to\infty}E\left[h(x)\right]\le d \tag{4}$$

برای اثبات قضیه به یک لم نیاز است که در زیر مطرح و اثبات می‌شود.

لم 1. (تعمیم فرمول دانکین[3] به سیستم‌های هیبرید تصادفی با پرش‌های معین) اگر مولد دیفرانسیلی عمومی برای سیستم (1) به صورت رابطه(5) و(6) تعریف شود:

$$L^*V(x)=\sum_{i\in I}\xi^i(x)L^iV(x) \tag{5}$$

که

$$\xi^i(x)=\begin{cases}1\ , & if\ x\in\Omega_i\\ 0\ , & if\ x\notin\Omega_i\end{cases} \tag{6}$$

و همچنین اگر تابع $V^*\in C^0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ با مشتق‌پذیری مرتبه صفر به صورت رابطه(7) نوشته شود:

$$V^*(x)=\sum_{i\in I}\xi^i(x)V^i(x) \tag{7}$$

آنگاه رابطه(8) را خواهیم داشت:\

$$E_x\left[V^*(x(t))\right]=V^*(0)+E_x\int_0^t L^*V^*(x(s))ds \tag{8}$$

لازم به ذکر است که مولد دیفرانسیلی بر روی مرز نواحی زیرسیستم‌ها، $\partial\Omega_i$، پیوسته نیست، ولی این ناپیوستگی از نوع مرتبه اول است که در ادامه بیشتر به آن می‌پردازیم.

اثبات لم. اثبات مشابه فرمول دانکین اصلی[9] است ولی برای شفافیت بیشتر، اثبات به صورت کامل در ذیل آورده شده است. اگر بگیریم $Z=V^*(x(t))$ و فرمول ایتو [21] اعمال شود، رابطه(9) به دست می‌آید:

$$dZ=\sum_k f^i\frac{\partial V^*}{\partial x_k}dx_k+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2V^*}{\partial x_k\partial x_l}\left(g^id\omega\right)_k\left(g^id\omega\right)_l+\sum_k\frac{\partial V^*}{\partial x_k}\left(g^id\omega\right)_k\ ,\forall x\in\Omega_i-\partial\Omega_i \tag{9}$$

باید توجه شود که فرمول ایتو در مرزها قابل اعمال نیست، چون که فرمول ایتو با استفاده از بسط تیلور و مشتق‌پذیری مرتبه دوم استخراج شده است.حال از آنجا که طبق رابطه (10)

$$\left(g^id\omega\right)_k.\left(g^id\omega\right)_l=\left(g^ig^{iT}\right)_{kl}dt \tag{10}$$

با انتگرال‌گیری از dZ در معادله (9) نسبت به زمان رابطه(11) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}V^*(x(t))=V^*(x(0))&+\int_0^t\left(\sum_k\xi^i(x)f^i\frac{\partial V^i}{\partial x_k}dx_k\right)ds\\&+\int_0^t\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\xi^i(x)\frac{\partial^2V^i}{\partial x_k\partial x_l}\left(g^ig^{iT}\right)_{kl}\right)ds\\&+\sum_{k,m}\int_0^t g_{km}\xi^i(x)\frac{\partial V^i}{\partial x_k}d\omega_m\end{aligned} \tag{11}$$

با فرض اینکه این سیستم هیچ پاسخی ندارد که به صورت لغزشی روی مرز بین زیرسیستم‌ها حرکت کند، اندازه ناپیوستگی‌ها در انتگرال فوق در مقایسه با طول کل مسیر حل صفر خواهد بود. بنابراین عبارت داخل انتگرال بالا تقریباً در همه‌جا پیوسته است. همچنین با توجه به اینکه تمام ناپیوستگی‌ها در توابع $f_i,g_i,\frac{\partial V^*}{\partial x_k},\frac{\partial^2V^*}{\partial x_k\partial x_l}$ دارای حد چپ و راست بوده و از

3- Dynkin's Formula

مرتبه اول هستند، می توان نتیجه گرفت که پاسخ انتگرال فوق وجود دارد و به دلیل اینکه $V^* \in C^0$ رابطه فوق قابل محاسبه است.

حال با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه (11) و جایگذاری در (7) رابطه (12) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} E\left[V^*(x(t))\right] &= V^*(x(0)) \\ &+ E\left[\int_0^t\left(\sum_k f_i \frac{\partial V^*}{\partial x_k}dx_k + \frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_l}\left(gg^T\right)_{kl}\right)ds\right] \\ &+ \sum_{k,m} E\left[\int_0^t g_{km}\frac{\partial V^*}{\partial x_k}d\omega_m\right] \end{aligned} \tag{12}$$

با در نظر گرفتن اینکه امید ریاضی ترم آخر مساوی صفر است و همچنین استفاده از قضیه انتگرالی فوبینی[1] که اجازه جابه‌جایی امید ریاضی(امید ریاضی نیز خود به شکل یک انتگرال است) و انتگرال زمانی را می‌دهد، رابطه (13) را نتیجه می‌دهد:

$$E\left[V^*(x(t))\right] = V(x(0)) + \int_0^t EL^*(V^*(x(s)))ds V^*(x(0)) \tag{13}$$

بنابراین اثبات لم به پایان می‌رسد.□

اثبات قضیه-1. با در نظر گرفتن شرط دوم قضیه به رابطه (14)می‌رسیم :

$$L^*V^*(x) \le -h(x) + d \tag{14}$$

حال با بکارگیری لم 1 از رابطه (14) رابطه (15) بدست می‌آید:

$$E\left[V^*(x(t))\right] \le V^*(x(0)) - \int_0^t E\left[h(x(t))\right]ds + d*t \tag{15}$$

سپس با توجه به مثبت معین بودن $V^*(x(t))$ و تقسیم نمودن بر t ، خواهیم داشت(رابطه (16))

$$\frac{1}{t}\int_0^t E\left[h(x(t))\right]ds \le \frac{V^*(x(0))}{t} + d \tag{16}$$

با میل دادن زمان به سمت بی‌نهایت رابطه (17) بدست می‌آید:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E\left[h(x(t))\right]ds \le d \tag{17}$$

با توجه به رابطه (17) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار داخل انتگرال محدود است و رابطه(18) بدست می‌آید.

$$E\left[h(x(t))\right] \le d \quad a.s. \quad t \to \infty \tag{18}$$

بدین ترتیب قضیه اثبات می‌شود. □

بنابر آنچه درمرجع [22] آمده است، اگر شرط (14) برقرار شود و سیستم تصادفی ایتو، فلر[2] نیز باشد، آنگاه یک توزیع احتمال پایا برای سیستم وجود خواهد داشت، که در بخش‌های بعدی با حل عددی معادله چگالی احتمال برای سیستم نیز این موضوع نشان داده می‌شود. به سیستمی فلر گفته می‌شود که برای تمام پاسخ‌های آن معادله و توابع محدود و پیوسته $f(x)$ ، پیوستگی $Ef(x)$ منتج شود. لازم به ذکر است در صورتیکه ترم‌های f_i, g_i در معادله اصلی لیپشیتز باشند آنگاه کل معادله (1) فلر خواهد بود که اثبات مشابه آن در [8] آمده است.

بنابراین با استفاده از **قضیه-1** می‌توان با تعریف مناسب توابع لیاپانوف محدوده‌ای برای واریانس یا سایر ممان‌های تصادفی سیستم بدست آورد، برای مثال در ساده‌ترین حالت اگر $h(x) = x^T x$ در نظر بگیریم، معادله (18) حدی روی مجموع المان‌های قطری ماتریس کوواریانس به ما خواهد داد، در ادامه برای سیستم‌های هیبرید تصادفی خطی یک قضیه ویژه‌ایارائه می‌شود.

1- Fubini
2- Feller

4- روش سیستماتیک بررسی پایداری تصادفی برای سیستم‌های قطعه قطعه خطی تصادفی

دسته‌ای از معادلات هیبرید تصادفی خطی که دارای پرش‌های معین هستند، در رابطه (19) آمده است:

$$dx = (A_i x(t) + a_i)dt + S_i d\omega \;,\; x \in \Omega_i \;,\; i \in I \tag{19}$$

که افراز فضای حالت، $\{\Omega_i\}_{i\in I}$، برای این سیستم با چندوجهی‌ها[3] که محدود یا نامحدود هستند، تعریف می‌شوند که در ادامه راجع به آن‌ها بیشتر بحث خواهد شد. $S_i d\omega$ نیز نویز تصادفی سفید را ایجاد می‌کند که به شکل جمعی به سیستم اضافه می‌شود. سه تایی (A_i, a_i, S_i) نیز i-امین زیرسیستم تصادفی خطی را تعیین می‌کند که در ناحیه Ω_i فعال است. لازم به ذکر است که پاسخ این سیستم همواره پیوسته است. پیوستگی پاسخ ناشی از پیوستگی پاسخ هر زیرسیستم تصادفی با نویز سفید است که در مرجع[9] به اثبات رسیده است و اینکه با رسیدن پاسخ به مرز هر ناحیه و ورود به ناحیه دیگر نقطه تقاطع شرط اولیه زیرسیستم جدید خواهد بود، بنابراین همچنان پیوستگی حفظ خواهد شد.

بخش‌بندی فضای حالت $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ با فرض چندوجهی بودن را می‌توان با روابط (20) و (21) تعریف کرد [23]:

$$\forall x \in \Omega_i \;,\quad E_i\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix} \ge 0 \Leftrightarrow x \in \Omega_i \tag{20}$$

و مرز بین دو زیر سیستم i و j که یک صفحه $n-1$ بعدی است به صورت زیر قابل بیان است:

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \subseteq \left\{ l_{ij} + F_{ij}s \mid s \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \tag{21}$$

که در آن $F_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}, l_{ij} \in \mathbb{R}^n$ است. برای حالت خطی می‌توان توابع لیاپانوف مرتبه دوم در هر ناحیه را به صورت رابطه(22) در نظر گرفت:

$$V^i(x) = \bar{x}^T \bar{P}_i \bar{x} \;,\; \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^T & r_i \end{bmatrix} > 0 \tag{22}$$

شرط پیوستگی توابع لیاپانوف مرتبه دو بین دو ناحیه i, j را می‌توان با مجموعه تساوی‌های خطی رابطه(23) ارضا کرد.

$$\begin{aligned} &F_{ij}^T(P_i - P_j)F_{ij} = 0 \\ &F_{ij}^T(P_i - P_j)l_{ij} + F_{ij}^T(q_i - q_j) = 0 \\ &l_{ij}^T(P_i - P_j)l_{ij} + 2(q_i - q_j)^T l_{ij} + \left(r_i - r_j\right) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

حال، زیرمجموعه اندیس I_0 را اندیس محدوده‌هایی از فضا در نظر بگیرید که مبدا درون یا در مرز آن‌ها قرار دارد، مابقی اندیس‌ها در مجموعه I_1 قرار می‌گیرند. برای $i \in I_0$ خواهیم داشت $a_i = 0$.

در ضمن سیستم موجود در معادله (1) را می‌توان به صورت تجمیع شده رابطه(24) و (25) بازنویسی کرد:

$$d\bar{x} = \bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{S}_i d\omega \quad for\; x \in \Omega_i \;\; i \in I \tag{24}$$

که در آن

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \; \bar{S}_i = \begin{bmatrix} S_i \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

تعریف-1. سیستم هیبرید تصادفی خطی (24) پایدار تصادفی است (با حد c و ماتریس وزنی $\underline{C}$) اگر با شروع از هر شرط اولیه داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty} tr\left[E\left[x(t)CC^T x^T(t)\right]\right] < c \;,\; c > 0 \tag{26}$$

لازم به ذکر است که تعریف فوق متفاوت است با آنچه در ادبیات به

3- polyhedral

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.34.3]

عنوان پایداری تصادفی در میانگین مربعات در بسیاری مقالات مانند مراجع [26-24] آمده است. در این تعریف لازم نیست که کران بالای واریانس در نهایت به صفر میل کند.

قضیه 2. اگر برای سیستم ارائه شده در (24) ماتریس‌های متقارن $\overline{P}_i$، W_i، U_i و ثابت مثبت d وجود داشته باشند که تمام عناصر U_i و W_i نامنفی باشند و شرایط زیر ارضاء شود:

1. $\overline{P}_i - E_i W_i E_i > 0$
2. $\overline{A}_i^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i + \underline{C}^T \underline{C} + E_i U_i E_i \le 0$
3. $tr(S_i^T P_i S_i) \le d$

همچنین تساوی‌های (23) برای تمام $\overline{P}_i$ برقرار باشند، آنگاه سیستم (24) مطابق **تعریف-1** با حد d و ماتریس وزنی $\underline{C}$ پایدار تصادفی است. لازم به ذکر است که شرایط ذکر شده در فوق با روش نامساوی‌های ماتریسی قابل بررسی هستند. □

اثبات. توابع لیاپانوف $V_i = \overline{x}^T P_i \overline{x}$ را برای هر ناحیه Ω_i تعریف می‌کنیم. با در نظر گرفتن رابطه (20) که به ازای آن شرط $E_i \overline{x} \ge 0$ در ناحیه Ω_i برقرار است، و نامنفی بودن عناصر U_i و W_i بدست می‌آید رابطه (27):

$$\begin{aligned} &\overline{x}^T E_i U_i E_i \overline{x} \ge 0 \quad , x \in \Omega_i \\ &\overline{x}^T E_i W_i E_i \overline{x} \ge 0 \quad , x \in \Omega_i \end{aligned} \tag{27}$$

شرط اول با در نظر گرفتن رابطه فوق، مثبت معین بودن ماتریس $\overline{P}_i$ و در نتیجه مثبت معین بودن $V_i(x)$ را در ناحیه Ω_i تضمین می‌کند و همچنین تساوی‌های (23) شرط پیوستگی موجود در شرط اول را برقرار می‌کند.، که برای استفاده از **قضیه-1** لازم است.

سپس با اعمال مولد دیفرانسیلی بر روی V_i در ناحیه Ω_i رابطه (28) بدست می‌آید:

$$L^i V^i = \overline{x}^T (\overline{A}_i^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i) \overline{x} + tr(S_i^T P_i S_i) \quad x \in \Omega_i \tag{28}$$

با بهره‌گیری از روابط (27) و (28) از رابطه (29) خواهیم داشت:

$$L^i V^i \le \overline{x}^T (\overline{A}_i^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i + E_i U_i E_i) \overline{x} + tr(S_i^T P_i S_i) \quad x \in \Omega_i \tag{29}$$

حال رابطه (30) را تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = x^T \underline{C}^T \underline{C} x \tag{30}$$

با لحاظ کردن شروط دو و سه قضیه حاضر و ادغام با روابط (29) و (30) نتیجه می‌شود رابطه (31):

$$L^i V^i(x) \le -h(x) + d \quad , \ \forall x \in \Omega_i, h(x) \ge 0 \tag{31}$$

حال شرایط **قضیه-1** برقرار است که از آن رابطه (32) حاصل می‌شود:

$$E[h(x)] = E[x^T \underline{C}^T \underline{C} x] \le d \quad , \ \forall x \in \Omega_i, h(x) \ge 0 \tag{32}$$

که مطابق با **تعریف-1** پایداری تصادفی ممان دوم سیستم را تضمین می‌کندو اثبات قضیه را کامل می‌کند.■

توجه: اگر قضیه 2 قابل اعمال باشد با توجه به ارگودیک[1] بودن سیستم، با میل دادن زمان به بی‌نهایت، بردار $E[x(t)]$ نیز به مقدار ثابتی میل می‌کند، ولی حتی اگر سیستم بدون در نظر گرفتن نویز پایدار مجانبی باشد همچنان امکان دارد $E[x(t)]$ به صفر میل نکند.

برای اینکه بتوان حد بالایی را برای $E\left[x^T \underline{C}^T \underline{C} x\right]$ در سیستم (19) حساب کرد، می‌توان مساله نامساوی ماتریسی خطی[2] رابطه (33) را حل نمود:

$$\begin{aligned} &\min_{P_i, W_i, U_i, d} d \\ &\overline{P}_i - E_i W_i E_i > 0 \\ &\overline{A}_i^T \overline{P}_i + \overline{P}_i \overline{A}_i + \underline{C}\underline{C}^T + E_i U_i E_i \le 0 \\ &tr(S_i^T P_i S_i) < d \end{aligned} \tag{33}$$

که در آن ماتریس وزنی $\underline{C}$ از قبل باید مشخص شود و برای بدست آوردن حد بالای d مسئله فوق حل می‌شود. در این مقاله برای حل مسئله فوق از کتابخانه یالمیپ[3] و سِدومی[4] در نرم‌افزار متلب[5] استفاده شده است.

5- حل عددی معادله فوکر پلانک برای سیستم هیبرید تصادفی

معادله فوکر پلانک تغییرات زمانی تابع چگالی احتمال را برای سیستم دیفرانسیلی تصادفی ایتو را توصیف می‌کند. این معادله به افتخار آدرین فوکر و ماکس پلانک نام‌گذاری شده است و به نام معادله پیشرو کلموگروف[6] نیز شناخته می‌شود که اولین بار در سال 1931 معرفی شد. در این بخش حل عددی این معادلات را برای سیستم‌های هیبرید تصادفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بنابراین ابتدا به معرفی معادله فوکر پلانک پرداخته می‌شود.

معرفی معادله فوکر پلانک

اگر سیستم دیفرانسیلی تصادفی ایتو غیر هیبرید رابطه (34) را در نظر بگیرید:

$$dx = f(x,t)dt + \sigma(x,t)d\omega \tag{34}$$

آنگاه معادله فوکر پلانک که تغییرات زمانی تابع چگالی احتمال $p(x,t)$ را مشخص می کند به صورت رابطه (35) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = &-\sum_i^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x,t) p(x,t) \right] \\ &+ \sum_j^N \sum_i^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\frac{1}{2} \left[\sigma(x,t) \sigma^T(x,t) \right]_{ij} p(x,t) \right] \end{aligned} \tag{35}$$

که N تعداد متغیرهای حالت x است و $[\ ]_{ij}$ به درایه سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس داخل کروشه اشاره می‌کند. لازم به ذکر است که شرط اولیه زمانی $p(x,0)$ به عنوان توزیع احتمال اولیه سیستم باید مشخص شود. شرایط مرزی برای معادله فوکر پلانک از آنجا که روی فضای بی نهایت تعریف می‌شود نیز شامل میل کردن تابع چگالی احتمال به صفر به ازای میل کردن متغیرهای مکان به سمت بینهایت، یعنی $x \to \infty$، در هر راستا است. لازم به ذکر است که معادله فوکر پلانک یک معادله پایستار نیز هست، چون باید انتگرال تابع چگالی احتمال روی کل فضای حالت یک باقی بماند. با توجه به این موضوع می‌توان معادله فوکر پلانک را به صورت رابطه (36) نیز نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -\nabla . J \tag{36}$$

که در آن J شار چگالی احتمال برابر رابطه (37) می‌باشد.

$$J = \left[f(x,t) p(x,t) \right] - \frac{1}{2} \left[\sigma^T(x,t) \nabla . \left[p(x,t) \sigma(x,t) \right] \right] \tag{37}$$

بخش اول یعنی $\left[f(x,t) p(x,t) \right]$ را مولفه همرفت[7] و بخش دیگر را مولفه انتشار[8] گویند. در اینجا برقرار کردن یک ارتباط بین این مفاهیم و مفاهیم ترمودینامیکی می‌تواند به درک بهتر مسأله در بخش بعد کمک کند. بدین منظور می‌توان دما در یک سیال را هم‌ارز چگالی احتمال در یک نقطه

1- Ergodic
2- Linear matrix inequality

3- YALMIP
4- SeDuMi
5- MATLAB
6- Kolmogorov forward equation
7- Convection
8- Diffusion

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.34.3]

دانست. بنابراین مولفه همرفت در رابطه (37) نمایانگر شار حرارتی ناشی از جابه‌جایی دما به دلیل حرکت سیال است. ترم انتشار در رابطه (37) نیز معادل شار هدایتی درون سیال است.

معادله فوکر پلانک تعمیم یافته برای سیستم‌های هیبرید تصادفی

لازم به ذکر است از آنجا که تمرکز این مقاله بر سیستم‌های هیبرید تصادفی خطی است، در ادامه از فرمولاسیون سیستم‌های خطی استفاده می‌شود، در حالی که این روش کاملاً برای نوع غیرخطی آن نیز قابل اعمال است. اگر سیستم هیبرید تصادفی خطی با پرش‌های معین (19) در نظر گرفته شود، همانطور که ذکر شد پاسخ این سیستم پیوسته خواهد بود بنابراین وقتی درون ناحیه یک زیرسیستم قرار داریم احتمال پرش به زیرسیستم دیگر وجود ندارد تا اینکه پاسخ سیستم به مرز آن ناحیه برسد. اثبات ریاضی این موضوع که دور از مرزها درون ناحیه یک زیرسیستم، احتمال پرش به زیرسیستم دیگر صفر است درمراجع[19] و[27]آمده است. بنابراین دینامیک شار چگالی احتمال در هر ناحیه فقط مربوط به آن زیرسیستم بوده و به صورت رابطه(38) خواهد بود:

$$J(x,t)=\left[(A_i x+a_i)p(x,t)\right] -\frac{1}{2}\left[S_i S_i^{T}\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\right]\quad \forall x\in\Omega_i,\forall i\in I \tag{38}$$

توجه شود که شروط مرزی در بی‌نهایت مانند حالت غیر هیبرید است و آنچه که باقی می‌ماند شرایط مرزی این معادلات مشتقات پاره‌ای بین دو زیر سیستم هیبرید (روی مرز $\partial\Omega_i$) است. معادله فوکرپلانک (36) دارای مشتق مرتبه دو نسبت به مکان است، بنابراین به دو شرط مرزی نیاز است. اولین شرط با توجه به بقای چگالی احتمال و اینکه انتگرال چگالی احتمال در کل فضای حالت باید یک باشد، حاصل می‌شود. پس هر شار عمود بر مرزی که در هر نقطه از یک ناحیه خارج شود باید دقیقا وارد ناحیه مجاور شود یا به عبارتی برای دو زیرسیستم مجاور i,j داریم(رابطه(39)):

$$J_i(x,t).\vec{n}_{ij}(x)=J_j(x,t).\vec{n}_{ij}(x)\quad \forall x\in\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j \tag{39}$$

که J_i و J_j به ترتیب شار چگالی احتمال در سمت ناحیه i و j بوده و $\vec{n}_{ij}(x)$بردار نرمال عمود بر مرز بین دو ناحیه مجاور i,j در محل x است. در مورد شرط مرزی دوم، امکان ناپیوستگی در مقدار چگالی احتمال در صورت غیرصفر بودن ترم انتشار بر روی هر طرف مرز وجود ندارد، با توجه به شباهت بین این مسأله و مفاهیم ترمودینامیکی این موضوع به خوبی قابل درک است. اگر انتقال حرارت هدایتی وجود داشته اشد، دو نقطه مجاور به هم‌چسبیده نمی‌توانند دمای متفاوتی داشته باشند. به این دلیل که در این صورت شار هدایتی بی‌نهایت بین آن‌ها به وجود آمده و آن‌ها را هم‌دما می‌کند. پس برای شرط دوم مرزی رابطه(40) را خواهیم داشت:

$$p_{(i)}(x,t)=p_{(j)}(x,t)=\tilde{p}_{i,j}(x,t)\quad \forall x\in\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j \tag{40}$$

که $p_{(i)}$و $p_{(j)}$ به ترتیب شار چگالی احتمال در سمت ناحیه iو j هستند. لازم به ذکر است که اگر ترم انتشار بر روی هر دو طرف مرز صفر شود آنگاه مرتبه مشتق مکانی به یک کاهش یافته و تنها شرط مرزی (39) کفایت می‌کند. هر دو مرجع[19] و [27]در مورد شرایط مرزی بحث کرده‌اند، ولی مشکل این دو مرجع در نحوه اعمال شرایط مرزی است که در هر دو اثر ترم همرفت در مرز نادیده گرفته شده است و تساوی شار چگالی احتمال فقط برای ترم انتشار در نظر گرفته شده است. حذف ترم همرفت از شرط مرزی مربوط به چگالی شار منطقی نیست. بنابراین در این مقاله تلاش شده است تا ضمن رفع اشکال وارده به مراجع اشاره شده، شرط مرزی صحیح استخراج شود تا هم شرایط اصلی ذکر شده را ارضا کند و هم در حالات حدی نتایج مورد انتظار را حاصل کند.

بنابراین با در نظر گرفتن معادله (38) و رابطه (36) به همراه شرایط مرزی (39) و (40)، معادله فوکر پلانک تعمیم‌یافته حاصل خواهد شد.

روش حل عددی معادله فوکر پلانک تعمیم یافته

در اینجا از روش حجم محدود[1] برای حل عددی معادلات مشتقات پاره‌ای بهره برده می‌شود، زیرا فرمتی انتگرالی دارد که پایستاری چگالی احتمال را تضمین می‌کند. همچنین بهره‌گیری از آن برای برقراری شرایط مرزی بین زیر سیستم‌ها نیز مناسب‌تر از سایر روش‌هاست.

برای گسسته‌سازی در زمان نیز از روش ضمنی[2]کرنک نیکولسون[3] بهره برده می‌شود که از روش‌های صریح پایدارتر بوده و مرتبه دقت زمانی بالاتری نسبت به روش‌های صریح دارد، بنابراین می‌توان از گام‌های زمانی بزرگتری استفاده نمود. البته این روش به دلیل حل دستگاه معادلات بزرگ و محاسبه همزمان کلیه مقادیر المان‌ها به حافظه بزرگتری در رایانه احتیاج دارد.

برای به دست آوردن پاسخ به روش حجم محدود فضای مورد نظر حل به المان‌های مکعبی تقسیم‌بندی می‌شود. برای هر المان حجمی باید شار چگالی را که از وجوه آن وارد یا خارج می‌شوند، را بدست آورد. به طور مثال برای المان دوبعدی نشان داده شده در شکل 1 با گسسته‌سازی زمانی غیر صریح روش کرنک نیکلسون رابطه(41) را خواهیم داشت:

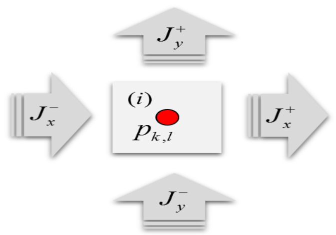
$$\frac{p_{k,l}^{t+\Delta t}-p_{k,l}^{t}}{\Delta t}dV=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_m J_m\right)^{t+\Delta t}+\left(\sum_m J_m\right)^{t}\right]$$

$$\left(\sum_m J_m\right)^{t}=J_{x(k,l)}^{-}(t)dS_x^{-}-J_{x(k,l)}^{+}(t)dS_x^{+} +J_{y(k,l)}^{-}(t)dS_y^{-}-J_{y(k,l)}^{+}(t)dS_y^{+} \tag{41}$$

که در آن dV حجم المان که در حالت ساده مستطیلی دو بعدی $\Delta x\Delta y$ می‌شود و dSاندازه وجوهی هستند که شار از آنها وارد المان می‌شود. در حالت ساده مستطیل دو بعد ی $dS_x^{-}=dS_x^{+}=\Delta y$ و $dS_y^{-}=dS_y^{+}=\Delta x$هستند. همچنین $p_{k,l}^{t}$ مقدار تابع چگالی احتمال در زمان t است که در المان (k,l)که در محل k-ام در راستای x و محل l-ام در راستای y واقع شده است. لازم به ذکر است که المان‌ها به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که هر المان تنها متعلق به یک زیرسیستم باشد. بنابراین با توجه به مقادیر k,l شماره زیرسیستم، i، که المان در آن واقع شده است، مشخص می‌شود.

حال تنها باید مقدار شارهای ورودی و خروجی به المان را با توجه به رابطه (37) بر حسب مقادیر المان‌های اطراف آن نوشت. با در نظر گرفتن رابطه تفاضلی ساده برای این مشتق این کار انجام می‌شود. برای یک مثال دو بعدی در راستای x چگالی شار بین نود (k,l) و $(k+1,l)$که هر دو در ناحیه i واقع شده‌اند،رابطه(42) بدست می‌آید:

1- Finite Volume
2- Implicit
3- Crank Nicolson



شکل 1 شار چگالی ورودی و خروجی به یک نود در زیرسیستم i (مثال دو بعدی)

$$J^{+}_{x(k,l)}=\left(A_i(x(k,l)+\frac{\Delta x}{2})+a_i\right).\vec{e}_x p_{k,l}$$
$$-\frac{1}{2}\left[S_iS_i^T\right]_{11}\frac{p_{k+1,l}-p_{k,l}}{\Delta x} \qquad (42)$$

که در آن $\vec{e}_x$ بردار واحد یکه در راستای x است. البته باید ذکر شود که تنها برای کوچکتر شدن رابطه (42) و روابط عددی بعدی برای نمایش از مشتقات ضربی صرف نظر شده است، یعنی $\left[S_kS_k^T\right]_{ij}=0 \ if \ i\neq j$. برای سایر چگالی شارهای آمده در (41) نیز می‌توان مشابه رابطه (42) را بدست آورد،در شکل 2 مثالی برای دو نود مرزی در حالت دوبعدی آورده شده است.

لازم به ذکر است اگر در دو نود (k,l) و $(k+1,l)$ نشان داده شده در شکل 2 به ترتیب دو زیرسیستم i و j حاکم باشند آنگاه با اعمال شرایط مرزی (39) و (40) رابطه (43)به دست می‌آید:

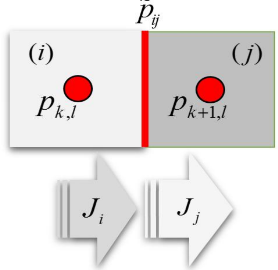
$$\tilde{p}_{ij}(t)=\frac{-\alpha p_{k,l}(t)-\beta p_{k+1,l}(t)}{\Delta x(A_i\tilde{x}-A_j\tilde{x})-(\alpha+\beta)}$$
$$J_{i,x^+}=J_{j,x^-}=\frac{-A_i\tilde{x}\beta p_{k+1,l}-A_j\tilde{x}\alpha p_{k,l}+\alpha\beta(p_{k+1,l}-p_{k,l})/\Delta x}{\Delta x(A_i\tilde{x}-A_j\tilde{x})-(\alpha+\beta)}$$
$$\alpha=\left[S_i^TS_i\right]_{11},\beta=\left[S_j^TS_j\right]_{11} \qquad (43)$$

به صورت مشابه می‌توان در راستاهای دیگر نیز شرایط مرزی را اعمال نمود. با استفاده از روابط (41) و محاسبه شارهای احتمال دستگاه معادلاتی برای $p_{k,l}^{t+\Delta t}$ ها بر حسب $p_{k,l}^{t}$ ها حاصل می‌شود. در ادامه شبیه‌سازی‌های انجام شده بر روی یک مثال و نتایج آن بررسی می‌شود.

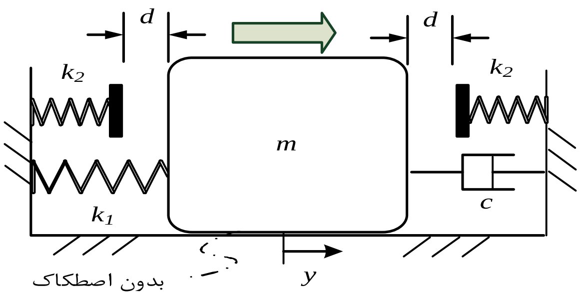
6- شبیه‌سازی معادله فوکر پلانک برای سیستم هیبرید تصادفی

در این بخش حل عددی معادله فوکر پلانک برای مثال هیبرید تصادفی ذیل انجام می‌گیرد.

مثال(جرم فنر دمپر با فاصله هوایی)-نمایی از این مثال در شکل 3 نمایش داده شده است که به دلیل وجود فاصله هوایی دارای ماهیت هیبرید می‌شود. چون درگیر بودن و یا نبودن فنرهای k_2 باعث تغییر ضریب فنریت سیستم می‌شود. در زیر مشخصات اصلی سه زیرسیستم مربوط به این مثال به صورت پارامتری در رابطه(44) آورده شده است:



شکل 2 دو نود در کنار مرز بین دو زیرسیستم i و j



شکل 3 نمای مثال جرم فنر دمپر با فاصله هوایی

$$\begin{bmatrix}dx_1\\dx_2\end{bmatrix}=A_i\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+a_i+S_i\begin{bmatrix}d\omega_1\\d\omega_2\end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix}y\\\dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\Omega_i$$
$$A_1=A_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}$$
$$a_1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{k_1d}{m}\end{bmatrix} \ , \ a_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \ , \ a_3=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{k_1d}{m}\end{bmatrix}$$
$$S_1=S_2=S_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{var}(F)}{m}\end{bmatrix} \qquad (44)$$

که سه زیرسیستم ذکر شده در نواحی رابطه(45) تعریف می‌شوند:

$$\Omega_1=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1<-d\}$$
$$\Omega_2=\{(x_1,x_2)\,|\,-d<x_1<d\}$$
$$\Omega_3=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>d\} \qquad (45)$$

ماتریس‌هایی که نواحی چندوجهی این سیستم را با توجه به رابطه (20) تعریف می‌کنند، در رابطه(46) داده شده‌اند:

$$E_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -d\\ -1 & 0 & d\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & d\\ -1 & 0 & d\end{bmatrix},$$
$$E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & d\\ 1 & 0 & -d\end{bmatrix} \qquad (46)$$

سپس پارامترهایی که برای شرط پیوستگی در رابطه (23) لازم است طبق رابطه(47)ارائه می‌گردد:

$$F_{12}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},l_{12}=\begin{bmatrix}d\\0\end{bmatrix} \ ,F_{23}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},l_{23}=\begin{bmatrix}-d\\0\end{bmatrix} \qquad (47)$$

شبیه سازی عددی جهت یافتن تابع چگالی احتمال سیستم هیبرید به کمک روش ضمنی کرنک نیکولسون با مقادیر پارامتری رابطه(48) برای مدل انجام شده است.

$$m=5\text{kg},\ c=100\ \text{Ns/m},\ d=0.1\ \text{mm},$$
$$k_1=1000\text{N/m},\ k_2=3k_1 \qquad (48)$$

در محدوده کاری فضای حالت $x_1\in[-0.002 \quad 0.002]$، $x_2\in[-0.04 \quad 0.04]$ به طور مساوی به 80×80 المان با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌شود. شرط اولیه تابع احتمال حالت پایا برای سیستم هیبرید یاد شده، تابع احتمال گوسی با پارامترهای رابطه (49) و (50) در نظر گرفته شده است.

$$\mu_1(0)=0\ \mu_2(0)=0.6,$$
$$\sigma_1(0)=0.4,\sigma_2(0)=0.4,\ \rho(0)=0.1 \qquad (49)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.34.3]

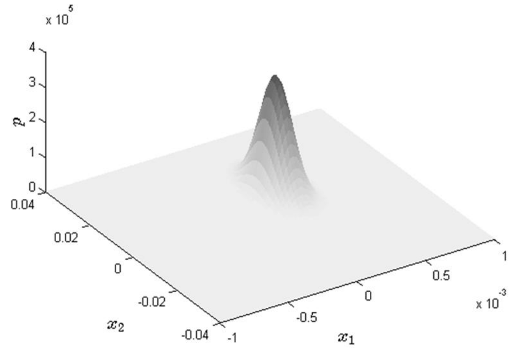
که در آن

$$\mu_i(t)=E\left[x_i(t)\right],\sigma_i(t)=E\left[x_i^2(t)\right] \quad i=1,2$$
$$\rho(t)=E\left[x_1(t)x_2(t)\right] \qquad (50)$$

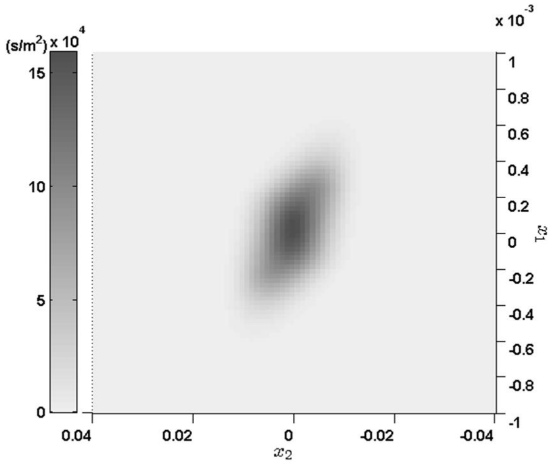
این تابع چگالی احتمال در شکل 4 نمایش داده شده است.تابع چگالی احتمال پایا (در اینجا تابع چگالی احتمال ثانیه 0.3) به صورت جداگانه در شکل 5 رسم شده است.

پاسخ سیستم در 6 تصویر در زمان‌های مختلف در شکل 6 آمده است،که تقریبا از زمان واحد 0.2 به بعد شکل تابع چگالی احتمال تغییری نمی‌کند، و به نظر می‌رسد چگالی احتمال سیستم هیبریدی پایا شده است.

و در نهایت نمودار مقدار میانگین $\mu_1(t),\mu_2(t)$ و $tr(P)$ در شکل 7 ارائه شده است که در آن $tr(P)=E\left[x^Tx\right]$ است و به مقدار 2.45×10^{-5} میل کرده است. از طرف دیگر با بهره‌گیری از برنامه یالمیپ با هسته سدومی مسئله نامساوی ماتریسی خطی **قضیه** 1 برای مثال ذکر شده حل می‌گردد، حد بالای d بدست آمده از قضیه با حل مسئله نامساوی ماتریسی خطی مربوطه، مقدار 5.2×10^{-5} می‌شود که بزرگتر از مقدار $tr(P)$ حاصل از حل معادله فوکرپلانک تعمیم‌یافته است و همچنین تابع چگالی احتمال پایا شده است که با نتایج **قضیه** 1 همخوانی دارد.



شکل 4 شرط اولیه تابع چگالی احتمال برای حل عددی

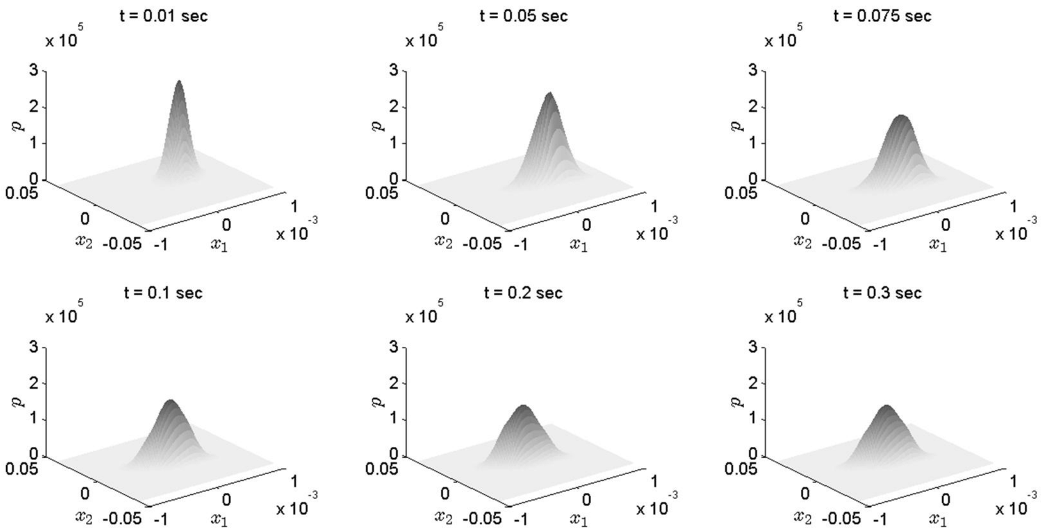


شکل 5 تابع چگالی احتمال در حالت پایا بر حسب متغیرهای حالت

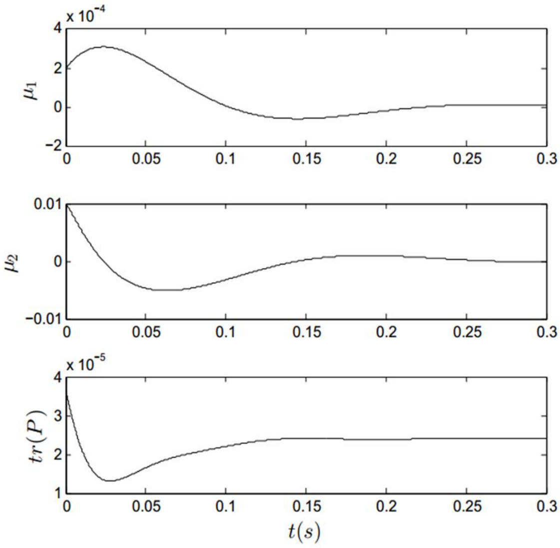
7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش پایداری یک دسته از سیستم‌های هیبرید تصادفی مورد بررسی قرار گرفتند که سیستم‌های تصادفی قطعه قطعه خطی نامیده می‌شوند، در سیستم‌های مورد بحث پرش بین زیرسیستم‌ها وابسته به متغیرهای حالت سیستم بوده و نویز تصادفی در نظر گرفته شده در هر زیرسیستم به صورت جمعی بوده که دامنه غیر صفر حول نقطه تعادل سیستم دارد، برای حالت کلی‌تر غیرخطی این دسته از سیستم‌ها ابتدا یک قضیه پایداری تصادفی مطرح شد و اثبات آن نیز ارائه گردید، قضیه پیشنهاد شده در صورت برقرار بودن شرایط پایداری، حد بالایی برای مجموع واریانس متغیرهای حالت سیستم داده و همچنین تضمین می‌کند که تابع چگالی احتمال سیستم پایدار با میل زمان به بی نهایت، به حالت پایا خواهد رسید.

سپس برای سیستم‌های تصادفی قطعه قطعه خطی قضیه پایداری مربوطه ارائه شده است که شرایط پایداری در آنها به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی بیان می‌شود، در صورت برقراری شرایط پایداری مذکور حد بالا روی کوواریانس متغیرهای حالت بدست می‌آید، پس از آن به منظور اینکه



شکل6 تابع چگالی احتمال در زمان‌های مختلف تا زمان رسیدن به حالت پایا



شکل 7 مقدار میانگین $\mu_1(t), \mu_2(t)$ و $tr(P)$ برای حل عددی

صحت قضیه بررسی شود حل معادلات فوکر پلانک تعمیم‌یافته برای سیستم‌های هیبرید مورد توجه قرار گرفت. با ارائه روشی برای در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوط به پرش‌های وابسته به حالت و پیاده‌سازی روش حل عددی حجم محدود، این معادلات با مشتقات پاره‌ای برای یک مثال فنر دمپری با فاصله هوایی، حل شد. این مثال شرایط پایداری تصادفی پیشنهاد شده را ارضا می‌کرد بنابراین با استفاده از قضیه مربوطه حد بالای کواریانس متغیرهای حالت آن نیز محاسبه شد. نتایج عددی حل معادلات فوکر پلانک برای این سیستم هیبرید تصادفی نیز نشان می‌دهد که بعد از گذشت مدت زمانی، تابع چگال احتمال سیستم به حالت پایا رسیده و دیگر تغییر چندانی نمی‌کند. همچنین مجموع کوواراینس‌های بدست آمده از حالت پایا نیز کمتر از مقدار بدست آمده از قضیه می‌باشد که صحت قضیه را تصدیق می‌کند.

8- مراجع

[1] M. S. Branicky, Stability of switched and hybrid systems, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 3498-3503.
[2] M. S. Branicky, Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switchedand hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, 1998.
[3] L. Rodrigues, State feedback control of piecewise-affine systems with norm bounded noise, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 1793-1798 vol. 3.
[4] G. Ferrari-Trecate, F. Cuzzola, D. Mignone, M. Morari, Analysis of discrete-time piecewise affine and hybrid systems, *Automatica,* Vol. 38, No. 12, pp. 2139-2146, 2002.
[5] L. Rodrigues, A. Hassibi, J. P. How, Output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems with multiple equilibria, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 1784-1789.
[6] L. Rodrigues, J. P. How, Observer-based control of piecewise-affine systems, *International Journal of Control,* Vol. 76, No. 5, pp. 459-477, 2003.
[7] L. Rodrigues, S. Boyd, Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization, *Systems & Control Letters,* Vol. 54, No. 9, pp. 835-853, 2005.
[8] M. L. Bujorianu, J. Lygeros, General stochastic hybrid systems, in *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation,* Sardinia , Italy, 2004.
[9] H. Kushner, *Stochastic stability and control,* New York: Academic Press, 1967.
[10] U. H. Thygesen, *A survey of lyapunov techniques for stochastic differential equations,* Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, , pp. 1997.
[11] A. Abate, L. Shi, S. Simic, S. Sastry, A stability criterion for stochastic hybrid systems, in *Proceeding of.*
[12] D. V. Dimarogonas, K. J. Kyriakopoulos, Lyapunov-like stability of switched stochastic systems, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 1868-1872 vol. 2.
[13] V. Filipovic, Exponential stability of stochastic switched systems, *Transactions of the Institute of Measurement and Control,* Vol. 31, No. 2, pp. 205-212, 2009.
[14] C. Yuan, J. Lygeros, On the exponential stability of switching diffusion processes, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 50, No. 9, pp. 1422-1426, 2005.
[15] D. Chatterjee, D. Liberzon, On stability of randomly switched nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 52, No. 12, pp. 2390-2394, 2007.
[16] H. Liu, X. Mu, The LaSalle stability theorem of general stochastic hybrid systems, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 3969-3973.
[17] F. Deng, Q. Luo, X. Mao, Stochastic stabilization of hybrid differential equations, *Automatica,* Vol. 48, No. 9, pp. 2321-2328, 2012.
[18] M. Zorzano, H. Mais, L. Vazquez, Numerical solution of two dimensional Fokker--Planck equations, *Applied mathematics and computation,* Vol. 98, No. 2-3, pp. 109-117, 1999.
[19] J. Bect, H. Baili, G. Fleury, Generalized Fokker-Planck equation for piecewise-diffusion processes with boundary hitting resets, in *Proceeding of.*
[20] J. Bect, A unifying formulation of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for general stochastic hybrid systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems,* Vol. 4, No. 2, pp. 357-370, 2010.
[21] B. Øksendal, *Stochastic differential equations,* Berlin, Heidelberg,: Springer Verlag, 2003.
[22] M. Zakai, A Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perturbed by noise, *SIAM Journal on Control,* Vol. 7, pp. 390, 1969.
[23] M. Johansson, A. Rantzer, Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 43, No. 4, pp. 555-559, 1998.
[24] H. Zhang, G. Feng, C. Dang, Stability analysis and H inf control for uncertain stochastic piecewise-linear systems, *IET Control Theory & Applications,* Vol. 3, No. 8, pp. 1059-1069, 2009.
[25] Y. Dong, J. Sun, Brief paper: On hybrid control of a class of stochastic non-linear Markovian switching systems, *Automatica,* Vol. 44, No. 4, pp. 990-995, 2008.
[26] S. Aberkane, J. Ponsart, M. Rodrigues, D. Sauter, Output feedback control of a class of stochastic hybrid systems, *Automatica,* Vol. 44, No. 5, pp. 1325-1332, 2008.
[27] R. Malhame, C. Chee-Yee, Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system, *Automatic Control, IEEE Transactions on,* Vol. 30, No. 9, pp. 854-860, 1985.