



## تحلیل ارتعاش آزاد ورق تابعی ویسکوالاستیک

علی بخششی<sup>1</sup>، حسین مهابدی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران  
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران  
\* تهران، صندوق پستی 13185-768، h\_mahbadi@iauctb.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 09 آذر 1395  
پذیرش: 07 بهمن 1395  
ارائه در سایت: 14 اسفند 1395  
کلید واژگان:  
ورق تابعی ویسکوالاستیک  
تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی  
فرکانس طبیعی ورق

### چکیده

ویسکوالاستیسیته خاصیت دسته‌ای از مواد است که رفتاری میان دو خاصیت کلی ویسکوز و الاستیک بودن از خود نشان می‌دهند. در ویسکوالاستیسیته خطی تابع تنش بصورت خطی به تاریخچه قبلی تابع کرنش وابسته است. در این مقاله به تحلیل ارتعاش آزاد ورقهای تابعی ویسکوالاستیک مستطیلی پرداخته شده است. جهت مدل نمودن رفتار ویسکوالاستیک ورق از مدل سه پارامتری زنر استفاده شده است. همچنین خاصیت تابعی بودن ورق با استفاده از مدل توانی کسری حجمی مدل سازی شده است. مقادیر تنش و کرنش به صورت خطی و بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی محاسبه شده و شرایط مرزی به صورت چهارطرف ساده در نظر گرفته شده است. با محاسبه مقادیر انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی ورق و کمینه کردن تابع لاگرانژ بر اساس روش ریتز، مسئله مقدار ویژه حاصل و با حل آن مقادیر فرکانس طبیعی ورق به دست آمده است. جهت به دست آوردن مقادیر فرکانس طبیعی، برنامه‌ای در نرم‌افزار ممتیکا نوشته شده است و تأثیر خصوصیات هندسی و ذاتی ورق بر روی مقادیر فرکانس طبیعی آن به صورت جدول و نمودار مورد ارزیابی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی، نتایج به دست آمده در این مقاله به نتایج ورق الاستیک تابعی ساده سازی شده است. مقایسه نتایج به دست آمده و داده موجود در سوابق علمی از تطابق خوبی برخوردار است.

## Free Vibration Analysis of Functionally Graded Viscoelastic Plate

Ali Bakhsheshy<sup>1</sup>, Hossein Mahbadi<sup>1\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran  
\* P.O.B. 13185-768, Tehran, Iran, h\_mahbadi@iauctb.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 29 November 2016  
Accepted 26 January 2017  
Available Online 04 March 2017

### Keywords:

functionally graded viscoelastic plate  
first-order shear deformation theory  
natural frequency

### ABSTRACT

Viscoelasticity is a property of materials that exhibit both viscous and elastic characteristics. In linear viscoelasticity, the stress is linearly related to the history function of strain. This paper discusses vibration analysis of functionally graded viscoelastic rectangular plate. The viscoelastic behavior of the plate is modeled using the Zener three-parameter model. Also, the material properties of the plate are graded through the thickness according to the volume fraction model. The maximum stress and strain are calculated based on the linear first-order shear deformation theory and the simply support boundary conditions is assumed at all four edges of the plate. A code is prepared using the Mathematica software to obtain the frequency values and effect of inherent and geometric characteristics of the sheet on natural frequency of the plate. These effects are studied using the tables and graphs represented in the results and discussion section of the paper. The results obtained in this paper are simplified to a functionally elastic plate to compare with those given in the literature search. The comparison of results shows good agreement against data given in literature for both cases.

### 1- مقدمه

ویسکوالاستیک بودن آنها اشاره کرد. در خصوص تحلیل دینامیکی و استاتیکی ورق های ویسکوالاستیک می‌توان به موارد بسیاری اشاره کرد. فلاحتگر [1] به تحلیل کماتش ورق‌های چهارگوش ویسکوالاستیک با روش شبه‌گذرای اجزا محدود پرداخت. زنگنه و همکارانش [2] به بررسی تأثیر مشخصات تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری میله پرداختند، آن‌ها در این مطالعه جهت مدل کردن رفتار مواد ویسکوالاستیک از مدل کلونین-ویت استفاده کردند. سیریوان و همکارانش [3] حل دقیقی برای ارتعاش آزاد ورق‌های ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه کردند. در این پژوهش جهت تقریب جابه‌جایی‌ها از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و جهت مدل کردن رفتار ویسکوالاستیک ورق از مدل سه پارامتری شبه‌جامد استفاده شده

فوم‌های پلیمری امروزه به دلیل خواص مکانیکی عالی و به‌ویژه خواص ضربه‌پذیری بالا در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این‌رو بررسی رفتار دینامیکی پل‌های ساخته‌شده از این مواد مورد توجه قرار گرفته است. از موارد استفاده این فوم‌ها می‌توان به کاربرد بسته‌بندی، کاهش احتراق، فیلتراسیون، زیرسازی و جاذب صوت و شوک اشاره کرد. از نقطه‌نظر مهندسی مواد برخی از انواع این فوم‌ها در کلاس مواد تابعی مدرج دسته‌بندی می‌شوند. مواد تابعی مدرج موادی با ساختار غیرهمگن است که خواص آن‌ها از جمله چگالی، ضریب پواسن، مدول الاستیسیته در یک یا دو راستا به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. از دیگر خصوصیت رفتاری این فوم‌ها می‌توان به خاصیت

Please cite this article using:

A. Bakhsheshy, H. Mahbadi, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Viscoelastic Plate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 143-149, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ورقی مستطیل شکل ساخته شده از مواد تابعی به طول  $a$ ، پهنای  $b$  و ضخامت  $h$  را در نظر بگیرید. ویژگی‌های مواد در راستای ضخامت صفحه متغیر و براساس قانون نسبت حجمی تعریف شده است. در شکل 1 هندسه یک فوم پلیمری سلول باز نمایش داده شده است. روابط جابه‌جایی ورق در دستگاه مختصات کارتزین با فرض تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت روابط (3-1) بیان شده است [19].

$$U(x, y, z, t) = z\varphi_x(x, y, t) \quad (1)$$

$$V(x, y, z, t) = z\varphi_y(x, y, t) \quad (2)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3)$$

در روابط (3-1)  $w$  جابه‌جایی عرضی ورق در راستای  $z$ ، پارامترهای  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  شیب ورق ناشی از خمش به ترتیب در راستای محورهای  $x$  و  $y$  و پارامترهای  $U, V, W$  به ترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی‌های ورق در راستای محورهای  $x, y$  و  $z$  است. با توجه به روابط جابه‌جایی 3-1 و فرض کرنش خطی روابط بین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های ورق به صورت رابطه (4) است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \varepsilon_y = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{aligned} \quad (4)$$

### 3- مدل ویسکوالاستیک تابعی

تانسورهای تنش  $\sigma_{ij}$  و کرنش  $\varepsilon_{ij}$  را به صورت روابط (5,6) به دو بخش تجزیه می‌شود.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3} S_{mm} \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (6)$$

عبارت اول در سمت راست روابط بالا،  $S_{ij}, \varepsilon_{ij}$  به ترتیب بخش انحرافی تانسورهای تنش و کرنش و عبارت دوم بخش هیدروستاتیک تانسورهای تنش و کرنش نامیده می‌شوند، آن‌گاه وابستگی تانسور تنش به تانسور کرنش برحسب زمان برای مواد ویسکوالاستیک توسط انتگرال‌های وراثت به صورت رابطه (7) نمایش داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t 2\mu(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} \Big|_{t=\tau} d\tau \\ &+ \int_0^t \kappa(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{mm}}{d\tau} \Big|_{t=\tau} \delta_{ij} d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

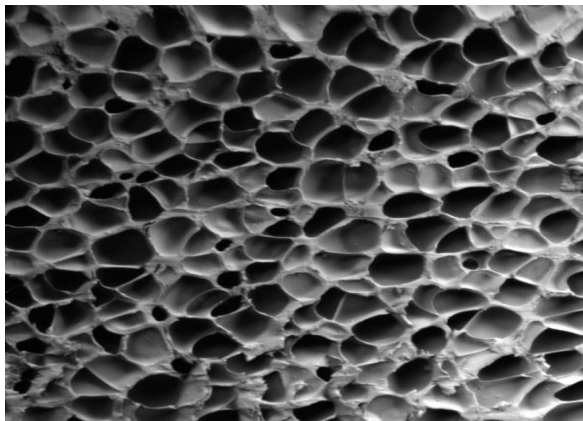


Fig. 1 Microscopic geometry view of open cell polymeric foams

شکل 1 نمایش میکروسکوپی از هندسه فوم‌های پلیمری سلول باز

است. کوپیتا [4] به بررسی فرکانس طبیعی ورق مرکب سه لایه ویسکوالاستیک پرداخت. بیلاسه و همکارانش [5] روشی بر پایه المان محدود جهت بررسی ارتعاش خطی و غیرخطی ورق ساندویچی ارائه کردند. ساکسا و همکارانش [6] در ادامه تحقیقات در این زمینه به بررسی رفتار دینامیک پل‌های ویسکوالاستیک پرداختند. در زمینه تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌های تابعی الاستیک می‌توان به مواردی اشاره کرد. حسینی‌هاشمی و همکاران [7] به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی تابعی با لایه‌ها پیزوالکتریک براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و یک حل دقیق پاسخ بسته پرداخته‌اند. در مطالعه آن‌ها فرکانس طبیعی ورق برای شرایط مرزی مختلف ورق با استفاده از حل دقیق به دست آمده است. محمد تالها و سینق [8] به بررسی ارتعاش و تحلیل استاتیکی ورق‌های تابعی با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به کمک روش المان پرداختند. ژاو و همکاران [9] تحلیلی برای ارتعاش آزاد ورق‌های تابعی چهارگوش ارائه دادند، همچنین از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای محاسبه کرنش برشی عرضی و اینرسی چرخشی استفاده کردند. معادله ویژه با اعمال روش ریتز بر فانکشنال انرژی سیستم به دست آمده و سپس حل شده است. در زمینه بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک تابعی می‌توان به مدل‌سازی دوبعدی ورق ویسکوالاستیک تابعی توسط اشرفی و پاولینو [10,11] تحلیل اجزا محدود دیو و همکارانش [12] و بررسی رفتار دینامیکی ورق ویسکوالاستیک تابعی در مقاله جین [13] اشاره کرد. آلترباچ و همکارانش [14] یک تئوری ورق جدید برای تحلیل ورق ویسکوالاستیک تابعی ارائه کردند و در ادامه کارشان [15] به مطالعه خمش ورق‌های ویسکوالاستیک تابعی از جمله فوم‌های پلیمری پرداختند.

مطالعه سوابق علمی نشان می‌دهد که در بیشتر پژوهش‌های انجام گرفته، بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ویسکوالاستیک برای ورق همگن انجام شده است. از آنجایی که رفتار موادی مانند فوم‌های پلیمری که خصوصیات آن‌ها در یک راستا به صورت پیوسته تغییر می‌کند از مدل مواد تابعی تبعیت می‌کند، در این تحقیق ارتعاش آزاد ورق‌های ویسکوالاستیک ساخته شده از مواد تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این که مدل‌های کلونین و ماکسول مدل‌هایی پایه‌ای برای پیش‌بینی رفتار ویسکوالاستیک مواد هستند، ترکیب زنجیره‌های کلونین و مدل‌های ماکسول می‌تواند منجر به مدل‌هایی با امکان پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار ویسکوالاستیک ماده شوند. از آنجایی که مدل زرن از ترکیب دو واحد ماکسول به صورت موازی ساخته شده، انتظار می‌رود که این مدل بتواند فرکانس طبیعی ورق‌های ویسکوالاستیک را با دقت بیشتری پیش‌بینی کند. مزیت این مدل در تعداد کم پارامترهای مورد نیاز برای مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک است که رفتار مواد ویسکوالاستیک را با وجود تعداد کم پارامترها با دقت بیشتری پیش‌بینی می‌کند [16,17]. یک فنر و یک میراگر در مدل زرن یا جامد خطی استاندارد با یکدیگر سری و با فنر دوم موازی شده‌اند [18]. جهت شبیه‌سازی رفتار تابعی ورق نیز از مدل کسر توانی حجمی استفاده شده است. در ابتدا مقادیر تنش و کرنش خطی با استفاده از روابط جابه‌جایی تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استخراج شده و سپس انرژی جنبشی و پتانسیل ورق بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمده است.

سرانجام با تشکیل تابع لاگرانژ از تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و کمینه‌سازی این تابع براساس روش ریتز معادله مقدار ویژه به دست می‌آید.

### 2- فیزیک مسئله

$$S_{ij}^0 = G(\omega) \epsilon_{ij}^0 \quad (18)$$

$$\sigma_{mm}^0 = 3K_0(\omega) \epsilon_{mm}^0 \quad (19)$$

با جای گذاری  $\xi = 1$  مدل رفتاری ورق به مدل الاستیک و در حالت  $\xi = 0$  به مدل کلونین تبدیل می‌شود. برای مدل الاستیک مدول الاستیسیته و ضریب پواسن به صورت رابطه (20) با مدول برشی و مدول بالک مرتبط است.

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \nu = \frac{3K-2G}{3K+2G} \quad (20)$$

با جای گذاری روابط (17,16) در رابطه (20) مدول و ضریب پواسن به صورت تابعی از فرکانس برای مدل زرن به شرح روابط (22,21) حاصل می‌شود.

$$E(\omega) = \frac{9\gamma G_1(1+i\omega T)}{3\gamma(1+i\omega\xi T) + (1+i\omega T)} \quad (21)$$

$$\nu(\omega) = \frac{13\gamma(1+i\omega T) - 2(1+i\omega T)}{23\gamma(1+i\omega\xi T) + (1+i\omega T)} \quad (22)$$

در روابط بالا  $\gamma = k_0/G_1$  یا  $\gamma = k_0/G_1$  است. مقادیر  $\nu(\omega)$  و  $E(\omega)$  برای مواد ویسکوالاستیک و همگن قابل استفاده و جهت اعمال تابعی بودن ماده ویسکوالاستیک (تغییر خواص ورق در راستای ضخامت) و ارائه مدل نهایی مسئله که مدل ویسکوالاستیک تابعی است، کسر حجمی برای این مدل به صورت رابطه (23) معرفی می‌شود.

$$V(z) = \alpha + (1-\alpha)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^g \quad (23)$$

در روابط یادشده  $\alpha$  ثابت ماده که برای هر ماده مقدر ثابتی است.  $g$  نیز ضریب نسبت حجمی توانی است. با اعمال کسر حجمی در پارامترهای مکانیکی مسئله روابط (24-28) را خواهیم داشت [20].

$$G(z, \omega) = V(z)^2 G_1 \frac{1+i\omega T}{1+i\omega\xi T} \quad (24)$$

$$K(z, \omega) = K_0 V(z)^2 \quad (25)$$

$$E(z, \omega) = \frac{9K_0 G(z, \omega)}{3K_0 + G(z, \omega)} \quad (26)$$

$$\nu(z, \omega) = \frac{13\gamma(1+i\omega T) - 2(1+i\omega T)}{23\gamma(1+i\omega\xi T) + (1+i\omega T)} \quad (27)$$

$$\rho(z) = \rho_s V(z) \quad (28)$$

$\rho_s$  کمترین مقدار چگالی فوم است. روابط (24-28) به ترتیب بیانگر مدول برشی، مدول بالک، مدول الاستیسیته، ضریب پواسن و چگالی برای ورق ویسکوالاستیک تابعی است که مقادیر آن‌ها وابسته به ضخامت و فرکانس است. با توجه به قانون هوک معادلات ساختاری برای ورق با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی در روابط (29-33) نشان داده شده است.

$$\sigma_x = \frac{E(z, \omega)}{1-\nu^2(z, \omega)} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (29)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z, \omega)}{1-\nu^2(z, \omega)} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (30)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E(z, \omega)}{1+\nu(z, \omega)} \gamma_{xy} \quad (31)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E(z, \omega)}{1+\nu(z, \omega)} \gamma_{xz} \quad (32)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E(z, \omega)}{1+\nu(z, \omega)} \gamma_{yz} \quad (33)$$

معادله انرژی پتانسیل ورق با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول برشی از رابطه (34) قابل محاسبه است.

در این معادلات  $\mu(\epsilon)$  و  $\kappa(\epsilon)$  مدل‌های آسودگی برشی و بالک است. رابطه (7) تنها به دلیل این که رفتار ماده در هر لحظه خطی در نظر گرفته شده به صورت بالا قابل نوشتن است. در نتیجه می‌توان براساس اصل بولتزمن اثرات تغییرات تدریجی بار را بر یکدیگر برهم‌نهی کرد. جهت مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک می‌توان ترکیب‌های مختلفی از فنر و دمپر را به کار گرفت. مدل خطی زرن که در شکل 2 نمایش داده شده یکی از مدل‌های مناسب برای تشریح رفتار ویسکوالاستیک فوم‌های پلیمری است که خصوصیات آن‌ها در راستای ضخامت به صورت تابعی تغییر می‌کند [20]. در این صورت معادلات ساختاری ماده ویسکوالاستیک با فرض این که بخش انحرافی تانسور تنش از مدل زرن تبعیت کند عبارت از روابط (9,8) است.

$$S_{ij} + T_2 \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = G_1(E_{ij} + T \frac{d\epsilon_{ij}}{dt}) \quad (8)$$

$$T_1 = \frac{\eta(z)}{G_1(z)}, T_2 = \frac{\eta(z)}{G_2(z)}, T(z) = T_1 + T_2 \quad (9)$$

در روابط بالا  $G_1$  و  $G_2$  مدل‌های برشی،  $\eta$  ثابت دمپر در مدل زرن و  $T$  ثابت آسودگی است، همچنین اگر فرض کنیم بخش هیدروستاتیک تنش از مدل مواد الاستیک خطی تبعیت کند رابطه (10) را به صورت زیر داریم.

$$S_{mm} = 3K_0(z) \epsilon_{mm} \quad (10)$$

در آن  $K(z)$  مدول بالک ماده است که تابعی از ضخامت فرض شده است. برای بررسی ارتعاش آزاد ورق، تنش و کرنش برای ورق ویسکوالاستیک به صورت رابطه (11) فرض می‌شود.

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 \exp(i\omega T), \quad \epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}^0 \exp(i\omega T) \quad (11)$$

روابط (12,13) را با استفاده از رابطه (11) و جای گذاری آن‌ها در روابط (6,5) خواهیم داشت.

$$S_{ij}^0 = \frac{G_1(1+i\omega T)}{1+i\xi T} \epsilon_{ij}^0, \quad (12)$$

$$\sigma_{mm}^0 = 3K_0 \epsilon_{mm}^0 \quad (13)$$

در روابط بالا  $\omega$  بیانگر فرکانس طبیعی،  $K$  مدول بالک و  $\xi = T_2/T$  است، همچنین روابط (14,15) را به صورت زیر داریم.

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{3} \epsilon_{mm}^0 \delta_{ij} \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}^0 = S_{ij}^0 + \frac{1}{3} S_{mm}^0 \delta_{ij} \quad (15)$$

با تعریف پارامترهای  $G(\omega)$  و  $K(\omega)$  به صورت زیر

$$G(\omega) = G_1 \frac{1+i\omega T}{1+i\omega\xi T} \quad (16)$$

$$K(\omega) = K_0 \quad (17)$$

روابط (12,13) به روابط (18,19) تبدیل می‌شوند.

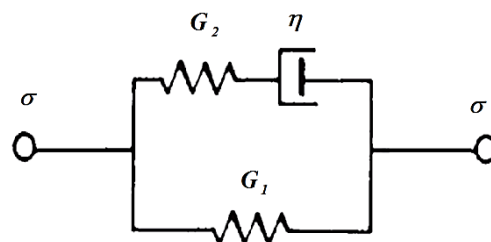


Fig. 2 Schematic view of Zener viscoelastic model

شکل 2 نمایش شماتیک مدل ویسکوالاستیک زرن

چهار طرف ساده، نسبت ضخامت به طول  $h/a = 0.1$  و نسبت اضلاع  $a/b = 1$  است. چگالی و مدول الاستیسیته به صورت  $E_{SUS304} = 207.78 * \rho_{SUS304} = 8166 \text{ kg/m}^3, \rho_{Si_3N_4} = 2370 \text{ kg/m}^3$   $E_{Si_3N_4} = 322.27 * 10^9 \text{ GPa}$  است، همچنین ضریب پواسون ثابت  $\nu = 0.3$  فرض شده است. نتایج حاصل از این تحقیق تا اندازه قابل قبولی و با درصد خطای ناچیزی به مرجع [8] نزدیک است. برای نمایش همگرایی نتایج در جدول 3 همگرایی 10 فرکانس طبیعی اول ورق  $SUS304/Si_3N_4$  برحسب (Hz) برای شرایط مرزی ساده و  $a/b = 1, h/a = 10$   $g = 0.05$ ، به ازای مقادیر مختلف  $n$  (تعداد جملات سری فوریه روابط 36-40) مورد بررسی قرار گرفته، مقدار  $m$  و  $n$  یکسان در نظر گرفته شده است. براساس نتایج این جدول به ازای  $m=n=38$  مقادیر فرکانس همگرا شده‌اند.

در شکل 3 نمودار تغییرات فرکانس‌های پایه ورق ویسکوالاستیک تابعی برحسب هر تیز به ازای پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی ساده ارائه شده است. در این نمودار نسبت ضخامت به طول  $h/a = 0.13, \xi = 0.5$  و نسبت طول به عرض ورق  $a/b = 1$  فرض شده است. براساس شکل مقدار فرکانس با افزایش ثابت آسودگی با افزایش روبه‌رو است.

جدول 1 خواص مکانیکی مواد

نوع ماده	$\xi$	$\alpha$	$G_1$ (MPa)	$K_0$ (MPa)	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )
الاستیک	1	-	2000	4000	100
تابعی	1	0.65	2000	4000	100
ویسکوالاستیک	0.5	-	2000	4000	100
ویسکوالاستیک تابعی	0.5	0.65	2000	4000	100

جدول 2 مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی بدون بعد  $\tilde{\omega}$  ورق الاستیک تابعی برای شرایط مرزی ساده  $a/b = 1, h/a = 0.1$

نتایج	g				
	10	5	1	0.5	0
نتایج کنونی	2.7471	3.0163	3.6135	4.3629	5.9841
مرجع [8]	2.6973	2.8351	3.4845	3.9701	5.7523

جدول 3 بررسی همگرایی ده فرکانس طبیعی اول ورق الاستیک تابعی برحسب (Hz) برای شرایط مرزی ساده  $a/b = 1, h/a = 0.05, g = 10$

Table 3 Convergence studies of ten first natural frequencies (Hz) for simply supported elastic FG plate  $g = 10, a/b = 1, h/a = 0.05$

مود	n					
	38	35	30	20	10	5
اول	75.2313	75.2313	75.2441	75.2987	75.4491	75.902
دوم	185.935	185.935	185.9601	186.097	186.507	187.471
سوم	185.935	185.935	185.9822	186.681	187.571	188.610
چهارم	294.209	294.209	294.283	294.536	295.712	298.337
پنجم	365.114	365.114	365.2091	365.6180	366.739	369.211
ششم	365.114	365.114	365.2866	365.8907	367.849	371.598
هفتم	469.652	469.652	469.8603	470.634	473.198	477.098
هشتم	469.652	469.652	470.088	471.291	475.352	481.674
نهم	605.830	605.830	606.311	607.838	616.744	660.059
دهم	605.830	608.830	606.955	608.644	620.551	671.119

$$U_P = \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\epsilon_{xy} + \sigma_{xz}\epsilon_{xz} + \sigma_{yz}\epsilon_{yz}] dz dy dx \quad (34)$$

انرژی جنبشی ورق نیز با در نظر گرفتن اینرسی دورانی به صورت رابطه (35) به‌دست خواهد آمد.

$$T_P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, \omega) [\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2] dz dy dx \quad (35)$$

مقادیر  $\dot{W}, \dot{V}, \dot{U}$  در رابطه بالا بیانگر تغییرات جابه‌جایی‌های ورق نسبت به زمان به ترتیب در راستاهای  $z, y, x$  است. برای شرط مرزی چهارطرف ساده پاسخ ارتعاشی ورق به صورت روابط (36-40) است.

$$u = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{ij} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (36)$$

$$v = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{ij} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (37)$$

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{ij} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (38)$$

$$\varphi_x = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{ij} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (39)$$

$$\varphi_y = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{ij} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (40)$$

$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$  ثوابتی که مقدار آن‌ها با روش ریتز محاسبه می‌شود. براساس روش انرژی ریلی- ریتز تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم به‌دست‌آمده و با کمینه‌سازی این تفاضل ثوابت مجهول توابع بالا و فرکانس‌های طبیعی ورق تعیین می‌شوند. معادلات لاگرانژ را به صورت رابطه (41) می‌نویسیم [21].

$$\Pi = \sum U_{Max} - \sum T_{Max} \quad (41)$$

با صفر قراردادن مشتق معادله لاگرانژ نسبت به ثوابت مجهول، معادله لاگرانژ به صورت رابطه (42) کمینه می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial B_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial D_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial E_{ij}} = 0 \quad (42)$$

با اعمال روابط (36-40) مسئله مقدار ویژه به صورت رابطه (43) حاصل می‌شود.

$$[K]\{q\} - \omega^2[M]\{q\} = \{0\} \quad (43)$$

$[M]$  ماتریس جرم تیر،  $[K]$  به ترتیب ماتریس سفتی متناظر با انرژی‌های کرنشی است.

#### 4- نتایج عددی

در این بخش مقادیر فرکانس طبیعی برای یک ورق ویسکوالاستیک تابعی محاسبه شده و تأثیر پارامترهای گوناگون از جمله نسبت ضخامت به طول ورق، نسبت طول به عرض ورق، ضریب توانی نسبت حجمی و ثابت زمانی آسودگی بر فرکانس طبیعی ورق مورد تجزیه تحلیل قرار گرفته است. در جدول 1 خواص مواد مورد استفاده در این پژوهش ارائه شده است. برای صحت‌سنجی نتایج، در جدول 2 مقادیر فرکانس‌های بدون‌بعد  $\tilde{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  مربوط به نخستین فرکانس ورق الاستیک تابعی  $SUS304/Si_3N_4$  با مرجع [8] مقایسه شده است. در این جدول شرایط مرزی

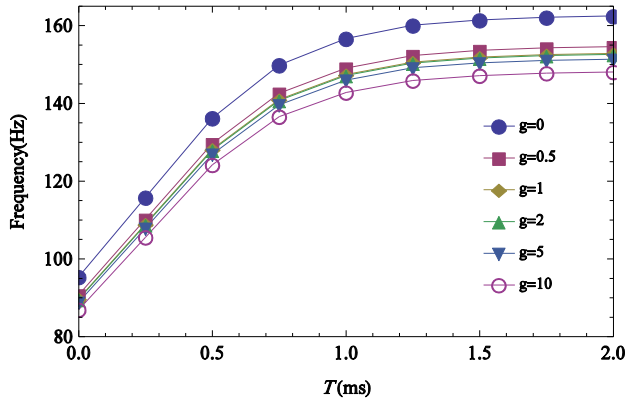


Fig. 4 Variation of first natural frequency of viscoelastic FG plate for  $a/b = 1, h/a = 0.02, \xi = 0.5$

شکل 4 تغییرات فرکانس پایه ورق ویسکوالاستیک تابعی به ازای  $a/b = 1, h/a = 0.02, \xi = 0.5$

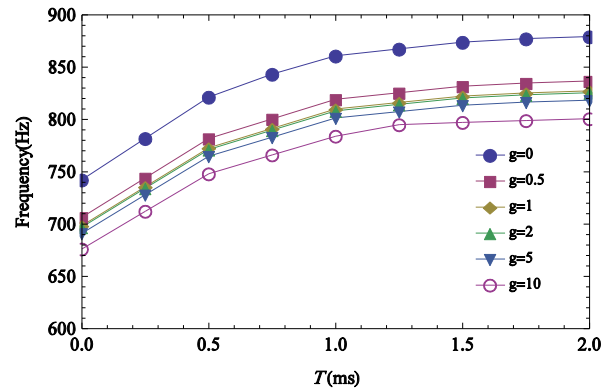


Fig. 3 Variation of first natural frequency of viscoelastic FG plate for  $a/b = 1, h/a = 0.13, \xi = 0.5$

شکل 3 تغییرات فرکانس پایه ورق ویسکوالاستیک تابعی به ازای  $a/b = 1, h/a = 0.13, \xi = 0.5$

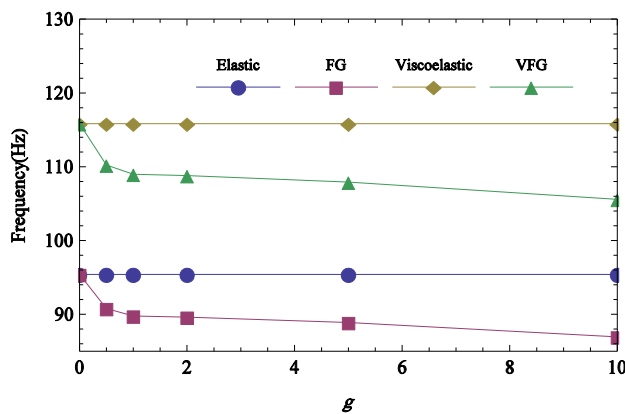


Fig. 5 Variation of first natural frequency of various plates for  $a/b = 1, h/a = 0.02$

شکل 5 تغییرات فرکانس پایه ورق های مختلف به ازای تغییرات ضرایب توانی نسبت حجمی  $a/b = 1, h/a = 0.02$

افزایش  $\eta$  مقادیر فرکانس نیز افزایش می یابد.

### 5- نتیجه گیری

در این تحقیق مقادیر فرکانس طبیعی برای یک ورق ویسکوالاستیک تابعی محاسبه و جهت تحلیل ارتعاش ورق از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. برای مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک ماده از مدل سه پارامتری زرن استفاده شده است. با توجه به این که ماده مورد بررسی تابعی است، ضرایب مدل زرن نیز به صورت تابعی از ضخامت در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی مورد استفاده شرایط مرزی چهارطرف ساده است. با مقایسه نتایج به دست آمده از این پژوهش با نتایج ورق های ایزوتروپ ویسکوالاستیک، می توان نتیجه گرفت که تطابق خوبی بین نتایج این مقاله و نتایج به دست آمده در سوابق علمی برخوردار است. نتایج به دست آمده نشان می دهند که با افزایش نسبت اضلاع ورق، مقدار فرکانس ارتعاش کم شده است. مقدار فرکانس با افزایش ضخامت ورق نیز افزایش می یابد. هر چه مقدار ضریب توانی نسبت حجمی افزایش یابد مقدار فرکانس طبیعی ورق نیز کاهش می یابد. با افزایش ثابت زمانی آسودگی مقدار فرکانس طبیعی ورق نیز افزایش می یابد. مقادیر فرکانس در شرایط مشابه برای ورق ویسکوالاستیک بیش از مقادیر فرکانس برای ورق الاستیک است.

به گونه ایی که تا  $T = 1\text{ms}$  روند افزایش فرکانس به شدت صورت می گیرد و کم کم با افزایش  $T$  این روند کندتر شده، به طوری تقریبی برای  $T \gg 2\text{ms}$  می توان گفت که افزایش  $T$  بر مقادیر فرکانس اثری نخواهد داشت. در شکل 3 نیز نمودار تغییرات مقادیر فرکانس مشابه نمودار شکل 4 این بار برای نسبت ضخامت به طول  $h/a = 0.02$  نمایش داده شده که روند تغییرات و تفسیر نتایج مشابه نمودار شکل 3 است. مقایسه نتایج شکل های 3 و 4 نشان می دهد که افزایش نسبت ضخامت به طول سبب کاهش فرکانس پایه ورق می شود. در شکل 5 نمودار تغییرات فرکانس های پایه ورق های الاستیک، ویسکوالاستیک، ویسکوالاستیک و ویسکوالاستیک تابعی به ازای تغییرات ضرایب توانی نسبت حجمی نمایش داده شده که  $a/b = 1, h/a = 0.02$  است. در حالت استخراج نتایج برای ورق ویسکوالاستیک ثابت آسودگی  $T = 0.25\text{ms}$  در نظر گرفته شده است. براساس شکل 5 مقادیر فرکانس در شرایط مشابه برای ورق ویسکوالاستیک به مراتب بیش از مقادیر فرکانس برای ورق الاستیک است، همچنین مشاهده می شود در ورق های الاستیک و ویسکوالاستیک تابعی با افزایش ضریب توانی نسبت حجمی  $g$  مقادیر فرکانس ورق کاهش می یابد. در جدول 4 مقادیر سه فرکانس اول ورق ویسکوالاستیک تابعی برحسب هر تری به ازای پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی ساده ارائه شده است. در این جدول  $\xi = 0.5$ ، مقادیر نسبت ضخامت به طول  $h/a = 0.05, 0.1, 0.1$  و ثابت آسودگی  $T = 3\text{ms}$  فرض شده است. همان طور که در این جدول مشاهده می شود با افزایش ضریب توانی نسبت حجمی مقادیر فرکانس ورق کاهش می یابد، همچنین با افزایش نسبت طول به عرض ورق فرکانس کاهش می یابد که کم کم با افزایش  $a/b$  کاهش فرکانس با شیب ملایم و ضعیفی همراه خواهد بود. به گونه ایی که می توان به ازای  $a/b \gg 5$  افزایش  $a/b$  تأثیری در مقدار عددی فرکانس نخواهد داشت. در خصوص تأثیر نسبت ضخامت به طول در مقادیر فرکانس نیز افزایش  $h/a$  سبب افزایش شدید مقادیر فرکانس می شود.

در شکل 6 تغییرات فرکانس پایه ورق های مختلف به ازای تغییرات  $\eta, \xi$  برای  $a/b = 1, h/a = 0.02, g = 2$  نمایش داده شده است. برای  $\xi = 1$  ورق رفتار الاستیک از خود نشان می دهد؛ بنابراین تغییرات  $\eta$  به ازای  $\xi = 1$  بر فرکانس طبیعی سیستم بی تأثیر است. برای  $\xi = 0.5$  ورق رفتار ویسکوالاستیک با مدل زرن و  $\xi = 0$  ورق رفتار ویسکوالاستیک منطبق بر مدل کلونین-ویت از خود نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود با کاهش مقادیر  $\xi$  فرکانس طبیعی ورق سیر صعودی دارد و با

جدول 4 مقادیر سه فرکانس اول ورق ویسکو الاستیک تابعی به ازای پارامترهای مختلف برای  $\xi = 0.5, T = 3ms$  برحسب هرترز

Table 4 The first three natural frequencies of viscoelastic FG plate plate of various parameters for  $\xi = 0.5, T = 3ms$  (Hz)

$a/b = 5$			$a/b = 3$			$a/b = 1$			$a/b = 0.5$			g	h/a
$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$		
685.75	197.479	177.072	697.77	245.832	189.166	1352.47	878.871	340.189	2848.19	1352.47	848.871	0	
685.75	187.85	168.437	663.775	233.845	179.942	1286.66	806.575	323.604	2709.95	1286.66	806.575	0.5	
645.044	185.757	166.561	656.351	231.239	177.937	1272.19	797.542	319.995	2679.12	1272.19	797.542	1	
643.877	185.438	166.275	655.162	177.631	177.631	1269.73	796.076	319.436	2673.24	1269.73	796.076	2	0.05
638.547	183.918	164.913	649.737	228.946	176.176	1259.08	789.464	316.811	2650.15	1259.08	789.464	5	
624.667	179.917	161.326	635.614	223.966	172.344	1231.74	772.307	309.921	2592.71	1231.74	772.307	10	
608.272	175.187	157.084	618.933	218.079	167.812	1199.49	752.049	301.777	2525.19	1199.49	752.049	20	
1354.48	393.447	352.918	1378.32	489.494	377.045	2641.58	1670.44	676.235	2641.58	2641.58	1670.44	0	
1289.08	374.386	335.818	1311.41	465.658	358.677	2513.9	1589.43	643.328	5168.04	2513.9	1589.43	0.5	
1274.44	370.195	332.061	1296.5	460.438	354.664	2484.78	1571.28	636.094	5105.82	2484.78	1571.28	1	
1271.67	369.519	331.459	1293.67	459.58	354.018	2478.26	1567.69	634.867	5087.73	2478.26	1567.69	2	0.1
1260.71	366.453	328.714	1282.52	455.753	351.083	2455.89	1554.03	629.54	5037.47	2455.89	1554.03	5	
1233.38	358.489	321.569	1254.72	445.85	343.452	2402.83	1520.36	615.869	4929.37	2402.83	1520.36	10	
1201.25	349.084	313.13	1222.03	434.161	334.44	2340.78	1480.84	599.743	4804.45	1480.84	1480.84	20	
1992.08	586.715	526.593	2025.9	728.709	562.237	3817.8	2446	1004.25	3816.74	3816.74	2445.32	0	
1896.43	558.339	501.117	1928.65	693.492	535.041	3635.11	2328.17	955.518	7224.74	3635.11	2328.17	0.5	
1874.35	552.041	495.473	1906.18	685.644	529.01	3591.17	2300.8	944.635	7131.47	3591.17	2300.8	1	
1869.22	550.936	494.496	1900.92	684.218	527.957	3578.11	2293.98	942.533	7093.67	3578.11	2293.98	2	0.15
1852.14	546.276	490.329	1883.52	678.383	523.498	3542.45	2272.53	934.366	7012.16	3542.45	2272.53	5	
1812.15	534.419	479.683	1842.87	663.667	512.134	3466.49	2223.55	914.119	6863.64	3466.49	2223.55	10	
1765.47	520.447	467.134	1795.41	646.342	498.741	3378.81	2166.54	890.326	6695.95	3378.81	2166.54	20	

$\rho$  چگالی ( $kgm^{-3}$ )  
 $\eta$  ثابت دمپر  
 $\mu$  مدول آسودگی برشی (Pa)

7- مراجع

[1] S. R. Falahatgar, Creep buckling analysis of rectangular viscoelastic thick plate by pseudo-transient finite element method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 132-142, 2014. (in Persian)

[2] R. Zanganeh R, A. Keramat, A. Ahmadi, Investigation of the Effects of Viscoelastic Support Properties Simulated by the Generalized Kelvin-Voigt Model on the Axial Vibration of a Rod, *Modeling in Engineering*, Vol. 13, No. 41, pp. 93-111, 2015. (in Persian)

[3] S. Srinivas, A. Rao, An exact analysis of free vibrations of simply-supported viscoelastic plates. *Sound and Vibration*, Vol. 19, No. 3, pp. 251-9, 1971.

[4] P. Cupiał, J. Nizioł, Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer, *Sound and Vibration*, Vol. 183, No. 1, pp. 99-114, 1995.

[5] M. Bilasse, L. Azrar, E.M. Daya, Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations, *Computers & Structures*, Vol. 89, No. 8, pp. 539-555, 2011.

[6] T. Saksa, N. Banichuk, J. Jeronen, M. Kurki, T. Tuovinen, Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels, *Solids and Structures*. Vol. 49, No. 23, pp. 3355-66, 2012.

[7] Sh. Hosseini Hashemi, H. akhavan, M. fadaee, Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74, 2011. (in Persian)

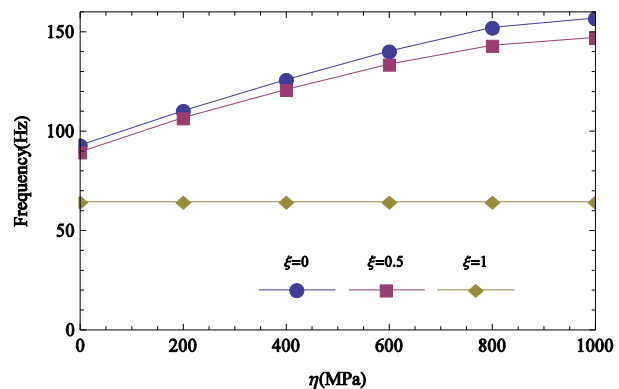


Fig. 6 Variation of first natural frequency of various plates for  $\eta$ ,  $\xi$  and  $a/b = 1, h/a = 0.02, g = 2$

شکل 6 تغییرات فرکانس پایه ورق‌های مختلف به‌ازای تغییرات  $\eta, \xi$  برای  $a/b = 1, h/a = 0.02, g = 2$

6- فهرست علائم

$E$  مدول الاستیسیته (Pa)  
 $g$  ضریب نسبت حجمی توانی  
 $G$  مدول برشی (Pa)  
 $K$  مدول بالک (Pa)  
 $T$  ثابت آسودگی

علائم یونانی

$\theta$  ضریب پواسون

- plates made of polymer foams, *Acta Mechanica*, Vol. 204, No. 3, pp. 137-54, 2009.
- [16] M. J. Mahmoodi, M. Vakilifard, Three dimensional micromechanical modeling of damping capacity of nano fiber reinforced polymer nanocomposites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 257-266, 2016. (in Persian فارسی)
- [17] A. Treviso, B. Van Genechten, D. Mundo, M. Tournour, Damping in composite materials: Properties and models, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 78, No. 1, pp. 144-152, 2015. (in Persian فارسی)
- [18] D. Gutierrez-Lemini, *Engineering Viscoelasticity*, pp. 53-92, New York:Springer Science+Business Media, 2014. (in Persian فارسی)
- [19] Sh. Hosseini-Hashemi, S. Fazeli, M. Fadaee, Obtaining the natural frequencies of moderately thick Orthotropic plates with piezoelectric patches using the Ritz method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 73-65, 2011. (in Persian فارسی)
- [20] Sh. Hosseini-Hashemi, A.R. Abaei, M.R. Ilkhani, Free vibrations of functionally graded viscoelastic cylindrical panel under various boundary conditions, *Composite Structures*, Vol. 126 pp. 1 - 15, 2015.
- [21] K. Khorshidi, A. Bakhsheshy, Natural frequency analysis of a FG composite rectangular plate coupled with fluid using Rayleigh-Ritz method, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, 2014. (in Persian فارسی)
- [8] M. Talha, B. N. Singh, Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3991-4011, 2009.
- [9] X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp- Ritz method, *Sound and Vibration*, Vol. 319, No. 3-5, pp. 918-939, 2009.
- [10] H. Ashrafi, M. Bahadori, M. Shariyat, Two-dimensional modeling of functionally graded viscoelastic materials using a boundary element approach. *Advanced Materials Research*, Vol. 463, 570-4, 2012.
- [11] G. Paulino, Z-H. Jin, Viscoelastic functionally graded materials subjected to antiplane shear fracture, *Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 2, pp. 284-93, 2001.
- [12] E.V. Dave, G.H. Paulino, W.G. Buttlar, Viscoelastic functionally graded finite element method with recursive time integration and applications to flexible pavements, *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 36, No. 9, pp.1194-219, 2012.
- [13] Z.H. Jin, Some notes on the linear viscoelasticity of functionally graded materials. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 11, No. 2, pp. 216-24, 2006.
- [14] H. Altenbach, VA. Eremeyev, Analysis of the viscoelastic behavior of plates made of functionally graded materials. *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 88, No. 5, pp. 332-41, 2008.
- [15] H. Altenbach, VA. Eremeyev, On the bending of viscoelastic