



بررسی فرآیند نفوذ و جابجایی در یک جریان دوفازی آب و هوا به روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)

حسن زمانی پور¹، پوریا امیدوار^{2*}، علی طیبی²

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

* یاسوج، صندوق پستی 75914-353 omidvar@yu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 آبان 1395

پذیرش: 23 دی 1395

ارائه در سایت: 13 بهمن 1395

کلید واژگان:

روش هیدرودینامیک ذرات هموار

جریان‌های دوفازی

مسئله نفوذ و جابجایی

صعود حباب هوا

چکیده

در این مقاله به بررسی فرآیند نفوذ و جابجایی در یک جریان دوفازی آب و هوا توسط روش هیدرودینامیک ذرات هموار پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی نیازمند آگاهی از وضعیت دقیق سطح مشترک بین دو فاز است که روش اسپ‌ایچ بدلیل ماهیت لاگرانژی و بدون مش بودن به راحتی سطح مشترک بین دو فاز را شناسایی می‌کند. برای شبیه‌سازی از کد متن باز اسپیزیکس دو بعدی تک فاز که برای مسائل سطح آزاد کاربرد فراوان دارد، استفاده می‌شود. این کد با اضافه کردن نیروی کشش سطحی و یک فشار اضافی به معادله مومنوم، به یک کد دوفازی آب و هوا ارتقاء یافته است. همچنین برای درک بهتر فرآیند نفوذ و جابجایی، معادله غلظت نیز مورد بررسی قرار گرفته شده است. برای اعتباربخشی مسئله دوفازی آب و هوا ابتدا مسائل مخزن ساکن آب و هوا و فشار هیدرواستاتیکی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مسئله شکست سد دوفازی بر روی بستر نامحدود شبیه‌سازی شده و نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه و نتایج قابل قبولی به دست آمده است. سپس فرآیند نفوذ و جابجایی و توزیع غلظت برای جریان دوفازی آب و هوا برای سه ضریب نفوذ متفاوت انجام شده و نتایج به دست آمده تطابق خوبی با نتایج تحلیلی داشته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش اسپ‌ایچ یک روش مناسب برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی نظیر آب و هوا و همچنین فرآیند نفوذ و جابجایی است.

Investigation of convection-diffusion process in a two-phase air-water flow using Smoothed Particle Hydrodynamics

Hassan Zamanipour, Pourya Omidvar*, Ali Tayebi

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran

* P.O.B 75914-353, Yasouj, Iran, omidvar@yu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 November 2016
Accepted 12 January 2017
Available Online 01 February 2017

Keywords:
Smoothed particle hydrodynamics
Two-phase flows
Convection-Diffusion problem
Air-bubble rising

ABSTRACT

In this paper, the convection-diffusion process in a two-phase air-water flow is investigated. Two-phase flows of air and water are important and are widely used in the industrial applications. Simulation of such a flow needs a proper understanding of the interface between two phases where there is a change in the fluid properties. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a fully Lagrangian and meshless method which can simply detect the interface of multiphase flows. Here, we develop the open-source SPHysics2D code into two phase and implement the convection-diffusion equation by looking carefully at surface tension forces. To validate, first the still-water problem is investigated to ensure that the hydrostatic pressure at the interface is predicted and then the dam-break problem on an infinite bed is compared with the available experimental data. Results show that the combination of surface tension formulations and an additional artificial force gives a better result. Finally, the convection-diffusion process and the concentration distribution are shown for the air-bubble rising problem for different diffusive coefficients. It will be shown that the SPH method is a useful tool for studying multiphase flows and convection-diffusion processes.

1- مقدمه

جریان‌های دوفازی، از لحاظ فیزیکی و عددی، دارای پیچیدگی‌های زیادی هستند که توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. از مهم‌ترین اهدافی که حل جریان‌های دوفازی دنبال می‌کند بررسی جریان‌هایی است که دو سیال با یک فصل مشترک از یکدیگر جدا می‌شوند. سطح مشترک بین فازها بسیار به تغییر هندسه اجزای جریان حساس است و در نتیجه هر تغییری در آن باعث تغییر در معادلات حاکم می‌شود [1]. از جمله کاربردهای

این نوع جریان‌ها می‌توان به جریان دوفازی در راکتورهای هسته‌ای، کندانسورها، برج‌های حبابی، راکتورهای هوای بالابنده¹، جریان درون جداکننده‌های نفتی و جریان درون لوله‌های انتقال نفت و گاز اشاره کرد [2]. روش‌های مختلفی برای حل جریان‌های دوفازی و تعیین سطح مشترک بین فازها وجود دارد، که از رایج‌ترین این روش‌ها می‌توان روش‌های سطح تراز²،

¹ Airlift
² Level Set

Please cite this article using:

H. Zamanipour, P. Omidvar, A. Tayebi, Investigation of convection-diffusion process in a two-phase air-water flow using Smoothed Particle Hydrodynamics, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 115-125, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

حجم سیال¹ و ... را نام برد.

[24]. ژانگ و همکاران یک مدل هیدرودینامیک ذرات هموار برای صعود حباب هوا و بهم آمیختگی حباب‌ها در سه بعد ارائه دادند [25]. لیند و همکاران در سال 2016 یک روش جدید دوفازی تراکم‌پذیر-تراکم‌ناپذیر در جایی که فصل مشترک بین فازها ناپیوستگی چگالی وجود دارد، را گسترش دادند [26]. اخیراً پورعبدیان و همکاران به مدل‌سازی شکست جت مایع تک‌فازی و دوفازی با اختلاف چگالی بالا با استفاده از روش اسپ‌اچ پرداختند [27]. شایان ذکر است که اولین بار فرآیند نفوذ با استفاده از روش اسپ‌اچ را کلیری و موناگان در سال 1999 برای مسائل انتقال حرارت هدایت مدل کردند [28]. در سال 2001 و 2002 ژو و فاکس [29,30] و نیز تارتاکوفسکی و میکین [31] در سال 2005 مدل‌های متفاوتی برای فرآیند نفوذ ارائه دادند. تارتاکوفسکی و همکاران انتقال فعال و بارش را با استفاده از روش اسپ‌اچ انجام دادند [32]. ماننتی و همکاران به شبیه‌سازی سریع زدودن رسوب به وسیله جریان آب با استفاده از روش اسپ‌اچ پرداخته‌اند [33]. همچنین آریستدو و همکاران یک مدل دوفازی برای فرآیند جابجایی و نفوذ با اختلاف چگالی کم (آب و روغن) ارائه دادند [34]. با این حال هنوز فرآیند نفوذ و جابجایی برای جریان دوفازی با اختلاف چگالی زیاد (مثلاً آب و هوا) انجام نشده است.

در این مقاله برای حل عددی از کد متن باز اسفیزیکس⁷ دوبعدی استفاده شده است. این کد یک کد برنامه‌نویسی روش هیدرودینامیک ذرات هموار است که به زبان فرترن برای شبیه‌سازی مسائل سطح آزاد و تک‌فازی نوشته شده و در آن اثرات نیروی کشش سطحی صرف نظر شده است. در اینجا با اضافه کردن نیروی کشش سطحی و یک فشار اضافی (نیروی حجمی) به معادله مومنوم، کد مربوطه به یک کد دوفازی با اختلاف چگالی بالا ارتقاء یافته است. این راهکار برای دوفازی کردن کد مربوطه هنوز ارائه نشده است، از این رو تمام شبیه‌سازی‌های موجود در این مقاله با این راهکار ارائه می‌شود. همچنین در این مقاله با اضافه کردن معادله نفوذ و جابجایی به بررسی تغییر غلظت حباب هوا در آب پرداخته می‌شود. تا آنجایی که نویسندگان اطلاع دارند، فرآیند نفوذ و جابجایی در یک جریان دوفازی آب و هوا مورد بررسی قرار نگرفته است. به این ترتیب نوآوری مقاله به این صورت بیان می‌شود. در این مقاله ابتدا مسئله مخزن ساکن آب و هوا برای نشان دادن فشار هیدرواستاتیکی در آب، شبیه‌سازی شده است و پس از آن به شبیه‌سازی شکست سد در دو بستر محدود و نامحدود پرداخته شده است. سپس با اضافه کردن معادله نفوذ و جابجایی، مسئله صعود حباب هوا جهت بررسی غلظت حباب هوا برای سه ضریب نفوذ متفاوت شبیه‌سازی شده است.

2- معادلات حاکم

اولین قدم برای شبیه‌سازی رفتار یک محیط پیوسته، توصیف رفتار آن به‌وسیله‌ی مدل‌ها و معادله‌های ریاضی است. معادلات حاکم بر رفتار یک محیط پیوسته شامل دو معادله‌ی اصلی می‌باشد:

- معادله‌ی بقای جرم (پیوستگی)

- معادله‌ی بقای اندازه حرکت (مومنوم)

بنابراین نرخ تغییرات سرعت و چگالی توسط معادلات اوپلر⁸ و در چهارچوب دیدگاه لاگرانژی توسط روابط (1) و (2) بیان می‌گردد:

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \nabla \cdot v \quad (1)$$

روش هیدرودینامیک ذرات هموار یک روش کاملاً لاگرانژی است که در حل مسائل دینامیک سیالات محاسباتی² استفاده می‌شود. در این روش به منظور ساده شدن تحلیل عددی، محیط پیوسته را به ذراتی تقسیم می‌نماییم که در فاصله‌ی معینی از یکدیگر تأثیر می‌پذیرند و به‌منظور حفظ پیوستگی محیط توسط تابعی با تکیه‌گاه هموار هر ذره به ذرات همسایه خود وابسته می‌شود. اساس ساده روش اسپ‌اچ³، قابلیتش در پذیرش فیزیک‌های پیچیده، این روش را از سایر روش‌ها متمایز می‌کند [3]. از این‌رو، روش اسپ‌اچ یک روش مناسب برای بررسی جریان‌های سطح آزاد و دوفازی است. روش هیدرودینامیک ذرات هموار برای اولین بار توسط لوسی و به‌طور جداگانه توسط موناگان و گینگلد در سال 1977 میلادی به‌منظور بررسی پدیده‌های غیرمتقارن فیزیک نجومی، ارائه شد [4,5]. موناگان علاوه بر مسائل فیزیک نجوم برای اولین بار این روش را برای تحلیل جریان‌هایی با سطح آزاد به‌کار گرفت [6]. برهم‌کنش سیال و جامد [7,8]، جریان‌های سطح آزاد [9]، سیالات غیرنیوتنی [10]، بررسی انتقال حرارت هدایت [11]، مکانیک جامدات [12] نمونه‌های از کاربردهای متنوع این روش است. موناگان در سال 1995 برای به‌دست آوردن ناحیه سطح مشترک و ساختار یک انرژی کشش سطحی از یک تابع رنگ هموار⁴ استفاده کرد [6]. در سال 1998 کامینس و رادمن⁵ با به‌کار بردن روش تصویرسازی جریان سیال در یک حفره را شبیه‌سازی کرده و این اولین بار بود که روش تصویرسازی برای شبیه‌سازی جریان به کمک اسپ‌اچ به‌کار برده می‌شد [13]. موریس سه فرمول مختلف با استفاده از گرادیان تابع رنگ برای به‌دست آوردن نیروی ناشی از کشش سطحی ارائه داد [14]. در سال 2003 کلگروسی و لندرنی برای حل گرادیان زیاد چگالی در سطح تماس، راه‌حل‌های نظیر استفاده از تصحیح مقدار چگالی و فیلتر کردن آن برای هر 30 گام زمانی، هموار کردن سرعت جریان و تصحیح ترم گرادیان فشار با اضافه کردن ترم کشش سطحی بسیار بزرگ در معادله حالت مربوط به فاز سبک‌تر را ارائه دادند [15]. هو و آدامز یک روش برای مدل‌سازی کشش سطحی ارائه کردند [16] و سپس به مدل‌سازی جریان چندفازی پرداختند [17]. گرینیر و همکاران برای جریان‌های چندفازی با اختلاف چگالی بالا فرمول‌نویسی جدیدی به‌نام همیلتون⁶ اسپ‌اچ پیشنهاد داده‌اند [18]. رساتی و همکاران، جریان سطح آزاد دوفازی شکست سد روی بستر متحرک را شبیه‌سازی کردند [19]. اولین شبیه‌سازی هیدرودینامیک ذرات هموار برای جریان حبابی توسط داس و داس انجام شد، آن‌ها شبیه‌سازی تغییر شکل حباب در یک استخر مایع ساکن از طریق روزه غوطه‌ور را با روش هیدرودینامیک ذرات هموار انجام دادند [20]، به‌علاوه آن‌ها پیشرفت‌های بیشتر در این پژوهش (با اعمال یک سطح مشترک منتشر شده) را با انجام شبیه‌سازی جریان حبابی با اختلاف چگالی بالا ارائه دادند [21] و کشف کردن پارامترهای فیزیکی از نمونه‌های جریان‌های حبابی است [22]. موناگان و رفیعی با توجه به این‌که کشش سطحی در سیال چندفازی مخصوصاً با اختلاف چگالی بالا بسیار مهم است توانستند الگوریتمی را ارائه دهند که فرمول‌بندی جدیدی برای جریان چندفازی بدون در نظر گرفتن کشش سطحی می‌باشد [23]. همچنین گرینیر و همکاران جریان‌های حبابی لزج با یک مدل فصل مشترک ارائه شده توسط روش اسپ‌اچ را شبیه‌سازی کردند

¹ Volume of Fluid Method

² Computational Fluid Dynamic

³ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

⁴ Colour Function Smoothed

⁵ Cummins & Rudman

⁶ Hamilton

⁷ SPHysics

⁸ Euler Equations

دوفازی با اختلاف چگالی بالا نیز به صورت معادله (6) تعریف می‌شود:

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} + R_{ij} \right) \nabla_i W_h(r_{ij}) + f \quad (6)$$

که Π_{ij} در رابطه (6) بیانگر اثر لزجت است. در این مقاله برای اعمال کردن اثر لزجت از رابطه لزجت مصنوعی برای جریان دوفازی آب و هوا به صورت زیر استفاده می‌شود [38]:

$$\Pi_{ij} = - \frac{16v_i v_j}{(v_i \rho_i + v_j \rho_j)} \frac{v_{ij} \cdot r_{ij}}{h |r_{ij}|} \quad (7)$$

در رابطه‌ی (6) R_{ij} ، بیانگر یک فشار اضافی (به‌عنوان نیروی حجمی) است که برای کنترل فشار بین دو فاز با اختلاف چگالی بسیار بالا ارائه شده است [18]. لازم به‌ذکر است که این پارامتر وقتی به معادله‌ی مومنتوم اضافه می‌شود که دو ذره از یک جنس نباشند، به‌عبارت دیگر این ترم فقط در سطح تماس بین دو فاز اضافه می‌شود. موناگان و رفیعی مقدار این عبارت را به‌صورت زیر اصلاح کردند [23]:

$$R_{ij} = \chi \cdot \left(\frac{\rho_{0,1} - \rho_{0,g}}{\rho_{0,1} + \rho_{0,g}} \right) \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \quad (8)$$

مقادیر $\rho_{0,1}$ و $\rho_{0,g}$ ، به ترتیب مقادیر چگالی مرجع آب و هوا هستند. مقدار χ ، ضریبی است که با توجه به تجربیات عددی در هر مسئله به دست می‌آید و با توجه به تحلیل پایداری حل در مسائل، معمولاً بین [0.01-0.1] است. در این پژوهش برای χ مقدار 0.08 در نظر گرفته شده است.

2-1- نیروی کشش سطحی

برای مدل‌سازی اثرات کشش سطحی در قالب روش اسپ‌ایچ تلاش‌های فراوانی صورت گرفته است که اکثر آن‌ها از روش نیروی سطحی پیوسته (سی‌اس‌اف) استفاده کرده‌اند [39]. در این روش نیروی کشش سطحی به‌عنوان یک نیروی حجمی فقط در ناحیه نزدیک به سطح مشترک دو سیال در نظر گرفته می‌شود. موریس براساس همین تئوری نیروی سطحی پیوسته روشی را برای مدل‌سازی کشش سطحی با استفاده از خط انحنا²ی سطح تماس و تابع دلتای سطحی³ ارائه کرد [14]. این متغیرها توسط یک تابع رنگ⁴ محاسبه می‌شوند. نیروی کشش سطحی به‌صورت عمودی بر سطح تماس دو سیال اعمال می‌شود. برطبق تئوری سی‌اس‌اف کشش سطحی F_s به یک نیرو بر واحد حجم تبدیل می‌شود:

$$F_s = f_s \delta_s \quad (9)$$

در رابطه (9) δ_s بیانگر تابع دلتای سطحی و f_s نیرو بر واحد سطح است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_s = \sigma \kappa \hat{n} \quad (10)$$

که در رابطه (10) σ ضریب کشش سطحی، \hat{n} بردار یکه عمود بر سطح تماس و κ خط انحنا⁵ی سطح تماس هستند. ضریب کشش سطحی در این پژوهش برابر 0.072 N/m در نظر گرفته شده است. در این روش فرض شده است که کشش سطحی در تمام سیال ثابت است و از گرادیان سطح چشم‌پوشی شده است. نیرو بیان شده در رابطه (10) به صورت عمود بر سطح تماس و بر خط انحنا⁵ی محلی عمل می‌کند. این نیرو، نواحی دارای انحنا⁵ زیاد را هموار می‌کند و عاملی برای کاهش مساحت سطح کل (و متعاقباً انرژی سطح) است. برای δ_s در رابطه (9) انتخاب‌های متفاوتی وجود دارد. اما در هر حال این نرمال‌کننده باید طوری برگزیده شود که انتگرال آن روی

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla P + f \quad (2)$$

که d/dt معرف مشتق مادی، v سرعت، P بیان‌کننده‌ی فشار، ρ چگالی سیال و f نیروی حجمی وارده بر واحد جرم می‌باشد. این روش از یک انتگرال میانیاب برای محاسبه خواص ذرات استفاده می‌کند (معادله (3)) [3].

$$\phi(r) = \int_{\Omega} \phi(\hat{r}) W_h(|r - \hat{r}|) d\hat{r} \quad (3)$$

در رابطه (3) انتگرال‌گیری بر روی ناحیه پشتیبانی Ω انجام می‌گیرد. h طول هموارسازی بوده که متناسب با فاصله ذره می‌باشد. "شکل 1" ناحیه پشتیبانی را نشان می‌دهد، که در آن طول ناحیه پشتیبانی (r) با طول هموارسازی (h) متناسب است.

با افزایش طول هموارسازی، ناحیه تاثیر در میانیابی تابع ϕ بزرگتر می‌شود. اندازه طول هموارسازی با استفاده از فاصله اولیه ذرات همراه با یک ضریب بدست می‌آید. این طول در تمامی شبیه‌سازی‌های انجام شده در این مقاله $h = 1.3\Delta x$ در نظر گرفته شده است که Δx فاصله اولیه بین ذرات می‌باشد. تابع میانیاب تنها برحسب فاصله‌ی بین ذرات و به‌منظور حفظ بقای مومنتوم زاویه‌ای و خطی تغییر می‌کند [35].

اس‌پی‌اچ انتگرال میانیاب (معادله (3)) را به یک سری متناهی تبدیل می‌کند و فضای پیوسته سیال را با یک فضای گسسته محدود تقریب می‌زند [36]:

$$\phi(\hat{r}) \cong \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \phi(r_j) W_h(r_{ij}) \quad (4)$$

در رابطه (4)، کمیت m_j معرف جرم ذره و ρ_j چگالی ذره، r_{ij} کمیت نشان‌دهنده‌ی فاصله بین ذره i و j می‌باشد. کمیت $W_h(r_{ij})$ معرف گرادیان تابع میانیاب بوده که در مرکز موقعیت ذره i محاسبه شده است. فرم گسسته معادله‌ی پیوستگی برای جریان دوفازی با اختلاف چگالی بالا در روش اسپ‌ایچ به منظور محاسبه‌ی تغییرات زمانی چگالی به‌صورت معادله (5) به دست می‌آید [37]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j v_{ij} \cdot \nabla_i W_h(r_{ij}) \quad (5)$$

$$v_{ij} = v_i - v_j$$

در این روش چگالی فقط هنگامی تغییر خواهد کرد که ذرات سیال نسبت به یکدیگر تغییر کنند. در واقع با استفاده از چگالی اولیه که به ذرات داده شده و معادله‌ی پیوستگی، تغییرات زمانی چگالی محاسبه می‌شود. همچنین در این مقاله برای جلوگیری از نوسانات چگالی از فیلتر شپارد¹ [15] برای هر فاز به طور جداگانه استفاده می‌شود. در روش اسپ‌ایچ معادله مومنتوم برای جریان

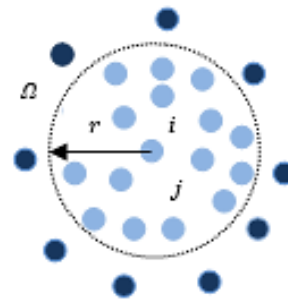


Fig. 1 Neighbors of particle i within the domain of interest Ω .

شکل 1 ذرات همسایه i در ناحیه پشتیبانی Ω .

¹ Shepard

² Continuum Surface Force (CSF)

³ Curvature

⁴ Surface Delta Function

⁵ Color Function

2-2- معادلات نفوذ و جابجایی

پدیده‌ی نفوذ توسط قانون فیک توصیف می‌شود [40]. با بسط فوریه معادله حرارت، فیک به توصیف معادله‌ی نفوذ و تحلیل آن پرداخت. با توجه به این قانون تناسبی بین پخش شار گرمی و گرادیان غلظت برقرار می‌باشد. اگر از پدیده‌ی جابجایی صرف نظر کنیم معادله نفوذ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dC}{dt} = D \nabla^2 C \quad (21)$$

که در معادله‌ی (21) C غلظت و D ضریب نفوذ می‌باشد. اما معمولاً در سیالات نفوذ به همراه جابجایی اتفاق می‌افتد، حال اگر جریان سیال دوفاز باشد و چگالی دو فاز اختلاف چگالی بالایی داشته باشد (برای مثال آب و هوا) جابجایی هم در پدیده‌ی نفوذ نقش بیشتری دارد. معادله‌ی توأم نفوذ و جابجایی به صورت زیر است [41]:

$$\frac{dC}{dt} = D \nabla^2 C - \nabla \cdot (vC) \quad (22)$$

معادله‌ی نفوذ و جابجایی را می‌توان به فرم روش هیدرودینامیک ذرات هموار نوشت، در نتیجه معادله (22) به فرم روش اسپ‌ایچ به صورت زیر بیان می‌شود [34]:

$$\frac{dC_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4D_i D_j}{D_i + D_j} (\rho_i + \rho_j) \frac{r_{ij} \cdot W_{ij}}{r_{ij}^2 + \eta^2} C_{ij} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{C_j}{\rho_j} v_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (23)$$

مقدار $\eta^2 = 0.01h^2$ برای جلوگیری از صفر شدن منجر کسر هنگامی که دو ذره خیلی به هم نزدیک باشند، به کار می‌رود. همچنین D ضریب نفوذ و C غلظت تعریف شده است. برای این که ترم نفوذ از نظر عددی در مسائل با اختلاف چگالی بالا مانند آب و هوا در مرز مشترک بین دو سیال پایدار باشد در معادله (23) باید جای m_j/ρ_j با m_j/ρ_i تعویض شود.

2-3- معادله حالت

برای به دست آوردن فشار، روش هیدرودینامیک ذرات هموار از یک معادله حالت ایزنتروپیک استفاده می‌کند، همچنین شایان ذکر است که در این مقاله از معادلات انرژی استفاده نشده است. روش هیدرودینامیک ذرات هموار جریان سیال را تراکم‌پذیر ضعیف در نظر می‌گیرد که این امر استفاده از معادله‌ی حالت جهت تعیین فشار سیال را در مقایسه با حل معادله‌ی پواسون تسهیل می‌نماید. معادله‌ی حالت به صورت زیر تعریف می‌شود [6]:

$$P = \beta \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (24)$$

پارامتر ρ_0 چگالی مرجع سیال است و معمولاً به صورت چگالی سیال در سطح آزاد و برابر 1000 kg/m^3 در نظر گرفته می‌شود. γ یک ثابت پلی‌تروپیک¹ بوده که مقدار آن معمولاً بین 1 تا 7 می‌باشد. که در این مقاله این ضریب برای آب و هوا بترتیب 7 و 1.4 تعریف شده است.

2-4- تابع میان‌یاب

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، تابع میان‌یاب نقش بسیار مهمی در روش اسپ‌ایچ دارد چرا که کمیت‌ها با استفاده از میان‌یاب به دست می‌آیند. در روش اسپ‌ایچ تابع میان‌یاب با مرتبه‌های متفاوت وجود دارد [27]. آنچه موجب می‌شود تا از تابع میان‌یاب با مرتبه متفاوت استفاده شود می‌شود پایداری بوده، در حقیقت معادلات روش اسپ‌ایچ به شدت به مشتقات مرتبه اول و دوم کرنل وابسته می‌باشد. استفاده از تابع کرنل مرتبه‌ی پنجم برای

سطح تماس برابر با واحد شود. این شرط بدین منظور است که با افزایش دقت حل، فیزیک سطح تماس به درستی بازایی شود. در نتیجه می‌توان از تابع دلتای سطحی به صورت زیر استفاده کرد:

$$\delta_s = |n| \quad (11)$$

که $|n|$ اندازه بردار عمود بر سطح تماس است. سطح تماس هوا و آب می‌تواند توسط یک تابع رنگ مسیریابی شود. تابع رنگ برای محاسبه بردار نرمال و متعاقباً محاسبه خط انحنا سطح تماس به کار گرفته می‌شود. در بیان تقریب ذره‌ای روش اسپ‌ایچ تابع رنگ به صورت فرمول (12) بیان می‌شود.

$$c_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_h(r_{ij}) \quad (12)$$

قبل از شروع حل عددی، تابع رنگ برای ذرات آب یک و برای ذرات هوا صفر فرض می‌شود. در نتیجه در طول حل عددی در نواحی دور از سطح تماس آب و هوا، تابع رنگ برای ذرات آب و هوا تقریباً ثابت و به ترتیب برابر یک و صفر باقی می‌ماند، در حالی که در نزدیکی‌های سطح آزاد و سطح تماس دو سیال تابع رنگ تا حدود 0.4-0.5 افت می‌کند. می‌توان بردار نرمال سطح را بر حسب گرادیان تابع رنگ به صورت زیر تخمین زد:

$$n = \nabla c \quad (13)$$

خط انحنا سطح تماس به صورت دیورژانس بردار یکه نرمال تعریف می‌شود (رابطه (14)).

$$\kappa = \nabla \cdot \hat{n} \quad (14)$$

بنابراین براساس رابطه‌های (13) و (14) می‌توان تقریب عددی بردار نرمال و خط انحنا را به صورت زیر نوشت [14]:

$$n_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (c_j - c_i) \nabla_i W_h(r_{ij}) \quad (15)$$

$$\kappa = (\nabla \cdot \hat{n})_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\hat{n}_j - \hat{n}_i) \cdot \nabla_i W_h(r_{ij}) \quad (16)$$

در نتیجه بر طبق این فرمول‌بندی، سطح تماس منطقه‌ای است که مقدار تابع رنگ تغییر زیادی کند. سطح تماس دارای عرض محدودی می‌باشد. هنگامی که تعداد ذرات به سمت بی‌نهایت میل کنند، عرض سطح تماس نیز به سمت صفر می‌گراید. همان‌طور که اشاره شد در نواحی دور از سطح تماس، تابع رنگ تقریباً ثابت است و در نتیجه هنگامی که رابطه (15) برای ناحیه خارج از سطح تماس استفاده شود، مقادیر بسیار کوچک می‌شوند. این موضوع منجر به مقادیر بسیار بزرگ \hat{n} و در نتیجه κ می‌شود. این اتفاق باعث می‌شود تا جهت‌ها و مقادیر نیروی کشش سطحی به درستی محاسبه نشوند. یکی از راه‌ها برای جبران این نادرستی، فیلتر کردن n به شکل زیر است:

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر } |n_i| > \epsilon \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (17)$$

$$\hat{n}_i = \begin{cases} \frac{n_i}{|n_i|}, & \text{اگر } |n_i| > \epsilon \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (18)$$

در رابطه (17) معمولاً ϵ برابر $0.01/h$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین رابطه (16) به صورت رابطه (19) اصلاح می‌شود.

$$\kappa = (\nabla \cdot \hat{n})_i = \sum_j \min(N_i, N_j) \frac{m_j}{\rho_j} (\hat{n}_j - \hat{n}_i) \cdot \nabla_i W_h(r_{ij}) \quad (19)$$

در نتیجه رابطه نهایی برای شتاب ناشی از نیروهای کشش سطحی a_s به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(a_s)_i = -\frac{\sigma_j}{\rho_j} (\nabla \cdot \hat{n})_i n_i \quad (20)$$

که در نهایت $(a_s)_i$ که بیانگر نیروی کشش سطحی است به معادله (7) اضافه می‌شود.

¹ Polytrophic Constant

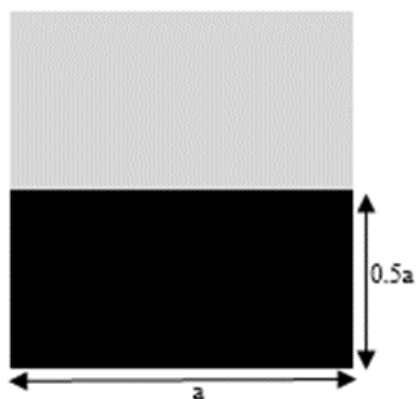


Fig. 2 Schematic of the still water problem

شکل 2 شماتیک مسأله مخزن ساکن آب و هوا

کرد. همچنین در "شکل 4" همگرایی جواب در فاصله‌بندی‌های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته شده است. "جدول 1" خطای میانگین برای فاصله‌بندی‌های متفاوت را بیان می‌کند که با استفاده از رابطه (26) به دست آمدند.

$$\text{err} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Z_i^* - Z_i| \times 100\% \quad (26)$$

که در آن n تعداد ذرات، Z_i^* ارتفاع حل تحلیلی و Z ارتفاع حل روش اسپ‌ایچ است.

همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود هر چه فاصله‌بندی بین ذرات کمتر شود جواب دقیق‌تری از فشار را خواهیم داشت، همچنین همان‌طور که از "جدول 1" مشاهده می‌شود با کاهش فاصله‌بندی خطای میانگین کاهش می‌یابد، لذا جهت کاهش هزینه محاسباتی تمام شبیه‌سازی‌های مسئله مخزن ساکن آب و هوا با فاصله‌بندی $\Delta x = 0.01$ انجام می‌شود. در "شکل 5" نمودار فشار آب در ارتفاع‌های مختلف برای فاصله‌بندی یکسان برای هر سه راهکار با حل تحلیلی ناشی از فشار هیدرواستاتیکی در ثانیه دوم مقایسه شده است. طبق نمودار فشار هیدرواستاتیکی که در "شکل 5" مشاهده می‌شود، اضافه کردن کشش سطحی به فرمول گرینبیر جواب دقیق‌تری از فشار را خصوصاً در سطح مشترک، نشان می‌دهد.

"جدول 2" درصد خطاهای نسبی در سه راهکار مختلف را نشان می‌دهد، که طبق جدول ارائه شده، راهکار سوم (اضافه کردن نیروی کشش سطحی به فرمول گرینبیر) خطای کمتری نسبت به دو راهکار دیگر در یک فاصله‌بندی مشخص دارد. از این‌رو، شبیه‌سازی‌های موجود در این مقاله با استفاده از این راهکار انجام شده است.

3-2- شکست سد

مسئله‌ی شکست سد از جمله مسائلی است که با حرکت شدید موج همراه بوده و دارای تغییر شکل‌های بزرگ همراه با حرکت پیچیده‌ی سطح آزاد در مکانیک سیالات می‌باشد. با وجود این‌که مسئله شکست سد در روش اسپ‌ایچ به صورت تک فازی حل می‌شود، در این پژوهش این مسئله برای صحت‌سنجی معادلات دوقفازی ارائه شده و کد مربوطه استفاده شده است. در این بین، با توجه به تغییر شکل‌های بزرگ می‌توان به بررسی سطح مشترک بین دو فاز که از اهمیت زیادی برخوردار است، پرداخته شود. در مسئله‌ی شکست سد، ستون آبی در نظر گرفته می‌شود که تحت اثر میدان جاذبه قرار دارد و در حالت قلمرو نامحدود بررسی می‌گردد. بنابراین پارامتر تأثیرگذار در

شبیه‌سازی عدد رینولدز خیلی پایین موجب بقای پایداری شده در حالی که تابع کرنل مرتبه سوم نوسان‌های بسیاری را در نتایج سرعت و فشار موجب می‌شود [42]. در این پژوهش با توجه به نتایج مرجع [27] همه مسائل با تابع میانیاب وندلند شبیه‌سازی شده است. تابع میان‌یاب وندلند به صورت زیر نوشته می‌شود [43]:

$$W(r, h) = \frac{\kappa}{h^v} \times \begin{cases} (1+2q)(2-q)^4, & 0 \leq q < 2 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases} \quad (25)$$

که مقدار κ برای محاسبات یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی به ترتیب $3/4$ ، $7/4\pi$ و $7/8\pi$ می‌باشد.

2-5- شرایط مرزی و الگوریتم زمانی

یکی از بخش‌های جدایی‌ناپذیر هر شبیه‌سازی عددی، تشخیص و اعمال درست شرایط مرزی است. یکی از نقاط ضعف روش‌های بدون شبکه اعمال شرایط مرزی است که این مسئله برای روش اسپ‌ایچ نمود بیشتری پیدا می‌کند. روش‌های متفاوتی برای مدل‌سازی دیواره‌ها در این روش وجود دارند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش نیروی دافعه¹ که به ذرات نزدیک مرز در جهت عمود نیرویی وارد می‌کند، اشاره کرد. موناگان و کاس پس از مشاهده‌ی شکل و توزیع نامرتب و نامتوازن نیروی دافعه بر روی یک دیوار هموار و صاف، به منظور دست‌یابی به یک نیروی دافعه‌ی مصنوعی هموارتر بر روی دیوار، نوع دیگری از نیروهای دافعه را تحت عنوان نیروی دافعه‌ی مصنوعی نرمال ارائه دادند [44]. راجرز و همکاران [45] برای شرط مرزی پیچیده این روش را اصلاح کردند. در این مقاله از این شرط مرزی برای همه شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است.

روش‌های متفاوتی برای الگوریتم زمانی در روش اسپ‌ایچ وجود دارد که در این مقاله از روش پیش‌بینی-تصحیح² استفاده شده است [46].

3- اعتبارسنجی عددی

برای صحت و درستی کد توسعه یافته و قبل از شبیه‌سازی الگوی غلظت حباب هوا در آب، به بررسی و شبیه‌سازی مسائلی از قبیل مخزن ساکن آب و هوا، شکست سد نامتناهی در بستر خشک و توزیع غلظت حباب هوا در مخزن آب ساکن پرداخته شده است.

3-1- مخزن ساکن آب و هوا

در ابتدا فشار هیدرواستاتیکی در مسئله مخزن ساکن آب و هوا با به‌کارگیری سه راهکار متفاوت بررسی شده است. همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود، یک مخزن به طول و عرض یکسان و برابر a در نظر گرفته شده است، که a اندازه طول واحد است که نیمه پایینی، آب و نیمه بالایی، هوا در نظر گرفته شده است.

در این تحقیق برای حل مسأله مخزن ساکن آب و هوا از سه راهکار استفاده شده است: در راهکار اول با اضافه کردن یک فشار اضافی به معادله مومنوم که توسط گرینبیر و همکاران [18] ارائه شد، شبیه‌سازی مسئله موردنظر انجام شده است. در راهکار دوم با اضافه کردن نیروی کشش سطحی به کد مربوطه این مسأله مورد بررسی قرار گرفته شد. اما در راهکار سوم با اضافه کردن کشش سطحی به فرمول گرینبیر که ترکیبی از دو راهکار قبلی است مسئله مخزن ساکن آب و هوا شبیه‌سازی شده است. در "شکل 3" می‌توان نتایج مسئله مخزن ساکن آب و هوا را در زمان‌های متفاوت مشاهده

¹ Repulsive Force

² Predictor-Corrector Scheme

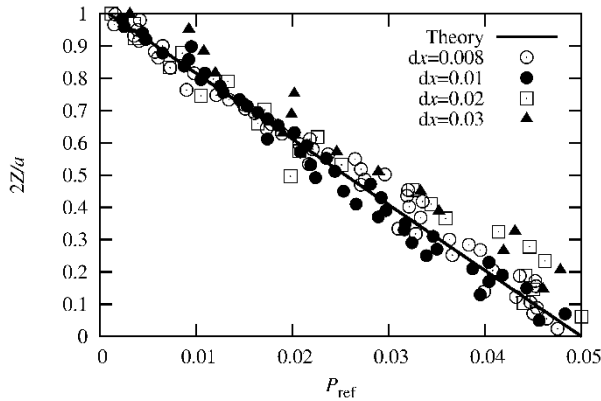


Fig. 4 The convergence test for hydrostatic pressure with different spacing at $t=2.0$ s

شکل 4 تست همگرایی فشار هیدرواستاتیکی با فاصله‌بندی متفاوت در ثانیه دوم

جدول 1 درصد خطای میانگین برای فاصله‌بندی‌های متفاوت

Table 1 The mean error for different spacing percent

درصد خطای میانگین	فاصله‌بندی
% 1.60	$dx=0.03$
% 1.51	$dx=0.02$
% 1.41	$dx=0.01$
% 1.22	$dx=0.008$

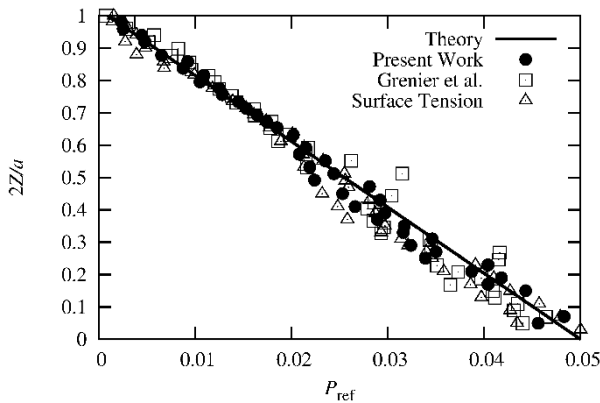


Fig. 5 Comparisons between exact and SPH hydrostatic pressure at 2 seconds

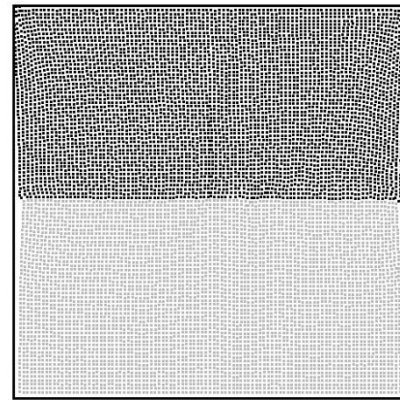
شکل 5 مقایسه فشار استاتیکی تئوری و روش اسپ‌ایچ در 2 ثانیه

جدول 2 درصد خطای نسبی حل‌های روش اسپ‌ایچ در زمان‌های مختلف با فاصله‌بندی $\Delta x=0.01$

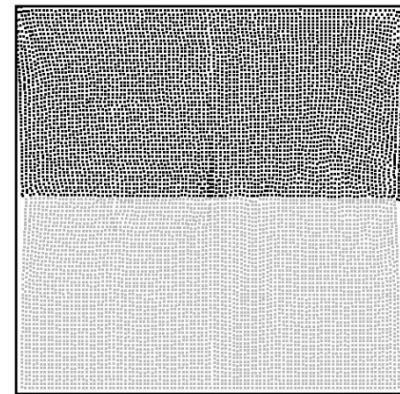
Table 2 Relative error for different SPH solutions at different times with spacing $\Delta x = 0.01$

کد توسعه یافته	0.5 ثانیه	1 ثانیه	1.5 ثانیه	2 ثانیه
گرینیر و همکاران	% 15.99	% 17.42	% 17.62	% 19.29
کشش سطحی	% 9.89	% 9.27	% 11.03	% 9.48
کار حاضر	% 9.40	% 9.01	% 9.50	% 9.30

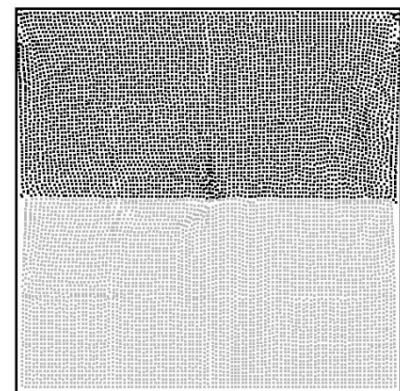
جریان سیال شکست سد، نیروی حجمی وزن بوده که سیال در اثر آن ریزش می‌کند. در حالت قلمرو نامحدود، هندسه‌ی مسئله همانند "شکل 6" می‌باشد و در واقع سیال پس از حرکت بر روی بستر خشک سطح جامد با دیوار عمودی برخورد نداشته و تنها نحوه‌ی حرکت سیال و رفتار سطح مشترک بین دوفاز مدنظر هستند.



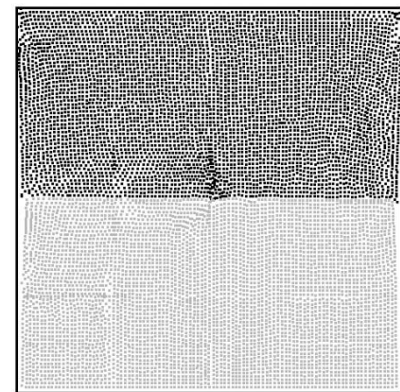
$t=0.5s$



$t=1s$



$t=1.5s$



$t=2s$

Fig. 3 Particles distribution for still water problem of different time

شکل 3 توزیع ذرات برای مسأله مخزن ساکن آب و هوا در زمان‌های مختلف

"شکل های 8 و 9" مقایسه‌ی تغییرات بی‌بعد پیشانی موج و تغییرات بی‌بعد سطح ارتفاع ستون آب، برحسب زمان بی‌بعد، حاصل از مدل‌سازی مسئله‌ی شکست سد با قلمروی نامحدود با نتایج تجربی حاصل از کار کوشیزوکا در سال 1996 که در مرجع [47] نیز ارائه شده‌اند، را نمایش می‌دهد که از تقریب بسیار خوبی برخوردار می‌باشد.

در حالت دوم به بررسی مسئله‌ی شکست سد بر روی قلمرو محدود پرداخته می‌شود. در این حالت، شبیه‌سازی جریان از لحظه‌ی سقوط سیال تا برخورد آن با دیواره و برگشت امواج از دیواره انجام شده است. طرحواره‌ی مسئله شکست سد در "شکل 10" نمایش داده شده است. ارتفاع و عرض ستون سیال به ترتیب برابر با D و C و پارامتر a برابر طول واحد می‌باشند. دیوار قائم نیز در فاصله‌ی $Lx = 3.366a$ از انتهای ستون سیال قرار دارد.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی، شامل تاریخچه‌ی زمانی حرکت سیال و چگونگی تغییرات سطح آزاد سیال در "شکل 11" ارائه شده‌اند. در این حالت پس از فرو ریختن ستون آب، آب بر روی سطح خشک شتاب می‌گیرد و در نهایت به دیواره‌ی مقابل برخورد می‌کند. در اثر این برخورد سیال به شدت تغییر جهت داده و به سمت بالا شتاب می‌گیرد. پس از این، در اثر عملکرد میدان جاذبه که به سمت پایین است، سرعت ذرات کاهش پیدا کرده و با

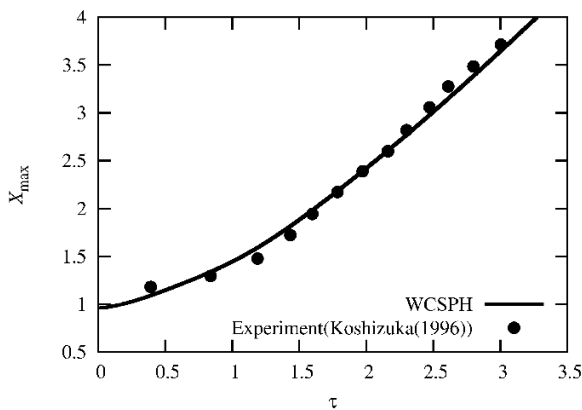


Fig. 8 Comparison of dimensionless wave front between SPH and experimental data [47] for dam break flow on infinite bed.

شکل 8 مقایسه‌ی تغییرات بی‌بعد پیشانی موج بین روش اس‌پی‌اچ و آزمایشگاهی [47] برای جریان شکست سد بر روی بستر نامحدود.

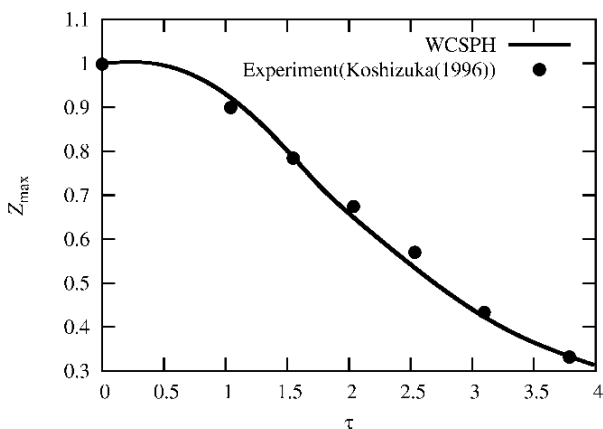


Fig. 9 Comparison of dimensionless wave height between SPH and experimental data [47] for dam break flow on infinite bed.

شکل 9 مقایسه‌ی تغییرات بی‌بعد پیشانی موج بین روش اس‌پی‌اچ و آزمایشگاهی [47] برای جریان شکست سد بر روی بستر نامحدود.

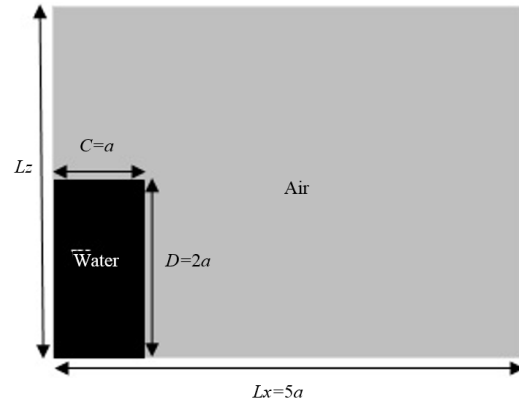


Fig. 6 Schematic of the dam break problem on infinite bed.

شکل 6 شماتیک مسئله‌ی شکست سد روی بستر نامحدود.

جهت بی‌بعدسازی تغییرات پیشانی موج، ارتفاع ستون آب و زمان از روابط زیر استفاده می‌گردد:

$$X_{\max} = \frac{x}{C} \quad (27)$$

$$Z_{\max} = \frac{z}{D} \quad (28)$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{2g}{C}} \quad (29)$$

تغییر شکل سطح مشترک بین دو سیال در "شکل 7" نشان داده شده‌اند. علاوه بر چیدمان و چگونگی تغییرات سطح آزاد سیال و سطح مشترک در مسئله‌ی شکست سد با قلمرو نامحدود، به‌طور معمول دو نمودار دیگر شامل تغییرات پیشانی موج و تغییرات سطح ارتفاع ستون آب، هر دو به صورت بی‌بعد، برحسب زمان بی‌بعد نیز برای این مسائل ارائه می‌گردند.

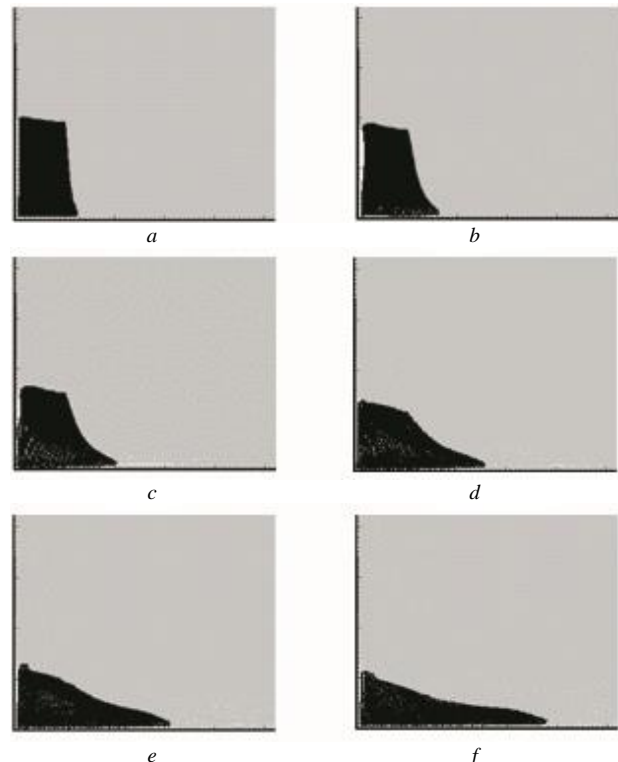


Fig. 7 Particles distribution for dam break problem on infinite bed at different dimensionless times (From a to f at 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0)

شکل 7 توزیع ذرات برای مسئله شکست سد روی بستر نامحدود در زمان‌های متفاوت بی‌بعد (بترتیب از a تا f برای زمان‌های بی‌بعد 0, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0)

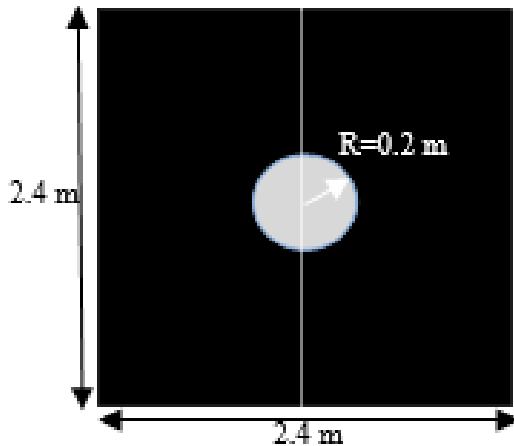


Fig. 12 Schematic of air bubble problem

شکل 12 شماتیک مسئله صعود حباب هوا

که در معادله (31) $c_0 = 1 \text{ kgs}^{1/2}/\text{m}^3$ ، $t_0 = 1 \text{ s}$ و V سرعت میانگین عمودی حباب هوا است که به صورت تحلیلی مانند معادله (32) بیان شده است [34].

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} r} \quad (32)$$

در "شکل 13"، توزیع غلظت حباب هوا در مخزن ساکن آب در زمان‌های متفاوت برای ضریب نفوذ 10^{-3} بیان شده است.

با توجه به معادلات (30) تا (32) در "شکل‌های 14 تا 16" به بررسی و مقایسه توزیع غلظت حباب هوا در زمان‌های مختلف با حل تحلیلی برای ضریب نفوذ‌های متفاوت پرداخته شده است. همان‌طور که از "شکل 14 تا 16" مشاهده می‌شود، نمودارها دارای انطباق مناسبی بین حل تحلیلی و توزیع غلظت در حباب هوا با استفاده از روش اسپ‌ایچ می‌باشند. در حل تحلیلی غلظت برای حباب، شکل کروی در نظر گرفته می‌شود ولی صعود حباب هوا همراه با تغییر شکل صورت می‌گیرد. در نمودار "شکل‌های 14 و 15" در نیم ثانیه، به دلیل تغییر شکل پیدا کردن حباب هوا، صعود حباب هوا و سرعت نفوذ آن، کاهش می‌یابد. از طرفی غلظت حباب هوا به دلیل کم شدن سرعت نفوذ هوا کاهش می‌یابد. قابل ذکر است که برای نشان دادن غلظت در حباب هوا برای ضریب نفوذ‌های 10^{-4} و 10^{-2} ، جهت بهتر نشان دادن نمودارهای مربوطه بترتیب شعاع 0.1 m و 0.45 m در نظر گرفته شده است. دلیل تغییر شعاع این است که با تغییر ضریب نفوذ توانایی تحلیل نمودار مانند قبل (ضریب نفوذ 10^{-3}) وجود داشته باشد.

طبق نتایج به دست آمده در "شکل‌های 14 تا 16" مشاهده می‌شود، با کم شدن ضریب نفوذ سرعت نفوذ حباب هوا کاهش می‌یابد و برعکس. همچنین مشاهده می‌شود که تغییر ضریب نفوذ تأثیری بر روی بیشینه غلظت حباب هوا ندارد و بیشینه غلظت در هر سه نمودار با ضریب نفوذ‌های مختلف در زمان‌های متفاوت یکسان است.

با توجه به نتایج ارائه شده در این مقاله، مشاهده می‌شود که روش اسپ‌ایچ توانایی بررسی غلظت با ضریب نفوذ‌های متفاوت را دارد. از این شبیه‌سازی می‌توان برای پیش‌بینی الگوی غلظت در جریان‌های دوفاز استفاده کرد که یکی از مهمترین کاربردهای آن در سرریزها می‌باشد. اگر ما الگوی از این نفوذ و جابجایی در دست داشته باشیم می‌توانیم جانمایی مناسبی برای هوادها داشته باشیم که از پدیده‌ی کواپتاسیون می‌توان جلوگیری کرد.

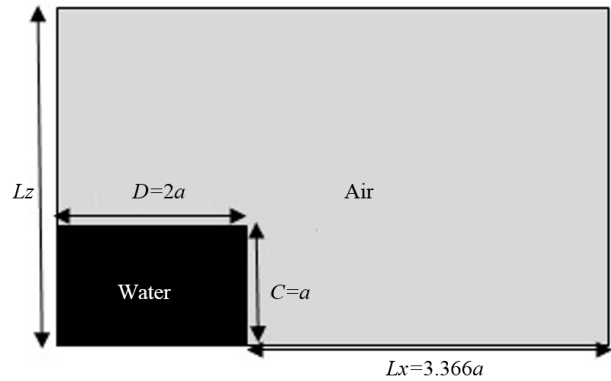


Fig. 10 Schematic of dam break problem on finite bed.

شکل 10 طرحواره‌ی مسئله‌ی شکست سد با قلمروی محدود.

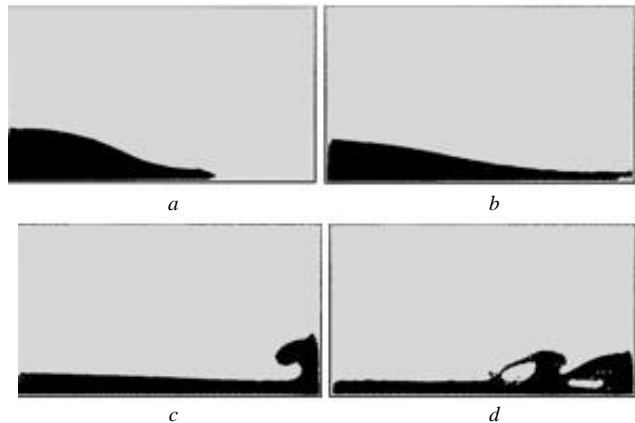


Fig. 11 Particles distribution for dam break problem on finite bed at different dimensionless times (From a to d at 1.60, 2.82, 5.29, 7.45)

شکل 11 تغییرات سطح آزاد سیال حاصل از حل مسئله‌ی شکست سد با قلمروی محدود بترتیب از a تا d برای زمان‌های بی‌بعد 1.60، 2.82، 5.29، 7.45

تشکیل یک حلقه، به سمت پایین باز می‌گردند. در اثر برخورد حلقه به جریان سیال، موجی که در محل برخورد تشکیل می‌شود، باعث محبوس شدن ذرات هوا و تشکیل حباب هوا می‌گردد. پس از آن سیال کمی به سمت بالا پرتاب شده و پس از گذشت زمان موج دوم تشکیل می‌شود و باعث به وجود آمدن حباب‌های هوا در اندازه‌های متفاوت می‌شود.

3-3- توزیع غلظت حباب هوا در مخزن ساکن آب و هوا

شبیه‌سازی انجام شده در این قسمت برای نشان دادن توزیع غلظت حباب هوا در یک مخزن ساکن آب است. شرایط اولیه مسئله به این صورت است که یک مخزن با طول و عرض 2.4 متر در نظر گرفته شده است، که در مرکز این مخزن حباب هوا با شعاع 0.2 متر در موقعیت $O(1.2 \text{ m}, 1.2 \text{ m})$ تعریف شده است. "شکل 12" شرایط مسئله را به صورت شماتیک نشان می‌دهد.

برای شبیه‌سازی توزیع غلظت در حباب هوا در لحظه‌ی اولیه توزیعی به صورت معادله (30) در امتداد شعاع حباب هوا فرض شده است:

$$C(x, z, t = 0) = \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{4D} - \frac{(z - z_0)^2}{4D} \right] \quad (30)$$

که در معادله (30) x_0 و z_0 موقعیت مرکز حباب را نشان می‌دهد و D بیانگر ضریب پخش است. حل تحلیلی با توجه به مرجع [34]، به صورت فرمول (31) می‌باشد:

$$C(x, z, t) = \frac{c_0}{\sqrt{t + t_0}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{4D(t + t_0)} - \frac{(z - z_0 - Vt)^2}{4D(t + t_0)} \right] \quad (31)$$

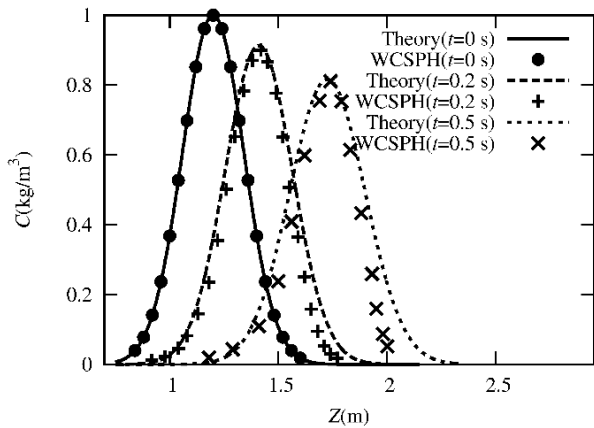


Fig. 14 Comparisons between SPH advection-diffusion model and analytical solution of the concentration field at different times for $D=10^{-2}$

شکل 14 مقایسه‌ی توزیع غلظت حباب هوا بین حل تحلیلی و حل روش اسپ‌ی‌اچ در زمان‌های متفاوت برای $D=10^{-2}$

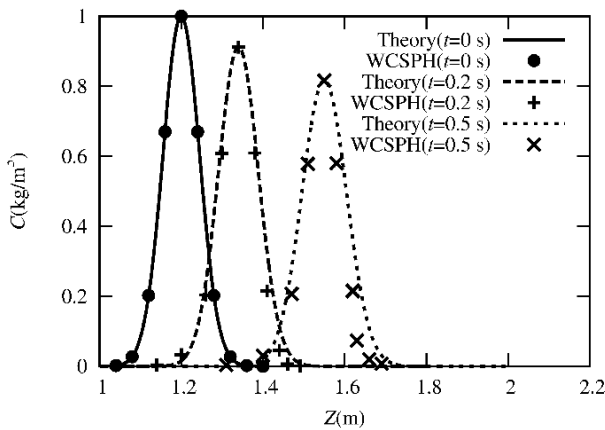


Fig. 15 Comparisons between SPH advection-diffusion model and analytical solution of the concentration field at different times for $D=10^{-3}$

شکل 15 مقایسه‌ی توزیع غلظت حباب هوا بین حل تحلیلی و حل روش اسپ‌ی‌اچ در زمان‌های متفاوت برای $D=10^{-3}$

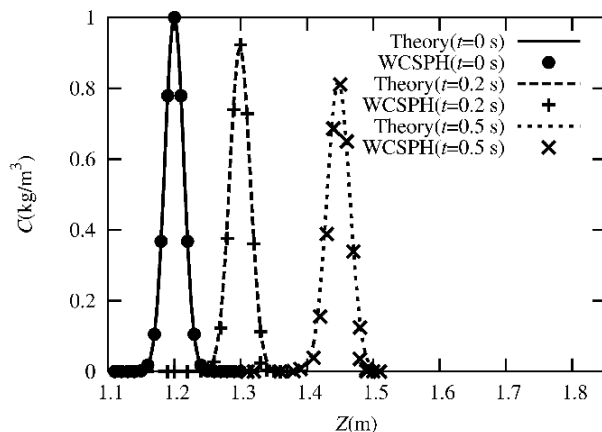


Fig. 16 Comparisons between SPH advection-diffusion model and analytical solution of the concentration field at different times for $D=10^{-4}$

شکل 16 مقایسه‌ی توزیع غلظت حباب هوا بین حل تحلیلی و حل روش اسپ‌ی‌اچ در زمان‌های متفاوت برای $D=10^{-4}$

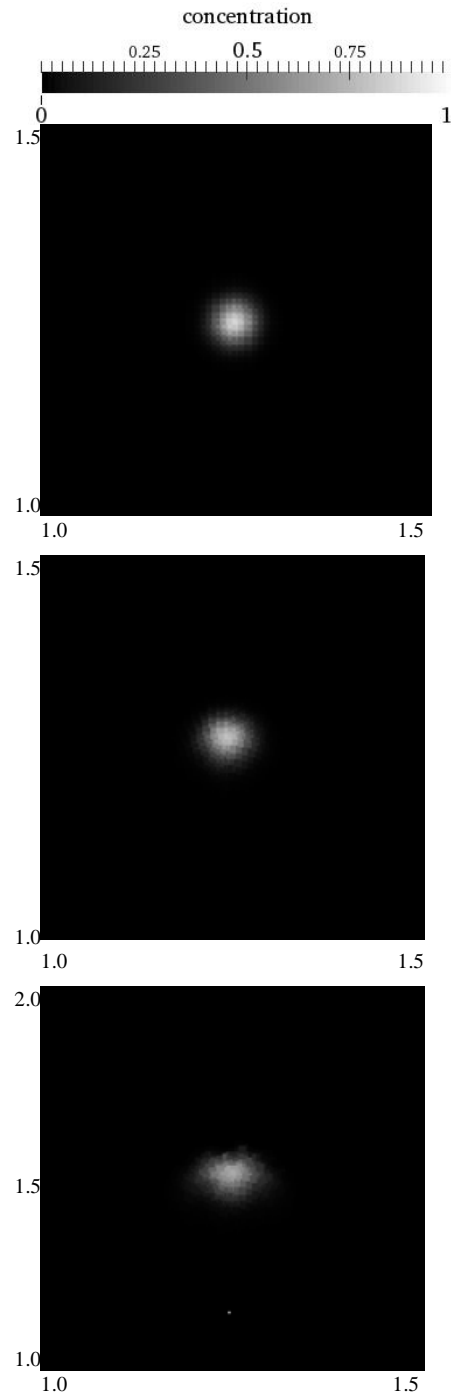


Fig. 13 Distribution of concentration of air bubble at 0, 0.2, 0.5 second from top to bottom

شکل 13 توزیع غلظت حباب هوا به ترتیب از بالا به پایین در زمان‌های 0.5 و 0.2 و 0 ثانیه

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی فرآیند نفوذ و جابجایی در یک جریان دوبعدی دوفازی آب و هوا با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار پرداخته شد. برای شبیه‌سازی جریان دوفازی آب و هوا از کد تک فازی اسفیزیکس دوبعدی تک‌فازی که برای شبیه‌سازی جریان‌های سطح آزاد کاربرد دارد، استفاده شد. با اعمال کردن نیروی کششی سطحی و یک فشار اضافه به معادله مومنوم این کد به یک کد دوفازی آب و هوا، ارتقاء داده شد. برای اعتباربخشی این کد

- [18] N. Grenier, M. Antuono, A. Colagrossi, D. Le Touze, B. Alessandrini, An Hamiltonian interface SPH formulation for multi-fluid and free surface flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 22, pp. 8380-8393, 2009.
- [19] G. Rosatti, J. Murillo, L. Fraccarollo, Generalized Roe schemes for 1-D two-phase, free surface flows over a mobile bed, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 24, pp. 10058-10077, 2008.
- [20] A. K. Das, P. K. Das, Bubble evolution through submerged orifice using smoothed particle hydrodynamics: Basic formulation and model validation, *Chemical Engineering Science*, Vol. 64, No. 10, pp. 2281-2290, 2009.
- [21] A. K. Das, P. K. Das, Incorporation of diffuse interface in smoothed particle hydrodynamics: implementation of the scheme and case studies, *International Journal Numerical Methods Fluids*, Vol. 67, No. 6, pp. 671-699, 2011.
- [22] A. K. Das, P. K. Das, Bubble evolution and necking at a submerged orifice for the complete range of orifice tilt, *AIChE Journal*, Vol. 59, No. 2, pp. 630-642, 2013.
- [23] J. J. Monaghan, A. Rafiee, A simple SPH algorithm for multifluid flow with high density ratios, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 7, No. 5, pp. 537-561, 2013.
- [24] N. Grenier, D. Le Touzé, A. Colagrossi, M. Antuono, G. Colicchio, Viscous bubbly flows simulation with an interface SPH model, *Ocean Engineering*, Vol. 69, No. 1, pp. 88-102, 2013.
- [25] A. Zhang, P. Sun, F. Ming, An SPH modeling of bubble rising and coalescing in three dimensions, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, Vol. 294, No. 5, pp. 189-209, 2015.
- [26] S. J. Lind, P. K. Stansby, B. D. Rogers, Incompressible-compressible flows with a transient discontinuous interface using smoothed particle hydrodynamics (SPH), *Journal of Computational Physics*, Vol. 309, No. 1, pp. 129-147, 2016.
- [27] M. Pourabdian, P. Omidvar, M. R. Morad, Numerical simulation of liquid jet breakup using smoothed particle hydrodynamics (SPH), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 55-66, 2016. (in Persian).
- [28] P. W. Cleary, J. J. Monaghan, Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, No. 1, pp. 227-264, 1999.
- [29] Y. Zhu, P. J. Fox, Smoothed particle hydrodynamics model for diffusion through porous media, *Transport in Porous Media*, Vol. 43, No. 3, pp. 441-471, 2001.
- [30] Y. Zhu, P. J. Fox, Simulation of pore-scale dispersion in periodic porous media using smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 182, No. 2, pp. 622-645, 2002.
- [31] A. M. Tartakovsky, P. Meakin, A smoothed particle hydrodynamics model for miscible flow in three-dimensional fractures and the two dimensional Rayleigh-Taylor instability, *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, No. 2, pp. 610-624, 2005.
- [32] M. Tartakovsky, P. Meakin, T. D. Scheibe, R. M. E. West, Simulations of reactive transport and precipitation with smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 222, No. 2, pp. 654-672, 2007.
- [33] S. Manenti, A. Di Monaco, M. Gallati, S. Sibilla, G. Agate, R. Guandalini, A. Maffio, Simulating rapid sediment scour by water flow with SPH, *Proceedings of 4th SPHERIC workshop*, Nantes, pp. 145-149, 2009.
- [34] F. Aristodemo, I. Federici, P. Veltri, Two-phase SPH modelling of advective diffusion processes, *Environ Fluid Mechanics*, Vol. 10, No. 4, pp. 451-470, 2010.
- [35] R. Issa, *Numerical assessment of the smoothed particle hydrodynamics grid less method for incompressible flows and its extension to turbulent flows*, Ph.D. Thesis, University of Manchester, UK, 2005.
- [36] J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, *Reports on Progress in Physics*, Vol. 68, No. 8, pp. 1703-1759, 2005.
- [37] J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 30, No. 1, pp. 543-574, 1992.
- [38] J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 44, No. 1, pp. 323-346, 2012.
- [39] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, C.H. Zemach, A continuum method for modeling surface-tension, *Journal of Computational Physics*, Vol. 100, No. 2, pp. 335-354, 1992.
- دوفازی ابتدا مسئله مخزن ساکن آب شبیه‌سازی شد و همان‌طور که مشاهده شد فشار هیدرواستاتیکی حاصل از روش اسپ‌ایچ نتایج قابل قبولی در مقایسه با حل تحلیلی داشت.
- در ادامه به بررسی جریان دوفازی شکست سد بر روی بستر نامحدود پرداخته شد و نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شد و تطابق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی داشت، همچنین شکست سد در بستر محدود نیز جهت توانایی روش عددی در اصابت موج به دیوار روبرویی شبیه‌سازی شده است. سپس به بررسی فرآیند نفوذ و جابجایی و غلظت حباب هوا در آب پرداخته شد و سه ضریب نفوذ متفاوت برای این مسئله مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده شد روش اسپ‌ایچ تطابق خوبی با حل تحلیلی داشت. از این‌رو، با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان روش اسپ‌ایچ را یک روش مناسب برای بررسی جریان دوفازی آب و هوا و همچنین فرآیند نفوذ و جابجایی در نظر گرفت. قدم بعدی در انجام پژوهش فوق، بررسی امکان‌پذیری استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار در شبیه‌سازی فرآیندهای هوازایی و هوادهی در صنایع مختلف می‌باشد.

5- مراجع

- [1] Prosperetti, G. Tryggvason, *Computational methods for multiphase flow*, pp. 1-4, New York: Cambridge University Press, 2006.
- [2] M. Ishii, T. Hibiki, *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow West Lafayette*, pp. 1-10, Germany: Springer, 2005.
- [3] P. Omidvar, *Wave Loading on Bodies In the free Surface Using SPH*, Ph.D Thesis, University of Manchester, UK, 2010.
- [4] R. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamic: Theory and Application to Nonspherical Stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, No. 1, pp. 375-389, 1977.
- [5] L. B. Lucy, A numerical Approach to the Testing of Fusion Process, *Astronomical Journal*, Vol. 58, No. 12, pp. 1013-1024, 1977.
- [6] J. J. Monaghan, Simulating free surface flows with SPH, *Journal Computational Physics*, Vol. 110, No. 2, pp. 399-406, 1994.
- [7] P. Omidvar, P. K. Stansby, B. D. Rogers, Wave body interaction in 2D using Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) including variable particle mass, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 68, No. 6, pp. 686-705, 2012.
- [8] P. Omidvar, P. K. Stansby, B. D. Rogers, SPH for 3-D floating bodies using variable particle mass, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, No. 4, Vol. 72, pp. 427-452, 2013.
- [9] P. Omidvar, H. Norouzi, A. Zarghami, Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) for water wave propagation in a channel, *International Journal of Modern Physics*, Vol. 48, No. 8, pp. 1-16, 2014.
- [10] P. Omidvar, P. Nikegali, Simulation of Violent Water Flows over a Movable Bed using Smoothed Particle Hydrodynamics, *Journal of Marine Science and Technology*, doi:10.1007/s00773-016-0409-7, 2016.
- [11] P. W. Cleary, J. J. Monaghan, Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, No. 1, pp. 227-264, 1999.
- [12] P. W. Randles, L. D. Libersky, SPH: Some recent improvements and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 375-408, 1996.
- [13] S. J. Cummins, M. Rudman, An SPH Projection Method, *Journal of computational physics*, Vol. 152, No. 2, pp. 584-607, 1999.
- [14] J. P. Morris, Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, No. 3, pp. 333-353, 2000.
- [15] A. Colagrossi, M. Landrini, Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, Vol. 191, No. 2, pp. 448-475, 2003.
- [16] X. Hu, N. A. Adams, A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 213, No. 2, pp. 844-861, 2006.
- [17] X. Hu, N. A. Adams, An incompressible multi-phase SPH method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 1, pp. 264-278, 2007.

- [44] J. J. Monaghan, A. Kos, Solitary waves on a cretan beach, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol. 125, No. 3, pp. 145-155, 1999.
- [45] D. B. Rogers, R. A. Dalrymple, P. K. Stansby, SPH modeling of floating bodies in the surf zone, *Proceedings of 31th International Conference on Coastal Engineering*, pp. 204-215, 2009.
- [46] J. J. Monaghan, On the problem of penetration in particle methods, *Journal of Computational Physics*, Vol. 82, No. 1, pp. 1-15, 1989.
- [47] R. Xu, *An Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics Method and Its Application in Free-Surface Simulations*, PhD Thesis, University of Manchester, UK, 2009.
- [40] A. Fick, Ueber diffusion: (On Diffusion), *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie*, Vol. 94, No. 1, pp. 59-86, 1855.
- [41] H. B. Fischer, E. G. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger, N. H. Brooks, *Mixing in inland and coastal waters*, pp. 1-483, New York: Academic Press, 1979.
- [42] J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu, Modeling low reynolds number incompressible flows using SPH, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, pp. 214-226, 1997.
- [43] H. Wendland, Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 4, No. 1, pp. 389-396, 1995.