

## بررسی رفتار دینامیکی میکروسکوپ نیروی اتمی براساس تئوری گرادیان کرنشی

محمد علی محمدی<sup>۱</sup>, عقیل یوسفی کما<sup>۲\*</sup>, احسان معانی میاندوآب<sup>۳</sup>, مراد کریم پور<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

۳- استادیار، علوم مهندسی، دانشگاه تهران، تهران

۴- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۱۱۵۵-۴۵۶۳

### چکیده

در این مقاله، رفتار دینامیکی میکروسکوپ نیروی اتمی بر اساس تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنشی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی و سوزن متصل به انتهای آن به صورت یک جرم مرکز مدلسازی شده است، میکروتیر از طریق یک المان بیزوالکتریک متصل به انتهای گیردار تحریک شده و معادله مشتقات جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم براساس تئوری اویلر-برنوی استخراج شده است با اعمال روش‌های جداسازی و گلرکین، به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در سیاری از مطالعات تجربی مشاهده شده است هنگامی که ابعاد سازه تا ناحیه میکرون کاهش یابد، اثر اندازه در رفتار دینامیکی این میکرو ساختارها نقش پیدا می‌کند. تئوری کاتنتیون کلاسیک به خاطر پشم پوشی از اثر اندازه، دارای دقت پایینی رفتار مکانیکی ابزارهای نانو می‌باشد، به همین دلیل دو تئوری کلاسیک و غیر کلاسیک در تحلیل رفتار دینامیکی میکروتیر دیدگاه متفاوتی دارند. در این مقاله، ناحیه پایداری میکروتیر به صورت تحلیلی و عددی به دست آمده و با مقایسه نتایج مشخص گردید که این دو روش با هم تطابق دارند. تفاوت بین تحلیل‌های ارائه شده در رفتار دینامیکی میکروتیر توسط دو تئوری کلاسیک و غیر کلاسیک با رسم نمودارهای گوناگون شان داده شده است. شخص می‌شود که در نظر گرفتن اثر اندازه ماهیت مسئله دینامیکی را به کلی تغییر می‌دهد و ممکن است در حالیکه تئوری کلاسیک رفتاری پایدار برای میکروتیر میکروسکوپ پیش‌بینی می‌کند، اثر اندازه باعث وقوع پایداری دوگانه شود. نتایج به دست آمده در این مقاله برای طراحی و تحلیل میکروسکوپ‌های نیروی اتمی سیار کارا می‌باشند.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۲ خرداد ۱۳۹۵

پذیرش: ۰۴ مرداد ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۲۴ شهریور ۱۳۹۵

کلید واژگان:

میکروتیر

سوزن

بیزوالکتریک

اویلر-برنوی

گلرکین

کردن

گرادیان کرنشی

## Dynamic Behavior Analysis of Atomic Force Microscope Based on Gradient Theory

Mohammad Ali Mohammadi<sup>1</sup>, Aghil Yousefi-Koma<sup>1\*</sup>, Ehsan Maani Miandoab<sup>2</sup>, Morad Karimpour<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Department of Engineering Science, University of Tehran, Tehran, Iran

\* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aykoma@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 May 2016

Accepted 25 July 2016

Available Online 14 September 2016

Keywords:

Micro-beam

Tip

Piezoelectric

Euler-Bernoulli

Galerkin

Strain gradient

### ABSTRACT

In this paper, the dynamic behavior of atomic force microscope (AFM) based on non-classical strain gradient theory was analyzed. For this aim atomic force microscope micro-beam with attached tip has been modeled as a lumped mass. Micro-beam stimulated via a piezoelectric element attached to the end of clamped and non-linear partial differential equation of the system has been extracted based on Euler-Bernoulli theory and converted into ordinary differential equation by using Galerkin and separation method. The classic continuum theory, because not taking size effect into consideration, has little accuracy in predicting the mechanical behavior of Nano devices. In this study, the stability region of micro-beam is determined analytically and validated by comparison with numerical results. Difference between presented analysis in dynamic behavior of micro-beam by classic and non-classic theories has been shown with a variety of diagrams. It is clear that considering the size effect changes the dynamical behavior of the problem completely and it is possible, and while classical theory predicts stable behavior for microscope the size effect is caused bi-stability. The results in this paper are very useful for the design and analysis of atomic force microscope.

کند و برخلاف اکثر روش‌های بررسی خواص سطوح، در این روش غالباً

محدودیت اساسی بر روی نوع سطح از جمله رسانا، عایق، نرم یا سخت،

منسجم یا پودری، آلی و غیرآلی و همچنین روی محیط آن وجود ندارد.

### ۱- مقدمه

میکروسکوپ نیروی اتمی برای بررسی خواص و ساختار سطحی مواد در ابعاد

نانو بکار می‌رود. این میکروسکوپ می‌تواند در محیط خلاء، هوا و مایع عمل

تیرهای استفاده شده در سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکال<sup>7</sup> از جمله در میکروسکوپ نیروی اتمی، دارای ابعادی در حوزه میکرون و کمتر از آن می‌باشد که تغییر شکل و رفتارهای نوسانی وابسته به اندازه در مقیاس‌های میکرو و نانو به طور تجربی و آزمایشگاهی صحه‌گذاری شده است. برای مثال و<sup>8</sup> [16] اثر طول سوزن، فنریت مجازی و عمودی را برونو پاسخ نوسانی میکروسکوپ نیروی اتمی دارای میکروتیر مستطیلی بررسی کرد. در آزمایش میکرو پیچشی<sup>9</sup> روی سیم‌های نازک مسی، فلک [17] مشاهده کرد که کاهش در قطر سیم‌ها منجر به افزایش قابل ملاحظه‌ی سفتی پیچشی سیم‌ها می‌شود. استولکن یک افزایش قابل توجهی از سخت شدن کار پلاستیک که توسط کاهش ضخامت تیر در آزمایش میکرو خمی روی تیرهای نازک نیکل ایجاد شده بود را گزارش کرد [18]. در طول آزمایش میکرو خمی روی تیرهای ساخته شده از اپوکسی پلیمرها، چانگ افزایش زیادی از صلبیت خمی<sup>10</sup> ناشی از کاهش ضخامت تیر را مشاهده کرد [19]. طبق این نتایج آزمایشگاهی، رفتار وابسته به اندازه یک خاصیت ذاتی مواد می‌باشد و هنگامی دارای اثرات قابل توجهی است که اندازه مشخصه سازه تفاوت زیادی با مقیاس طولی ماده داخلی ندارد. تئوری مکانیک کلاسیک نمی‌تواند رفتارهای وابسته به اندازه را که در سازه‌هایی با ابعاد میکرون و زیر میکرون اتفاق می‌افتد، پیش‌بینی و تشریح کند.

تئوری‌های غیرکلاسیک مانند تئوری الاستیسیته غیرمحلي<sup>11</sup>، تئوری گرادیان کرنشی و تئوری تنش کوپل بهبود یافته<sup>12</sup> به طور خوبی قادر به تفسیر رفتارهای وابسته به اندازه می‌باشدند. به عنوان نمونه، ارینگن، پدیوسون و ردی از تئوری الاستیسیته غیرمحلي برای آنالیز رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها<sup>13</sup> استفاده کرده‌اند [20-22]. میندلین، اثرات تنش کوپل در الاستیسیته خطی را بررسی کرده همچنین تویین، مواد الاستیک را با تئوری تنش کوپل مدل‌سازی کرده است [24,23]. فتحعلی لو از تئوری گرادیان کرنشی در مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده است و معانی با تئوری گرادیان کرنشی رفتار دینامیکی میکروتیر را بررسی کرده است [26,25]. کهرهوبانیان با استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته رفتارهای دینامیکی میکروتیر میکروسکوپ اتمی را بررسی کرده است [27].

تئوری گرادیان کرنشی بهبود یافته توسط لم<sup>14</sup> [28] معرفی شد. در این تئوری سه پارامتر مقیاس طولی که عبارتند از: گرادیان چرخشی، گرادیان اتساع و گرادیان کشنشی مربوط به میکروسازه‌ها در نظر گرفته می‌شود. کنگ [29] با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی، رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای اویلر-برنولی را بررسی کرد. ونگ رفتار ارتعاشی میکروتیرهای مدل تیموشنسکو را براساس تئوری گرادیان کرنشی مورد بررسی قرار داد [30]. عباسی [31] فرکانس تشدید و حساسیت میکروسکوپ نیروی اتمی را براساس تئوری گرادیان کرنشی بهبود یافته تحلیل کرده و نشان داده است که اگر سفتی تماشی زیاد باشد و ضخامت میکروتیر نزدیک پارامتر مقیاس طولی<sup>14</sup> باشند آنگاه استفاده از تئوری گرادیان کرنشی برای تحلیل رفتار دینامیکی میکروتیر لازم می‌باشد. همچنین عباسی در [32] رفتار ارتعاشی یک نوع میکروتیری که توسط دایا در [33] برای میکروسکوپ نیروی اتمی پیشنهاد شده بود را براساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی کرده است و

همچنین می‌توان از این دستگاه برای اندازه‌گیری ویژگی‌های هندسی سطح، توزیع چسبندگی، اصطکاک و ناخالصی سطحی استفاده کرد. میکروسکوپ‌های اتمی برای تهیه تصاویر باوضوح بالا از سطح ساختارهای نمونه‌های عایق و رسانا در محیط‌های هوا و مایع اختراع شده است [2,1].

این میکروسکوپ‌ها شامل یک میکروتیر می‌باشند که یک سوزن به فرم‌های هرمی یا مخروطی تیز یا کروی، به انتهای آن متصل شده است. این دستگاه شامل چند مود کاری می‌باشد که یکی از آن‌ها مدتامسی<sup>1</sup> است. در این مود کاری سوزن با سطح در تماس است و آن را روبش می‌کند و نیروی بین نوک سوزن و سطح بصورت دافعه می‌باشد و براساس انتخاب میکروتیر که ناشی از نیروی بین نوک سوزن و سطح نمونه می‌باشد، توبوگرافی سطح بدست می‌آید. مود تماسی به علت آسیب زدن به سطح نمونه‌های نرم قبل استفاده نبود و در سال 1987 مود غیرتماسی<sup>2</sup> برای تهیه تصویر از سطح نمونه‌های نرم توسعه یافت. مود شبه تماسی<sup>3</sup> از مدهای کاری دیگر این دستگاه است و در سال 1993 معرفی شد [3]. در این شیوه، نوک سوزن می‌تواند بالای سطح نمونه شناور باشد در صورتی که میکروتیر در حال ارتعاش در دامنه‌های خیلی بزرگ‌تر از اندازه دامنه در مود غیرتماسی است. رفتار دینامیکی میکروتیر تأثیر قابل توجهی بر کیفیت تصویر سطح دارد. همیشه چالش‌های گوناگونی برای میکروسکوپ نیروی اتمی در مورد دقت، رزوشن و عمق ویژگی‌های تصویر وجود داشته است و به این منظور برای مطالعه سیستم میکروسکوپ نیروی اتمی و بهبود بخشیدن به کیفیت تصویر حاصله، به یک مدل جامع از میکروتیر نیاز است.

اولین مدل پیشنهادی، مدل پارامترهای متمرکز است که برای نمونه در کار آشای، باسو و مارتین دیده می‌شود [4-6]. اما این مدل نمی‌تواند به اندازه کافی برای نوسان در فرکانس‌های بالا هنگامی که مدهای بالاتر تحریک می‌شوند، دقیق باشد. سانگ و واکوئز از تیر اویلر-برنولی برای مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده‌اند که در مقایسه با مدل پارامترهای متمرکز بهتر می‌باشد [8,7]. بعضی از محققان برای میکروتیر با در نظر گرفتن نیروهای مختلف بین نوک سوزن و سطح نمونه، چندین مدل ارائه کرده‌اند [10-7]. برای مدهای کاری مختلف این میکروسکوپ، نیروی مقابل بین سوزن و سطح نمونه به صورت یکی از این مدل‌ها بیان شده است: مدل تماسی هرتز<sup>4</sup> [11,7]، مدل تکه‌ای خطی تماسی [12] و مدل درجاگوین-مولر-توبورو<sup>5</sup> [13]. مدل درجاگوین-مولر-توبورو، یکی از روش‌های شبیه‌سازی نیروهای مکانیکی تماسی می‌باشد که در آن دو نوع نیرو در نظر گرفته می‌شود، یکی نیروی چسبندگی که خارج از ناحیه تماس عمل می‌کند و دیگری نیروی دافعه که ناشی از دافعه یون‌ها می‌باشد و در طی تماس سوزن ترکیبی از نیروهای جاذبه و اندروالس و دافعه الکترواستاتیک بین نوک سوزن و سطح نمونه در محیط مایع می‌باشد. اسلامی از تئوری تیر تیموشنسکو برای مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده است و میکروتیر توسط پیزوالکتریک متصل به ابتدای تیر تحریک می‌شود. المان پیزو با یک دامنه و فرکانس مشخصی نوسان می‌کند. همچنین برآیند نیروهای دافعه و جاذبه بین نوک سوزن و سطح نمونه را به صورت مجموعی از توانهای منفی و مثبت درنظر گرفته است [15].

<sup>7</sup> Mem/Nems<sup>8</sup> Wu<sup>9</sup> Micro torsion<sup>10</sup> Flexural rigidity<sup>11</sup> Non-local Elasticity<sup>12</sup> Modified couple stress<sup>13</sup> Nano-structure<sup>14</sup> Length scale parameter<sup>1</sup> Contact mode<sup>2</sup> Non-Contact<sup>3</sup> Tapping mode<sup>4</sup> Hertz<sup>5</sup> DMT<sup>6</sup> DLVO

سیستم دارای دمپینگ ویسکوز<sup>۴</sup> می‌باشد.

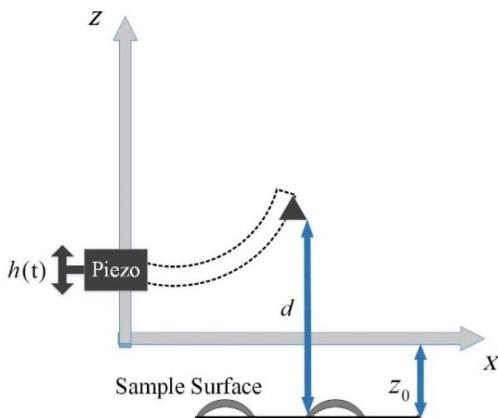
- از تئوری‌های تیر اویلر-برنولی و گرادیان کرنشی استفاده شده است. درنهایت معادله حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌گردد.

انرژی جنبشی تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l (\dot{h} + \dot{W})^2 dx + \frac{1}{2} m_t (\dot{h} + \dot{W}(l, t))^2 \quad (1)$$

$$h(t) = h_b \sin(\omega_b t + \psi)$$

$h(t)$ ,  $h_b$ ,  $m_t$ ,  $h(t)$ ,  $l$ ,  $W(x, t)$  و  $\psi$  به ترتیب جابجایی نقاط میکروتیر در راستای محوره، طول تیر، جابجایی سرگیردار که به صورت هارمونیکی از طریق پیزوالکتریک به تیر اعمال می‌شود، جرم سوزن، دامنه، فرکانس تحریک و اختلاف فاز می‌باشند.



شکل ۱ میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی

جدول ۱ مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیر

واحد	مقدار	نماد	معرفی
μm	25	$b_0$	عرض میکروتیر
Nsm <sup>-2</sup>	0.05	$C$	ثابت دمپینگ
μm	0.1	$Cl$	پارامتر مقیاس طولی
MPa	156	$E$	مدول الاستیسیته
μm	5	$h_0$	ضخامت میکروتیر
J	$2.96 \times 10^{-19}$	$H$	ثابت هاماکر
nm	0.18	$h_b$	دامنه تحریک
μm	100	$l_0$	طول میکروتیر
nm	10	$R$	شعاع سوزن
nm	30	$z_0$	میانگین فاصله محور طولی تا ناهمواری سطح نمونه
Pa	-	$\mu$	مدول برشی
-	0.23	$\nu$	ضریب پواسون
kgm <sup>-3</sup>	2330	$\rho$	چگالی
rad	π/3	$\psi$	فاز
rad/s	-	$\omega_b$	فرکانس تحریک

<sup>4</sup> Viscose damping

نشان داده است که فرکانس تشدید و حساسیت این میکروتیر پیشنهاد شده بسیار به اندازه وابسته است بخصوص زمانی که سفتی تماسی خیلی زیاد یا خیلی کم باشد. ژانو [34] تغییر شکل غیرخطی استاتیکی خمشی، مسئله پس کماش و ارتعاش آزاد غیرخطی را برای میکروتیر دو سر مفصل که تحت نیروی عرضی قرار گرفته براساس تئوری گرادیان کرنشی تحلیل کرده است که اثر اندازه<sup>۱</sup>، هنگامی که نسبت ضخامت به پارامترهای مقیاس طولی ماده داخلی به طور تقریبی برابر یک یا دو باشد، قبل توجه می‌باشد و با افزایش این نسبت، اثر اندازه خیلی قابل ملاحظه نخواهد بود. وطنخواه [35] ارتعاشات اجباری غیرخطی یک میکروتیر دو سر مفصل را با در نظر گرفتن اثر کشیدگی صفحه میانی، براساس تئوری گرادیان کرنشی مدلسازی کرده و پدیده‌های تشدید اصلی، فوق هارمونیک و زیر هارمونیک را بررسی کرده است. اخیراً معانی [37,36] نشان داده است که تحلیل تئوری گرادیان کرنشی نسبت به تئوری غیرمحالی، در تطابق بهتری با نتایج تجربی می‌باشد. همچنین در سیستم‌های میکروالکترومکانیکال، در بحث پایداری اثبات کرده است که تبدیل ناجه پایداری به پایداری دوگانه<sup>2</sup> در تئوری غیرکلاسیک به ازای ولتاژ‌های بزرگتری نسبت به تئوری کلاسیک اتفاق می‌افتد [26].

در مقاله حاضر میکروتیر با مقاطع مستطیلی و سوزن متصل در انتهای ازاد آن به صورت کروی در نظر گرفته شده است. پس از استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی براساس تئوری‌های اویلر برنولی و گرادیان کرنشی، مدل یک درجه آزادی میکروتیر به دست آمده است. معادله غیرخطی حاصل با روش عددی رانگ-کوتای<sup>3</sup> مرتبه 6 و همچنین روش تحلیلی برای تعیین ناحیه پایداری سیستم، برحسب پارامتر وابسته به هندسه میکروتیر، استفاده شده است. پارامتر وابسته به هندسه میکروتیر، بی بعد بوده و در مقاله با  $\eta$  نشان داده شده است. نمودارهای پاسخ زمانی و سرعت برحسب جابجایی، به ازای دو مقدار از پارامتر  $\eta$  بعد  $\eta$  رسم شده است. تغییرات پارامتر  $\eta$  براساس کاهش ابعاد میکروتیر، برای تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنشی نشان داده شده و ناحیه تعادل ارائه شده توسعه دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک برحسب تغییرات فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای دو مقدار از ضخامت میکروتیر مقایسه شده است. همچنین نسبت فاصله محور افقی تا سطح نمونه در تئوری کلاسیک به گرادیان کرنشی برحسب تغییرات ضخامت میکروتیر نشان داده شده است. سرانجام اثر اندازه، به وسیله کاهش ابعاد هندسی که روی نقاط تعادل سیستم تأثیر می‌گذارد، از دیدگاه توسعه کلاسیک و گرادیان کرنشی با هم مقایسه شده است.

## 2- مدلسازی ریاضی

شکل ۱ میکروتیر مورد نظر را نشان می‌دهد همچنین جدول ۱ مشخصات هندسی و مکانیکی آن را بیان می‌کند. در این قسمت برای استخراج مدل میکروتیر شکل ۱، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.

- حالت کاری میکروسکوپ، غیرتماسی است و با دامنه ثابت سطح را روشن می‌کند.
- المان پیزو به سرگیردار میکروتیر متصل است و به صورت هارمونیکی و دامنه ثابت میکروتیر را تحریک می‌کند.
- در انتهای ازاد تیر، سوزن به صورت کروی شکل بوده و محیط کاری میکروتیر، هوا در نظر گرفته می‌شود.
- بین نوک سوزن و سطح نمونه نیروی واندروالس وجود دارد و

<sup>1</sup> Size effect

<sup>2</sup> Bi-stability

<sup>3</sup> Runge kutta

با جایگذاری روابط (7-5) در (4)، معادله سیستم به صورت رابطه (8) حاصل خواهد شد.

$$-K \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + S \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + C \frac{\partial W}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F_{ts} \delta(l-x) - \rho A \ddot{h} \quad (8)$$

شرطی مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} -K \frac{\partial^5 W(l,t)}{\partial x^5} + S \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} - m_t \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial t^2} \\ + m_t h_b \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \psi) = 0 \\ W(0,t) = 0 ; \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} = 0 \\ \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0 ; K \frac{\partial^4 W(l,t)}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

پارامترهای بی بعد به صورت رابطه (10) تعریف می‌شوند.

$$\hat{x} = \frac{x}{l} ; \hat{W} = \frac{W}{z_0} ; \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (10)$$

روابط (8) و (9) براساس رابطه (10) بی بعد خواهند شد. معادله بی بعد

شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial^6 \hat{W}}{\partial \hat{x}^6} + \frac{\partial^4 \hat{W}}{\partial \hat{x}^4} + C \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{t}^2} \\ = \frac{-A_0 \delta(l-l\hat{x})}{\left[ z_0 + (z_0 \hat{W}(1,\hat{t}) + h(\hat{t})) \right]^2} \\ + H_0 \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \\ \alpha_0 = \frac{-K}{S l^2} ; C = \frac{C l^4}{S T} \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{H R l^4}{6 S z_0} ; \Omega_b = T \omega_b ; T = \sqrt{\frac{\rho A l^4}{S}} ; H_0 = \frac{\Omega_b^2 h_b}{z_0} \quad (11)$$

شرطی مرزی بی بعد شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial^5 \hat{W}(1,\hat{t})}{\partial \hat{x}^5} + \frac{\partial^3 \hat{W}(1,\hat{t})}{\partial \hat{x}^3} \\ + \frac{m_t h_b l^3 \omega_b^2}{S z_0} \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \\ = \frac{m_t l^3}{S T^2} \frac{\partial^2 \hat{W}(1,\hat{t})}{\partial \hat{t}^2} \\ \hat{W}(0,\hat{t}) = 0 ; \frac{\partial \hat{W}(0,\hat{t})}{\partial \hat{x}} = 0 ; \frac{\partial^3 \hat{W}(0,\hat{t})}{\partial \hat{x}^3} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با اعمال روش جداسازی و گلرکین روى رابطه (11)، مدل يك درجه

آزادی سیستم حاصل خواهد شد. به دليل غالب بودن شکل مود اول،تابع

جواب با در نظر گرفتن يك شکل مود به صورت (13) خواهد شد.

$$\hat{W}(\hat{x},\hat{t}) = \varphi_i(\hat{x}) u_i(\hat{t}) \quad (13)$$

با جایگذاری (13) در معادله رابطه (11) و اعمال گلرکین، مدل يك

درجه آزادی سیستم به صورت رابطه (14) حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + c \dot{u} + \alpha u = \frac{-\eta_0}{\left[ z_0 + (z_0 \varphi(1) u(\hat{t}) + h(\hat{t})) \right]^2} \\ + \kappa_0 \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \end{aligned}$$

$$\alpha = \int_0^1 \left\{ \alpha_0 \frac{d^6 \varphi}{d \hat{x}^6} + \frac{d^4 \varphi}{d \hat{x}^4} \right\} \varphi d \hat{x}$$

$$\eta_0 = A_0 \frac{\varphi(1)}{l}$$

$$\kappa_0 = H_0 \int_0^1 \varphi d \hat{x} \quad (14)$$

تغییرمتغیر  $z_0 \zeta(\hat{t}) = z_0 \varphi(1) u(\hat{t}) + h(\hat{t})$  روى رابطه (14) اعمال

می‌شود، بنابراین رابطه (14) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

انرژی پتانسیل میکروتیر براساس تئوری گرادیان کرنشی به صورت رابطه (2) می‌باشد.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ S \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + K \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)^3 \right\} dx \\ K &= \mu I \left( 2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \\ S &= EI + \mu A \left( 2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

پارامترهای  $I, G, E$  و  $A$  به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی، ممان  $l_0, l_1, l_2$  پارامترهای مقاطعه میکروتیر می‌باشند، همچنین پارامترهای مقیاس طولی صفر می‌باشند. کار نیروی ناپایستار نیز به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} w^{n,c} &= F_{ts} W(l,t) - \int_0^l C \frac{\partial W}{\partial t} W dx \\ F_{ts} &= \frac{-HR}{6d^2} \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط (3) پارامترهای ثابت دمپینگ، ثابت هاماکر<sup>1</sup>، شاعع سوزن، فاصله محور افقی تا میانگین ناهمواری‌های سطح نمونه، فاصله بین محور افقی تا میانگین ناهمواری‌های سطح نمونه می‌باشند. علت درنظر گرفتن منفی برای نیروی واندروالس جاذبه بودن آن است که به نوک سوزن در جهت منفی محور  $z$  اعمال می‌شود. رابطه (4) اصل همیلتون را نشان می‌دهد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + w^{n,c}) dt = 0 \quad (4)$$

طبق رابطه (4)، جزء تغییرات و انتگرال گیری روی روابط (1-3) اعمال خواهد شد.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l -\frac{\partial}{\partial t} [\rho A (\dot{W} + \dot{h})] \delta W dx \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial t} [m_t (\dot{h} + \dot{W}(l,t))] \delta W(l,t) \right\} dt \quad (5)$$

انتگرال جزء تغییرات انرژی پتانسیل نیز به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ K \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} \delta \left( \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - K \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} \delta \left( \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( S \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta \left( \frac{\partial W(l,t)}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( S \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta \left( \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( K \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta W(l,t) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( K \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta W(0,t) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( K \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right) \right\} \delta W dx \right\} dt \end{aligned} \quad (6)$$

انتگرال کار مجازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

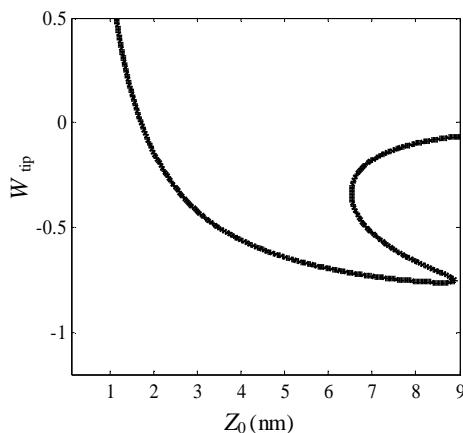
$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^{n,c} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ F_{ts} \delta(l-x) - C \frac{\partial W}{\partial t} \right\} \delta W dx dt \quad (7)$$

<sup>1</sup> Hamaker constant

جدول 2 بررسی حالت‌های پایداری سیستم

Table 2 Study of system stability states

حالات پایداری	نقاط تعادل تابع پتانسیل	ریشه‌های تابع $f$	$\eta$
نپایدار	یک نقطه مینیمم	یک ریشه حقیقی ساده و دو ریشه مختلط	$\eta > a$
		یک ریشه ساده مثبت	
پایدار	یک نقطه مینیمم	یک ریشه تکراری منفی حقیقی	$\eta = a$
	دو نقطه مینیمم	سه ریشه حقیقی؛ یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی	
	پایداری دوگانه	و یک ماکریزم	$\eta < a$

 $a = 0.1488$ Fig. 2 Static behavior of tip of micro-beam according to  $z_0$ شکل 2 نمودار رفتار استاتیکی سوزن میکروتیر بر حسب پارامتر  $z_0$ 

$$\zeta'' + \beta\zeta' + \zeta = \left(\frac{RL^3\varphi^2(1)}{6Sz_0^3\alpha}\right) \left\{ \frac{A_1}{30z_0^6(1+\zeta)^8} - \frac{A_2}{(1+\zeta)^2} \right\} + \chi \sin(\Omega\tau + \hat{\psi}) \quad (21)$$

معادله استاتیکی سیستم بصورت رابطه (22) خواهد شد

$$\zeta = \left(\frac{RL^3\varphi^2(1)}{6Sz_0^3\alpha}\right) \left\{ \frac{A_1}{30z_0^6(1+\zeta)^8} - \frac{A_2}{(1+\zeta)^2} \right\} \quad (22)$$

#### 4- بحث و بررسی

##### 4-1- چندشاخگی ناحیه تعادل

برای تعیین ناحیه پایداری به صورت عددی، نمودار نقاط تعادل بر حسب

جدول 3 پارامترهای میکروتیر برای اعتبار سنجی

Table 3 Parameters of micro-beam for validation

واحد	مقدار	نماد	ضخامت
μm	1.7	$h$	
μm	46	$b$	عرض
μm	449	$l$	طول
nm	150	$R$	شعاع سوزن
J m <sup>6</sup>	$1.3596 \times 10^{-70}$	$A_1$	-
J	$1.865 \times 10^{-19}$	$A_2$	-

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + c\dot{\zeta} + \alpha\zeta &= \frac{-\eta_0}{z_0^2(1+\zeta)^2} \\ &+ \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\Omega_b t + \hat{\psi}) \\ p &= \varphi(1)\kappa_0 + (\alpha - \Omega_b^2) \frac{h_b}{z_0}; q = \frac{ch_b\Omega_b}{z_0} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right); \hat{\psi} = \psi + \theta \end{aligned} \quad (15)$$

تغییرمتغیری به صورت  $\tau = \sqrt{\alpha}\hat{t}$  روی معادله (15) اعمال می‌شود.

$$\begin{aligned} \zeta'' + \beta\zeta' + \zeta &= \frac{-\eta}{(1+\zeta)^2} + \chi \sin(\Omega\tau + \hat{\psi}) \\ \beta &= \frac{c}{\sqrt{\alpha}}; \eta = \frac{\eta_0\varphi(1)}{z_0^2\alpha}; \chi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\alpha}; \Omega = \frac{\Omega_b}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (16)$$

برای تعیین ناحیه پایداری، ترم‌های وابسته به زمان، شتاب و سرعت از معادله (16) حذف شده و رابطه (17) حاصل خواهد شد.

$$-\frac{\eta}{(1+\zeta)^2} - \zeta = 0 \rightarrow \zeta^3 + 2\zeta^2 + \zeta + \eta = 0 \quad (17)$$

رابطه (17) تابعی از متغیرهای  $\eta, \zeta$  می‌باشد، این رابطه به صورت تابع تعادلی (18) در نظر گرفته می‌شود.

$$f = \zeta^3 + 2\zeta^2 + \zeta + \eta \quad (18)$$

با اعمال تغییرمتغیر  $\zeta = -\frac{2}{3}$  روی (18)، تابع  $f$  به صورت رابطه (19) خواهد شد.

$$\begin{aligned} f &= \zeta^3 + p\zeta + q \\ p &= -\frac{1}{3}; q = -\frac{2}{27} + \eta \end{aligned} \quad (19)$$

دلتای معادله (19) به صورت زیر خواهد شد:

$$\Delta = 27\eta^2 - 4\eta \quad (20)$$

رابطه (20) در جدول 2 تعیین علامت شده است.

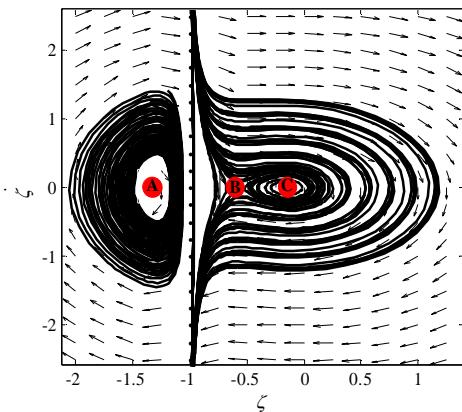
شیارا<sup>1</sup> نشان داده است که نسبت بین طول‌های مشخصه، پاسخ برخی از مسائل را می‌تواند تغییر دهد [38] در تعیین این پارامترها با استفاده از نتایج تجربی یک فرض رایج در مقالات، هر سه پارامتر مقیاس طولی را یکسان در نظر می‌گیرند [39,37,28]. بنابراین برای بحث و مقایسه در رفتارهای دینامیکی و استاتیکی میکرو و نانو تیرها براساس تئوری گرادیان کرنشی، به طور معمول فرض بر این است که پارامترهای مقیاس طولی برابر باشند و معادل پارامتری مثل  $cL$  در نظر گرفته شود [40,34, 28].

#### 3- اعتبارسنجی معادله حرکت بدست آمده از روش گلرکین

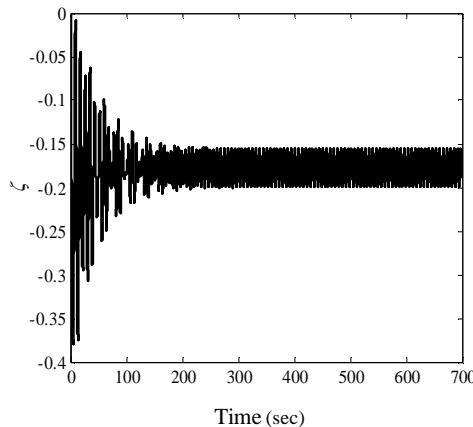
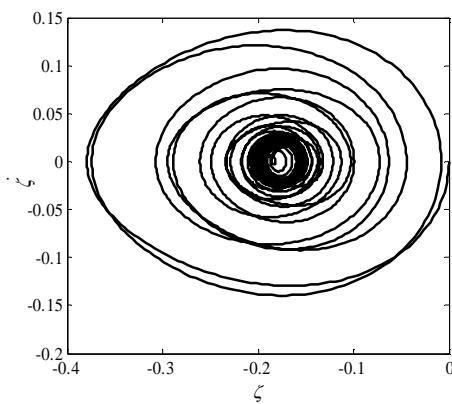
برای صحه‌گذاری مدل یک درجه آزادی بدست آمده از روش گلرکین که معادله رابطه (16) می‌باشد، رفتار استاتیکی سوزن میکروتیر بر حسب فاصله  $z_0$  با توجه به پارامترهای معین جدول 3 که از مقادیر موجود در جدول یونس [41] اتخاذ شده، در شکل 2 نشان داده شده است و سپس با رفتار استاتیکی نشان داده شده در [41] مقایسه شده است. شکل 2 رفتار سوزن میکروتیر بر حسب فاصله  $z_0$  را نشان می‌دهد. مقایسه رفتار استاتیکی سوزن در [41] با شکل 2، مشخص می‌کند که این دو شکل تطبیق مناسبی با یکدیگر دارند به عبارت دیگر مدل‌سازی انجام شده براساس روش گلرکین دارای اعتبار بوده و لذا می‌توان برای قسمت‌های بعدی مقاله از این مدل استفاده کرد.

برای این منظور ترم دافعه موجود در نیروی اندروالس نیز در نظر گرفته می‌شود [15] بنابراین معادله جرم مرکز موجود در رابطه (16) به صورت رابطه (21) بازنویسی خواهد شد.

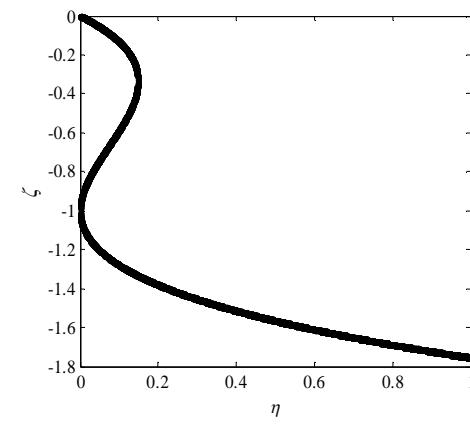
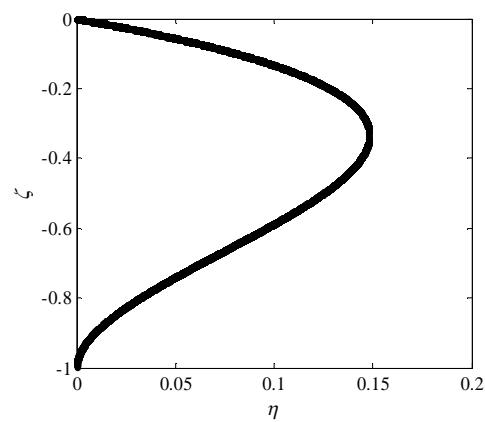
<sup>1</sup> Sciarra

شکل 5 صفحه فاز به ازای پارامتر  $\eta = 0.11$ شکل 5 صفحه فاز به ازای پارامتر  $\eta = 0.11$ 

نایپیدار است و در نهایت C نقطه مارپیچ پایدار است. همچنین به ازای دو مقدار از  $\eta$ , نمودارهای پاسخ زمانی و سرعت برحسب جابه جایی سیستم به ازای یک شرایط اولیه معین در شکل های 6 و 7 رسم شده است. همان طور که شکل 6 الف نشان می دهد، نقطه تعادل سیستم به ازای  $\eta = 0.12$  برابر -0.1773 است که در شکل 2 نیز به ازای  $\eta = 0.12$  همین نقطه تعادل را مشخص می کند.

1-1-4- پاسخ زمانی، صفحه فاز و فضای فاز سیستم به ازای  $\eta = 0.12$ شکل 6a Time history diagram for  $\eta = 0.12$ شکل 6a Time history diagram for  $\eta = 0.12$ شکل 6b Phase plane diagram for  $\eta = 0.12$ شکل 6b Phase plane diagram for  $\eta = 0.12$ 

تفییرات دامنه  $\zeta$  بر حسب  $\eta$  در شکل 3 نمایش داده شده است. با توجه به این بعد کردن دامنه، مقدار بزرگتر از یک مفهوم فیزیکی نداشته و بنابراین این ناحیه نایپیدار در شکل 3 حذف شده و نتیجه در شکل 4 نمایش داده شده است. با توجه به اینکه رابطه (18) یک معادله بی بعد است برای حالت های کلاسیک و غیر کلاسیک یکسان می باشد در حالی که برای پارامتر های فیزیکی یکسان، مقدار پارامتر بی بعد  $\eta$  براساس دو تئوری متفاوت می باشد. مقایسه شکل 3 و جدول 2 تطابق خوبی را برای روش تحلیلی و عددی نشان می دهد. همچنین مقدار بحرانی ارائه شده در نمودار و جدول یکسان می باشد. درواقع  $\eta_{cr} = a$  می باشد و با توجه به شکل 3 به ازای  $\eta < \eta_{cr}$  سیستم حول نقطه تعادل پایدار متناظر به آن  $\eta$  نوسان می کند. برای نشان دادن حالت کلی دینامیک سیستم با توجه به شکل 3، به ازای یک دسته از شرایط اولیه و پارامتر  $\eta = 0.11$ ، نمودار صفحه فازی سیستم در شکل 5 رسم شده است. با توجه به شکل 5 سیستم سه نقطه تعادل دارد که با توجه به میدان برداری رفتار سیستم حول این نقاط تعادل داده شده است. نقطه A از نوع نقطه مارپیچ پایدار است که مسیرهای جواب با ترخ جبری به این نقطه می رسد، به همین دلیل به آرامی جذب این نقطه می شوند و با توجه به اینکه در دامنه بزرگتر از این نقطه مفهوم فیزیکی ندارد، نقطه B نقطه ای زینی<sup>1</sup> و

شکل 3 نمودار چندشاخگی نقاط تعادل بر حسب پارامتر  $\eta$ شکل 3 نمودار چندشاخگی نقاط تعادل بر حسب پارامتر  $\eta$ شکل 4 نمودار تصحیح شده چندشاخگی نقاط تعادل بر حسب پارامتر  $\eta$ <sup>1</sup>Saddle

است که برای این سیستم به ازای  $\eta = 0.16$  هیچ نقطه تعادلی وجود ندارد. بنابراین شکل‌های ۳، ۷ الف و ۷ ب این مفهوم را می‌رسانند که سیستم به ازای  $\eta > 0.1488$  ناپایدار می‌باشد.

#### ۴-۲- نمودار تغییرات پارامتر $\eta$ بر حسب نسبت ابعادی برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

پارامتر نسبت ابعادی عبارتست از ضخامت اولیه به ضخامت ثانویه، نسبت ابعادی روی تمام پارامترهای هندسی تأثیر می‌گذارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{h_0}{h} \quad (23)$$

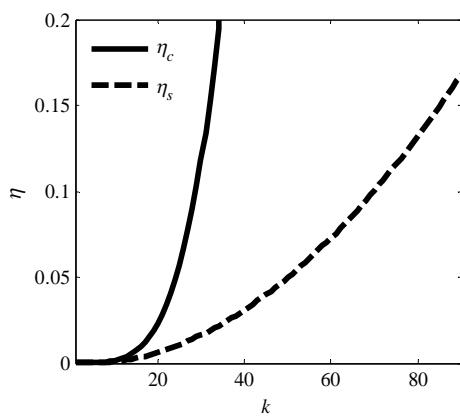
رونده تغییرات پارامتر  $\eta$  در هریک از تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک بر حسب نسبت ابعادی در شکل ۸ نشان داده است.

با توجه به این شکل با افزایش نسبت ابعادی، پارامتر  $\eta$  در هردو تئوری افزایش می‌باید اما سرعت افزایش این پارامتر در تئوری کلاسیک نسبت به تئوری غیرکلاسیک خیلی بیشتر می‌باشد. به گونه‌ای که طبق شکل ۸ در تئوری کلاسیک این پارامتر  $\eta$  به طور تقریبی در نسبت ابعادی معادل ۳۱.۷ به مقدار بحرانی  $\eta_{cr}$  می‌رسد ولی در تئوری غیرکلاسیک پارامتر  $\eta$  به طور تقریبی در نسبت ابعادی ۸۴.۲۷ به مقدار بحرانی  $\eta_{cr}$  خواهد رسید. به عبارت دیگر با کاهش همزمان ابعاد میکروتیر و فاصله محور افقی تا سطح نمونه، تئوری کلاسیک نسبت به غیرکلاسیک زودتر به مقدار بحرانی خواهد رسید و درواقع طبق شکل‌های ۳ و ۸، تئوری کلاسیک اعلام می‌کند که اگر نسبت ابعادی از مقدار ۳۱.۷ بیشتر شود سیستم ناپایدار می‌شود اما از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک اگر تمامی ابعاد طولی مذکور تا نسبت ابعادی ۸۴.۲۷ کاهش یابند سیستم هنوز در ناحیه پایدار قرار دارد.

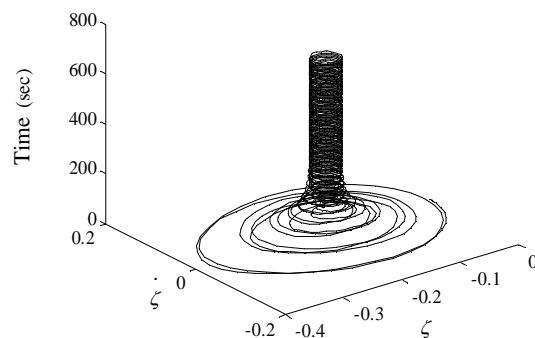
#### ۴-۳- نمودار نقاط تعادل بر حسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه

نقاط تعادل بر حسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک به ازای مقادیر ضخامت‌های  $h = 1, 0.1\mu\text{m}$  در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده است.

با توجه به شکل ۹ برای میکروتیر به ضخامت  $h = 1\mu\text{m}$  در حالت کلاسیک حداقل فاصله  $z_0$  به طور تقریبی باید معادل ۱.۴۸۷۸nm باشد تا



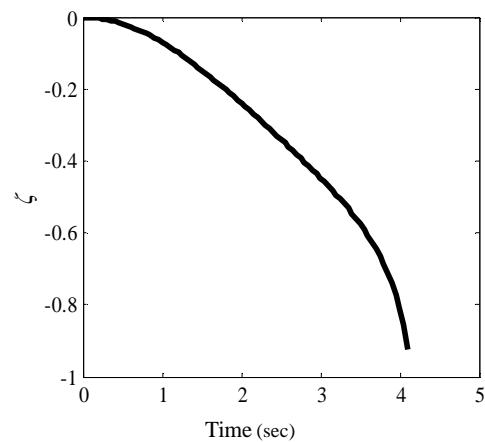
شکل ۸ تغییرات پارامتر  $\eta$  بر حسب نسبت ابعادی از دیدگاه تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک



شکل ۶g فضای فاز به ازای پارامتر  $\eta = 0.12$

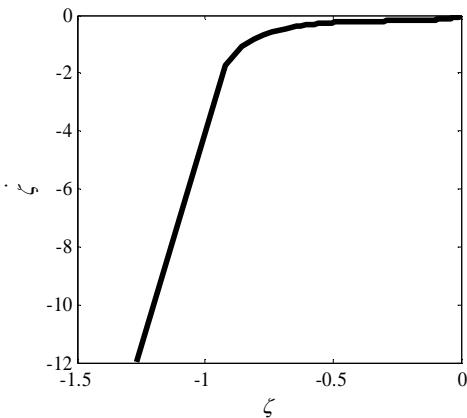
شکل ۶ ج فضای فاز به ازای پارامتر  $\eta = 0.12$

۴-۱-۴- پاسخ زمانی و صفحه فاز سیستم به ازای  $\eta = 0.16$  مطابق شکل ۷ الف، سیستم به ازای مقدار  $\eta = 0.16$ ، از حالت نوسانی خارج شده و پایداری خود را از دست می‌دهد. در شکل ۷ ب نیز نشان داده شده



شکل ۷a Time history diagram for  $\eta = 0.16$

شکل ۷a الف پاسخ زمانی به ازای پارامتر  $\eta = 0.16$



شکل ۷b Phase Portrait diagram for  $\eta = 0.16$

شکل ۷b صفحه فاز به ازای پارامتر  $\eta = 0.16$

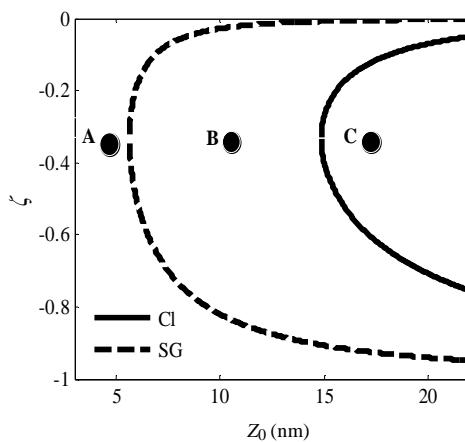


Fig. 10 System stable points as a function of  $z_0$  for  $h = 0.1\mu\text{m}$  based on two classic and non-classic theories

شکل 10 نمودار نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای ضخامت  $h = 0.1\mu\text{m}$  در تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

فاصله‌های بحرانی ارائه شده توسط تئوری کلاسیک به طور تقریبی 1.4878nm و توسط تئوری غیرکلاسیک 1.41nm می‌باشد ولی برای همان  $h = 0.1\mu\text{m}$  کاهش یابد، فواصل بحرانی ارائه شده میکروتیر اگر ضخامت به  $h = 0.1\mu\text{m}$  باشد، در تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک به ترتیب حدود 5.65, 14.87nm می‌باشند. بنابراین اگر ضخامت میکروتیر کاهش یابد، از دیدگاه دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک حداقل فاصله  $z_0$  برای اینکه سیستم پایدار باشد، باید افزایش یابد.

با توجه به فواصل بحرانی ارائه شده توسط دو تئوری در ضخامت‌های  $h = 0.1\mu\text{m}$  دیده می‌شود که با کاهش ضخامت میکروتیر، فواصل بحرانی دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک، اختلاف بیشتری پیدا می‌کنند به‌گونه‌ای که در ضخامت  $1\mu\text{m}$  اختلاف فواصل بحرانی دو تئوری به‌طور تقریبی معادل  $0.077\text{nm}$  می‌باشد و هنگامی که ضخامت به  $0.1\mu\text{m}$  کاهش می‌یابد این اختلاف برابر  $9.22\text{nm}$  می‌شود. بنابراین با کاهش ضخامت میکروتیر دیدگاه دو تئوری در ارائه فاصله بحرانی با هم تفاوت زیادی پیدا می‌کنند. همچین فاصله بحرانی را که تئوری کلاسیک ارائه می‌کند بزرگ‌تر از فاصله بحرانی تئوری غیرکلاسیک می‌باشد؛ نظریه کلاسیک برای اینکه سیستم در حالت پایدار قرار داشته باشد نسبت به تئوری غیرکلاسیک محتاطانه‌تر عمل می‌کند. در واقع به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه در مقیاس‌های کوچک برای پایدار ماندن سیستم، فاصله بیشتری را نسبت به تئوری غیرکلاسیک پیشنهاد می‌کند.

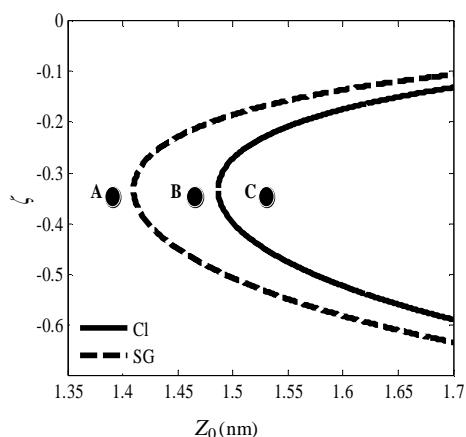
#### 4-4- نمودار نسبت فاصله $z_0$ تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک به ازای پارامتر $\eta$ یکسان برحسب تغییرات ضخامت

برای میکروتیر با طول و عرض مشخص، نمودار تغییرات نسبت  $z_0$  تا سطح نمونه در تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک به ازای پارامتر یکسانی از  $\eta$  برحسب افزایش ضخامت میکروتیر مطابق شکل 11 می‌باشد. با توجه به شکل 11، مشاهده می‌شود در ضخامت‌های پایین به طور مثال  $1\text{nm}$ ، نسبت فاصله ارائه شده در حالت غیرکلاسیک به فاصله کلاسیک، به صفر نزدیک می‌شود و با افزایش ضخامت تا  $1\mu\text{m}$  فواصل ارائه شده در هر دو تئوری به‌طور تقریبی برابر خواهد شد و درواقع شکل 11 تصدیق کننده شکل‌های 9

$\eta < \eta_{cr}$  شود و درواقع سیستم در ناحیه پایداری قرار بگیرد، به عبارت دیگر فاصله بحرانی برابر 1.4878nm می‌باشد که اگر فاصله  $z_0$  از این مقدار کمتر شود آنگاه  $\eta > \eta_{cr}$  و سیستم ناپایدار می‌شود. اما برای حالت غیرکلاسیک حداقل فاصله  $z_0$  به طور تقریبی 1.41nm می‌باشد تا  $\eta < \eta_{cr}$  شود و درواقع سیستم در ناحیه پایداری عبارت دیگر تئوری غیرکلاسیک فاصله بحرانی را 1.41nm اعلام می‌کند و اگر فاصله از این مقدار کمتر شود سیستم ناپایدار خواهد شد. تحلیل نمودار شکل 9 به طریق دیگر این گونه است که نقطه A از دیدگاه هر دو تئوری ناپایدار است، نقطه B از دیدگاه تئوری کلاسیک ناپایدار ولی از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک پایدار است و نقطه C از نظر هر دو تئوری در محدوده پایداری قرار دارد.

شکل 10 برای میکروتیر به ضخامت  $h = 0.1\mu\text{m}$  رسم شده است که در این شکل، تئوری کلاسیک حداقل فاصله را به طور تقریبی برابر 14.87nm بیان می‌کند تا  $\eta < \eta_{cr}$  شود و سیستم درون ناحیه پایدار قرار بگیرد. به عبارت دیگر طبق تئوری کلاسیک اگر فاصله  $z_0$  از این مقدار بحرانی کمتر شود آنگاه  $\eta > \eta_{cr}$  شده و سیستم ناپایدار می‌شود. اما تئوری غیرکلاسیک فاصله بحرانی را به‌طور تقریبی حدود 5.65nm محاسبه می‌کند تا  $\eta < \eta_{cr}$  و سیستم درون ناحیه پایدار قرار بگیرد. از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک اگر فاصله  $z_0$  از این مقدار بحرانی کمتر شود آنگاه  $\eta > \eta_{cr}$  شده و سیستم دچار ناپایداری می‌شود. تحلیل شکل 9 به این صورت می‌باشد که نقطه A از دید هر دو تئوری در ناحیه ناپایداری قرار دارد و نقطه B از دیدگاه تئوری کلاسیک ناپایدار و از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک پایدار است و در نهایت نقطه C از نظر هر دو تئوری پایدار می‌باشد.

مشاهده می‌شود هنگامی که مقدار ضخامت میکروتیر  $h = 1\mu\text{m}$  است هر کدام از دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک مقدار فاصله بحرانی مشخص را بیان کردند، یعنی حداقل مقدار فاصله برای اینکه سیستم در حوزه پایداری قرار بگیرد را پیشنهاد دادند. وقتی مقدار ضخامت میکروتیر به  $h = 1\mu\text{m}$  کاهش پیدا می‌کند، فاصله‌های بحرانی پیشنهاد شده توسط دو تئوری، در مقایسه با فواصل بحرانی ارائه شده برای میکروتیر با ضخامت  $h = 1\mu\text{m}$  بزرگتر می‌شوند. به‌گونه‌ای که برای میکروتیری با ضخامت  $h = 1\mu\text{m}$  به‌گونه‌ای که برای میکروتیری با ضخامت  $h = 0.1\mu\text{m}$  می‌باشد.



شکل 9 نمودار نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای ضخامت  $h = 1\mu\text{m}$

و تئوری غیرکلاسیک بیشترین نسبت ابعادی را تقریباً معادل  $k_s = 84.27$  پیشنهاد می‌کند. به عبارت دیگر برای اینکه ابعاد میکروتیر و فاصله محور  $x$  را سطح نمونه به طور همزمان، حداکثر کاهش را داشته باشند و سیستم پایدار باشد، از دیدگاه تئوری کلاسیک این کاهش متناظر با نسبت ابعادی  $k_c = 31.7$  و از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک این کاهش متناظر با  $k_s = 84.27$  می‌باشد.

تحلیل به این صورت نیز می‌تواند باشد که اگر  $k > 31.7$  شود آنگاه طبق شکل 8 براساس نمودار تئوری کلاسیک  $\eta_{cr} > \eta$  شده و در نهایت سیستم ناپایدار می‌شود و در همان شکل براساس نمودار غیرکلاسیک اگر  $k > 84.27$  شود آنگاه  $\eta > \eta_{cr}$  شده و سیستم در ناحیه ناپایداری قرار می‌گیرد. تفاوت بین دیدگاه‌های دو تئوری در نسبت‌های ابعادی بالا، ناشی از در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک می‌باشد.

#### 5- نتیجه گیری

در این مطالعه، میکروتیری که به انتهای آزاد آن سوزن و در انتهای دیگر یک پیزوالتتریک متصل شده است بهصورت هارمونیک تحریک می‌شود. نیروی بین نوک سوزن و سطح نمونه از نوع واندروالس می‌باشد. در گام اول این میکروتیر به روش تیر اویلر-برنولی و گردابیان کرنشی مدلسازی شده و سپس در گام دوم روش گلرکین برای استخراج مدل متمرکز به کار برده است. در گام سوم براساس تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تحلیل پایداری و اثرات اندازه روی رفتار دینامیکی میکروناونتیر بررسی شده است. سرانجام نتایج زیر حاصل شد:

1. پارامتر  $\eta$  (که یک پارامتر متناسب با ابعاد میکروسکوپ است) مدل متمرکز سیستم برحسب نسبت ابعادی، براساس تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک بررسی و مقایسه شدند که با افزایش نسبت ابعادی، تئوری کلاسیک روند سریع‌تری را نسبت به تئوری غیرکلاسیک نشان داد.

2. اگر ابعاد هندسی میکروتیر ثابت باشد و فقط ضخامت میکروتیر کاهش یابد فاصله بحرانی ارائه شده توسط دو تئوری برای پایدار ماندن سیستم، افزایش می‌یابد.

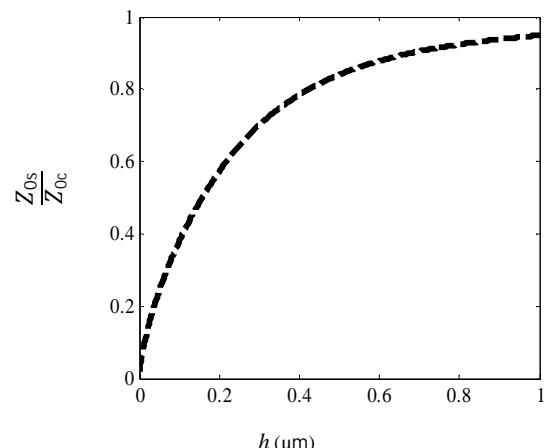
3. با ثابت بودن طول و عرض میکروتیر و کاهش ضخامت آن، فاصله بحرانی که تئوری غیرکلاسیک پیشنهاد می‌دهد نسبت به فاصله بحرانی تئوری کلاسیک اختلاف زیادی پیدا می‌کند و در واقع دیدگاه دو تئوری تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کند و بالعکس با افزایش فاصله، فاصله ارائه شده توسط دو تئوری به یکدیگر همگرا می‌شوند. به عبارت دیگر هنگامی که ابعاد سازه در مقیاس‌های میکرون و کمتر از میکرون باشد، اندازه ابعاد در رفتار دینامیکی سازه نقش ایفا می‌کند. وقتی ضخامت میکروتیر خیلی کوچک شود، به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک، فواصل پیشنهاد شده تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کنند.

4. همواره برای میکروتیری با هر ضخامتی، فاصله بحرانی ارائه شده توسط تئوری کلاسیک بزرگتر از فاصله بحرانی تئوری غیرکلاسیک می‌باشد؛ که به نظر مرسد نظریه کلاسیک برای اینکه سیستم در حالت پایدار قرار داشته باشد نسبت به تئوری غیرکلاسیک محتاطانه‌تر عمل می‌کند. تئوری کلاسیک به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه در مقیاس‌های کوچک با توجه به ارائه فاصله بحرانی بزرگتر برای پایدار ماندن سیستم، ناحیه پایداری کوچکتری را پیشنهاد می‌کند.

و 10 می‌باشد. در واقع هنگامی که ابعاد سازه در مقیاس‌های میکرون و کمتر از میکرون باشد، اثرات اندازه در رفتار دینامیکی سازه نقش پیدا می‌کند و به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک، وقتی ضخامت میکروتیر خیلی کوچک می‌شود، فواصل پیشنهاد شده توسط تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کنند.

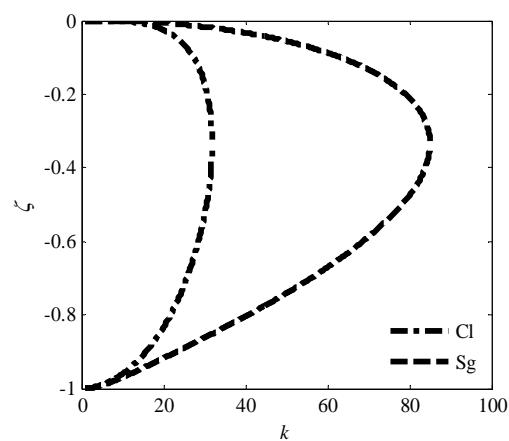
#### 4-5- نمودار نقاط تعادل برحسب نسبت ابعادی برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

اگر همه مقادیر طولی تعریف شده برای میکروتیر به نسبت یکسان کاهش یابند آنگاه نمودار نقاط تعادل میکروتیر برحسب نسبت ابعادی شکل 12 با توجه به شکل 12، با افزایش نسبت ابعادی تا یک مقدار مشخصی برای هر تئوری، اختلاف نقاط تعادل سیستم کاهش می‌یابد و همچنین ناحیه پایداری ارائه شده توسط هر تئوری افزایش می‌یابد. برای این میکروتیر، تئوری کلاسیک بیشترین نسبت ابعادی را به طور تقریبی معادل  $k_c = 31.7$



شکل 11 نمودار نسبت فاصله تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک برحسب تغییرات ضخامت از 1nm تا 1μm

شکل 11 نمودار نسبت فاصله تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک برحسب تغییرات ضخامت از 1nm تا 1μm



شکل 12 نمودار نقاط تعادل برحسب نسبت ابعادی برای تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

- length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109-5115, 1998.
- [19] A. Chong, D. C. Lam, Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers, *Journal of Materials Research*, Vol. 14, No. 10, pp. 4103-4110, 1999.
- [20] A. C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.
- [21] J. Puddington, G. R. Buchanan, R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 305-312, 2003.
- [22] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [23] Y. Martin, C. Williams, H. K. Wickramasinghe, Atomic force microscope-force mapping and profiling on a sub 100-Å scale, *Journal of Applied Physics*, Vol. 61, No. 10, pp. 4723-4729, 1987.
- [24] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [25] M. Fathalou, M. Sadeghi, G. Rezazadeh, Nonlinear behavior of capacitive micro-beams based on strain gradient theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 4, pp. 1141-1151, 2014.
- [26] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, M. Fathi, Nano-resonator frequency response based on strain gradient theory, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 47, No. 36, pp. 312-323, 2014.
- [27] M. Kahrobaiany, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1985-1994, 2010.
- [28] D. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [29] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
- [30] B. Wang, J. Zhao, S. Zhou, A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 2010.
- [31] M. Abbasi, A. K. Mohammadi, Study of the sensitivity and resonant frequency of the flexural modes of an atomic force microscopy microcantilever modeled by strain gradient elasticity theory, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 572-584, 2013.
- [32] M. Abbasi, Size dependent vibration behavior of an AFM with sidewall and top-surface probes based on the strain gradient elasticity Theory, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 236-253, 2015.
- [33] G. Dai, H. Wolff, T. Weimann, M. Xu, F. Pohlenz, H.-U. Danzebrink, Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano-and micro-structures, *Measurement science and Technology*, Vol. 18, No. 2, pp. 3123-3134, 2007.
- [34] J. Zhao, S. Zhou, B. Wang, X. Wang, Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 6, pp. 2674-2686, 2012.
- [35] R. Vatankhah, M. Kahrobaiany, A. Alasty, M. Ahmadian, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18, pp. 8363-8382, 2013.
- [36] E. M. Miandoab, H. N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, H. Hoorzed, Polysilicon nano-beam model based on modified couple stress, Eringen's nonlocal elasticity theories, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 63, pp. 223-228, 2014.
- [37] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, Nonlocal and strain gradient based model for electrostatically actuated silicon nano-beams, *Microsystem Technologies*, Vol. 21, No. 2, pp. 457-464, 2014.
- [38] G. Sciarra, S. Vidoli, Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials, *Journal of Elasticity*, Vol. 113, No. 1, pp. 27-53, 2013.
- [39] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, X. Chen, Size-dependent pull-in instability of electrostatically actuated microbeam-based MEMS, *Journal of Micromechanics and microengineering*, Vol. 21, No. 2, pp. 2352-2363, 2011.
- [40] B. Akgöz, Ö. Civalek, Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, No. 3, pp. 423-443, 2012.
- [41] M. I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*, pp. 330-334, Berlin: Springer, 2011.

5. تفاوت بین دیدگاه‌های دو تئوری، ناشی از در نظر نگرفتن اثرات اندازه متوسط تئوری کلاسیک، هنگامی که نسبت ابعادی افزایش یابد، می‌باشد. برای میکروتیری با این مشخصات، نمی‌توان همه پارامترهای طولی را به طور همزمان تا مقیاس نانو کاهش داد.

## 6- تشرک و قدردانی

نگارندگان از " صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور" به دلیل حمایت مالی در راستای به ثمر رسیدن این مقاله کمال تشرک را دارند.  
(شماره طرح : 94000927)

## 7- مراجع

- [1] R. Garcia, R. Perez, Dynamic atomic force microscopy methods, *Surface Science Reports*, Vol. 47, No. 6-8, pp. 197-301, 2002.
- [2] P. E. Mazeran, J. L. Loubet, Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: Implication in quantitative elastic and friction imaging, *Tribology Letters*, Vol. 7, No.4 , pp. 199-212, 1999.
- [3] Q. Zhong, L. Inniss, K. Kjoller, V. Elings, Fractured polymer/silica fiber surface studied by tapping mode atomic force microscopy, *Surface Science Letters*, Vol. 290, No.1-2, pp. L688-L692, 1993.
- [4] M. Ashhab, M. Salapaka, M. Dahleh, I. Mezić, Control of chaos in atomic force microscopes, *American Control Conference (ACC) IEEE*, pp. 196-202, 1997.
- [5] M. Basso, L. Giarre, M. Dahleh, Numerical analysis of complex dynamics in atomic force microscopes, *Control Applications IEEE International*, pp. 1026-1030, 1998.
- [6] M. J. Martin, H. K. Fathy, B. H. Houston, Dynamic simulation of atomic force microscope cantilevers oscillating in liquid, *Journal of Applied Physics* Vol. 104, No. 4 pp. 107-125, 2008.
- [7] Y. Song, B. Bhushan, Modeling of tip-cantilever dynamics in atomic force microscopy, S. Kawata (Eds), *Applied Scanning Probe Methods V*, pp. 149-223, Berlin: Springer, 2007.
- [8] R. Vázquez, F. J. Rubio-Sierra, R. W. Stark, Multimodal analysis of force spectroscopy based on a transfer function study of micro-cantilevers, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 18, pp. 185-198, 2007.
- [9] J. R. Claeysen, The Timoshenko beam model in vibrating AFM cantilevers, *9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, pp. 1027-1036, 2010.
- [10] J. C. Hsu, H. L. Lee, W. J. Chang, Flexural vibration frequency of atomic force microscope cantilevers using the Timoshenko beam model, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 28, pp. 285-303, 2007.
- [11] H.-J. Butt, B. Cappella, M. Kappl, Force measurements with the atomic force microscope: Technique, interpretation and applications, *Surface Science Reports*, Vol. 59, No. 1, pp. 1-152, 2005.
- [12] A. Sebastian, A. Ganepalli, M. V. Salapaka, A review of the systems approach to the analysis of dynamic-mode atomic force microscopy, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 15, No. 5, pp. 952-959, 2007.
- [13] B. V. Derjaguin, V. M. Muller, Y. P. Toporov, Effect of contact deformations on the adhesion of particles, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 53, No. 2 , pp. 314-326, 1975.
- [14] S. Basak, A. Raman, Dynamics of tapping mode atomic force microscopy in liquids: Theory and experiments, *Applied Physics Letters*, Vol. 91, No. 6, pp. 421-436, 2007.
- [15] S. Eslami, N. Jalili, A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces, *Ultramicroscopy*, Vol. 117, pp. 31-45, 2012.
- [16] T. S. Wu, W. J. Chang, J. C. Hsu, Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers, *Microelectronic Engineering*, Vol. 71, No. 1, pp. 15-20, 2004.
- [17] N. Fleck, G. Muller, M. Ashby, J. Hutchinson, Strain gradient plasticity: Theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475-487, 1994.
- [18] J. Stölken, A. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity