



## تحلیل سه بعدی ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته های استوانه ای کامپوزیتی با تقویت کننده های متعامد تحت بار محوری و فشار

کامران دانشجو<sup>۱</sup>، رضا معدولیت<sup>۲\*</sup>، مصطفی طالبی توتی<sup>۳</sup>

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، iust.ac.ir، madoliat@iust.ac.ir

**چکیده-** در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه ای کامپوزیتی دوار، با تقویت کننده های متعامد تحت بار محوری یکنواخت و فشار، با تئوری سه بعدی لایه ای مورد مطالعه قرار گرفته است. تقویت کننده ها با فواصل مساوی از یکدیگر قرار گرفته اند و دارای هندسه و جنس یکسانی می باشند. اتصال تقویت کننده ها بر سطح خارجی پوسته بوده و به قصد مدلسازی ریاضی تقویت کننده ها از روش المان جداگانه استفاده شده است. معادلات حرکت با نگرش انرژی و براساس اصل همپلتون حاصل می گردند. در استخراج معادلات حرکت از تئوری سه بعدی الاستیسیته استفاده شده و اثرات نیروی کریولیس، شتاب جانب به مرکز و کشش حلقوی اولیه در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری سه بعدی لایه ای، بر روی معادلات حرکت و شرایط مرزی در راستای ضخامت جداسازی صورت گرفته است. شرایط مرزی پوسته در دو سر تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از روش حاضر با نتایج سایر محققان و نتایج تحلیل عددی مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. در نهایت تاثیر هندسه و نوع تقویت کننده ها، سرعت دورانی و مقدار نیروی محوری و فشار داخلی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای تقویت شده مورد مطالعه قرار گرفته است. **کلیدواژگان:** پوسته استوانه ای دوار، تقویت کننده های طولی و محیطی، تئوری سه بعدی الاستیسیته، سرعت بحرانی، تئوری لایه ای

## Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure

K. Daneshjou<sup>1</sup>, R. Madoliat<sup>2\*</sup>, M. Talebitooti<sup>3</sup>

1- Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

3- PhD Student, Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

\* P. O. B. 16846-13114 Tehran, madoliat@iust.ac.ir

**Abstract-** In this paper, an approximate solution using layer-wise theory for the vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells with ring and stringer stiffeners under axial load and pressure is presented. The cylindrical shells are stiffened with uniform interval and it is assumed that the stiffeners have the same material and geometric properties and cylindrical shell reinforced by outer stiffeners while stiffeners are treated as discrete elements. The equations of motion are derived by the Hamilton's principle. In deriving the governing equations three-dimensional elasticity theory are used and the study includes the effects of the Coriolis and centrifugal accelerations and the initial hoop tension. The layer-wise theory is used to discretize the equations of motion and the related boundary conditions through the thickness of the shells. The edges of the shell are restrained by simply supported boundary conditions. The presented results are compared with those available in the literature and also with the FE results and excellent agreement is observed. Finally, the results obtained include the relationship between frequency characteristics of stiffened cylindrical shell and different geometry of stiffeners, stiffener type, rotating velocities, amplitude of pressure and amplitude of axial load.

**Keywords:** Rotating Cylindrical Shell, Ring and Stringer Stiffeners, Three-Dimensional Elasticity Theory, Critical Speed, Layer-wise Theory

## ۱- مقدمه

مقاله نلسون [۶] در زمینه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با طول نامحدود اشاره کرد. همچنین برای استوانه با طول محدود می‌توان کارهای هاتچنسون و الازهری [۷] و لیسا [۸] را نام برد که با استفاده از روش ریلی ریتز این مسئله را مورد بررسی قرار دادند. ملک‌زاده و همکارانش [۹] با استفاده از تئوری لایه‌ای و استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی پرداختند. در ادامه علی‌بیگلو [۱۰] به مطالعه خصوصیات استاتیکی و ارتعاشاتی پوسته کامپوزیتی با لایه‌هایی دارای زاویه الیاف ۰ و ۹۰ درجه<sup>۲</sup> با استفاده از تئوری سه‌بعدی لایه‌ای الاستیسیته و استفاده از فضای حالت به همراه روش دیفرانسیل کوادراچر پرداخت. همچنین کنی و علی بیگلو [۱۱]، با استفاده از تئوری سه‌بعدی و روش تحلیلی، ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چندلایه با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دوار تقویت‌شده تحت اثر بار محوری ثابت و فشار، با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دوسر، با استفاده از تئوری سه‌بعدی لایه‌ای، مطالعه می‌شود. برای استخراج معادلات متشکله حاکم بر پوسته از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می‌شود. تاثیر پارامترهای مختلف نظیر سرعت دورانی پوسته، میزان بار محوری، فشار و نسبت ارتفاع به پهنای تقویت‌کننده بر روی فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی بررسی شده است. اثر تقویت‌کننده‌ها با استفاده از روش جداگانه وارد معادلات شده و در نهایت نتایج حاصله با نتایج موجود در مقالات دیگر محققان و همچنین نتایج حاصل از تحلیل عددی توسط نرم‌افزار اباکوس<sup>۳</sup> مقایسه شده که دارای همخوانی مناسبی می‌باشد.

## ۲- تئوری مسئله

## ۲-۱- هندسه مسئله

پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با تقویت‌کننده‌های متعامد، با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  به دور محور تقارن طولی، مورد بررسی واقع شده است. سیستم مختصات متعامد  $(x, \theta, z)$  بر سطح مرجع بر روی لایه میانی پوسته قرار دارد. مطابق شکل ۱، در تئوری لایه‌ای، پوسته به  $N_l$  لایه دلخواه فرضی تقسیم می‌شود. شعاع

پوسته‌های استوانه‌ای دوار در بسیاری از کاربردهای صنعتی از قبیل روتور توربین گاز، سانتریفیوژها، کوره‌های پخت سیمان و سیستم‌های دوار استفاده می‌شود. برای بالابردن سفتی پوسته از تقویت‌کننده استفاده می‌شود. پوسته‌های استوانه‌ای، که با المان‌هایی از نوع تیر تقویت شده‌اند، به صورت گسترده‌ای در سازه‌های مکانیکی از قبیل موشک، زیردریایی، خشک‌کننده‌های دوار و مخازن سوخت هواپیما استفاده می‌شوند. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است دچار ارتعاش و کمانش و خستگی شود. بنابراین شناخت خصوصیات این سازه‌ها از جمله فرکانس طبیعی و بار کمانش اجتناب‌ناپذیر است. از طرفی، با توجه به نیاز روزافزون طراحی سازه‌های سبک‌وزن با استحکام بالا، لازم است که نسبت استحکام به وزن این سازه‌ها تا حد امکان بالا باشد تا سازه طراحی‌شده از نظر مصرف مواد، انرژی و هزینه بهینه باشد. از جمله راه‌های رسیدن به این هدف، تقویت بهینه پوسته با المان‌های تقویت‌کننده محیطی و طولی و همچنین استفاده از مواد مرکب می‌باشد.

مصطفی و علی [۱] از روش انرژی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده، با در نظر گرفتن خمیدگی، کشیدگی و پیچیدگی تقویت‌کننده، استفاده کردند. نگ و لم [۲] ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوسته‌های ایزوتروپیک دوار تحت بار محوری ثابت را تحلیل کردند. ژاهو، لیو و نگ [۳] ارتعاشات پوسته‌های کامپوزیتی دوار با تقویت‌کننده‌های متعامد را بررسی کردند. جعفری و باقری [۴] با روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده‌های محیطی پرداختند و نتایج حاصل از سه روش فوق را با هم مقایسه کردند. خرمی و حسینی‌هاشمی [۵] با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر<sup>۱</sup> و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداختند. در زمینه ارتعاشات پوسته مطالعات انجام‌گرفته با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته در مقایسه با دیگر تئوری‌ها، به دلیل پیچیدگی آن و در نظر گرفتن هر شش جزء میدان تنش و کرنش، بسیار کم می‌باشد. از جمله این تحقیقات می‌توان به

2. Cross-ply  
3. Abaqus

1. Differential Quadrature Method

همچنین، رابطه ماتریس سفتی انتقال یافته با ماتریس سفتی ماده به صورت زیر است.

$$[\bar{C}] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (4)$$

که در رابطه فوق  $[T]$  ماتریس انتقال از مختصات ماده به مختصات اصلی و به صورت زیر می باشد.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$m = \cos \alpha$  ,  $n = \sin \alpha$

در رابطه فوق  $\alpha$  زاویه بین الیاف لایه کامپوزیتی و جهت مختصه  $x$  دستگاه مختصات می باشد. همچنین  $[C]$  ماتریس سفتی در دستگاه مختصات ماده می باشد و برای یک لایه کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C_{11} = E_{11} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{22} = E_{22} \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{\Delta}$$

$$C_{33} = E_{33} \frac{1 - \nu_{21}\nu_{12}}{\Delta}$$

$$C_{12} = C_{21} = E_{11} \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta}$$

$$C_{13} = C_{31} = E_{22} \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}$$

$$C_{23} = C_{32} = E_{33} \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12}$$

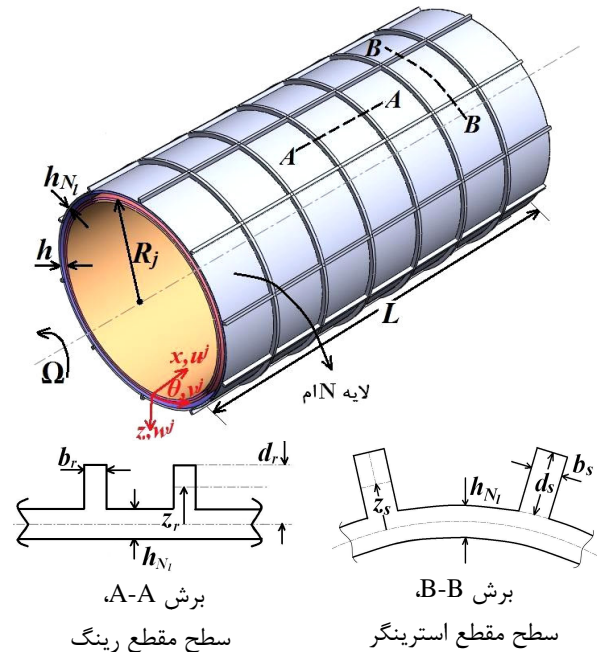
$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (7)$$

که در رابطه فوق  $E_{ij}$  مدول الاستیسیته،  $G_{ij}$  مدول برشی و  $\nu_{ij}$  نسبت های پوسان برای لایه کامپوزیتی می باشند.

در تئوری سه بعدی الاستیسیته رابطه کرنش-جابجایی برای پوسته استوانه ای به صورت ماتریسی زیر بیان می شود [۱۰].

$$\{\epsilon\} = [D] \{\chi\} \quad (8)$$

ثابت  $R_j$  برای لایه  $z$  ام و جابه جایی های  $u^j$  و  $v^j$  به ترتیب در جهات  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  در نظر گرفته می شود. پوسته دارای طول  $L$  و ضخامت  $h$  و تقویت کننده ها به صورت مستطیل شکل دارای ارتفاع  $d_{s/r}$  و پهنای  $b_{s/r}$  می باشند. فاصله مرکز سطح تقویت کننده ها تا سطح خارجی پوسته با  $z_{s/r}$  مشخص می گردد.



شکل ۱ هندسه و نمادگذاری پوسته استوانه ای تقویت شده

### ۲-۲- تئوری سه بعدی الاستیسیته

طبق تئوری سه بعدی الاستیسیته، رابطه تنش-کرنش برای پوسته چندلایه به صورت زیر بیان می شود.

$$\{\sigma\} = [\bar{C}] \{\epsilon\} \quad (1)$$

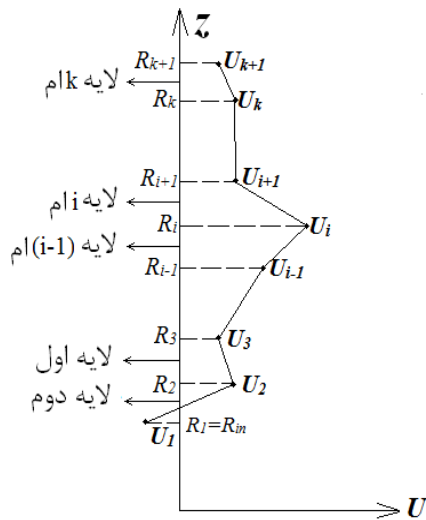
که در رابطه فوق مولفه های تنش و کرنش به صورت زیر است.

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{x\theta}\}$$

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x \quad \epsilon_\theta \quad \epsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{x\theta}\} \quad (2)$$

و ماتریس سفتی کاهش یافته  $[\bar{C}]$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$



شکل ۲ نمایش تغییر شکل ها بر طبق تئوری لایه ای

در رابطه (۱۳)  $z_j$  فاصله سطح پایینی لایه  $j$  ام از سطح مرجع پوسته می باشد و  $U^j, V^j, W^j, U^{j+1}, V^{j+1}, W^{j+1}$  مختصات عمومی لایه  $j$  ام می باشند.

میدان جابه جایی تعریف شده در رابطه (۱۲) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می گردد.

$$\{u^j\} = [N] \{d^j\} \quad (14)$$

که  $\{d^j\}$  به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{d^j\}^T = \{U^j \ V^j \ W^j \ U^{j+1} \ V^{j+1} \ W^{j+1}\} \quad (15)$$

و ماتریس  $[N]$  در پیوست ب آورده شده است.

با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۸)، بردار کرنش به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\} \quad (16)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$[B] = [D][N] \quad (17)$$

### ۲-۳-۲- انرژی پوسته

انرژی کرنشی کششی و خمشی لایه  $j$  ام پوسته به وسیله رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$U_\varepsilon^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\} R_j d\theta dx dz \quad (18)$$

در اثر چرخش پوسته نیروی گریز از مرکز در پوسته ایجاد خواهد شد که با نوشتن رابطه تعادل در جهت شعاعی المانی از

که اپراتور دیفرانسیلی  $D$  بردار کرنش و بردار جابه جایی برای لایه  $j$  ام به صورت زیر تعریف می گردد.

$$[D^j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\chi^T = \{u^j, v^j, w^j\} \quad (10)$$

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{x\theta}\} \quad (11)$$

### ۲-۳-۲- استخراج معادلات حرکت

#### ۲-۳-۱- تئوری لایه ای

میدان جابه جایی برای  $j$  امین لایه از پوسته مورد نظر، با فرض شرط مرزی تکیه گاه ساده در دو سر، به صورت زیر تعریف می شود [۱۲].

$$\begin{aligned} u^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_x^j(z) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) \\ v^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\theta^j(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \\ w^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_z^j(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

در این تئوری جزء جابه جایی در راستای ضخامت،  $\varphi$ ، به صورت تابع های تکه ای درونیاب لاگرانژین تعریف می شود که توابعی پیوسته اند که مشتق آنها ناپیوسته می باشد. در این تئوری تعداد زیرقسمت ها در راستای ضخامت،  $j$ ، می تواند مساوی و یا بیشتر از تعداد لایه ها باشد و جزء جابه جایی در راستای ضخامت می تواند تابع چند جمله ای خطی و یا مرتبه بالاتر باشد (شکل ۲). بنابراین، تابع  $\phi$  به صورت زیر تعریف می شود [۱۳].

$$\begin{aligned} \varphi_x^j(z) &= \alpha U^j + \beta U^{j+1} \quad ; \quad \beta = \frac{z - z_j}{h} \\ \varphi_\theta^j(z) &= \alpha V^j + \beta V^{j+1} \\ \varphi_z^j(z) &= \alpha W^j + \beta W^{j+1} \quad ; \quad \alpha = 1 - \beta \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۵) و همچنین با جاگذاری رابطه های (۱) و (۱۲) و (۱۶) در رابطه (۱۸)، بخش اول انرژی جنبشی  $T_1^j$  و همچنین انرژی کرنشی و خمشی پوسته به صورت زیر قابل بیان است.

$$T_1^j = \frac{1}{2} \{d\}^T [M_{sh}^j] \{d\}$$

$$U_\epsilon^j = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_1^j] \{d\} \quad (26)$$

به ترتیب ماتریس جرم و ماتریس سفتی  $[M_{sh}^j]$  و  $[K_1^j]$  لایه  $j$  ام پوسته می باشند که به صورت زیر قابل حصول هستند.

$$M_{sh}^j = \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j \\ \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 \end{bmatrix} R_j dz \quad (27)$$

$$K_1^j = \iiint_{vol} K_{rs}^1 R^j d \theta dx dz \quad (28)$$

درایه های  $(r, s = 1 \dots 6)$  در رابطه (۲۸) در پیوست الف آورده شده است.

### ۳-۳-۲- انرژی تقویت کننده ها

در روش تحلیلی حاضر فرض بر این است که پوسته و تقویت کننده ها به صورت یکپارچه می باشند. به قصد برقراری رابطه بین جابه جایی تقویت کننده ها و پوسته و در نظر گرفتن خروج از مرکزیت تقویت کننده ها، میدان جابه جایی هر نقطه از تقویت کننده به فاصله  $z$  از سطح خارجی پوسته در جهت های  $x$  و  $\theta$  و  $z$  به صورت رابطه (۲۹) تعریف می شود.

$$u_s = u_{N_i+1} - z \frac{\partial w_{N_i+1}}{\partial x}$$

$$v_s = v_{N_i+1} - \frac{z}{R_{N_i}} \frac{\partial w_{N_i+1}}{\partial \theta}$$

$$w_s = w_{N_i+1} \quad (29)$$

در رابطه فوق،  $(u_{N_i+1}, v_{N_i+1}, w_{N_i+1})$  جابه جایی سطح خارجی پوسته می باشد. بدین ترتیب، کرنش استرینگر در جهت طولی و کرنش رینگ در جهت محیطی به صورت زیر به دست می آید.

پوسته نیروی کشش حلقوی در اثر این چرخش به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$N_j^\theta = \rho_j R_j \Omega^2 \quad (19)$$

انرژی کرنشی ایجاد شده در پوسته در اثر این کشش حلقوی به صورت زیر بیان می گردد [۳].

$$U_j^h = \int_{vol} \frac{N_j^\theta}{2R_j^2} \left\{ \left( \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial \theta} + w_j \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial \theta} - v_j \right)^2 \right\} R_j d \theta dx dz \quad (20)$$

به علاوه، کار انجام شده بر روی پوسته در اثر نیروی محوری و فشار به صورت زیر قابل محاسبه است [۲].

$$U_j^{Na} = -\frac{N_a}{2} \times \iiint_{vol} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial x} \right)^2 \right] R_j dx d \theta dz \quad (21)$$

$$U_j^P = -\frac{P}{2} \iiint_{vol} \left[ \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} + w_j \right) w_j \right] R_j d \theta dx dz \quad (22)$$

انرژی جنبشی پوسته دوار به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho(z) \vec{V} \cdot \vec{V} R_j d \theta dx dz \quad (23)$$

بردار سرعت در رابطه فوق برای هر نقطه از پوسته دوار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{V} = \dot{u}^j \vec{i} + \dot{v}^j \vec{j} + \dot{w}^j \vec{k} + (\Omega \vec{i} \times w^j \vec{k}) + (\Omega \vec{i} \times v^j \vec{j}) \quad (24)$$

با جاگذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۲۳)، انرژی جنبشی لایه  $j$  ام پوسته به صورت زیر قابل بیان است.

$$T^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[ \underbrace{(\dot{u}^j)^2 + (\dot{v}^j)^2 + (\dot{w}^j)^2}_{T_1^j} \right] R_j d \theta dx dz$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho [2\Omega(vw - wv)] R_j d \theta dx dz \quad T_2^j$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho [\Omega^2(v^2 + w^2)] R_j d \theta dx dz \quad T_3^j \quad (25)$$

که در رابطه فوق  $N_s$  تعداد تقویت‌کننده‌های طولی و  $G_{sk} J_{sk}$  سختی پیچشی تقویت‌کننده طولی  $k$ ام می‌باشد. همچنین انرژی کرنشی تقویت‌کننده‌های محیطی با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش و پیچش به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U_r = \sum_{k=1}^{N_r} \frac{1}{2} E_{rk} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} \varepsilon_{rs}^2 dA_{rk} d\theta + \sum_{k=1}^{N_r} \frac{1}{2} G_{rk} J_{rk} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R_N^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right)^2 (R_N + d_s / 2) d\theta \quad (36)$$

که در این رابطه  $G_{rk} J_{rk}$  سختی پیچشی تقویت‌کننده حلقوی است.

#### ۲-۳-۴- اصل همیلتون

در این تحقیق، به قصد به دست آوردن معادلات حرکت از اصل همیلتون استفاده شده است. با جایگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۵) و سپس اعمال اصل همیلتون و همچنین جداسازی ضرایب  $\delta U^j$ ،  $\delta V^j$ ،  $\delta W^j$ ،  $\delta U^{j+1}$ ،  $\delta V^{j+1}$  و  $\delta W^{j+1}$ ، تمام انرژی‌های پوسته به صورت ماتریسی قابل بیان است و می‌توان ماتریس‌های سفی و ژيروسکوپی را از آن‌ها استخراج نمود. شکل ماتریسی این انرژی‌ها در پیوست ب آورده شده است. همچنین با جایگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۳۲)، (۳۳)، (۳۴)، (۳۵) و (۳۶) و اعمال اصل همیلتون و جداسازی ضرایب  $\delta U_{N_i+1}$ ،  $\delta V_{N_i+1}$  و  $\delta W_{N_i+1}$ ، تمام انرژی‌های تقویت‌کننده‌ها به فرم ماتریسی  $[K^s]$ ،  $[M^s]$  و  $[G^s]$  دوباره نویسی می‌شوند که درایه های این ماتریس‌ها نیز در پیوست ب آورده شده است.

#### ۲-۴- روش حل مسئله

انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته با جمع کردن انرژی جنبشی و پتانسیل هر کدام از لایه‌ها به دست می‌آید و با برهم‌گذاری ماتریس‌های سفی، جرم و ژيروسکوپ پوسته و تقویت‌کننده‌ها و مرتب کردن آن‌ها بر حسب مرتبه فرکانس طبیعی  $\omega$ ، رابطه مقدار ویژه فرکانسی پوسته تقویت‌شده به فرم ماتریسی زیر حاصل می‌گردد.

$$\{[M]\omega^2 + [G]\omega + [K]\}\{\delta\} = 0 \quad (38)$$

$$\varepsilon_{sx} = \frac{\partial u_{N_i+1}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_{N_i+1}}{\partial x^2} \quad (30)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{R_{N_i}} \left( \frac{\partial v_{N_i+1}}{\partial \theta} - \frac{z}{R_{N_i}} \frac{\partial^2 w_{N_i+1}}{\partial \theta^2} + w_{N_i+1} \right) \quad (31)$$

با استفاده از تئوری المان جداگانه به قصد مدل کردن تقویت‌کننده‌ها، انرژی جنبشی استرینگرها و رینگ‌ها به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T_s = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{N_s} \int_0^L \int_{A_{sk}} \left[ \dot{u}_s^2 + \dot{v}_s^2 + \dot{w}_s^2 + 2\Omega(v_s \dot{w}_s - w_s \dot{v}_s) + \Omega^2(v_s^2 + w_s^2) \right] dA_{sk} dx \quad (32)$$

$$T_r = \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N_r} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} \left[ \dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2 + 2\Omega(v_r \dot{w}_r - w_r \dot{v}_r) + \Omega^2(v_r^2 + w_r^2) \left( R_N + \frac{d_s}{2} \right) \right] dA_{rk} d\theta \quad (33)$$

به دلیل هندسه تقویت‌کننده‌ها، انرژی کرنشی به وجود آمده در اثر نیروی گریز از مرکز تنها در تقویت‌کننده‌های حلقوی قابل ذکر است و مقدار این انرژی در تقویت‌کننده‌های طولی قابل صرف نظر کردن است. بنابراین انرژی کرنشی در تقویت‌کننده‌های محیطی در اثر کشش حلقوی ناشی از دوران به صورت زیر قابل بیان می‌باشد [۳].

$$U_{rh} = \frac{N_s}{2R_N^2} \sum_{k=1}^{N_r} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} \left\{ \left( \frac{\partial u_s}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_s}{\partial \theta} + w_s \right)^2 + \left( \frac{\partial w_s}{\partial \theta} - v_s \right)^2 \left( R_N + \frac{d_s}{2} \right) \right\} dA_{rk} d\theta \quad (34)$$

که در رابطه فوق،  $N_r$  و  $A_{rk}$  به ترتیب تعداد تقویت‌کننده‌های محیطی و سطح مقطع  $k$ امین تقویت‌کننده محیطی را نشان

$$\text{می‌دهد و همچنین } N_\theta^s = \rho_r \Omega^2 \left( R_N + \frac{z_s}{2} \right)$$

انرژی کرنشی تقویت‌کننده‌های طولی با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش و پیچش به صورت زیر قابل بیان است.

$$U_s = \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} E_{sk} \int_0^L \int_{A_{sk}} \varepsilon_{ss}^2 dA_{sk} dx + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} G_{sk} J_{sk} \int_0^L \frac{1}{R_N^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right)^2 dx \quad (35)$$

در رابطه (۳۸) داریم:

$$[K] = [K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K^s]$$

$$[M] = [M^{sh} + M^s]$$

$$[G] = [G^{sh} + G^s]$$

$$\{\delta\}^T = \{U^1 V^1 W^1 U^2 V^2 W^2 \dots U^{n_l+1} V^{n_l+1} W^{n_l+1}\} \quad (39)$$

رابطه (۳۸)، فرم غیراستاندارد رابطه مقدار ویژه می باشد. با بازنویسی آن به صورت زیر، فرم استاندارد رابطه مقدار ویژه فرکانسی حاصل می گردد [۱۴].

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \omega \right) \begin{Bmatrix} \delta \\ \omega \delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

در این رابطه،  $I$  ماتریس یک به ابعاد  $3(N_l + 1) \times 3(N_l + 1)$  می باشد. با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس  $[A^*]^{-1}[B^*]$  از رابطه (۴۰)،  $2(N_l + 1)$  مقدار برای  $\omega_i$  حاصل می شود. دو مقدار کوچک این مقادیر انتخاب می شوند که یکی از آن ها با فرکانس طبیعی موج پیش رونده و دیگری با فرکانس طبیعی موج پس رونده مطابقت دارد.

### ۳- بحث بر روی نتایج

در نمایش نتایج نشان داده شده در شکل ها، خطوط توپر نماینده فرکانس طبیعی موج پس رونده و خطوط خط چین نماینده فرکانس طبیعی موج پیش رونده می باشند. همچنین سرعت دورانی دارای واحد اندازه گیری دور بر ثانیه می باشد. خصوصیات مکانیکی مواد استفاده شده برای پوسته در این تحقیق در جدول ۱ و خصوصیات مکانیکی و هندسی تقویت کننده ها در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۱ خصوصیات مکانیکی پوسته

مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )
۷/۶	۰/۳	۲/۹۲	۱۶۰۰
$E_{11}=125$	$\nu_{12}=0/4$	$G_{11}=5/9$	
$E_{22}=10$	$\nu_{13}=0/2$	$G_{13}=3$	۱۶۴۳
$E_{33}=10$	$\nu_{23}=0/2$	$G_{23}=5/9$	

جدول ۲ خصوصیات هندسی و مکانیکی تقویت کننده ها

نوع تقویت کننده	استرینگر	رینگ
ارتفاع (mm)	۸	۸
پهنا (mm)	۲	۲
مدول یانگ (GPa)	۷۰	۷۰
ضریب پواسون	۰/۳	۰/۳
دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )	۲۷/۷	۲۷/۷

به قصد بررسی صحت تحلیل صورت گرفته، نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در ادبیات موضوع مقایسه می شود. در مورد اول، به قصد مقایسه فرکانس طبیعی پوسته جدارنازک بدون تقویت کننده، تعداد تقویت کننده ها در تحقیق حاضر صفر در نظر گرفته شده و نتایج پارامتر فرکانسی  $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$  با نتایج به دست آمده از تئوری کلاسیک مرجع [۱۵] مقایسه گردیده و در جدول ۳ آورده شده است.

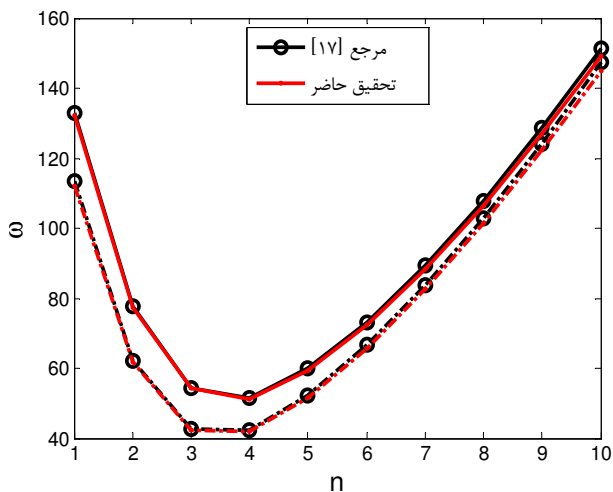
در دومین مقایسه، پارامتر فرکانسی  $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho(1+\nu)/E}$  و  $\bar{\omega} = (\omega h/\pi) \sqrt{\rho/G}$  برای پوسته استوانه ای ایزوتروپیک غیردوار جدارضخیم حاصل شده از تحقیق حاضر و مرجع [۱۶]، در جدول ۴ آورده شده است. نتایج برای نسبت های مختلف  $h/L$  و  $h/R$  ارائه شده است که نشان از کارآمدی روش لایه ای در مدل کردن پوسته جدارضخیم دارد.

جدول ۳ مقایسه  $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$  پوسته استوانه ای با شرایط مرزی تکیه گاه ساده ( $m=1, h/R=0.002, L/R=1$ )

n	دائل [۱۵]	فلوگه [۱۵]	ساندرز [۱۵]	تحقیق حاضر
۱	۱/۰۶۱۴۳	۱/۰۶۱۴۲	۱/۰۶۱۴۲	۱/۰۶۱۳۸
۲	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۳۹۷
۳	۰/۵۹۸۴۸	۰/۵۹۸۴۷	۰/۵۹۸۴۷	۰/۵۹۸۱۹
۴	۰/۴۵۰۲۸	۰/۴۵۰۲۶	۰/۴۵۰۲۶	۰/۴۴۹۹۹
۵	۰/۳۴۵۳۹	۰/۳۴۵۳۵	۰/۳۴۵۳۵	۰/۳۴۵۱۱
۶	۰/۲۷۰۹۱	۰/۲۷۰۸۴	۰/۲۷۰۸۴	۰/۲۷۰۶۲
۷	۰/۲۱۷۷۴	۰/۲۱۷۶۴	۰/۲۱۷۶۳	۰/۲۱۷۴۵
۱	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۰۰۷
۲	۰/۸۰۵۶۷	۰/۸۰۵۶۶	۰/۸۰۵۶۶	۰/۸۰۲۵۴
۳	۰/۵۹۹۸۲	۰/۵۹۹۸۱	۰/۵۹۹۸۱	۰/۵۹۹۶۴
۴	۰/۴۵۱۵۳	۰/۴۵۱۵۱	۰/۴۵۱۵۱	۰/۴۴۸۹۹
۵	۰/۳۴۶۶۲	۰/۳۴۶۵۸	۰/۳۴۶۵۸	۰/۳۴۴۴۱
۶	۰/۲۷۲۲۵	۰/۲۷۲۱۹	۰/۲۷۲۱۹	۰/۲۷۰۲۹
۷	۰/۲۱۹۳۶	۰/۲۱۹۲۶	۰/۲۱۹۲۵	۰/۲۱۷۶۰

در چهارمین مقایسه که در شکل ۳ نشان داده شده است، به بررسی فرکانس طبیعی حاصل از این روش و مرجع [۱۷] برای پوسته استوانه‌ای با تقویت کننده‌های متعام پرداخته شده است. پوسته مربوطه، کامپوزیتی، دارای چیدمان  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  و تقویت شده با ۱۰ رینگ و استرینگر می‌باشد. علت پایین تر بودن فرکانس طبیعی نتایج تحلیل حاضر و نتایج مرجع [۱۷] اختلاف بین تئوری‌های به کار برده شده می‌باشد.

در آخرین مقایسه که نتایج آن در جدول ۷ و شکل ۴ آورده شده است، مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک غیردوار با تقویت کننده‌های متعام حاصل از روش تحلیلی حاضر و تحلیل عددی با استفاده از نرم افزار اجزای محدود اباکوس صورت گرفته است. در این نرم افزار برای مدل کردن پوسته و تقویت کننده‌ها به ترتیب از المان‌های S8R و C3D20R استفاده شده است. علت بزرگ تر بودن فرکانس طبیعی حاصل از روش تحلیلی نسبت به نتایج تحلیل نرم افزار اجزای محدود در مدل کردن تقویت کننده‌ها نسبت به پوسته می‌باشد. در مدل تحلیلی، جابه‌جایی تقویت کننده‌ها بر اساس جابه‌جایی سطح خارجی پوسته تعریف شده است، در حالی که در نرم افزار اجزای محدود این جابه‌جایی بر اساس جابه‌جایی سطح میانی پوسته می‌باشد. به همین خاطر سفتی پوسته در مدل تحلیلی بیشتر و فرکانس طبیعی حاصل نیز بزرگ تر خواهد بود.



شکل ۳ تغییرات فرکانس بر حسب شماره مود، مقایسه نتایج حاضر و مرجع [۱۷] ( $L=5m$ ,  $R=1m$ ,  $h=6mm$ ,  $[0,90,0]$ ,  $N_r=10$ ,  $[17]$  مرجع  $N_s=10$ ,  $m=1$ )

جدول ۴ مقایسه پارامتر فرکانسی  $\bar{\omega}$  برای پوسته ایزوتروپیک ( $m=1$ ,  $\nu=0.3$ )

$\bar{\omega} = (\omega h / \pi) \sqrt{\rho / G}$			$\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho(1+\nu) / E}$	
h/R=۰/۴	n=۲	h/L	L/R=۱	
لوی [۱۶] تحقیق حاضر			ن	h/R
۰/۰۶۲۱	۰/۰۶۲۱	۰/۰۱	۱	۱/۰۶۲۳
۰/۰۷۴۵	۰/۰۷۴۵	۰/۱	۲	۰/۸۸۲۵
۰/۱۲۵۱	۰/۱۲۴۹	۰/۲	۳	۰/۸۰۹۵
۰/۲۷۲۴	۰/۲۷۱۹	۰/۴	۴	۰/۸۹۸۹
۰/۴۴۲۰	۰/۴۴۱۵	۰/۶	۵	۱/۱۲۲۸
۰/۶۲۶۲	۰/۶۲۵۴	۰/۸	۱	۱/۱۸۹۶
۰/۸۱۷۸	۰/۸۱۷۰	۱/۰	۲	۱/۱۰۱۰
			۳	۱/۱۹۷۷
			۴	۱/۴۸۹۷
			۵	۱/۹۲۱۲

در مورد سوم، به قصد بررسی صحت مدل سازی تقویت کننده‌ها، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از تحلیل حاضر و نتایج مراجع [۱] و [۳] برای پوسته تقویت شده با استرینگر صورت گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته و استرینگر در جدول ۵ و مقایسه فرکانسی در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۵ خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته تقویت شده برای مقایسه نتایج جدول ۶

شعاع پوسته (m)	ضخامت پوسته (mm)	طول پوسته (m)	ارتفاع استرینگر (mm)	پهنای استرینگر (mm)	مدول مدول ضریب پواسون (GPa)	شعاع پوسته (m)
۰/۲۴۲	۰/۶۵	۰/۶۰۹	۷/۰۲	۲/۵۵۴	۶۸/۹	۰/۳

جدول ۶ مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای با ۶۰ استرینگر خارجی

شماره مود محیطی	مصطفی و علی [۱]	ژاهو و همکارانش [۳]	تحقیق حاضر
۱	۱۱۴۱	۱۱۴۷	۱۱۴۳
۲	۶۷۴	۶۷۶	۶۶۹
۳	۴۲۷	۴۲۹	۴۲۱
۴	۲۹۶	۲۹۹	۲۸۱
۵	۲۲۵	۲۳۱	۲۰۹
۶	۱۸۸	۱۹۸	۱۸۲



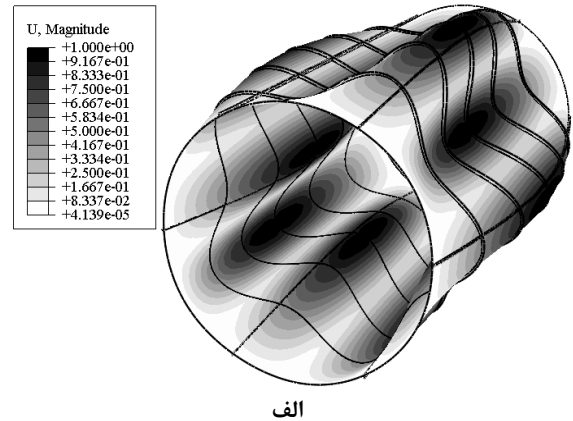
شکل ۵ تاثیر نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده، در حالی که مساحت سطح مقطع تقویت کننده ثابت است، را بر روی فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده غیردوار نشان می دهد. نتایج در مدهای مختلف محیطی، در حالی که مود طولی ۱ است، به دست آمده اند. با توجه به شکل، مشخص می شود که فرکانس طبیعی با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده در تمام مدهای محیطی به جز مود اول افزایش می یابد. کاهش نامحسوس فرکانس در مود اول در نتیجه برتری اثر اینرسی تقویت کننده ها بر اثر سفتی آن ها می باشد.

در شکل ۶، تاثیر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده و پوسته بدون تقویت کننده در مدهای محیطی مختلف نشان داده شده است. سرعت دورانی در تمام مدها باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود که این اثر در مدهای محیطی بالاتر از مود پایه محسوس تر است. اما اختلاف بین فرکانس طبیعی دو موج پس رونده و پیش رونده ناشی از سرعت دورانی در مدهای ابتدایی بارزتر می باشد. همچنین، اثر افزایشی فرکانس طبیعی ناشی از سرعت دورانی در پوسته تقویت شده کمتر می باشد که علت آن سفتی بیشتر این پوسته در مقابل پوسته بدون تقویت کننده می باشد. شایان ذکر است استفاده از تقویت کننده و همچنین افزایش سرعت دورانی باعث تعویض مود پایه و پایین تر آمدن آن می شود.

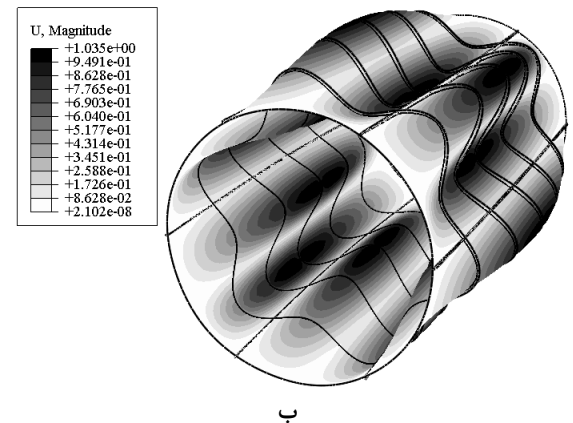
پدیده سرعت بحرانی را می توان در شکل ۷ مشاهده کرد. سرعت بحرانی به سرعتی گفته می شود که در آن سرعت، فرکانس طبیعی موج پیش رونده پوسته دوار به صفر می رسد. این سرعت با نقطه برخورد منحنی فرکانسی موج پیش رونده با محور افقی مطابقت دارد. در این سرعت کوچک ترین نامیزانی موجود در پوسته باعث بروز پدیده رزونانس و جابه جایی های شدید در پوسته می گردد. در شکل ۷ اثر رینگ و استرینگر را بر سرعت دورانی می توان مشاهده کرد. با توجه به شکل، پرواضح است که اثر رینگ در افزایش سرعت بحرانی نامحسوس و استرینگر باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود. باید توجه داشت که پدیده سرعت بحرانی در پوسته استوانه ای زمانی اتفاق می افتد که مود طولی و مود محیطی دارای مقدار ۱ باشند که در این مود نیز اثر تقویت کننده های طولی در بالابردن سفتی پوسته بیشتر می باشد. شایان ذکر است که همیشه افزایش سرعت بحرانی مطلوب طراح نمی باشد.

جدول ۷ فرکانس پوسته استوانه ای ایزوتروپیک تقویت شده، مقایسه نتایج حاضر با نتایج حاصل از نرم افزار اباکوس ( $L=2m$ ,  $R=0.5m$ ,  $h=2mm$ ,  $m=1$ ,  $\Omega=0$ ,  $N_s=6$ ,  $N_r=5$ )

شماره مود محیطی	تحقیق حاضر	تحلیل عددی اباکوس
۲	۱۸۸/۳۵	۱۸۸/۴۹
۳	۱۰۰/۳۱	۱۰۰/۱۷
۴	۷۶/۵۲۳	۷۶/۰۴۲
۵	۸۹/۶۳۳	۸۸/۹۱۲
۶	۱۲۱/۶۷۴	۱۲۰/۲۸
۷	۱۶۴/۰۳۸	۱۵۹/۲۹



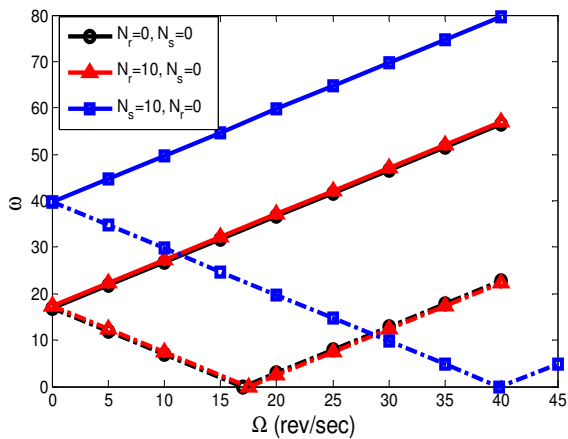
الف



ب

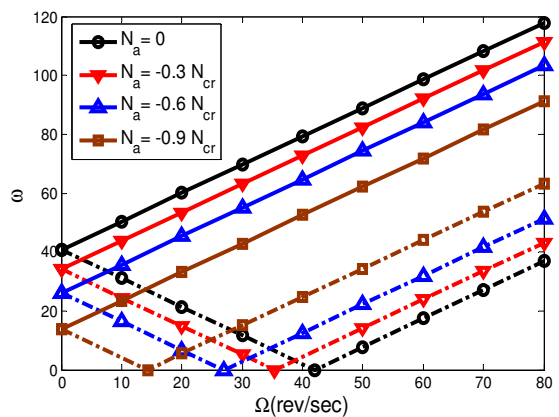
شکل ۴ نمایش شکل مدهای پوسته استوانه ای با تقویت کننده های متعامد حاصل از تحلیل عددی در نرم افزار اباکوس؛ (الف)  $(m,n)=(1,5)$ ، (ب)  $(m,n)=(1,6)$

تطابق بین نتایج در تمام موارد مقایسه های صورت گرفته، نشان از دقت و صحت روش ارائه شده برای پوسته استوانه ای تقویت شده دارد.



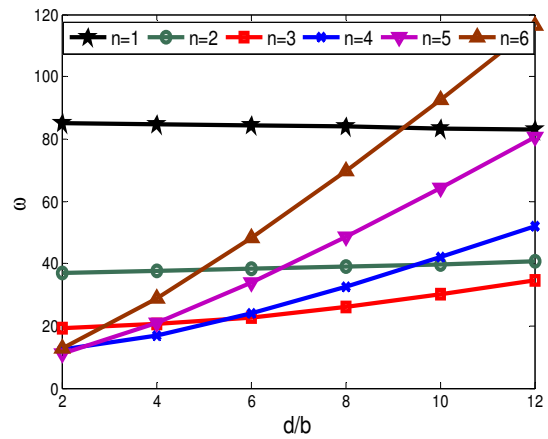
شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب سرعت دورانی، بررسی اثر نوع تقویت کننده بر سرعت بحرانی ( $R=1.5m, L=2\pi R, h=3mm, m=n=1, [0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , Carbon-Epoxy,  $N_a=-0.9 N_{cr}$ )

در شکل ۸ اثر بار محوری ثابت بر سرعت بحرانی پوسته تقویت شده نشان داده شده است. در این شکل منظور از  $N_{cr}$  بار کمانش کلی پوسته تقویت شده می باشد و بار اعمالی بر پوسته به منظور پیشگیری از کمانش باید کسری از این مقدار باشد. بار کمانش کلی پوسته را می توان از رابطه (۴۰) با حذف ترمهایی که شامل  $\omega$  و  $\Omega$  می باشد و حل مسئله مقدار ویژه به دست آورد. با توجه به این شکل، مشخص می شود که افزایش بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت بحرانی می شود که حساسیت این کاهش با افزایش بار فشاری بیشتر می شود.

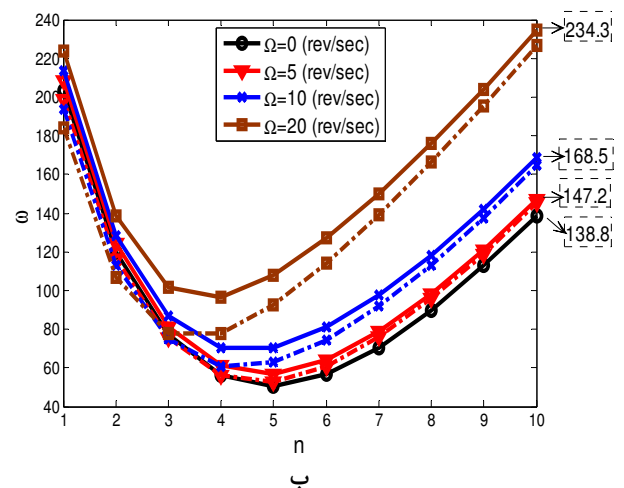
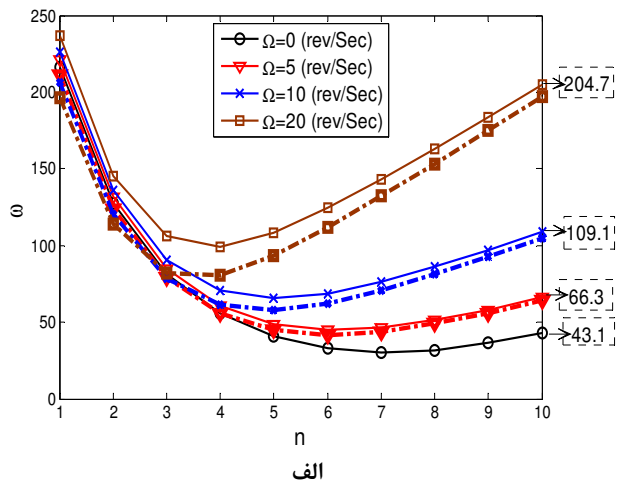


شکل ۸ حساسیت سرعت بحرانی به بار محوری فشاری ( $R=1.5m, L=2\pi R, h=3mm, m=n=1, [0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , Carbon-Epoxy,  $N_s=N_f=4$ )

در شکل ۹ اثر فشار داخلی و خارجی بر سرعت بحرانی پوسته استوانه ای تقویت شده نشان داده شده است. در این شکل



شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده ها در مدهای مختلف ( $L=5m, R=1m, h=1mm, m=1, N_s=N_f=10, \Omega=0, [0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ )



شکل ۶ تغییرات فرکانس بر حسب شماره مود در سرعت های دورانی مختلف؛ الف) ( $N_f=10, N_s=5$  ب) ( $N_f=0, N_s=0$ ) ( $L=3m, R=1m, h=3mm, [0^\circ/90^\circ/0^\circ], m=1$ , Carbon-Epoxy)

۳- اثر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی در پوسته بدون تقویت‌کننده در قیاس با پوسته تقویت‌شده بیشتر است. همچنین، افزایش سرعت دورانی و تعداد تقویت‌کننده‌ها باعث کاهش شماره مود پایه می‌گردد.

۴- استفاده از استرینگر باعث افزایش سرعت بحرانی می‌گردد، در حالی که استفاده از رینگ تاثیر محسوسی بر سرعت بحرانی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده ندارد.

۵- افزایش فشار خارجی و بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت بحرانی می‌گردد و حساسیت این سرعت به بار و فشار با مقدار بزرگ‌تر، بیشتر می‌باشد.

### ۵- پیوسته‌ها

#### ۵-۱- پیوست الف

درایه‌های ماتریس سفتی رابطه (۲۶) به صورت زیر می‌باشد.

$$K_{11}^1 = \left[ C_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 + C_{55} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right)^2 + \frac{C_{66} n^2 \alpha_j^2}{R_j^2} \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱})$$

$$K_{12}^1 = \left[ -\frac{(C_{66} + C_{12})}{R_j} n \frac{m\pi}{L} \alpha_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲})$$

$$K_{13}^1 = \left[ -(C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{m\pi}{L} \alpha_j - \frac{C_{12} m\pi}{R_j L} \alpha_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۳})$$

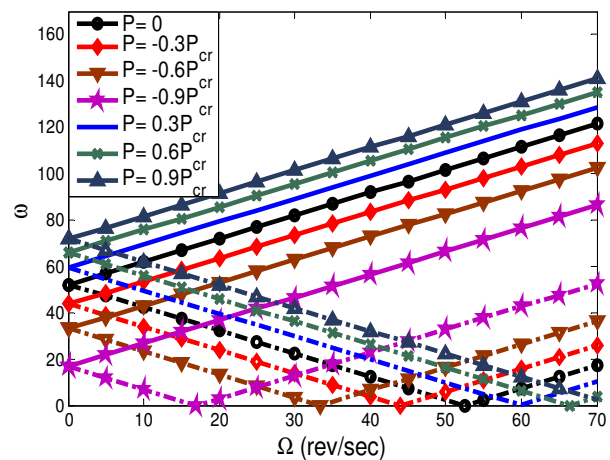
$$K_{14}^1 = \left[ C_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j + C_{55} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) + \frac{C_{66} n^2 \beta_j \alpha_j}{R_j^2} \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۴})$$

$$K_{15}^1 = \left[ -(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m\pi}{L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۵})$$

$$K_{16}^1 = \left[ -(C_{55} + C_{13}) \frac{m\pi}{L} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j - \frac{C_{12} m\pi}{R_j L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۶})$$

$$K_{21} = K_{12} \quad (\text{الف-۷})$$

منظور از  $P_{cr}$  فشار خارجی می‌باشد که باعث کماتش پوسته می‌شود و مانند بار کماتش محوری به‌دست می‌آید. با توجه به شکل، مشخص می‌شود که با افزایش فشار داخلی، سرعت بحرانی پوسته افزایش می‌یابد که اثر افزایشی آن در فشارهای داخلی بالا کاهش می‌یابد و با افزایش فشار خارجی بر پوسته، سرعت بحرانی پوسته کاهش می‌یابد و حساسیت سرعت بحرانی به فشار خارجی در فشار با مقدارهای بالا بیشتر است. همچنین، اثر افزایشی و کاهش فشار و بار محوری در تمام سرعت‌های دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته قابل پیش‌بینی است.



شکل ۹ حساسیت سرعت بحرانی به فشار داخلی و خارجی (L=10m, R=1m, h=3mm, m=n=1, [0°/90°/0°], Carbon-Epoxy, N<sub>s</sub>=N<sub>i</sub>=4)

### ۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و تئوری لایه‌ای، به تحلیل ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوار با تقویت‌کننده‌های متعامد پرداخته شد. همچنین، اثرات سرعت دورانی، شماره مود محیطی، نسبت ارتفاع به پهنای تقویت‌کننده‌ها، بار محوری و فشار بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردید. برخی از نتایج این تحقیق به صورت زیر ارائه می‌گردد.

- ۱- بررسی نتایج این اطمینان را حاصل می‌کند که تئوری لایه‌ای از کارآمدی مناسبی در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده برخوردار است.
- ۲- با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت‌کننده‌ها، فرکانس طبیعی در تمام موده‌های محیطی به جز مود اول افزایش می‌یابد.

$$K_{34}^1 = K_{43}^1 \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$K_{35}^1 = \left[ (C_{22} + C_{44}) \frac{n \alpha_j \beta_j}{R_j^2} + (C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$K_{36}^1 = \left[ (C_{22} + C_{44} n^2) \frac{\beta_j \alpha_j}{R_j^2} + C_{33} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + C_{55} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \beta_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۸})$$

$$K_{41} = K_{14} \quad (\text{الف-۱۹})$$

$$K_{42} = \left[ -\frac{(C_{66} + C_{12})}{R_j} n \frac{m \pi}{L} \alpha_j \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۰})$$

$$K_{43}^1 = \left[ -(C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{m \pi}{L} \beta_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m \pi}{L} \alpha_j \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۱})$$

$$K_{44}^1 = \left[ C_{11} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 + C_{55} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right)^2 + \frac{C_{66}}{R_j^2} n^2 \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$K_{45} = \left[ -(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$K_{46}^1 = \left[ -(-C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \frac{m \pi}{L} \beta_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۴})$$

$$K_{51}^1 = K_{15}^1 \quad (\text{الف-۲۵})$$

$$K_{52}^1 = K_{25}^1 \quad (\text{الف-۲۶})$$

$$K_{53}^1 = K_{35}^1 \quad (\text{الف-۲۷})$$

$$K_{54}^1 = K_{45}^1 \quad (\text{الف-۲۸})$$

$$K_{22}^1 = \left[ (C_{22} n^2 + C_{44}) \frac{\alpha_j^2}{R_j^2} + C_{44} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right)^2 + C_{66} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial Z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۸})$$

$$K_{23}^1 = \left[ (C_{22} + C_{44}) \frac{n}{R_j^2} \alpha_j^2 + (-C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۹})$$

$$K_{24}^1 = \left[ -(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$K_{25}^1 = \left[ (C_{22} n^2 + C_{44}) \frac{\beta_j \alpha_j}{R_j^2} + C_{44} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Z} \right) + C_{66} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial Z} \beta_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$K_{26}^1 = \left[ (C_{22} + C_{44}) \frac{n}{R_j^2} \beta_j \alpha_j + (C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$K_{31}^1 = K_{13}^1 \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$K_{32}^1 = K_{23}^1 \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$K_{33}^1 = \left[ (C_{22} + C_{44} n^2) \frac{\alpha_j^2}{R_j^2} + C_{33} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + C_{55} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\begin{aligned}
 K_{62}^1 &= K_{26}^1 && \text{(الف-۳۲)} \\
 K_{63}^1 &= K_{36}^1 && \text{(الف-۳۳)} \\
 K_{64}^1 &= K_{46}^1 && \text{(الف-۳۴)} \\
 K_{65}^1 &= K_{56}^1 && \text{(الف-۳۵)} \\
 K_{66}^1 &= \left[ (C_{22} + C_{44}n^2) \frac{\beta_j^2}{R_j^2} + C_{33} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \right)^2 \right. \\
 &\quad + C_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \beta_j \\
 &\quad \left. + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} && \text{(الف-۳۶)} \\
 K_{55}^1 &= \left[ (C_{22}n^2 + C_{44}) \frac{\beta_j^2}{R_j^2} + C_{44} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 &\quad + C_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \\
 &\quad \left. - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} && \text{(الف-۲۹)} \\
 K_{56}^1 &= \left[ (C_{22} + C_{44}) \frac{n\beta_j^2}{R_j^2} \right. \\
 &\quad \left. + (-C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} && \text{(الف-۳۰)} \\
 K_{61}^1 &= K_{16}^1 && \text{(الف-۳۱)}
 \end{aligned}$$

۵-۲- پیوست ب

$$[N] = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \cos \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \end{bmatrix} \quad \text{(ب-۱)}$$

$$U_h^j = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} + L} \int_0^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \frac{n^2 N_{\theta}^2 A^2}{R_j^2} & 0 & 0 & \frac{n^2 N_{\theta}^2 BA}{R_j^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} F^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 F^2 & \frac{2nN_{\theta} F^2}{R_j^2} & 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} \\ 0 & \frac{2nN_{\theta} F^2}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} F^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF \\ \frac{n^2 N_{\theta}^2 BA}{R_j^2} & 0 & 0 & \frac{n^2 N_{\theta}^2 B^2}{R_j^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} H^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 H^2 & \frac{2nN_{\theta} H^2}{R_j^2} \\ 0 & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & 0 & \frac{2nN_{\theta} H^2}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} H^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 H^2 \end{bmatrix} dx dz \quad \text{(ب-۲)}$$

$$U_{N_a}^j = -N_a \pi \lambda^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 & AB & 0 & 0 \\ 0 & F^2 & 0 & 0 & FH & 0 \\ 0 & 0 & F^2 & 0 & 0 & FH \\ AB & 0 & 0 & B^2 & 0 & 0 \\ 0 & FH & 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & FH & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix}}_{K_3^j} dx dz \quad (3-ب)$$

$$U_p^j = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^2 A^2 & 0 & 0 & Pn^2 BA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^2 BA & 0 & 0 & Pn^2 B^2 \end{bmatrix}}_{K_4^j} dx dz \quad (4-ب)$$

$$T_2^j = \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\alpha_j^2 & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\alpha_j^2 & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j^2 \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j^2 & 0 \end{bmatrix}}_{G_{sh}^j} dz \quad (5-ب)$$

$$T_3^j = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 H^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 H^2 \end{bmatrix}}_{K_5^j} dx dz \quad (6-ب)$$

### ۶- مراجع

که در روابط فوق داریم:

- [1] Mustafa B. A. J., Ali R., "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Computer and Structures*, Vol. 32, 1989, pp. 355-363.
- [2] Ng T. Y., Lam K. Y., "Vibration and Critical Speed of a Rotating Cylindrical Shell Subjected to

$$A = \alpha_j \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad B = \beta_j \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$F = \alpha_j \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad H = \beta_j \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7-ب)$$

- [11] Shell using State Space Differential Quadrature Method”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, 2009, pp. 738-747.
- [۱۲] کنی عبدالحمید، علی‌بیگلو اکبر، "بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چندلایه با لایه پیزوالکتریک"، هشتمین همایش انجمن هوافضای ایران، اصفهان، ۱۳۸۸.
- [13] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2<sup>nd</sup> Ed., Boca Raton, Florida, CRC press, 2004.
- [14] Setoodeh A. R., Tahani M., Selahi E. "Hybrid Layerwise-Differential Quadrature Transient Dynamic Analysis of Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Pressure”, *Compos. Struct.*, Vol. 93, 2011, pp. 2663-2670.
- [15] Ng T. Y., Hua L., Lam K. Y., "Generalized Differential Quadrature for Free Vibration of Rotating Composite Laminated Conical Shell with Various Boundary Conditions”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 45, 2003, pp. 567-587.
- [16] Lam K. Y., Loy C. T., "Analysis of Rotating Laminated Cylindrical Shells by Different Thin Shell Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, 1995, pp. 23-35.
- [17] Loy C. T., Lam K. Y., "Vibration of Thick Cylindrical Shells on the Basis of Three-Dimensional Theory of Elasticity”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 4, 1999, pp. 719-737.
- [18] Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R., "Free Vibrations of Rotating Composite Conical Shells with Stringer and Ring Stiffeners”, *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 80, No. 3, 2010, pp. 201-215.
- Axial Loading”, *Applied Acoustics*, Vol. 56, 1999, pp. 273-282.
- [3] Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y., "Vibration of Rotating Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners”, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, 2002, pp. 529-545.
- [4] Jafari A. A., Bagheri M., "Free Vibration of Rotating Ring Stiffened Cylindrical Shells with Non-Uniform Stiffener Distribution”, *J Sound Vib*, Vol. 296, 2006, pp. 353-376.
- [۵] خرمی کمیل، حسینی‌هاشمی شاهرخ، "تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته‌شده از مواد هدفمند (FGM) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM)", *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۱، شماره ۲، ۱۳۹۰، صص ۹۳-۱۰۶.
- [6] Nelson R. B., Dong S. B., Kakra, R. D., "Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Circular Cylinders”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, pp. 429-444.
- [7] Hutchinson J. R., El-Azhari S. A., "Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 641-646.
- [8] So J. Y., Leissa A. W., "Free vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis”, *Journal of vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 89-95.
- [9] Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., "A Three- Dimensional Layerwise-Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, 2008, pp. 450-458.
- [10] Alibeigloo A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical