



## کنترل مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری برای ژيروسکوپ سه محوره میکروالکترومکانیکی

سید باقر فاضلی اصل<sup>1</sup>، سید سجاد موسی پور<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی کنترل، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

2- استادیار، مهندسی کنترل، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

\* اهواز، صندوق پستی 6135743337، s.moosapour@scu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 اسفند 1395

پذیرش: 31 فروردین 1396

ارائه در سایت: 24 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

مد لغزشی

ترمینال سریع

بازگشت به عقب

مرتبه کسری

ژيروسکوپ سه محوره

### چکیده

در این مقاله، یک کنترل کننده مد لغزشی ترمینال نوع سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری برای کنترل یک ژيروسکوپ سه محوره میکروالکترومکانیکی دارای نامعینی پارامتری و اغتشاشات داخلی و خارجی، پیشنهاد شده است. برای جبران نامعینی‌ها و همچنین اغتشاشات وارده به سیستم از ترکیب کنترل کننده‌های غیرخطی مقاوم مد لغزشی و بازگشت به عقب استفاده می‌شود. در روش پیشنهادی، سطح لغزش به صورت مرتبه کسری انتخاب می‌شود. برای افزایش سرعت همگرایی حالت‌های سیستم به نقاط تعادل و یا صفر شدن خطا، کنترل کننده مد لغزشی ترمینال سریع به کار گرفته می‌شود. پایداری مجانبی کلی سیستم حلقه بسته با استفاده از قضیه پایداري لیاپانوف اثبات می‌شود. همچنین علاوه بر کنترل کننده پیشنهادی فوق، یک کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری برای سیستم ژيروسکوپ طراحی و پیاده‌سازی شده است. به منظور ارزیابی کارایی کنترل کننده‌های طراحی شده، این کنترل کننده‌ها با کنترل کننده‌های مد لغزشی بازگشت به عقب و مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مقایسه شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کنترل کننده پیشنهادی دارای پاسخ گذرای سریعتر نسبت به دیگر کنترل کننده‌ها می‌باشد. از دیگر مزایای کنترل کننده پیشنهادی، سادگی طراحی و اجرا، افزایش پایداری سیستم و ردیابی قابل قبول نسبت به دیگر کنترل کننده می‌باشد. همچنین پدیده چترینگ در کنترل کننده‌های طراحی شده مرتبه کسری، برخلاف دو کنترل کننده دیگر کاهش چشمگیری پیدا کرده است.

## Fractional Order Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Control for Micro-Electro-Mechanical triaxial gyroscope

Sayed Bagher Fazeli Asl, Seyed Sajjad Moosapour\*

Department of Electrical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

\* P.O.B. 6135743337, Ahvaz, Iran, s.moosapour@scu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 March 2017  
Accepted 20 April 2017  
Available Online 14 May 2017

**Keywords:**  
sliding mode  
fast terminal  
backstepping  
fractional order  
triaxial gyroscope

### ABSTRACT

In this paper, a fractional order backstepping type of fast terminal sliding mode controller is proposed for controlling a micro-electro-mechanical triaxial gyroscope with parameter uncertainty and internal and external disturbances. To compensate uncertainties and also incoming disturbances to the system, a combination of sliding mode and backstepping robust nonlinear controllers is used. In the proposed approach, the sliding surface is selected in the form of fractional order. To increase the speed of convergence of the system states to equilibrium points or the error to zero, the fast terminal sliding mode controller is used. The asymptotic global stability of the closed loop system will be proven by Lyapunov stability theorem. Also, in addition to the above proposal controller, a fractional order backstepping sliding mode controller is designed and implemented for the gyroscope system. In order to evaluate performance of the designed controllers, these controllers are compared with backstepping sliding mode controller and the backstepping fast terminal sliding mode controller. The results show that the proposed controller has a faster transient response than the other controllers. Another advantage of the proposed controller is simplicity in design and implementation, increase in system stability and better tracking in comparison to other controllers. Also, unlike the other two controllers, the chattering phenomenon has been decreased significantly in the fractional order designed controllers.

### 1- مقدمه

مصرف انرژی کم و همچنین دقت بالای آن‌ها کاربرد فراوانی در سیستم‌های هدایت و ناوبری پیدا کرده‌اند. در ژيروسکوپ‌های کلاسیک و میکروالکترومکانیک برای اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای از حرکت جسم متمرکز<sup>1</sup> و نیروی کوریولیس استفاده می‌شود؛ اما ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی برخلاف

ژيروسکوپ وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری مقدار چرخش مطلق و یا سرعت زاویه‌ای یک جسم به کار می‌رود. ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی<sup>1</sup> ژيروسکوپ‌های ارتعاشی مقیاس کوچک هستند که به دلیل اندازه کوچک،

<sup>2</sup> Proof Mass

<sup>1</sup> Micro Electro Mechanical Systems(MEMS)

Please cite this article using:

S. B. Fazeli Asl, S. S. Moosapour, Fractional Order Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Control for Micro-Electro-Mechanical triaxial gyroscope, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 385-393, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

حالتها از مد لغزشی ترمینال استفاده کرده است. در [8] یک کنترل کننده مد لغزشی فازی مرتبه کسری برای کنترل یک سیستم غیرخطی استفاده شده است، که از کنترل کننده فازی جهت کاهش پدیده چترینگ و کنترل سیستم به صورت هوشمند استفاده شده است. نوجوانزاده و همکاران [9] از کنترل کننده مد لغزشی ترمینال سریع غیرتکین مرتبه کسری برای کنترل ربات استفاده کرده است.

کنترل کننده‌های بازگشت به عقب برای کنترل سیستم‌های غیرخطی ابزار بسیار قوی هستند که همانند کنترل مد لغزشی بر پایه طراحی لیاپانوف استوارند. انعطاف روش بازگشت به عقب به طراح اجازه می‌دهد که تعداد زیادی از مسائل طراحی را تحت شرایطی گسترده‌تر از آن چیزی که روش‌های دیگر با آن روبرو می‌باشند، حل نماید. ایده این روش گسترش تابع لیاپانوف از یک سیستم ساده به سیستم‌هایی شامل متغیرهای حالت اضافه و به طور همزمان طراحی کنترل فیدبک برای تضمین پایداری است. دلیل اصلی نام‌گذاری بازگشت به عقب بر روی این کنترل کننده به این خاطر است که این کنترل کننده از آخر به اول طراحی می‌شود؛ یعنی ابتدا کنترل کننده طراحی نمی‌شود بلکه ابتدا بقیه قسمت‌های دیگر را کنترل می‌کنیم و در پایان کنترل کننده را طراحی می‌کنیم [10]. مرجع [11] یک کنترل کننده بازگشت به عقب مقاوم تطبیقی برای کنترل یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی استفاده کرده است.

در سال‌های اخیر روش ترکیبی مد لغزشی و بازگشت به عقب در طراحی -ها استفاده شده است. این روش ترکیبی برای کنترل ژيروسکوپ دو محوره میکروالکترومکانیکی در [12] نیز به کار رفته است که از مزایای هر دو کنترل کننده استفاده کرده است.

ترکیب کنترل مد لغزشی ترمینال سریع و بازگشت به عقب با سطح لغزش مرتبه کسری برای کنترل ژيروسکوپ میکروالکترومکانیکی سه محوره در این مقاله بررسی می‌شود. در واقع در این مقاله علاوه بر مزایای دو کنترل کننده مد لغزشی و بازگشت به عقب با مرتبه کسری کردن سطح لغزش، درجه آزادی عملی بیشتری به طراح داده می‌شود که پارامترهای کنترل کننده را طوری انتخاب کند که به پاسخ‌های هموارتر و مناسب‌تر دست یابد.

سایر بخش‌ها به این شرح است که در بخش 2 به معرفی عملگر کسری و مفاهیم پایه مربوط به محاسبات کسری و تحلیل پایداری پرداخته می‌شود. در بخش 3 معادلات دینامیکی ژيروسکوپ ارائه می‌شود. در بخش 4 به طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری<sup>3</sup> (FOBSMC) و کنترل کننده مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری<sup>4</sup> (FOBFTSMC) پرداخته می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و مقایسه با روش‌های کنترل مد لغزشی بازگشت به عقب<sup>5</sup> (BSMC) و کنترل مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب<sup>5</sup> (BFTSMC) و همچنین تحلیل نتایج، در بخش 5 ارائه می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری در بخش 6 بیان خواهد گردید.

## 2- معرفی عملگر کسری

### 2-1- مفاهیم و تعاریف پایه

حساب دیفرانسیل مرتبه کسری را می‌توان تعمیم یافته حساب دیفرانسیل کلاسیک دانست که در آن مرتبه مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری لزوماً صحیح

ژيروسکوپ‌های کلاسیک که از موتورهای متحرک و ساختار یاتاقانی استفاده می‌کنند به دلیل داشتن ابعاد خیلی کوچک از یک جسم الاستیک مرتعش جهت اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای بهره می‌برند.

ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی به دلیل مزایایی که دارند در زمینه‌های مختلفی از جمله در سیستم‌های هوافضا، مخابرات و نظامی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اما عملکرد این حسگرها بر اثر تغییر پارامترها و اغتشاشات ورودی به سیستم تضعیف می‌شود. بنابراین این حسگرها چون در سیستم‌های حساس و مهم مورد استفاده واقع می‌شوند، نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق مدل دینامیکی هستند. همچنین طراحی یک سیستم کنترلی مناسب با هدف افزایش دقت این حسگرها در اندازه‌گیری و همچنین مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات اعمالی به سیستم بسیار حائز اهمیت می‌باشد. به همین دلیل در سال‌های اخیر کنترل کننده‌هایی در همین راستا، طراحی شده است.

یکی از کنترل کننده‌هایی که در سال‌های اخیر برای کنترل ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است، کنترل کننده مد لغزشی است. این کنترل کننده که بر پایه تئوری لیاپانوف استوار است، می‌تواند سیستم را در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات به طور مطلوبی کنترل کند. با اعمال سیگنال کنترلی به سیستم مورد نظر، حالت‌های سیستم در هر شرایط اولیه‌ای که قرار دارند به سمت سطح لغزش حرکت کرده و سپس روی سطح لغزش باقی می‌مانند تا به نقطه تعادل خود برسند. در مرجع [1]، از کنترل کننده مد لغزشی برای کنترل ژيروسکوپ دو محوره استفاده شده است. در [2]، از کنترل کننده مد لغزشی تطبیقی جهت تخمین کران بالای اغتشاش وارد شده به سیستم استفاده شده است.

تئوری مد لغزشی با این‌که ابزاری قدرتمند در کنترل سیستم‌های غیرخطی است، به دلیل استفاده از تابع ناپیوسته  $\text{sign}$  دارای نوسانات ناخواسته یا پدیده چترینگ در قانون کنترل سوئیچینگ است، که ساده‌ترین روش برای رفع این مشکل استفاده از تابع اشباع  $\text{sat}(s/\varepsilon)$  به جای تابع  $\text{sign}(s)$  می‌باشد. از دیگر روش‌های کاهش چترینگ استفاده از روش‌های هوشمند است. در مراجع [3] و [4] قویدل و کلات برای کاهش پدیده چترینگ در یک سیستم غیرخطی از یک سیستم فازی و تابع  $\tanh$  (تانژانت هذلولوی یا هیپربولیک) استفاده کرده‌اند.

در طراحی کنترل کننده مد لغزشی به منظور رساندن حالت‌های سیستم در زمان محدود به نقطه تعادل خود و همچنین تضمین غیرتکین<sup>1</sup> بودن سیگنال کنترلی از روش مد لغزشی ترمینال سریع استفاده می‌شود. در مرجع [5] از روش مد لغزشی ترمینال سریع جهت تسریع در همگرایی حالت‌ها به نقطه تعادل استفاده شده است.

در سال‌های اخیر کنترل کننده‌های مرتبه کسری به دلیل انعطاف‌پذیری بیشتر آن‌ها نسبت به کنترل کننده‌های مرتبه صحیح در بسیاری از زمینه‌ها به خصوص در زمینه مهندسی به کار گرفته شده‌اند. به طوری که کسری بودن دینامیک کنترل کننده باعث کنترل آسان سیستم‌های پیچیده می‌شود و این امکان را به طراح می‌دهد که به پاسخ‌های مورد نظر دست یابد. مرجع [6] از کنترل مد لغزشی مرتبه کسری برای کنترل یک سیستم غیرخطی استفاده کرده است، که جهت افزایش عملکرد و دقت کنترل کننده از سطح لغزش مرتبه کسری استفاده شده است. مرجع [7] ضمن استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری و بهره بردن از مزایای آن، جهت تسریع بیشتر در همگرایی

<sup>2</sup> Fractional Order Backstepping Sliding Mode Controller

<sup>3</sup> Fractional Order Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Controller

<sup>4</sup> Backstepping Sliding Mode Controller

<sup>5</sup> Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Controller

<sup>1</sup> Non Singular

نیستند.

بزرگتر از ناحیه دیگر است.

نمایش کلی عملگر مشتق‌گیر-انتگرال‌گیر مرتبه کسری به صورت رابطه

(1) است [13]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $\alpha$  مرتبه کسری و  $a$  ثابت مربوط به شرایط اولیه است.

عملگر  ${}_a D_t^\alpha$  نمادی از عملگر مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر مرتبه کسری است. این عملگر برای  $\alpha$  های مثبت نماینده عملگر مشتق‌گیر و برای  $\alpha$  های منفی نماینده عملگر انتگرال‌گیر است.

تعاریف مختلفی برای مشتق بیان می‌شود که بعضی از آن‌ها به شرح زیر است:

تعریف 1- مشتق ریمان-لیوویل<sup>1</sup> به عنوان ساده‌ترین تعریف، مطابق رابطه (2) است [14].

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau \quad (2)$$

که در آن  $m-1 < \alpha < m$  و اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از  $\alpha$  است. همچنین تابع  $\Gamma(\cdot)$ ، تابع معروف گاما است.

تعریف 2- مشتق گرانوالد-لتنیکوف<sup>2</sup> طبق رابطه (3) بیان می‌شود [15]:

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{N}{t} \right)^\alpha \sum_{j=0}^N \left( \frac{r(j-\alpha)}{r(-\alpha)r(j+1)} \right) \left( f \left( \frac{(N-j)t}{N} \right) \right) \right\} \quad (3)$$

در این مقاله از تعریف 1 برای عمل مشتق مرتبه کسری استفاده شده است.

تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل به صورت (4) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} L\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} &= \int_0^\infty {}^{RL}D_t^\alpha f(t) e^{-st} dt \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}^{RL}D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (4)$$

که اگر شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شود تبدیل لاپلاس آن به صورت (5) به دست می‌آید:

$$L\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (5)$$

## 2-2- تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری [15]

پایداری از مهم‌ترین مباحث در طراحی کنترل‌کننده‌ها می‌باشد. قضیه زیر برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری با پارامترهای متناسب مطرح شده است.

قضیه 1- سیستم مرتبه کسری خودگردان زیر را در نظر بگیرید:

$$D_x^\alpha x = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (6)$$

که در آن  $0 < \alpha \leq 1$ ،  $x \in R^n$ ،  $A \in R^{n \times n}$  است. این سیستم به‌طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر شرط زیر برای همه مقادیر ویژه ماتریس  $A$  برقرار باشد:

$$|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2 \quad (7)$$

اگر شرط (7) برقرار باشد تمام حالت‌های به فرم  $t^{-\alpha}$  به سمت صفر میل می‌کنند. همچنین اگر  $|\arg(\lambda)| \geq \alpha\pi/2$  سیستم پایدار است. مقادیر ویژه که به ازای آن‌ها  $|\arg(\lambda)| = \alpha\pi/2$  مرز پایداری و ناپایداری را تعیین می‌کنند.

"شکل 1" ناحیه پایداری سیستم‌های مرتبه کسری را به ازای بازه‌های مختلف  $\alpha$  نشان می‌دهد. مطابق "شکل 1" ناحیه پایداری به ازای  $0 < \alpha < 1$

## 3- معادلات دینامیکی ژيروسکوپ سه محوره میکروالکترومکانیکی

"شکل 2" دینامیک ژيروسکوپ میکروالکترومکانیکی دو محوره که محور  $z$  آن ثابت است را نشان می‌دهد. ساختمان ژيروسکوپ سه محوره نیز مانند دو محوره است با این تفاوت که در راستای محور  $z$  نیز می‌تواند حرکت می‌کند و شامل یک جرم معلق به همراه چند فنر و دمپر، یک سازوکار عملگر و حسگر الکترواستاتیکی برای ایجاد حرکت نوسانی و تعیین موقعیت و سرعت جرم متمرکز می‌باشد. با توجه به اینکه ژيروسکوپ‌های ارتعاشی براساس شتاب کوریولیس کار می‌کنند، برای تولید شتاب کوریولیس، ایجاد یک حرکت نسبی داخلی ( $V_{rel}$ ) برای جرم متمرکز لازم است. این حرکت نسبی با اندرکنش با چرخش بیرونی  $\Omega$ ، شتاب کوریولیس ( $2\Omega \times V_{rel}$ ) را به وجود می‌آورد [17].

فرض می‌شود قابی که جرم متمرکز بر آن واقع است با سرعت خطی ثابت حرکت و با سرعت زاویه‌ای ثابت نیز در حال چرخش باشد. نیروهای گریز از مرکز  $m\Omega^2 x$ ،  $m\Omega^2 y$ ،  $m\Omega^2 z$ ، به دلیل جابجایی آهسته، ناچیز فرض شده است و نیروی کوریولیس عمود بر محورهای تحریک و محور چرخش ایجاد می‌شود.

معادلات دینامیکی ژيروسکوپ سه محوره MEMS به صورت رابطه (8) است [19].

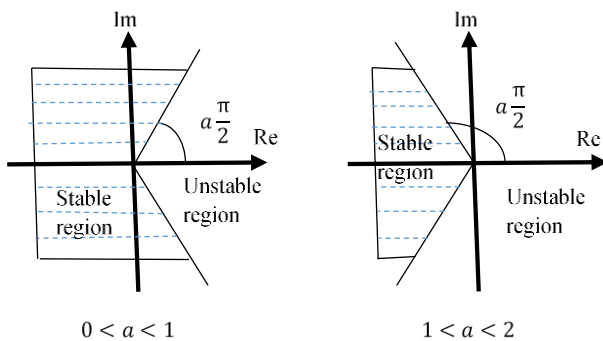


Fig. 1 Stability regions of the fractional-order system [16]

شکل 1 ناحیه‌های پایدار سیستم مرتبه کسری [16]

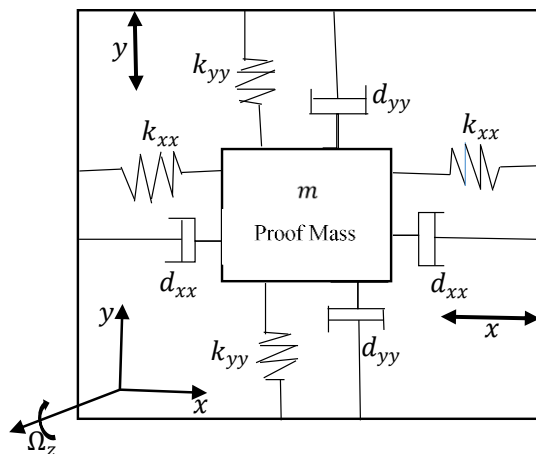


Fig. 2 Simplified model of a z-axis MEMS gyroscope [18]

شکل 2 مدل ساده شده یک ژيروسکوپ MEMS محور  $z$  [18]

<sup>1</sup> Reimann-Liouville

<sup>2</sup> Grunwald-Letnikov

مانند مد لغزشی باعث افزایش عملکرد مقاوم کنترل کننده و کاهش چترینگ می‌شود. در این روش طراحی چون از ترکیب کنترل کننده بازگشت به عقب استفاده شده است، برخلاف دیگر روش‌های کنترلی برای رسیدن به خروجی مطلوب باید گام به گام حرکت کرد. در هر گام، نخست یک ورودی کنترل مجازی تولید می‌شود که پایداری حالت‌های سیستم را با استفاده از قضیه لیاپانوف تضمین می‌کند. در این مقاله برخلاف روش‌های مرسوم برای تولید ورودی کنترل مجازی از روش کنترل مد لغزشی استفاده شده است. در گام نهایی با استفاده از روش مد لغزشی یک سطح لغزش باید طوری انتخاب شود که با اعمال سیگنال کنترلی واقعی به سیستم ژيروسکوپ، تمام حالت‌های سیستم را به سمت سطح لغزش سوق دهد و سپس روی سطح لغزش حفظ کند تا به مقدار مطلوب خود برسند. بنابراین مراحل طراحی به صورت زیر است:

گام اول: با فرض  $X_d$  به عنوان مسیر مطلوب، خطای ردیابی به صورت (15) تعریف می‌شود:

$$e = X_1 - X_d \quad (15)$$

مشتق زمانی خطای ردیابی به صورت (16) به دست می‌آید.

$$\dot{e} = \dot{X}_1 - \dot{X}_d = X_2 - \dot{X}_d \quad (16)$$

جهت تضمین پایداری از قضیه لیاپانوف استفاده می‌شود بدین صورت که تابع انتخابی باید مثبت معین و مشتق آن منفی معین باشد. بنابراین تابع لیاپانوف مناسب و مثبت معین به صورت (17) انتخاب می‌گردد.

$$V_1 = \frac{1}{2} e^2 \quad (17)$$

مشتق زمانی  $V_1$  به صورت (18) است:

$$\dot{V}_1 = e\dot{e} = e(X_2 - \dot{X}_d) \quad (18)$$

برای این که مشتق  $V_1$  منفی معین باشد ورودی مجازی  $X_2$  به صورت (19) انتخاب می‌شود [20]:

$$X_2 = s - ce + \dot{X}_d \quad (19)$$

در رابطه (19) یک عدد ثابت مثبت و مخالف صفر و  $s$  سطح لغزش است. با جایگذاری  $X_2$  در معادله (18) رابطه (20) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_1 = -ce^2 + se \quad (20)$$

اگر  $s$  به سمت صفر میل داده شود، خواهیم داشت:

$$\dot{V}_1 = -ce^2 \leq 0 \quad (21)$$

در نتیجه پایداری حالت‌ها با استفاده از قضیه لیاپانوف اثبات می‌شود. برای اثبات پایداری سطح لغزش به سراغ گام بعدی می‌رویم.

گام دوم: انتخاب سطح لغزش مناسب:

در طراحی اول سطح لغزش به صورت کسری طبق رابطه (22) در نظر گرفته شده است [21]:

$$s = D^\alpha e + \lambda e = D^{(\alpha-1)}\dot{e} + \lambda e \quad (22)$$

که در آن  $\lambda$  یک عدد ثابت مثبت مخالف صفر و  $\alpha \in (0,1)$  می‌باشد.

مشتق زمانی معادله (22) به صورت (23) است.

$$\frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}(D^{(\alpha-1)}\dot{e} + \lambda e) \\ \dot{s} = D^{(\alpha-1)}\ddot{e} + \lambda\dot{e} \quad (23)$$

در مد لغزشی، دینامیک سطح لغزش با استفاده از  $\dot{s} = 0$  به دست می‌آید [22]. بنابراین معادله (23) را می‌توان با تغییر متغیر  $z = \dot{e}$  به صورت رابطه

$$D_z^\alpha z = -\lambda z \quad (24)$$

سطح لغزش مرتبه کسری (22)، پایدار مجانبی است؛ زیرا:

$$|\arg(\text{eig}(-\lambda))| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}, \alpha \in (0,1) \quad (24)$$

جهت تضمین پایداری کل حالت‌های سیستم و همچنین باقی ماندن حالت‌ها

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + d_{xz}\dot{z} + k_{xx}x + k_{xy}y + k_{xz}z &= \\ u_x + 2m\Omega_z\dot{y} - 2m\Omega_y\dot{z}, \\ m\ddot{y} + d_{xy}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + d_{yz}\dot{z} + k_{xy}x + k_{yy}y + k_{yz}z &= \\ u_y - 2m\Omega_z\dot{x} + 2m\Omega_x\dot{z}, \\ m\ddot{z} + d_{xz}\dot{x} + d_{yz}\dot{y} + d_{zz}\dot{z} + k_{xz}x + k_{yz}y + k_{zz}z &= \\ u_z + 2m\Omega_y\dot{x} - 2m\Omega_x\dot{y}, \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن،  $m$  مقدار جرم متمرکز؛  $x, y, z$  مختصات جرم نسبت به دستگاه قاب؛  $k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz}$  ثابت‌های خطای اتصال؛  $d_{xx}, d_{xy}, d_{xz}, d_{yy}, d_{yz}, d_{zz}$  به ترتیب ضرایب فنر و ضرایب میرایی؛  $\Omega$  سرعت‌های زاویه‌ای و  $u$  ها ورودی‌های کنترلی هستند.

فرم برداری معادله (8) را می‌توان به صورت (9) در نظر گرفت.

$$m\ddot{q} + D\dot{q} + k_a q = u - 2\Omega m\dot{q} \quad (9)$$

که در آن،

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{xy} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{xz} & d_{yz} & d_{zz} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}, k_a = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

با استفاده از زمان بی بعد  $t^* = \omega_0 t$  و تقسیم هر دو طرف معادله (9) بر  $m$ ،  $q_0$  طول مرجع و  $\omega_0^2$  فرکانس تشدید طبیعی مبنا، و تعریف پارامترهای جدید به صورت (11):

$$D^* = \frac{D}{m\omega_0^2}, \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_0}, q^* = \frac{q}{q_0}, u^* = \frac{u}{m\omega_0^2 q_0} \\ \omega_{xx} = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m\omega_0^2}}, \omega_{yy} = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m\omega_0^2}}, \omega_{zz} = \sqrt{\frac{k_{zz}}{m\omega_0^2}} \\ \omega_{xy} = \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2}, \omega_{xz} = \frac{k_{xz}}{m\omega_0^2}, \omega_{yz} = \frac{k_{yz}}{m\omega_0^2} \\ k_b = \begin{bmatrix} \omega_{xx}^2 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{xy} & \omega_{yy}^2 & \omega_{yz} \\ \omega_{xz} & \omega_{yz} & \omega_{zz}^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

معادلات دینامیکی بدون بعد ژيروسکوپ را می‌توان به صورت (12) نوشت که به جهت سادگی علامت (\*) از معادلات حذف شده است.

$$\ddot{q} + D\dot{q} + k_b q = u - 2\Omega\dot{q} \quad (12)$$

با در نظر گرفتن اغتشاشات و نامعینی پارامتری به صورت فشرده ( $d_f$ ) معادله (12) به صورت (13) بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{q} + D\dot{q} + k_b q = u - 2\Omega\dot{q} + d_f \quad (13)$$

#### 4- طراحی کنترل کننده

در این بخش به طراحی دو کنترل کننده برای کنترل ژيروسکوپ MEMS پرداخته می‌شود. هدف از طراحی کنترل کننده این است که جرم متمرکز یک حرکت پیوسته و هماهنگی را دنبال کند.

در ابتدا متغیرهای حالت به صورت  $X_2 = \dot{q}$  و  $X_1 = q$  تعریف می‌شود. بنابراین مدل سیستم (13) را می‌توان به فرم فضای حالت (14) نوشت:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -(D + 2\Omega)X_2 - k_b X_1 + u + d_f \\ \dot{Y} = X_1 \end{cases} \quad (14)$$

#### 4-1 طراحی اول: کنترل کننده FOBSMC

کنترل کننده بازگشت به عقب یکی از کنترل کننده‌های غیرخطی مقاوم در برابر اغتشاش است. ترکیب این کنترل کننده با روش غیرخطی مقاوم دیگر

روی سطح لغزش تعریف شده، تابع لیاپانوف کل سیستم به صورت رابطه (25) تعریف می‌شود:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}s^2 \quad (25)$$

مشق تابع لیاپانوف  $V_2$  به صورت رابطه (26) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + s\dot{s} = -ce^2 + se + s(D^{(\alpha-1)}\ddot{e} + \lambda\dot{e}) \quad (26)$$

با جایگذاری معادلات (15)، (16) و مشتق آن و (19) در معادله (26) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -ce^2 + se + s(D^{(\alpha-1)}(\dot{X}_2 - \dot{X}_d) + \lambda(X_2 - X_d)) \\ &= -ce^2 + se + s[D^{(\alpha-1)}[-(D+2\Omega)X_2 - k_bX_1 + u + d_f - \dot{X}_d] + \lambda(X_2 - X_d)] \\ &= -ce^2 + se + s[D^{(\alpha-1)}[-(D+2\Omega)(s-ce + \dot{X}_d) - k_b(e + X_d) + u + d_f - \dot{X}_d] + \lambda(s-ce)] \end{aligned} \quad (27)$$

طبق معادله (27) قانون کنترل مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + u_{sw} \\ u &= +(D+2\Omega)(s-ce + \dot{X}_d) + k_b(e + X_d) + \dot{X}_d - \lambda D^{(1-\alpha)}(s-ce) - D^{(1-\alpha)}e - kD^{(1-\alpha)}\text{sign}(s) \end{aligned} \quad (28)$$

در رابطه (28)،  $u_{sw} = -kD^{(1-\alpha)}\text{sign}(s)$  قانون کنترل سوئیچینگ است که برای مقابله با اغتشاشات و نامعینی پارامتری به قانون کنترل معادل  $u_{eq}$  اضافه می‌شود. در این رابطه پارامتر  $k$  بهره سوئیچینگ است که انتخاب مناسب آن می‌تواند پدیده چترینگ را کاهش دهد.

فرض می‌شود که اغتشاش و نامعینی فشرده شده  $(d_f)$  شرط نابرابری زیر را ارضا کند:

$$\|D^{(\alpha-1)}d_f\| \leq \delta \quad (29)$$

که در آن  $\delta$  ثابت مثبت معلوم است.

با انتخاب مناسب  $k$  به صورت زیر

$$k = \delta + \eta, \quad \eta > 0$$

و با جایگذاری معادله (28) در (27) و با در نظر گرفتن شرط (29) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -ce^2 + s(D^{(\alpha-1)}d_f - k\text{sign}(s)) \\ &\leq -ce^2 + s\delta - k|s| \end{aligned} \quad (30)$$

طبق رابطه (30) اگر  $k$  بزرگتر از  $\delta$  انتخاب شود  $\dot{V}_2$  همواره منفی و پایداری مجانبی کلی سیستم تضمین می‌گردد.

تابع علامت یا  $\text{sign}$  باعث ایجاد نوسانات ناخواسته یا چترینگ در سیستم می‌شود به همین جهت برای کاهش مؤثر پدیده چترینگ به جای تابع علامت از تابع اشباع  $\text{sat}(s/\varepsilon)$  استفاده شده است.

#### 2-4- طراحی دوم: کنترل کننده FOBFTSMC

در این طراحی علاوه بر سطح لغزش مرتبه کسری و ترکیب کنترل کننده مد لغزشی با کنترل کننده بازگشت به عقب، جهت رسیدن حالت‌ها در زمان محدود به نقاط تعادل از ترمینال سریع استفاده شده است.

در این طراحی سطح لغزش به صورت (31) در نظر گرفته شده است:

$$s = D^{(\alpha-1)}\dot{e} + ae + \beta e^{\frac{p}{q}} \quad (31)$$

که در آن  $0 < p < q$ ،  $a, \beta > 0$  و  $\alpha \in (0,1)$

مشق زمانی سطح لغزش به صورت (32) است:

$$\dot{s} = D^{(\alpha-1)}\ddot{e} + a\dot{e} + \beta\frac{p}{q}(e^{\frac{p-1}{q}}\dot{e}) \quad (32)$$

با انتخاب تابع لیاپانوف مانند معادله (25) زیر بخش 1-4، معادله (32) در

معادله (26) جایگذاری می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + s\dot{s} = -ce^2 + se + s[D^{(\alpha-1)}\ddot{e} + a\dot{e} \\ &\quad + \beta\frac{p}{q}(e^{\frac{p-1}{q}}\dot{e})] \end{aligned} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله (16) و همچنین معادله (18) و مشتق آن در (33) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -ce^2 + se + s[D^{(\alpha-1)}[-(D+2\Omega)X_2 + u + d_f \\ &\quad - k_bX_1 - \dot{X}_d] + a(X_2 - \dot{X}_d) + \beta\frac{p}{q}(e^{\frac{p-1}{q}}(X_2 - \dot{X}_d))] \end{aligned} \quad (34)$$

جایگذاری معادلات (15) و (19) در (34):

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -ce^2 + se + s[D^{(\alpha-1)}[-(D+2\Omega)(s-ce + \dot{X}_d) \\ &\quad + u + d_f - k_b(e + X_d) - \dot{X}_d] + a(s-ce) \\ &\quad + \beta\frac{p}{q}(e^{\frac{p-1}{q}}(s-ce))] \end{aligned} \quad (35)$$

طبق معادله (35) قانون کنترل معادل مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\begin{aligned} u_{eq} &= +(D+2\Omega)(s-ce + \dot{X}_d) + k_b(e + X_d) + \dot{X}_d \\ &\quad - aD^{(1-\alpha)}(s-ce) - \beta\frac{p}{q}D^{(1-\alpha)}(e^{\frac{p-1}{q}}(s-ce)) \\ &\quad - D^{(1-\alpha)}e \end{aligned} \quad (36)$$

جهت مقابله با اغتشاشات وارده به سیستم قانون کنترل سوئیچینگ  $u_{sw} = -kD^{(1-\alpha)}\text{sign}(s)$  به قانون کنترل معادل اضافه می‌شود. در این رابطه  $k$  بهره سوئیچینگ است.

با جایگذاری معادله  $u = u_{eq} + u_{sw}$  در (35) و با در نظر گرفتن شرط (29) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -ce^2 + s(D^{(\alpha-1)}d_f - k\text{sign}(s)) \\ &\leq -ce^2 + s\delta - k|s| \end{aligned} \quad (37)$$

طبق رابطه (37) اگر  $k$  بزرگتر از  $\delta$  انتخاب شود  $\dot{V}_2$  همواره منفی و پایداری مجانبی کلی سیستم تضمین می‌گردد. در این طراحی نیز از تابع اشباع بجای تابع علامت استفاده شده است.

هر چقدر مقدار پارامتر  $k$  بزرگتر باشد، پایداری نسبی بیشتر می‌شود. ولی از طرفی اندازه سیگنال کنترل و نوسانات آن بیشتر می‌شود. بنابراین برای انتخاب آن باید مصالحه ای صورت گیرد. به همین جهت در این مقاله مقدار مناسب  $k$  برابر 200 در نظر گرفته شده است.

#### 5- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش ابتدا به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی طراحی دوم یا کنترل کننده پیشنهادی FOBFTSMC پرداخته می‌شود و سپس در ادامه به مقایسه نتایج شبیه‌سازی این کنترل کننده با کنترل کننده‌های FOBSMC و BFTSMC و BSMC در زیر بخش 1-4 و دو کنترل کننده BSMC و BFTSMC پرداخته می‌شود.

پارامترهای ژيروسکوپ سه محوره MEMS به کار رفته در این مقاله مطابق با جدول 1 است [19].

جدول 2 پارامترهای ثابت به کار رفته در طراحی کنترل کننده‌های بخش 4 را نشان می‌دهد.

در این طراحی‌ها سیگنال‌های ورودی مرجع به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} x_d &= \sin(6.71t), \quad y_d = 1.2 \sin(5.11t) \\ z_d &= 1.5 \sin(4.17t) \end{aligned} \quad (38)$$

همچنین شرایط اولیه سیستم ژيروسکوپ سه محوره به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$q_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T \quad (39)$$

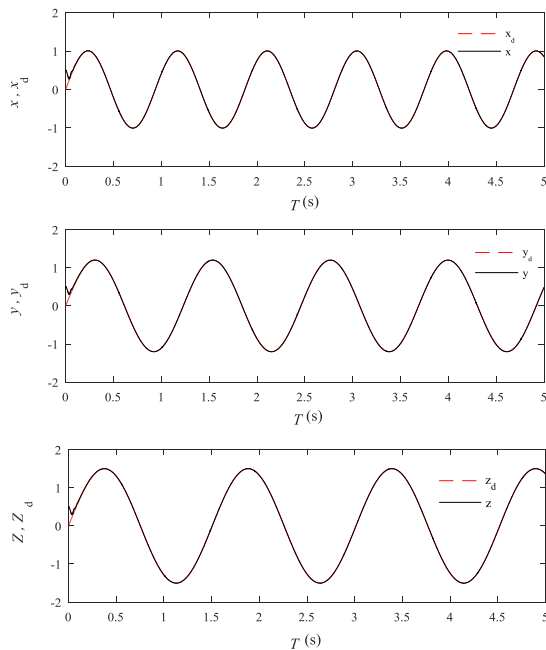


Fig. 3 Position tracking response in the direction of the x, y, z axes

شکل 3 پاسخ ردیابی موقعیت در جهت محورهای  $x, y, z$

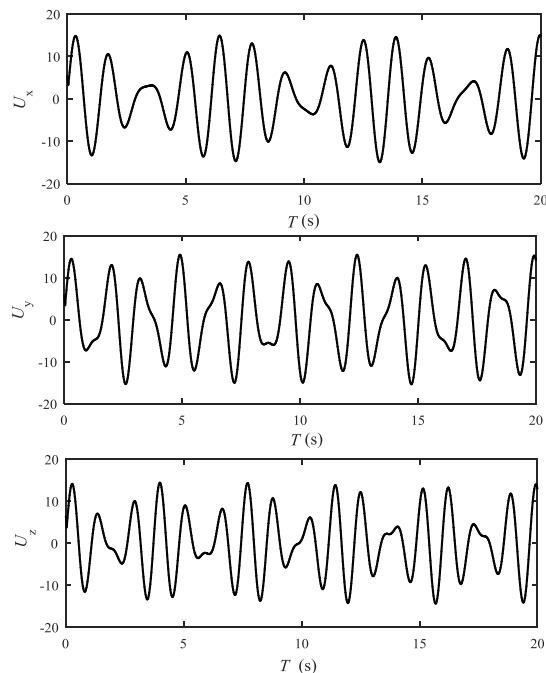


Fig. 4 Control inputs in the direction of the x, y and z axes of gyroscope

شکل 4 ورودی‌های کنترلی در جهت محورهای  $x, y, z$  ژيروسکوپ

نسبت به سه کنترل‌کننده دیگر سریع‌تر موقعیت مطلوب را دنبال کرده و در حدود 0.15 ثانیه این عمل ردیابی را انجام می‌دهد.

زمان صعود دو کنترل‌کننده FOBFTSMC و FOBSMC طبق "شکل 5" به دلیل استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری کمتر از دو کنترل‌کننده دیگر است. همچنین کنترل‌کننده‌های FOBFTSMC و BFTSMC چون از ترمینال نوع سریع استفاده می‌کنند خیلی سریع و در زمان محدودی خطای حالت ماندگار را به صفر می‌رسانند.

جدول 1 پارامترهای ژيروسکوپ استفاده شده در این مقاله

Table 1 Gyroscope parameters used in this article

واحد	مقدار	پارامترهای ژيروسکوپ
kg	$0.57 \times 10^{-8}$	$m$
$\mu\text{m}$	1	$q_0$
kHz	3	$\omega_0$
Ns/m	$0.429 \times 10^{-6}$	$d_{xx}$
Ns/m	$0.687 \times 10^{-6}$	$d_{yy}$
Ns/m	$0.895 \times 10^{-6}$	$d_{zz}$
Ns/m	$0.429 \times 10^{-6}$	$d_{xy}$
Ns/m	$0.687 \times 10^{-6}$	$d_{xz}$
Ns/m	$0.895 \times 10^{-6}$	$d_{yz}$
N/m	80.95	$k_{xx}$
N/m	71.62	$k_{yy}$
N/m	60.97	$k_{zz}$
N/m	5	$k_{xy}$
N/m	6	$k_{xz}$
N/m	7	$k_{yz}$
rad/s	3	$\Omega_x$
rad/s	2	$\Omega_y$
rad/s	5	$\Omega_z$

جدول 2 پارامترهای کنترل‌کننده‌های طراحی شده

Table 2 The controller parameters are designed

مقدار پارامتر	پارامترهای عددی کنترل‌کننده پیشنهادی
50	$c$
200	$k$
20	$a$
8	$\lambda$
0.06	$\beta$
2.4	$p$
5	$q$
0.8	$\alpha$

نتایج حاصل از شبیه‌سازی با در نظر گرفتن اغتشاش خارجی به صورت زیر

$$d_f = [50 \cos(6.71t) \quad 50 \cos(5.11t) \quad 50 \cos(4.17t)]^T \quad (40)$$

در سه جهت  $x, y, z$  در "شکل‌های 3 تا 8" آمده است. "شکل‌های 3 و 4" نتایج حاصل از شبیه‌سازی کنترل‌کننده مد لغزشی

ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری را نشان می‌دهند.

"شکل 3" پاسخ ردیابی موقعیت را در 5 ثانیه اول در هر سه جهت  $x, y, z$  نشان می‌دهد. همان‌طور که از "شکل 3" پیداست، کنترل‌کننده پیشنهادی عمل ردیابی موقعیت را با دقت بسیار خوبی و در کم‌تر از 0.3 ثانیه انجام می‌دهد. "شکل 4" ورودی‌های کنترلی اعمال شده به سیستم ژيروسکوپ را در مدت 20 ثانیه اول در هر سه جهت  $x, y, z$  نشان می‌دهد. با اعمال این ورودی‌های کنترلی طراحی شده در معادله (36)، سیستم ژيروسکوپ در حضور اغتشاشات خارجی عمل ردیابی را با دقت بسیار خوبی مطابق "شکل 3" انجام می‌دهد.

در ادامه و در "شکل‌های 5 تا 8" به مقایسه کنترل‌کننده مدل‌لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری با دیگر کنترل‌کننده‌ها پرداخته می‌شود. بدین ترتیب که "شکل 5" مقایسه ردیابی موقعیت هر چهار کنترل‌کننده را در 0.5 ثانیه اول نشان می‌دهد. "شکل 6 و 7" به مقایسه خطای ردیابی و در آخر "شکل 8" به مقایسه همگرایی سطح لغزش می‌پردازد. همان‌طور که از "شکل 5" پیدا است هر چهار کنترل‌کننده عمل ردیابی موقعیت را به خوبی در هر سه جهت و در کم‌تر از 0.5 ثانیه انجام می‌دهند. اما کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری

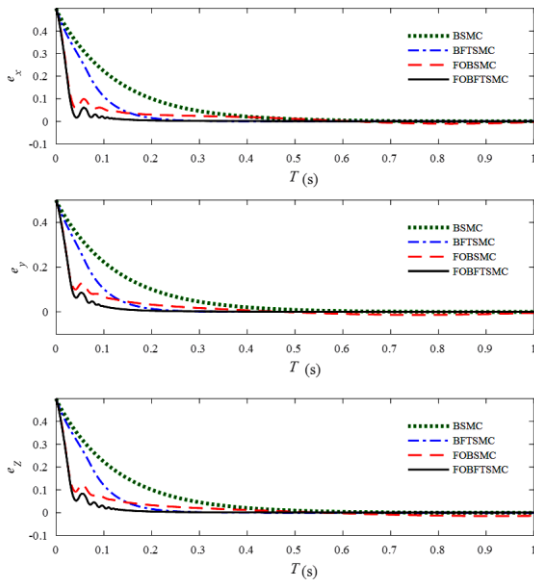


Fig. 6 Compare position tracking error of the four controllers in the direction of the x, y, z axes

شکل 6 مقایسه خطای ردیابی موقعیت چهار کنترل‌کننده در جهت محورهای x, y و z

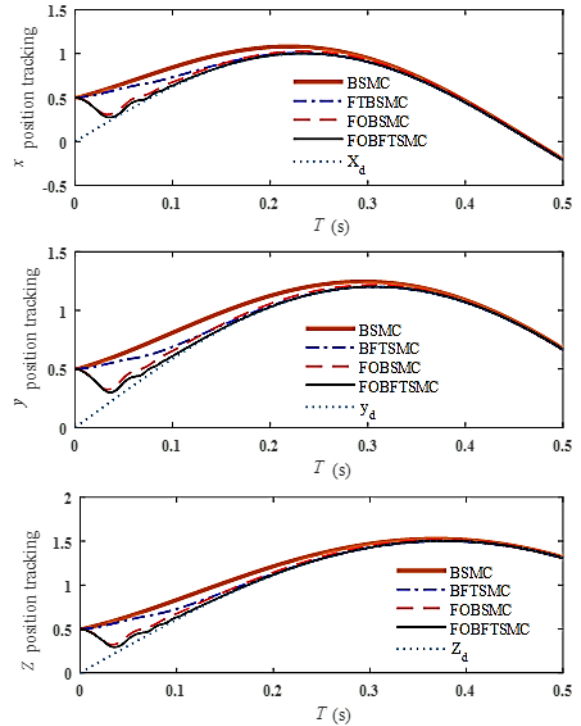


Fig. 5 Compare position tracking response of the four controllers in the direction of the x, y, z axes of gyroscope

شکل 5 مقایسه پاسخ ردیابی موقعیت چهار کنترل‌کننده در جهت محورهای x, y, z ژيروسکوپ

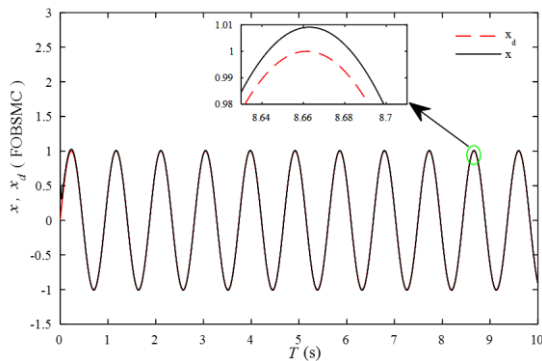


Fig. 7 Position tracking response and also position tracking error of the FOBSMC controller in the direction of the x axis

شکل 7 پاسخ ردیابی موقعیت و همچنین خطای ردیابی موقعیت کنترل‌کننده FOBSMC در جهت محور x

جدول 3 مقایسه زمان نشست چهار کنترل‌کننده در سه جهت z, y, x

Table 3 Compare settling time of four controllers in the three directions of x, y, z

محور مختصات	زمان نشست BSMC (s)	زمان نشست BFTSMC (s)	زمان نشست FOBSMC (s)	زمان نشست FOBFTSMC (s)
در جهت محور x	0.7	0.27	0.98	0.23
در جهت محور y	0.7	0.26	0.98	0.25
در جهت محور z	0.73	0.26	1	0.25

شده در بازه 0.2 تا 0.6 ثانیه "شکل 8" مشخص است، این دو کنترل‌کننده در حالت ماندگار در اطراف صفر دارای نوسان هستند و هرگز این نوسانات ناخواسته از بین نمی‌روند در حالی که مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری به دلیل استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری تنها در لحظات اولیه و تقریباً تا 0.2 ثانیه ابتدایی دارای نوسانات میرا شونده است که

"شکل 6" مربوط به مقایسه خطای ردیابی کنترل‌کننده پیشنهادی با سه کنترل‌کننده دیگر است. همان‌طور که از نمودارها مشخص است خطای ردیابی کنترل‌کننده پیشنهادی FOBFTSMC بعد از چند نوسان میرا شونده کوچک، سریع‌تر از سه کنترل‌کننده دیگر به سمت صفر میل کرده و خطای حالت ماندگار آن صفر می‌شود. همچنین کنترل‌کننده پیشنهادی عمل ردیابی موقعیت را در جهت محور x تقریباً بهتر از دو محور دیگر انجام داده است. کنترل‌کننده FOBSMC طبق "شکل 7" به دلیل اینکه فقط در نزدیکی‌های مقادیر ماکزیمم و مینیمم عمل ردیابی را خوب دنبال نمی‌کند دارای خطای حالت ماندگار در حدود چند درصد است.

جدول 3، زمان نشست هر چهار کنترل‌کننده را در هر سه جهت z, y, x نشان می‌دهد. طبق اطلاعات جدول 3 مشخص است که کنترل‌کننده پیشنهادی در کمترین زمان خطای ردیابی را به صفر میل می‌دهد چون زمان نشست آن خیلی کم است. بنابراین دارای بهترین عملکرد و کنترل‌کننده مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری به دلیل داشتن بیشترین زمان نشست و همچنین خطای حالت ماندگار غیرصفر ضعیف‌ترین عملکرد را در بین چهار کنترل‌کننده دارد.

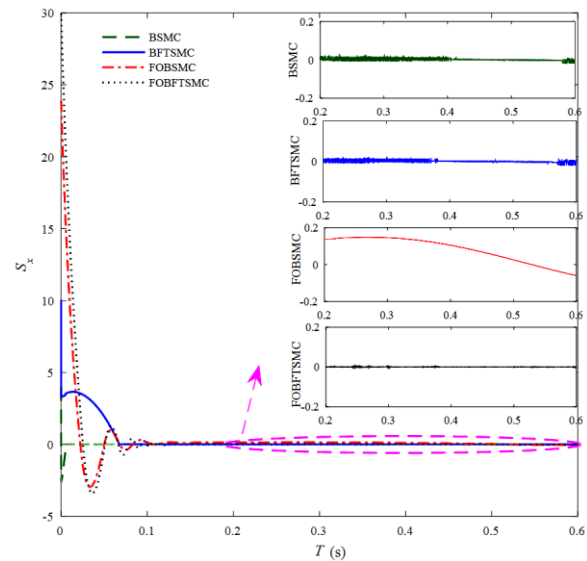
"شکل 8" مربوط به مقایسه همگرایی سطح لغزش کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری با سه کنترل‌کننده دیگر و همچنین نوسانات ناخواسته در جهت x می‌باشد. سطح لغزش کنترل‌کننده-های مد لغزشی بازگشت به عقب معمولی و مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب، سریع‌تر از سه کنترل‌کننده دیگر به صفر میل می‌کند. سطح لغزش این دو کنترل‌کننده دارای فقط یک فروجهش و فراجهش است و سپس خیلی سریع به سمت صفر میل می‌کنند. ولی ضعف این دو کنترل‌کننده (BSMC) و (BFTSMC)، همان‌طور که از شکل‌های بزرگ‌نمایی



این حالت زمان نشست کاهش چشمگیری دارد. بنابراین کنترل‌کننده FOBFTSMC پیشنهادی به دلیل بهره بردن از مزیت سطح لغزش مرتبه کسری و همچنین مزیت مد لغزشی ترمینال سریع، دارای عملکرد بسیار مطلوب‌تری نسبت به دیگر کنترل‌کننده‌ها می‌باشد.

## 7- مراجع

- [1] C. Batur, T. Sreeramreddy, Q. Khasawneh, Sliding mode control of a simulated MEMS gyroscope, *ISA Transactions*, Vol. 45, No. 1, pp. 99-108, 2006.
- [2] J. Fei, Adaptive sliding mode control with bound estimation for MEMS angular rate sensor, *Proceeding of The IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Harbin, China, August 5 - 8, pp. 1565-1569, 2007.
- [3] H. F. Ghavidel, A. A. Kalat, Observer-based robust composite adaptive fuzzy control by uncertainty estimation for a class of nonlinear systems, *Neurocomputing*, Vol. 230, No. 22, pp. 135-143, 2017.
- [4] H. F. Ghavidel, A. A. Kalat, Observer-based hybrid adaptive fuzzy control for affine and nonaffine uncertain nonlinear systems, *Neural Computing and Applications*, Vol. 28, No. 146, pp. 1-16, 2017.
- [5] W. Yan, J. Fei, Y. Yang, S. Hou, Adaptive global fast terminal sliding mode control of MEMS gyroscope, *Proceeding of The 32nd Chinese Control Conference*, Xi'an, China, July 26-28, pp. 3135-3140, 2013.
- [6] B. Zhang, Y. Pi, Y. Luo, Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor, *ISA transactions*, Vol. 51, No. 5, pp. 649-656, 2012.
- [7] S. Dadras, H. R. Momeni, Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 1, pp. 367-377, 2012.
- [8] M. Ö. Efe, Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Vol. 38, No. 6, pp. 1561-1570, 2008.
- [9] D. Nojavanzadeh, M. Badamchizadeh, Adaptive fractional-order non-singular fast terminal sliding mode control for robot manipulators, *IET Control Theory & Applications*, Vol. 10, No. 13, pp. 1565-1572, 2016.
- [10] M. Navabi, S. Soleymanpour, Standard and robust backstepping control of a spacecraft with inertial uncertainty revision, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 112-124, 2015. (in Persian)
- [11] L. Cao, Y. Wang, S. Zhang, S. Yan, Robust adaptive backstepping control for a class of uncertain nonlinear system, *28th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, Yinchuan, China, pp. 32-36, May, 2016.
- [12] J. Fei, W. Yan, Y. Yang, Adaptive nonsingular terminal sliding mode control of MEMS gyroscope based on backstepping design, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 29, No. 9, pp. 1099-1115, 2015.
- [13] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, a wiley-interscience publication, pp. 78-80, San Fransisco, USA, 1993.
- [14] Y. Tang, X. Zhang, D. Zhang, G. Zhao, X. Guan, Fractional order sliding mode controller design for antilock braking systems, *Neurocomputing*, Vol. 111, pp. 122-130, 2013.
- [15] A. Fayazi, H. Ahmadi Noubari, H. Fatehi Marj, Synchronization of chaotic fractional-order genesio-tesi-couillet systems via fractional-order adaptive controller, *Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp. 1-11, 2012. (in Persian)
- [16] I. Petras, *Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, pp. 55-63, Springer Science & Business Media, 2011.
- [17] A. Nikkhhah, S. Soheili, M. Zare, Development of a simple method for control of drive, mode and estimation of the input rotation rate in mems vibratory gyroscope, *Journal of Aerospace Mechanic*, Vol.



**Fig. 8** Compare Convergence of four controllers sliding surface  $s(t)$  and chattering phenomenon in direction  $x$ -axis

شکل 8 مقایسه همگرایی سطح لغزش  $s(t)$  و پدیده چترینگ چهار کنترل‌کننده در جهت محور  $x$

بعد از این زمان به صفر همگرا شده و پدیده چترینگ یا نوسانات ناخواسته در حالت ماندگار این کنترل‌کننده کاهش چشمگیری پیدا کرده است. کنترل‌کننده مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری (FOBSMC) به دلیل این‌که دارای خطای حالت ماندگار است سطح لغزش برابر صفر نمی‌شود. اما مانند FOBFTSMC به دلیل استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری، پدیده چترینگ آن نیز کاهش پیدا کرده است. سطح لغزش در جهت دو محور دیگر نیز همانند محور  $x$  است.

## 6- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک کنترل‌کننده مد لغزشی بازگشت به عقب مرتبه کسری (FOBSMC) و یک کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب مرتبه کسری (FOBFTSMC) برای کنترل یک ژيروسکوپ میکرو الکترومکانیکی سه محوره تحت اغتشاش خارجی و نامعینی پارامتری طراحی شده است. نتایج حاصل از این دو طراحی با دو کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال سریع بازگشت به عقب (BFTSMC) و مد لغزشی بازگشت به عقب (BSMC) مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی عملکرد بسیار خوب طراحی دوم یا FOBFTSMC پیشنهادی نسبت به سه کنترل‌کننده دیگر را به خوبی نشان داده است.

طبق شبیه‌سازی‌ها می‌توان این گونه نتیجه گرفت که استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری زمان صعود را کاهش می‌دهد ولی هیچ تأثیری در کاهش خطای حالت ماندگار ندارد. همچنین مزیت مهم‌تر سطح لغزش مرتبه کسری این است که در حالت ماندگار پدیده چترینگ یا نوسانات ناخواسته کاهش قابل ملاحظه‌ای کرده است.

همچنین شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که استفاده از کنترل‌کننده مد لغزشی از نوع ترمینال سریع باعث می‌شود که حالت‌ها سریع‌تر به نقطه تعادل خود برسند و خطای ردیابی موقعیت سریع‌تر از دو کنترل‌کننده‌ای که از مد لغزشی معمولی استفاده می‌کنند به صفر همگرا شود؛ به عبارت دیگر



- 20-23, pp. 40-45, 2013.
- [20] J. Liu, X. Wang, Advanced sliding mode control for mechanical systems: Design, *Analysis and MATLAB Simulation*, pp. 91-96, Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] S. Sutha, P. Lakshmi, S. Sankaranarayanan, Fractional-Order sliding mode controller design for a modified quadruple tank process via multi-level switching, *Computers & Electrical Engineering*, Vol. 45, pp. 10-21, 2015.
- [22] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, pp. 16-18, Springer Science & Business Media, 2013.
- 10, No. 3, pp. 15-23, 2014. (in Persian فارسی)
- [18] J. Fei, Y. Yang, D. Wu, Robust RBF neural network control with adaptive sliding mode compensator for MEMS gyroscope, *Proceeding of 12th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science (ICIS)*, pp. 449-454, Niigata, Japan, June, 2013.
- [19] J. Fei, M. Xin, W. Dai, Adaptive backstepping sliding mode control for MEMS gyroscope, *Proceeding of The 13th IEEE International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, Kimdaejung Convention Center, Gwangju, Korea, Oct.