



## تحلیل عدم قطعیت جریان الکترواسموتیک در یک میکروکانال

رضا نوری<sup>1</sup>، مهرداد رئیسی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 111554563، mraisee@ut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 27 فروردین 1396  
پذیرش: 25 تیر 1396  
ارائه در سایت: 20 مرداد 1396  
کلید واژگان:  
جریان الکترواسموتیک  
روش الحاقی  
تعیین عدم قطعیت  
روش مونت کارلو بهبودیافته  
آنالیز حساسیت

### چکیده

وجود عدم قطعیت در نتایج تجربی معمولاً به صورت نوار خطا به مقادیر تجربی در منحنی‌ها اضافه می‌گردد. از آنجا که بخش عمده‌ای از تفاوت میان نتایج تجربی و عددی، ناشی از وجود عدم قطعیت در پارامترهای ورودی حل عددی است، مقایسه نتایج تجربی و عددی با در نظر گرفتن اثر پارامترهای غیرقطعی معنی‌دارتر است. جریان الکترواسموتیک از جمله مواردی است که وجود پارامترهای غیرقطعی مؤثر، بررسی وجود عدم قطعیت را در نتایج شبیه‌سازی آن ضروری می‌نماید. در این مطالعه، تحلیل عدم قطعیت جریان الکترواسموتیک در یک میکروکانال تی‌شکل ارائه شده است. پیش از تحلیل عدم قطعیت، نتایج شبیه‌سازی عددی با در نظر گرفتن پارامترهای ورودی قطعی با داده‌های تجربی مقایسه شده و اعتبارسنجی شبیه‌سازی عددی صورت گرفته است. در مرحله‌ی اول تحلیل عدم قطعیت، نمونه‌برداری به روش ابرمکعب لاتین از پارامترهای غیرقطعی انجام شده است. در مرحله‌ی بعدی، معادلات جریان الکترواسموتیک برای هر نمونه به روش المان محدود حل شده است. دبی جرمی و میدان سرعت به عنوان توابع هدف انتخاب گردیده و به منظور محاسبه‌ی مشتق توابع هدف از روش الحاقی استفاده شده است. در مرحله پایانی، عدم قطعیت در توابع هدف به روش مونت کارلو بهبود یافته تعیین شده است. نتایج حاصل از روش الحاقی نشان می‌دهند که پارامترهای هندسی و لزجت سیال بیش‌ترین و چگالی سیال و دما کمترین تأثیر را بر روی توابع هدف می‌گذارند. همچنین نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو وجود عدم قطعیت به میزان 11.2% در نتایج دبی جرمی و عدم قطعیت 6.3% به صورت میانگین در میدان سرعت را نشان می‌دهند.

## Uncertainty quantification of electroosmotic flow in a microchannel

Reza Nouri, Mehrdad Raisee\*

Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

\* P.O.B. 111554563, Tehran, Iran, mraisee@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 16 April 2017  
Accepted 16 July 2017  
Available Online 11 August 2017

#### Keywords:

Electroosmotic flow  
Adjoint method  
Uncertainty quantification  
Enhanced Monte Carlo method  
Sensitivity analysis

### ABSTRACT

Since uncertainties in input parameters play an important factor influencing discrepancy between numerical and experimental results, considering uncertain parameters in CFD calculations is essential. Electroosmotic flow is one of the cases which uncertainty quantification on its numerical simulation is necessary because of the presence of uncertain parameters. In this study, uncertainty quantification of electroosmotic flow in a micro T-junction has been presented. The numerical method was first validated by comparing deterministic numerical results with the experimental data. For the Monte Carlo simulations, the Latin Hypercube Sampling (LHS) method was used for the sample generation. The governing equation of electroosmotic flow has been solved using the finite element method for every sample. The results of sensitivity analysis show geometry parameters and fluid viscosity as the most effective factors on the results; while temperature and density of fluid demonstrate the least effect on the objective functions. Results of the Monte Carlo method illustrate 11.2% uncertainty for the results of mass flow rate and 6.3% on average for the results of velocities.

### 1- مقدمه

امروزه با توجه به پیچیدگی مدل‌ها و شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، نیاز به سنجش اعتبار و دقت در نتایج این شبیه‌سازی‌ها نیز افزایش یافته است [1,2]. اگرچه می‌توان دقت در نتایج عددی را با به‌کارگیری روش‌های عددی دقیق‌تر و شبکه‌بندی ریزتر افزایش داد، اما همواره در پارامترهای ورودی کدهای محاسباتی، عدم قطعیت وجود دارد به‌طور مثال خواص سیال همچون لزجت و چگالی که لازم است اثرات آن در نتایج نهایی لحاظ گردد. این نیاز منجر به پیدایش شاخه‌ای جدید در مهندسی به نام آنالیز عدم

قطعیت<sup>1</sup> گردیده است [3].

روش‌های عددی متنوعی برای تعیین عدم قطعیت شبیه‌سازی‌های کامپیوتری مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیراً روش چندجمله‌ای آشوب<sup>2</sup> [4,5] با توجه به نرخ همگرایی سریع خود مورد استفاده قرار گرفته است. با این وجود ناکارآمدی این روش در مسائل با ابعاد بالا از نقاط ضعف آن به شمار می‌رود [6]. از روش‌های بر پایه‌ی نمونه‌برداری<sup>3</sup> همچون روش

<sup>1</sup> Uncertainty quantification (UQ)

<sup>2</sup> Polynomial chaos methods

<sup>3</sup> Sampling based techniques

Please cite this article using:

R. Nouri, M. Raisee, Uncertainty quantification of electroosmotic flow in a microchannel, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 291-300, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

پمپاژ سیال [19,20]، پدیده الکترواسموتیک است. در این پدیده، سیال به دلیل تحریک لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی مجاور دیوار توسط میدان الکتریکی خارجی، جریان پیدا می‌کند. با توجه به طبیعت چند فیزیکی و وجود عدم قطعیت در پارامترهای هندسی و فیزیکی، انتظار می‌رود نتایج شبیه‌سازی این پدیده دارای عدم قطعیت باشد [21].

در این مقاله، عدم قطعیت در نتایج شبیه‌سازی عددی جریان الکترواسموتیک در یک کانال تی‌شکل مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه ابتدا معادلات حاکم بر جریان الکترواسموتیک در شرایط قطعی حل شده و اعتبارسنجی این نتایج با مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی انجام می‌شود. با توجه به آن‌که تمامی پارامترهای غیرقطعی در میزان دبی جرمی و میدان سرعت تأثیرگذار می‌باشند، این دو تابع به عنوان توابع هدف انتخاب شده‌اند. با در نظر گرفتن 9 پارامتر غیرقطعی، محاسبه‌ی عددی مشتقات جزئی با استفاده از روش الحاقی صورت گرفته و مقایسه نتایج حاصل با نتایج روش تفاضل محدود به منظور اعتبارسنجی روش الحاقی صورت می‌گیرد. نمونه‌برداری از پارامترهای غیرقطعی به روش ابرمکعب لاتین انجام می‌شود. در نهایت میزان میانگین و انحراف معیار در نتایج توابع هدف با استفاده از روش مونت کارلو بهبودیافته ارائه و مورد بحث قرار گرفته است.

## 2- معادلات حاکم

### 2-1- جریان الکترواسموتیک

عامل ایجاد جریان الکترواسموتیک در یک میکروکانال، تشکیل لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی<sup>9</sup> است. این لایه در نزدیکی دیواره تشکیل شده و ضخامتی در ابعاد نانومتر دارد (شکل 1).

تماس دیواره‌ی عایق میکروکانال و یک محلول آبی یونیزه می‌تواند در دیواره بار منفی یا مثبت با توجه به PH<sup>10</sup> سیال ایجاد کند [22]. برای مثال در "شکل 1" در دیواره بار الکتریکی منفی القاء شده است که این باعث شده یون‌های مثبت سیال به دیواره نزدیک شوند. در اثر این پدیده، یک پتانسیل الکتریکی محلی در نزدیکی دیواره ایجاد می‌شود که به لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی مشهور است. پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی از پتانسیل زتا<sup>11</sup> در دیواره آغاز و با توزیعی نمایی به صفر در انتهای لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی ختم می‌شود.

می‌توان توزیع پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی را به کمک معادله‌ی پواسون-بولتزمن تعیین کرد [23]:

$$\nabla^2 \psi = \frac{-\rho_e}{\epsilon \epsilon_0} \quad (1)$$

در این رابطه  $\psi$  پتانسیل الکتریکی،  $\rho_e$  چگالی بار الکتریکی،  $\epsilon$  ثابت دی‌الکتریک نسبی<sup>12</sup> و  $\epsilon_0$  ضریب گذرده‌ی خلأ<sup>13</sup> می‌باشند.

در شرایط تعادل، چگالی بار الکتریکی لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد [23]:

$$\rho_e = -2n_0 e z \sinh\left(\frac{ez\psi}{K_b T}\right) \quad (2)$$

که  $n_0$ ،  $e$ ،  $z$ ،  $K_b$  و  $T$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی غلظت یونی سیال، بار الکترون، ظرفیت، ثابت بولتزمن<sup>14</sup> و دمای سیال می‌باشند.

با ترکیب معادلات (1) و (2) به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مونت کارلو<sup>1</sup> نیز می‌توان برای تعیین عدم قطعیت بهره گرفت اما نرخ همگرایی این روش پایین می‌باشد [7].

به منظور افزایش نرخ همگرایی روش کلاسیک مونت کارلو می‌توان علاوه بر محاسبه‌ی مقادیر تابع، از مشتقات آن نیز بهره برد. این تکنیک که به روش مونت کارلو بهبودیافته معروف است، توسط چاو و همکاران [8] جهت بهبود نرخ همگرایی روش مونت کارلو استاندارد ارائه گردید.

قدم اول در روش مونت کارلو، نمونه‌برداری می‌باشد. ابتدایی‌ترین روش نمونه‌برداری، انتخاب تصادفی بدون هیچ قید و شرطی از بازه‌های موردنظر است که معروف به نمونه‌برداری ساده<sup>2</sup> می‌باشد. این روش برای اولین بار توسط متروپولیس و همکاران [9] در سال 1947 مورد استفاده قرار گرفت. به این دلیل که نمونه‌برداری تأثیر مستقیم بر روی نرخ همگرایی روش مونت کارلو دارد، روش‌هایی بهبودیافته در سال‌های بعد ارائه گردید. هالتون و همکاران [10] روش نمونه‌برداری طبقه‌بندی شده<sup>3</sup> را معرفی کردند. در این روش برای انتخاب  $n$  نمونه، بازه‌ی انتخاب نمونه‌ها به  $n$  قسمت مساوی تقسیم می‌شود و هر نمونه از یکی از این قسمت‌ها انتخاب می‌شود. همچنین روش پیشرفته ابرمکعب لاتین<sup>4</sup> براساس همین ایده به منظور بهبود نرخ همگرایی توسط مک‌کی و همکاران [11] ارائه گردید. با این تفاوت که در هر ردیف و یا ستون تقسیم‌بندی صورت گرفته تنها یک نمونه انتخاب می‌گردد. در این پژوهش از روش ابرمکعب لاتین برای تولید نمونه‌ها استفاده شده است.

علاوه بر انتخاب هوشمند نمونه‌ها، محاسبه‌ی مشتقات توابع می‌تواند اطلاعات فراوانی در خصوص طبیعت سیستم و ارتباط بین متغیرهای ورودی و خروجی در دسترس قرار دهد [12]. روش‌های متعددی برای محاسبه‌ی عددی مشتقات جزئی توابع ارائه شده است. یکی از ساده‌ترین روش‌ها در این زمینه روش تفاضل محدود<sup>5</sup> می‌باشد که برای دستیابی به تمامی مشتقات جزئی در یک سیستم با  $n$  پارامتر طراحی، نیاز به  $2n$  بار حل معادلات سیستم است. دو روش معمول برای آنالیز حساسیت است که عبارت‌اند از: روش پیشرو<sup>6</sup> [13] و روش الحاقی<sup>7</sup> [14]. در روش پیشرو برای دستیابی به تمامی مشتقات در یک سیستم با  $n$  پارامتر، نیاز به یک بار حل معادلات سیستم و حل  $n$  معادله‌ی کمکی که از معادلات حاکم استخراج می‌شود، می‌باشد. در نتیجه این روش برای سیستم‌هایی که دارای پارامترهای طراحی بی‌شماری هستند، بازده چندان بالایی ندارد [15]. در نقطه‌ی مقابل، روش الحاقی برای دستیابی به تمامی مشتقات تنها نیاز به حل دو معادله دارد: معادلات سیستم و یک معادله‌ی کمکی به نام معادله‌ی الحاقی [16].

در سال‌های اخیر، کاربرد میکروسیمست‌ها در زمینه‌هایی همچون مهندسی پزشکی باعث رشد چشمگیری در تحقیقات صورت گرفته بر روی سیستم‌های میکروسیال<sup>8</sup> شده است [17]. در این میان تحلیل عدم قطعیت در میکروسیمست‌ها نیز مورد توجه محققین قرار گرفته است. ماتر و همکاران [18] با استفاده از روش چندجمله‌ای آشوب، آنالیز عدم قطعیت را برای جریان سیال در یک میکروکانال انجام دادند. در این پژوهش، کارایی روش چندجمله‌ای آشوب برای تعیین عدم قطعیت در پدیده‌ی اختلاط و انتقال ذرات در یک میکروکانال مورد بررسی قرار گرفت.

یکی از پدیده‌های کاربردی در سیستم‌های میکروسیال با هدف اختلال و

<sup>1</sup> Monte Carlo method

<sup>2</sup> Naive sampling

<sup>3</sup> Stratified sampling

<sup>4</sup> Latin hypercube sampling (LHS)

<sup>5</sup> Finite difference method

<sup>6</sup> Forward sensitivity method

<sup>7</sup> Adjoint sensitivity method

<sup>8</sup> Microfluidics systems

<sup>9</sup> Electric Double Layer (EDL)

<sup>10</sup> Potential of hydrogen

<sup>11</sup> Zeta Potential ( $\zeta$ )

<sup>12</sup> Dielectric Constant

<sup>13</sup> Permittivity of Free Space

<sup>14</sup> Boltzmann Constant

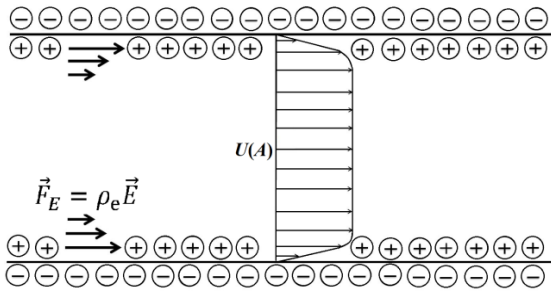


Fig. 2 Schematic diagram of electroosmotic flow

شکل 2 طرح شماتیک جریان الکترواسموتیک

می‌باشد،  $L(w(\alpha), \alpha)$ . در صورتی که این معادلات دارای جواب یکتا باشد، می‌توان مسئله آنالیز حساسیت را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\frac{d}{d\alpha} J(w(\alpha), \alpha) = \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (9)$$

سه ترم  $\partial J/\partial \alpha$ ،  $\partial J/\partial w$  و  $\partial L/\partial \alpha$  به سادگی با استفاده از مشتق‌گیری سمبولیک<sup>3</sup> قابل محاسبه هستند. کلید محاسبه‌ی این عبارت در تعیین ترم  $\partial w/\partial \alpha$  نهفته است. این ترم را می‌توان به شکل  $(\partial L/\partial w)^{-1}$  نمایش داد که  $\partial L/\partial w$  ژاکوبین سیستم معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

$$\frac{d}{d\alpha} J(w(\alpha), \alpha) = \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial w} \left( \frac{\partial L}{\partial w} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \quad (10)$$

در روش الحاقی، ماتریس الحاقی  $w^*$  به شکل زیر تعریف می‌گردد [14]:

$$w^* = \frac{\partial J}{\partial w} \left( \frac{\partial L}{\partial w} \right)^{-1} \quad (11)$$

با ضرب این رابطه در  $\partial L/\partial w$  از سمت راست و ترانپاده گرفتن، این رابطه به یک سیستم معادلات به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial w} \right)^T w^* = \frac{\partial J}{\partial w} \quad (12)$$

با حل معادله (12) و تعیین متغیرهای الحاقی  $w^*$  می‌توان آنالیز حساسیت را به شکل زیر انجام داد [14]:

$$\frac{d}{d\alpha} J(w(\alpha), \alpha) = \frac{\partial J}{\partial \alpha} + w^* \frac{\partial L}{\partial \alpha} \quad (13)$$

پس در این روش برای هر تابع هدف، فارغ از تعداد پارامترهای طراحی، تنها نیاز به حل یک معادله (معادله 12) می‌باشد. در نتیجه این روش برای آنالیز حساسیت در مسائل با تعداد تابع هدف پایین و تعداد پارامترهای طراحی بالا، بسیار مناسب است.

روشی دیگر برای محاسبه‌ی مشتقات، تفاضل محدود می‌باشد. در روش تفاضل محدود مرکزی می‌توان مشتقات را از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha - \Delta\alpha)}{2\Delta\alpha} \quad (14)$$

در این روش می‌بایست به ازای هر پارامتر طراحی، دو بار معادلات حاکم بر مسئله حل شوند. در نتیجه این روش برای آنالیز حساسیت در مسائل با تعداد تابع هدف پایین و تعداد پارامترهای طراحی بالا، مناسب نمی‌باشد.

### 2-3- نمونه برداری ابرمکعب لاتین

با فرض آن که در یک سیستم،  $n$  پارامتر دارای عدم قطعیت باشند، می‌بایست نمونه برداری در ابرمکعب<sup>4</sup>  $n$ -بعدی صورت بگیرد. پس از نمونه برداری از این فضا، می‌توان نمونه‌ها را با توجه به میانگین، انحراف معیار و تابع چگالی پارامترها به فضای مورد نظر انتقال داد.

برای توصیف الگوریتم روش ابرمکعب لاتین، فرض می‌کنیم که نیاز به  $M$

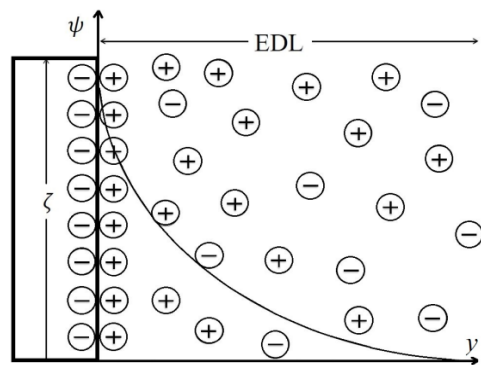


Fig. 1 Schematic diagram of the electric double layer

شکل 1 طرح شماتیک لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی

برای پتانسیل الکتریکی دست خواهیم یافت:

$$\nabla^2 \psi = 2 \frac{n_0 e z}{\epsilon \epsilon_0} \sinh\left(\frac{e z \psi}{K_b T}\right) \quad (3)$$

جریان الکترواسموتیک بر اثر برهم کنش میدان الکتریکی خارجی و توزیع بار الکتریکی در لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی ایجاد می‌گردد. "شکل شماتیک 2" جریان الکترواسموتیک را در یک میکروکانال نمایش می‌دهد که با توجه به قانون کولن<sup>1</sup> نیرویی حجمی به دلیل وجود میدان الکتریکی خارجی  $\vec{E}$  و چگالی بار الکتریکی  $\rho_e$  در معادلات مومنوم سیال ایجاد می‌شود [23]:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho_e \vec{E} \quad (4)$$

که در این معادله  $\rho$  چگالی سیال،  $\vec{U}$  میدان سرعت سیال،  $p$  فشار سیال و  $\mu$  لزجت دینامیکی می‌باشند. ترم  $\rho_e \vec{E}$  در این معادله نشان‌دهنده‌ی نیروی خارجی (عامل ایجاد جریان الکترواسموتیک) می‌باشد. میدان الکتریکی خارجی را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (5)$$

که  $\phi$  پتانسیل الکتریکی بوده که معادله‌ی حاکم بر آن قانون الکتروستاتیک است:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

و در نهایت با محاسبه‌ی معادله‌ی پیوستگی به همراه معادلات مومنوم میدان سرعت و فشار سیال تعیین می‌گردد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (7)$$

با حل معادلات (3) تا (7) می‌توان میدان سرعت و فشار در یک جریان الکترواسموتیک را به دست آورد.

### 2-2- تشکیل معادلات الحاقی

قدم اول در آنالیز حساسیت و محاسبه‌ی مشتقات جزئی، تعیین تابع هدف است:

$$J = J(w(\alpha), \alpha) \quad (8)$$

که در این تعریف  $J$  تابع هدف،  $w$  متغیرهای جریان سیال همچون فشار و سرعت و  $\alpha$  نشان‌دهنده‌ی متغیرهای طراحی همچون پارامترهای هندسی و خواص فیزیکی سیال می‌باشد. به طور معمول نمی‌توان تابع هدف را به صورت صریح و تنها تابع متغیرهای طراحی بیان نمود [14]. تابع هدف در بسیاری از موارد می‌تواند تابعی از متغیرهای سیستمی (که خود تابع متغیرهای طراحی هستند) باشد. در مسائل چند فیزیکی<sup>2</sup> همچون جریان الکترواسموتیک، معادلات حاکم به شکل سیستمی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

<sup>3</sup> Symbolic Differentiation

<sup>4</sup> Hypercube

<sup>1</sup> Coulomb's Law

<sup>2</sup> Multiphysics problem

که  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$  نمونه‌هایی<sup>۲</sup> از متغیرهای غیرقطعی بوده که با توجه به تابع چگالی  $\rho(\alpha)$  تولید شده‌اند.

برای محاسبه میانگین و واریانس تابع هدف، بسط تیلور خطی<sup>۳</sup> تابع هدف در میزان میانگین متغیرهای غیرقطعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_1(\alpha) = J(\bar{\alpha}) + J_{\alpha}(\bar{\alpha})(\alpha - \bar{\alpha}) \quad (19)$$

$$V_1(\alpha) = (J(\bar{\alpha}) - E(J))^2 + 2J_{\alpha}(\bar{\alpha})(J(\alpha) - E(J))(\alpha - \bar{\alpha}) \quad (20)$$

در این معادله  $J_{\alpha}$  مشتقات تابع هدف نسبت به متغیرهای غیرقطعی است که در آنالیز حساسیت محاسبه می‌گردد. با توجه رابطه زیر:

$$\int (J(\alpha) - J_1(\alpha))\rho(\alpha)d\alpha = \int J(\alpha)\rho(\alpha)d\alpha - J_1(\alpha) \quad (21)$$

می‌توان روش مونت کارلو بهبودیافته را برای تخمین میانگین و واریانس  $J(\alpha)$  به شکل زیر تعریف نمود [8]:

$$J_{EMC} = J(\bar{\alpha}) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J(\chi_i) - J_1(\chi_i)) \quad (22)$$

$$V_{EMC} = (J(\bar{\alpha}) - E(J))^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((J(\chi_i) - J_{EMC})^2 - J_1(\chi_i)) \quad (23)$$

در نهایت می‌توان انحراف معیار تابع هدف را نیز با جذرگیری از واریانس تعیین کرد.

### 3- شبیه‌سازی

در این مطالعه بررسی عدم قطعیت در نتایج شبیه‌سازی جریان الکترواسموتیک در یک کانال تی‌شکل با توجه به کاربرد فراوان آن در سیستم‌های بر پایه میکروسیال صورت می‌گیرد. به منظور اعتبار سنجی نتایج، دامنه حل شبیه‌سازی عددی از مطالعه‌ی تجربی انجام شده توسط کیم و همکاران [23] استخراج گردیده است.

در "شکل 4" دامنه حل شبیه‌سازی عددی نمایش داده شده است. عرض کانال‌های عمودی و افقی یکسان و برابر با  $300 \mu\text{m}$  می‌باشد و سیستم دارای دو ورودی و یک خروجی است. در مطالعه تجربی توزیع سرعت در چهار مقطع مطابق "شکل 4" اندازه‌گیری شده است. مقاطع A-A و B-B در فاصله‌های  $150 \mu\text{m}$  و  $60 \mu\text{m}$  از مرکز کانال افقی و مقاطع C-C و D-D در فاصله‌های  $70 \mu\text{m}$  و  $180 \mu\text{m}$  از مرکز کانال عمودی قرار دارند.

سیال عامل، آب به همراه یون‌های  $\text{Na}^+$  در نظر گرفته شده است و جنس دیواره‌ها (به منظور تعیین پتانسیل زتا) پلی‌دی‌متیل‌سیلوکسان<sup>۴</sup> می‌باشد. با توجه به شرایط سیال و دیواره‌ها، پتانسیل زتا در محاسبات برابر با  $37.7 \text{ mV}$  در نظر گرفته شد [23].

برای حل معادلات جریان الکترواسموتیک از روش اجزاء محدود استفاده شد. در این روش، معادلات اجزای محدود با استفاده از روش تغییرات<sup>۵</sup> از معادلات حاکم محاسبه می‌گردند. شکل کلی معادلات اجزای محدود برای هر المان به صورت زیر است:

$$\vec{F} = [K]\vec{x} \quad (24)$$

که  $\vec{F}$  بردار نیروهای خارجی،  $[K]$  ماتریس سختی است که با توجه به گسسته‌سازی و پارامترهای سیستم محاسبه می‌شود و  $\vec{x}$  متغیرهای مجهول

نمونه در فضای دوبعدی داریم، در این روش هر بعد را به  $M$  دسته تقسیم می‌نماییم. با توجه به "شکل 3"، این فضای دوبعدی به  $M^2$  قسمت تقسیم می‌شود. یکی از ابعاد را انتخاب کرده (به‌طور مثال بعد افقی) و از هر ردیف یک نمونه انتخاب می‌کنیم به طوری که در هر ستون یک نمونه وجود داشته باشد [9]. در نهایت  $M$  نمونه را در این فضا به‌گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که در هر ردیف و ستون تنها یک نمونه موجود است (شکل 3).

در "شکل 3" می‌توان تفاوت دو روش نمونه‌برداری ساده و ابرمکعب لاتین را مشاهده کرد. در روش ساده هیچ قیدی برای نمونه‌برداری وجود ندارد و این باعث می‌شود پراکندگی نمونه‌ها در این روش نسبت به روش ابرمکعب لاتین کمتر باشد.

### 2-4 روش مونت کارلو بهبودیافته

تابع هدف  $J(\alpha)$  را که تابعی از متغیرهای طراحی  $\alpha$  است در نظر می‌گیریم. متغیرهای طراحی را به صورت متغیرهایی تصادفی و دارای عدم قطعیت با تابع چگالی  $\rho(\alpha)$  فرض می‌کنیم. میانگین<sup>۱</sup> و واریانس  $J(\alpha)$  را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود [8]:

$$E(J) = \int J(\alpha)\rho(\alpha)d\alpha \quad (15)$$

$$V(J) = \int (J(\alpha) - E(J))^2\rho(\alpha)d\alpha \quad (16)$$

در روش مونت کارلو استاندارد می‌توان این دو انتگرال را به صورت زیر محاسبه نمود [8]:

$$J_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\chi_i) \quad (17)$$

$$V_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J(\chi_i) - J_{MC})^2 \quad (18)$$

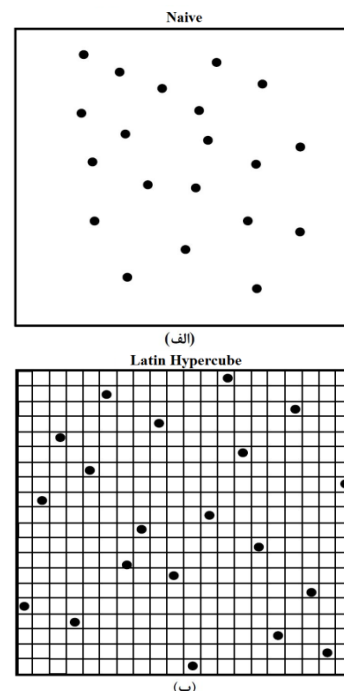


Fig. 3 Schematic diagram of A) naive and B) Latin Hypercube sampling for two parameters

شکل 3 طرح شماتیک نمونه‌برداری به روش‌های الف) ساده ب) ابرمکعب لاتین برای دو پارامتر

<sup>1</sup> Expected Value

<sup>2</sup> Samples

<sup>3</sup> Linear Taylor Expansion

<sup>4</sup> Polydimethylsiloxane (PDMS)

<sup>5</sup> Variational method

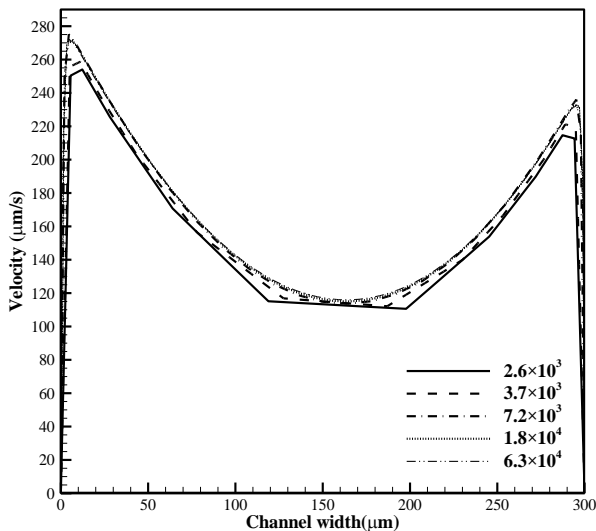


Fig. 5 Grid independency of study at A-A

شکل 5 استقلال نتایج در برابر تعداد المان در مقطع A-A

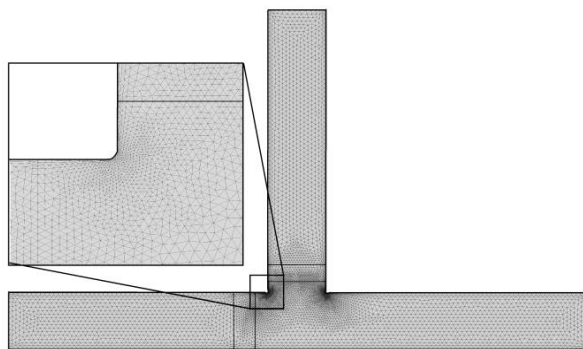


Fig. 6 Mesh distribution along computational domain

شکل 6 توزیع مش در طول دامنه محاسباتی

این نکته قابل توجه است که برای تابع هدف اول (دبی جرمی) روش الحاقی از نظر زمان محاسبه مناسب بوده و در مورد تابع هدف دوم (میدان سرعت) به دلیل بالا بودن تعداد توابع هدف، روش تفاضل محدود نسبت به روش الحاقی از نظر زمان محاسبه مناسب تر می باشد. البته برای هر دو تابع هدف از هر دو روش برای آنالیز حساسیت استفاده شده و نتایج مقایسه می گردد. پس از محاسبه مشتقات، با استفاده از روش مونت کارلو بهبود یافته، عدم قطعیت در توابع هدف مورد بررسی قرار می گیرد.

"شکل 7" مراحل روش مونت کارلو بهبود یافته را نمایش می دهد. در مرحله اول نمونه هایی از 9 متغیر غیرقطعی با توجه به میانگین، انحراف معیار و توزیع نرمال با استفاده از روش ابرمکعب لاتین تولید می شود. در مرحله ی بعد معادلات جریان الکترواسموتیک برای هر نمونه محاسبه و نتایج توابع هدف ذخیره می گردند. در مرحله ی بعدی با استفاده از مشتقات، بسط تیلور خطی برای توابع هدف و واریانس آن ها محاسبه می شود؛ و در پایان با استفاده از معادلات (23) و (24) میانگین و انحراف معیار دبی جرمی و میدان سرعت محاسبه می گردد.

#### 4- نتایج

##### 4-1- اعتبارسنجی

پیش از ارائه نتایج، می بایست اعتبار شبیه سازی عددی مورد بررسی قرار گیرد. همان طور که در بخش 3 ذکر شد به این منظور از نتایج مطالعه ی

مسئله می باشد. برای گسسته سازی سرعت، پتانسیل الکتریکی خارجی و پتانسیل الکتریکی در لایه ی دوگانه ی الکتریکی تابع درجه ی دوم و برای فشار تابع درجه ی اول در نظر گرفته شد.

برای حل جریان الکترواسموتیک، همان طور که در بخش 1-2 توضیح داده شد، با سه معادله روبرو هستیم که برای هر کدام نیاز به شرایط مرزی مناسب خواهیم داشت. در ورودی 1 سرعت برابر با  $165 \mu\text{m/s}$ ، در دیواره ها شرط مرزی عدم لغزش و در ورودی 2 و خروجی فشار صفر در نظر گرفتیم. برای میدان پتانسیل الکتریکی در ورودی 1 پتانسیل الکتریکی برابر با  $15 \text{ V}$ ، در ورودی 2 شرط مرزی زمین (پتانسیل الکتریکی برابر با  $0 \text{ V}$ )، در دیواره ها شرط مرزی نیومن به شکل  $n \cdot \varphi = 0$  (نشان دهنده ی جهت عمود بر دیواره است) و در خروجی، پتانسیل الکتریکی برابر با  $15 \text{ V}$  در نظر گرفتیم. برای معادله ی پواسون-بولتزمن در ورودی های 1، 2 و خروجی شرط مرزی نیومن به شکل  $n \cdot \psi = 0$  و در دیواره ها شرط مرزی پتانسیل الکتریکی برابر با پتانسیل زتا تعیین شد.

در تولید شبکه با توجه به یکسان بودن هزینه ی محاسباتی المان مثلثی و مستطیلی، به منظور شبکه بندی بهتر در انحنای کانال از المان مثلثی استفاده گردید. به منظور افزایش تعداد المان در مقاطعی با گرادیان بالا، شبکه بندی به صورت بدون ساختار صورت گرفت. در بررسی استقلال نتایج در برابر تعداد المان، از توزیع سرعت در مقطع A-A به عنوان پارامتر مرجع استفاده شد. 10 شبکه محاسباتی مختلف در نظر گرفته شد که در "شکل 5" به منظور وضوح بالاتر 5 حالت به نمایش درآمده است. با توجه به ناچیز بودن تغییرات سرعت در شبکه  $7.2 \times 10^3$  المان نسبت به شبکه  $1.8 \times 10^4$  المان، انتخاب شبکه  $7.2 \times 10^3$  المان برای شبیه سازی انتخاب مناسبی می باشد.

در "شکل 6" توزیع شبکه بندی در طول دامنه محاسباتی قابل مشاهده است. به منظور تحلیل دقیق لایه ی دوگانه الکتریکی، در دیواره ها از مش لایه مرزی استفاده گردید و تراکم المان ها در انحنای کانال به دلیل بالا بودن گرادیان متغیرهای مسئله افزایش داده شد.

برای آنالیز حساسیت و بررسی عدم قطعیت می بایست در ابتدا تابع هدف مناسبی انتخاب شود. در این مطالعه دو تابع هدف در نظر گرفته شد:

دبی جرمی (نمایش دهنده ی شرایط سیستم به صورت کلی) و میدان سرعت (نمایش دهنده ی شرایط سیستم به صورت محلی). قدم بعدی تعیین پارامترهای غیرقطعی در مسئله می باشد. در جدول 1 این پارامترها مشخص شده است.

در جدول 1، پارامترهای غیرقطعی همراه با مقادیر میانگین و انحراف معیار آن ها که از مراجع معتبر [28-24] استخراج شده اند، ارائه گردیده است.

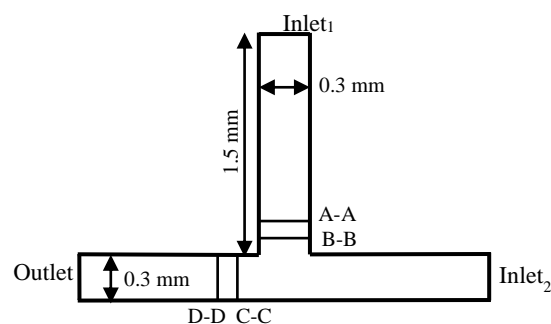


Fig. 4 Computation domain of the numerical simulation

شکل 4 دامنه حل شبیه سازی عددی

فشار معکوس در جریان الکترواسموتیک، سرعت سیال در تمامی مقاطع در مرکز کانال به حداقل خود می‌رسد.

**2-4- نتایج شبیه‌سازی عددی قطعی جریان الکترواسموتیک**

همان‌طور که در بخش 1-2 اشاره گردید برای شبیه‌سازی جریان الکترواسموتیک نیاز به حل 4 معادله است.

"شکل 12" نتایج حل معادله (1) (معادله‌ی پواسون- بولتزمن) را نمایش می‌دهد. با توجه به این شکل در اکثر نواحی به استثنای لایه‌ی دوگانه الکتریکی میزان پتانسیل الکترواسموتیک ناچیز است. در قسمت بزرگ‌نمایی شده "شکل 12" لایه‌ی دوگانه الکتریکی نشان داده شده است که در آن پتانسیل الکترواسموتیک از میزان پتانسیل زتا ( $37.7 \text{ mV}$ ) در دیواره به سمت صفر کاهش می‌یابد.

در "شکل 13" میدان پتانسیل الکتریکی نمایش داده شده که با شبیه‌سازی ثابت از ورودی 1 در کانال عمودی با مقدار  $15 \text{ V}$  آغاز شده و به خروجی با میزان  $-15 \text{ V}$  کاهش می‌یابد. همچنین میدان پتانسیل الکتریکی در قسمت راست کانال افقی بسیار ناچیز بوده و تقریباً برابر صفر است. پس با توجه به معادله‌ی (4) در این قسمت کانال، عامل ایجاد جریان گرادیان فشار است.

در "شکل 14" میدان فشار به نمایش درآمده است. به دلیل وجود شرط

تجربی کیم و همکاران [23] استفاده گردید. نتایج شبیه‌سازی عددی در "شکل‌های 8 تا 11" در 4 مقطع A-A, B-B, C-C و D-D با نتایج تجربی مقایسه شده است.

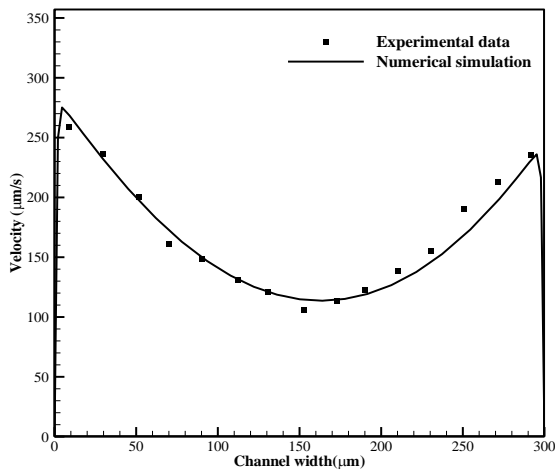
اختلاف بین نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی به‌طور متوسط در حدود 5 درصد می‌باشد که میزان قابل قبولی است. اختلاف بیشتر بین نتایج عددی و تجربی در مقاطعی همچون مقطع B-B می‌تواند به دلیل وجود پارامترهای غیرقطعی ورودی در شبیه‌سازی عددی باشد که در ادامه تأثیر آن‌ها بررسی خواهد شد. لازم به ذکر است که اختلاف میان نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی برای همین شرایط هندسی و فیزیکی در تحقیقات دیگر نیز گزارش شده است [23]. که این انگیزه بررسی تأثیر پارامترهای غیرقطعی ورودی در نتایج شبیه‌سازی عددی در این پژوهش گردید.

با توجه به عدم تقارن میدان الکتریکی در میکروکانال، توزیع سرعت به صورت نامتقارن می‌باشد. در مقاطع A-A و B-B در دیواره‌ی سمت چپ و در مقاطع C-C و D-D در دیواره‌ی بالایی میدان الکتریکی بالاتر بوده و به تبع آن سرعت نیز در این مناطق بالاتر می‌باشد. با توجه به وجود گرادیان

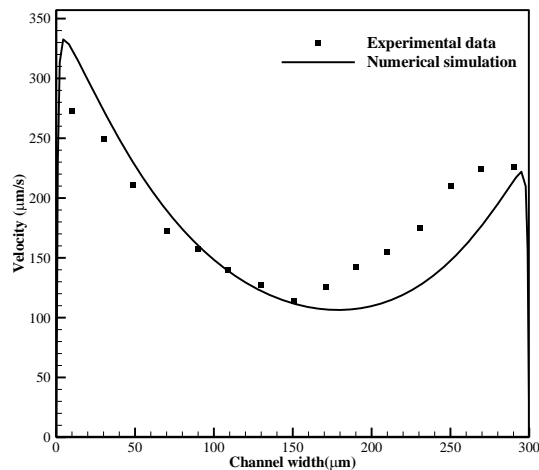
**جدول 1** پارامترهای دارای عدم قطعیت

**Table 1** Uncertain Parameters

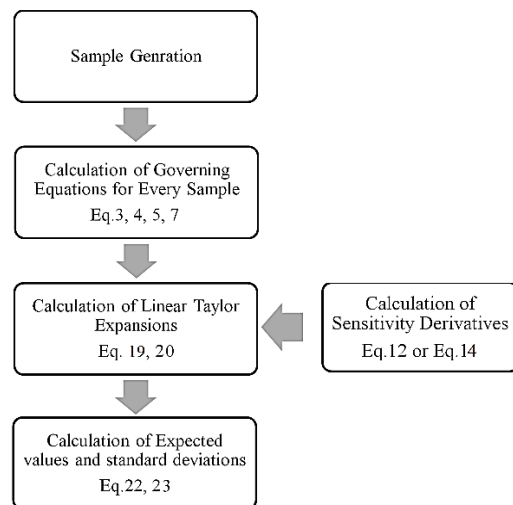
مرجع	انحراف معیار	میزان عدم قطعیت	میزان میانگین	نماد	پارامتر
[21]	$5 \times 10^{-3} \text{ mM}$	5%	0.1 mM	$n_0$	غلظت یونی سیال
	3 K	1%	300 K	$T$	دما
[24]	$2.3 \times 10^{-2} \text{ mPas}$	5%	1 mPas	$\mu$	لزجت دینامیکی
[25]	$4 \text{ kg/m}^3$	2.3%	$1000 \text{ kg/m}^3$	$\rho$	چگالی
[26]	3.9	0.4%	78	$\epsilon$	ثابت دی الکتریک
[27]	0.45 V	3%	15 V	$V_1$	پتانسیل الکتریکی در ورودی اول
[27]	0.45 V	3%	-15 V	$V_2$	پتانسیل الکتریکی در خروجی
[28]	$3 \mu\text{m}$	3%	$0 \mu\text{m}$	$dx$	خطا ساخت در عرض کانال عمودی
[28]	$3 \mu\text{m}$	3%	$0 \mu\text{m}$	$dy$	خطا ساخت در عرض کانال افقی



**Fig. 8** Comparison of numerical results with experimental data at A-A  
شکل 8 مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی در مقطع A-A



**Fig. 9** Comparison of numerical results with experimental data at B-B  
شکل 9 مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی در مقطع B-B



**Fig. 7** Flowchart of Enhanced Monte Carlo method

شکل 7 روند روش مونت کارلو بهبودیافته

"شکل 15" میدان سرعت سیال در تقاطع میکروکانال را نشان می‌دهد. با توجه به وجود گرادیان فشار معکوس در جریان الکترواسموتیک در کانال عمودی و سمت چپ کانال افقی سرعت سیال در این مقاطع در مرکز کانال به حداقل خود می‌رسد.

همچنین در این نواحی با توجه به وجود لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی سرعت در دیواره‌ها بیشینه است. همان‌طور که در "شکل 15" مشاهده می‌شود، در قسمت راست کانال افقی گرادیان فشار تنها عامل ایجاد جریان بوده و توزیع سرعت سهموی است و سرعت سیال نسبت به کانال عمودی کمتر می‌باشد.

4-3- نتایج روش الحاقی

آنالیز حساسیت به دو روش الحاقی و تفاضل محدود برای دو تابع هدف، جداگانه انجام شد و نتایج آن در جدول‌های 2 و 3 قرار دارد.

جدول 2 مشتقات دبی جرمی (تابع هدف اول) را برحسب پارامترهای غیرقطعی نمایش می‌دهد. مقایسه نتایج دو روش نشان‌دهنده اعتبار روش

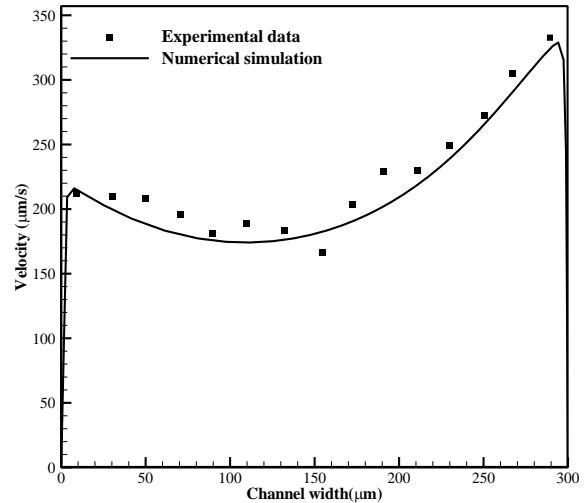


Fig. 10 Comparison of numerical results with experimental data at C-C  
شکل 10 مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی در مقطع C-C

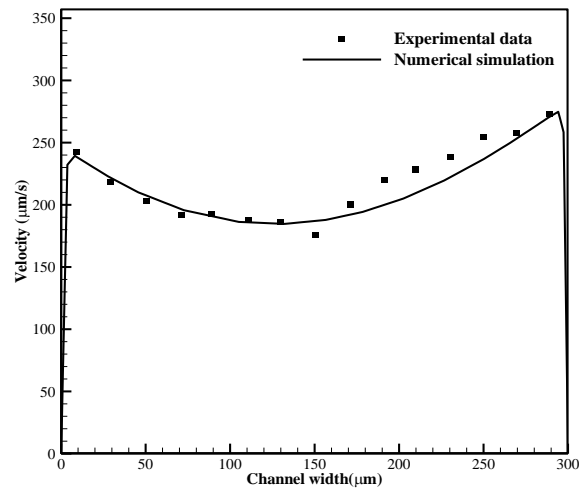


Fig. 11 Comparison of numerical results with experimental data at D-D  
شکل 11 مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تجربی در مقطع D-D

مرزی سرعت در ورودی، در کانال عمودی و سمت چپ کانال افقی جریان در معرض گرادیان فشار قرار می‌گیرد [23]. در قسمت راست کانال افقی اختلاف فشار بین ورودی 2 و تقاطع باعث ورود سیال به کانال می‌شود.

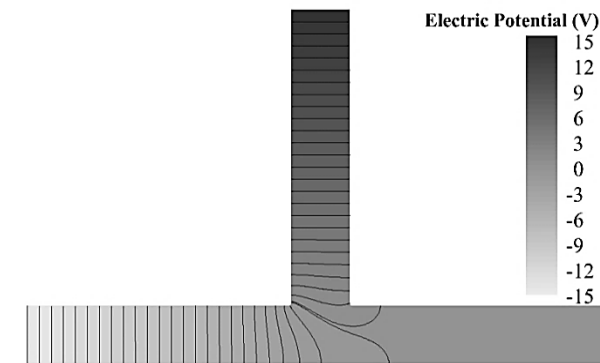


Fig. 13 External electric potential field at computational domain  
شکل 13 میدان پتانسیل الکتریکی خارجی در دامنه‌ی محاسباتی

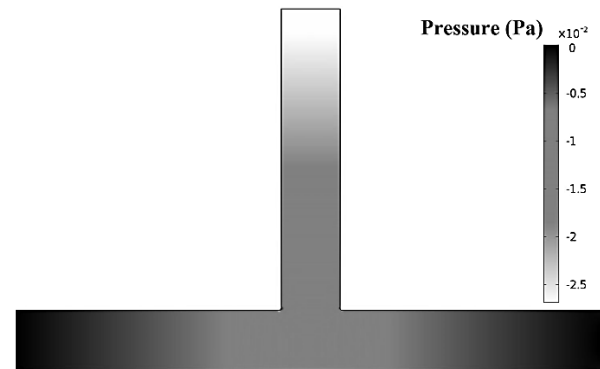


Fig. 14 Pressure field at computational domain  
شکل 14 میدان فشار در دامنه‌ی محاسباتی

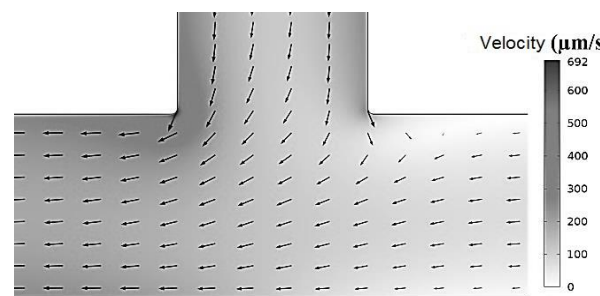


Fig. 15 Velocity field at computational domain  
شکل 15 میدان سرعت در دامنه‌ی محاسباتی

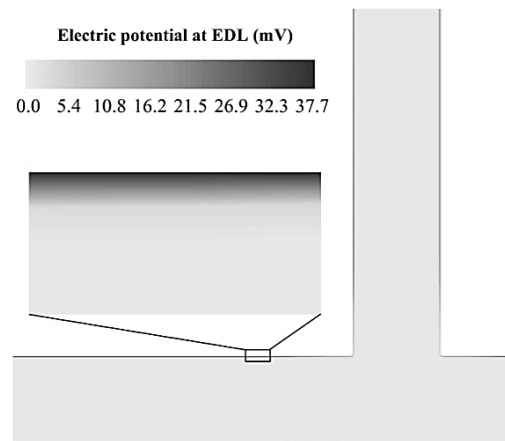


Fig. 12 Electric potential at EDL  
شکل 12 پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی دوگانه الکتریکی

100، 250، 500، 1000، 2500 و 5000 صورت گرفت. "شکل 16" همگرایی شبیه‌سازی مونت کارلو را نمایش می‌دهد. در این شکل خطای نسبی نتایج در هر چهار حالت (میانگین و انحراف معیار دبی جرمی و میدان سرعت) برحسب تعداد نمونه ترسیم شده است. برای محاسبه خطای نسبی  $\varepsilon$  از رابطه‌ی زیر استفاده گردید:

$$\varepsilon = \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n-1}} \quad (25)$$

که در این رابطه  $F_n$  مقدار عددی تابع در تعداد نمونه حاضر و  $F_{n-1}$  مقدار عددی تابع در تعداد نمونه‌ی حالت قبل می‌باشد. با در نظر گرفتن خطای نسبی  $10^{-3}$  به‌عنوان معیار همگرایی [29] می‌توان همگرایی نتایج را در 5000 نمونه تصدیق نمود. در ادامه، نتایج در این تعداد نمونه ارائه می‌گردد.

در جدول 4 نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای دبی جرمی نمایش داده شده است. کران بالا و پایین نتایج با فرض توزیعی نرمال، حاصل مجموع و تفاضل میانگین و 3 برابر انحراف معیار می‌باشند [30]. با محاسبه‌ی نسبت اختلاف کران بالا و پایین و میانگین دبی جرمی، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که عدم قطعیت در دبی جرمی می‌تواند بیش از 10% باشد.

در "شکل 17" میدان سرعت میانگین نشان داده شده است. در کانال عمودی و قسمت چپ کانال افقی، در مجاور دیواره‌ها بیشترین سرعت و در مرکز کانال کمترین سرعت در جریان مشاهده می‌شود. همچنین بیشینه‌ی میانگین سرعت در تقاطع کانال رخ می‌دهد. در قسمت راست کانال افقی به دلیل ضعیف بودن میدان الکتریکی عامل جریان گرادیان فشار بوده و توزیع سرعت سهموی می‌باشد. "شکل 18" انحراف معیار میدان سرعت را نمایش می‌دهد. بیشترین انحراف معیار در کانال عمودی و قسمت چپ کانال افقی در دیواره‌ها قرار دارد، درحالی‌که در قسمت راست کانال افقی بیشترین انحراف معیار در مرکز کانال است. دلیل این امر ناچیز بودن جریان الکترواسموتیک در برابر جریان فشاری در قسمت راست کانال افقی و قالب بودن جریان الکترواسموتیک در کانال عمودی و قسمت چپ کانال افقی می‌باشد. با توجه به قابل ملاحظه بودن جریان فشاری در کانال عمودی و ترکیب آن با جریان الکترواسموتیک، در این مقطع کمینه‌ی انحراف معیار در میان دیواره و مرکز کانال قرار دارد. در این حالت نیز کران بالا و پایین همانند دبی جرمی محاسبه گردید. با محاسبه‌ی نسبت اختلاف کران‌های بالا و پایین و میانگین نتایج در تمامی نقاط شبکه، میزان عدم قطعیت در نتایج سرعت به صورت میانگین 6.3% محاسبه گردید.

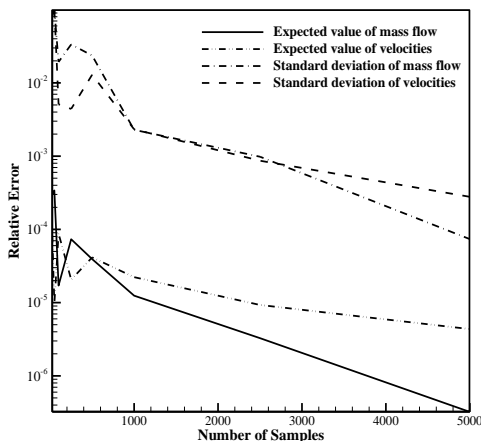


Fig. 16 Convergence of Monte Carlo simulation

شکل 16 همگرایی شبیه‌سازی مونت کارلو

الحاقی می‌باشد. با توجه به آن که بیشترین میزان مشتق دبی جرمی نسبت به پارامترهای هندسی و لزجت سیال محاسبه گردید، می‌توان این نتیجه را گرفت که در میان پارامترهای در نظر گرفته شده تغییرات در پارامترهای هندسی به همراه لزجت سیال بیشترین تأثیر را بر روی دبی جرمی می‌گذارند. به طور مشابه می‌توان ادعا کرد دما و چگالی سیال کمترین تأثیر را بر روی این تابع هدف دارند.

مشتقات سرعت در تمامی گره‌های محاسباتی تعیین گردیده و میانگین آن‌ها به عنوان مشتقات میدان سرعت (تابع هدف دوم) در جدول 3 نشان داده شده است. در این حالت نیز میزان خطای علی‌رغم افزایش نسبی نسبت به تابع هدف قبلی، همچنان قابل قبول می‌باشد. میزان تأثیرگذاری پارامترها در این حالت نیز همانند تابع هدف اول بوده و نتایج آنالیز صورت گرفته را تصدیق می‌کند.

#### 4-4 نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو بهبودیافته

شبیه‌سازی مونت کارلو بهبودیافته در 9 حالت با تعداد نمونه‌های 10، 25، 50،

جدول 2 آنالیز حساسیت بر روی دبی جرمی

Table 2 Sensitivity analysis of mass flow rate

حساسیت	روش الحاقی	روش تفاضل محدود	خطای نسبی
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial n_0}$	7.54e-3	7.54e-3	6.4e-3%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial T}$	3.13e-9	3.13e-9	0.1%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \mu}$	-3.88e-2	-3.90e-2	ش
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho}$	6.28e-8	6.34e-8	0.8%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \varepsilon}$	5.09e-7	5.09e-7	1e-5%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial V_1}$	1.29e-6	1.29e-6	0.01%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial V_2}$	-1.29e-6	-1.29e-6	0.01%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial dx}$	1.030e-1	1.029e-1	0.09%
$\frac{\partial \dot{m}}{\partial dy}$	2.52e-2	2.54e-2	0.7%

جدول 3 آنالیز حساسیت بر روی سرعت در تمامی گره‌های شبکه محاسباتی

Table 3 Sensitivity analysis of velocities at all of the computational nodes

حساسیت	روش الحاقی	روش تفاضل محدود	خطای نسبی
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial n_0}\right)$	2.8e-3	2.8e-3	0.03%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)$	-7.87e-10	-7.88e-10	0.1%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)$	-9.58e-2	-9.54e-2	0.4%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)$	1.82e-11	1.81e-11	0.8%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)$	1.21e-6	1.21e-6	0.07%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial V_1}\right)$	3.17e-6	3.17e-6	0.054%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial V_2}\right)$	-3.17e-6	-3.17e-6	0.054%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial dx}\right)$	-1.12e-2	-1.11e-2	0.5%
Avg $\left(\frac{\partial V}{\partial dy}\right)$	-2.25e-2	-2.23e-1	1.1%



صورت گرفت و مقایسه نتایج، اعتبار روش الحاقی را تصدیق نمود. نتایج روش

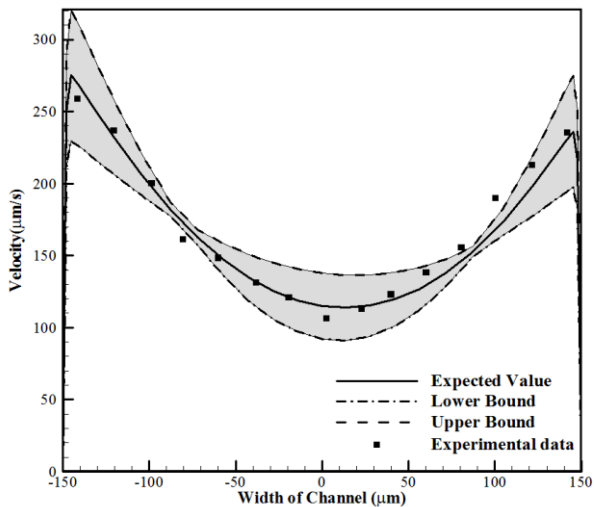


Fig. 19 Expected value, upper and lower bound of velocity at A-A  
 شکل 19 میانگین، کران بالا و پایین سرعت در مقطع A-A

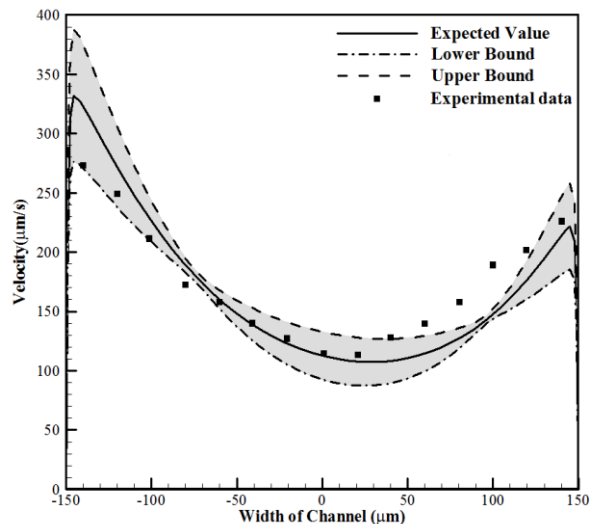


Fig. 20 Expected value, upper and lower bound of velocity at B-B  
 شکل 20 میانگین، کران بالا و پایین سرعت در مقطع B-B

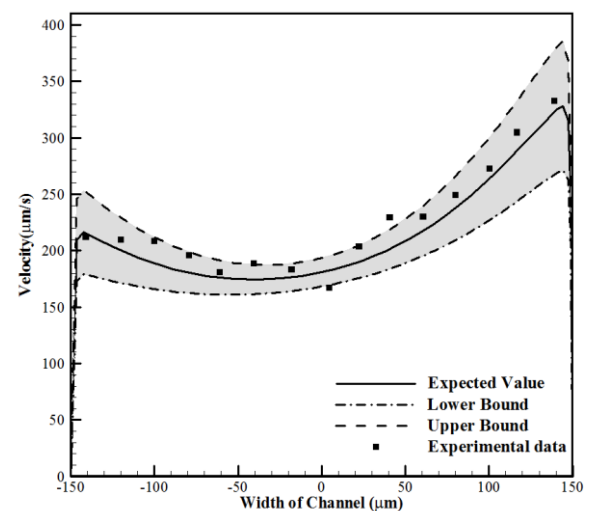


Fig. 21 Expected value, upper and lower bound of velocity at C-C  
 شکل 21 میانگین، کران بالا و پایین سرعت در مقطع C-C

جدول 4 نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای دبی جرمی

Table 4 Monte Carlo simulation results for mass flow rate

کران پایین	کران بالا	انحراف معیار	میانگین
56.28(μkg/s)	70.50(μkg/s)	2.375(μkg/s)	63.39(μkg/s)

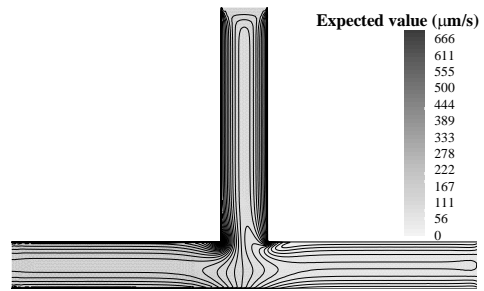


Fig. 17 Expected value of velocity field at computational domain

شکل 17 میدان میانگین سرعت در دامنه‌ی محاسباتی

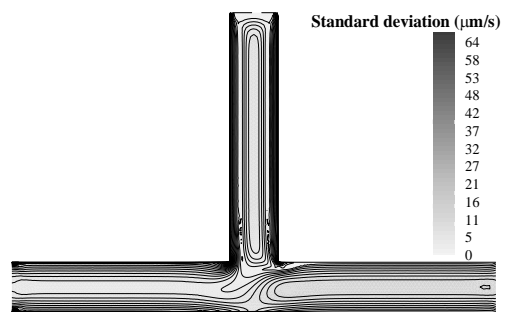


Fig. 18 Standard deviation of velocity field at computational domain

شکل 18 میدان انحراف معیار سرعت در دامنه‌ی محاسباتی

در "شکل‌های 19 تا 22" پروفیل‌های سرعت میانگین به همراه کران بالا و پایین در مقاطع A-A، B-B، C-C و D-D ترسیم شده است. در هر یک از این شکل‌ها، نواحی بین کران بالا و پایین، نواری را که احتمال وجود میزان سرعت در آن وجود دارد، مشخص می‌کند. همان‌طور که در توضیحات "شکل 18" ذکر شد، در کانال عمودی که مقاطع A-A و B-B در آن قرار دارند، کمینه‌ی انحراف معیار در میان دیواره و مرکز کانال قرار دارد. در نتیجه در "شکل‌های 19 و 20" کران بالا و پایین سرعت در میان دیواره و مرکز کانال به یکدیگر نزدیک می‌گردند.

با بررسی نتایج تجربی، دیده می‌شود که داده‌های تجربی غالباً در بین کران بالا و پایین قرار گرفته‌اند. این نشان‌دهنده‌ی این است که عدم قطعیت در نتایج شبیه‌سازی می‌تواند یکی از دلایل یکسان نبودن نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی باشد.

### 5- نتیجه‌گیری

با توجه به پیچیدگی جریان الکترواسموتیک و همچنین وجود پارامترهای غیرقطعی در این جریان، احتمال وجود عدم قطعیت در نتایج شبیه‌سازی جریان الکترواسموتیک وجود دارد. تعیین میزان عدم قطعیت در نتایج شبیه‌سازی عددی بر روی جریان الکترواسموتیک در یک کانال تی‌شکل، هدف این پژوهش در نظر گرفته شد. در ابتدا، شبیه‌سازی جریان الکترواسموتیک با ورودی‌های قطعی صورت گرفت و سپس به منظور اعتبارسنجی، نتایج با داده‌های تجربی مقایسه گردید. دبی جرمی و میدان سرعت به عنوان توابع هدف انتخاب شدند. با انتخاب پارامترهای غیرقطعی، محاسبات مشتقات بر روی توابع هدف به روش الحاقی و تفاضل محدود

- [2] J. C. Helton, F. J. Davis, Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems, *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 81, No. 1, pp. 23-69, 2003.
- [3] H. N. Najm, Uncertainty quantification and polynomial chaos techniques in computational fluid dynamics, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 35-52, 2009.
- [4] D. Xiu, Fast numerical methods for stochastic computations: A review, *Communications in Computational Physics*, Vol. 5, No. 2-4, pp. 242-272, 2009.
- [5] D. Xiu, G. E. Karniadakis, Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos, *Journal of Computational Physics*, Vol. 187, No. 1, pp. 137-167, 2003.
- [6] Q. Wang, Uncertainty Quantification for Unsteady Fluid Flow Using Adjoint-Based Approaches, PhD thesis, Stanford University, pp. 25-30, 2009.
- [7] A. B. Owen, A central limit theorem for Latin hypercube sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, Vol. 54, No. 3, pp. 541-551, 1992.
- [8] Y. Cao, M. Y. Hussaini, T. A. Zang, Exploitation of sensitivity derivatives for improving sampling methods, *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 4, pp. 815-822, 2004.
- [9] A. Dörr, M. Mögerle, M. Schneider, Monte carlo methods in uncertainty quantification, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 58, No. 2, pp. 99-120, 2014.
- [10] J. H. Halton, A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo method, *Siam Review*, Vol. 12, No. 1, pp. 1-63, 1970.
- [11] M. D. McKay, R. J. Beckman, W. J. Conover, Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, pp. 239-245, 1979.
- [12] A. Saltelli, Sensitivity analysis for importance assessment, *Risk Analysis*, Vol. 22, No. 3, pp. 579-590, 2002.
- [13] A. C. Hindmarsh, P. N. Brown, K. E. Grant, S. L. Lee, R. Serban, D. E. Shumaker, C. S. Woodward, Sundials: Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, Vol. 31, No. 3, pp. 363-396, 2005.
- [14] C. Othmer, A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 58, No. 8, pp. 861-877, 2008.
- [15] Y. Cao, S. Li, L. Petzold, R. Serban, Adjoint sensitivity analysis for differential-algebraic equations: The adjoint DAE system and its numerical solution, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 3, pp. 1076-1089, 2003.
- [16] R. M. Errico, What is an adjoint model?, *Bulletin of the American Meteorological Society*, Vol. 78, No. 11, pp. 2577-2591, 1997.
- [17] T. M. Squires, S. R. Quake, Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 77, No. 3, pp. 977, 2005.
- [18] O. Le Maître, O. Knio, R. Ghanem, H. Najm, A stochastic projection method for microchannel flow, *Modeling and Simulation of Microsystems*, WWW. CR.ORG, 2001.
- [19] J. Jamaati, A. R. Farahinia, H. Niazmand, Investigation of mixing in electroosmotic micromixers using Nernst-Planck, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 203-213, 2015. (in Persian)
- [20] K. Seiler, Z. H. Fan, K. Fluri, D. J. Harrison, Electroosmotic pumping and valveless control of fluid flow within a manifold of capillaries on a glass chip, *Analytical Chemistry*, Vol. 66, No. 20, pp. 3485-3491, 1994.
- [21] S. Yao, A. M. Myers, J. D. Posner, K. A. Rose, J. G. Santiago, Electroosmotic pumps fabricated from porous silicon membranes, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 15, No. 3, pp. 717-728, 2006.
- [22] R. F. Probstein, *Physicochemical Hydrodynamics: An Introduction*, Second Edition, pp. 305-320, New York: Wiley, 2005.
- [23] M. Kim, A. Beskok, K. Kihm, Electro-osmosis-driven micro-channel flows: A comparative study of microscopic particle image velocimetry measurements and numerical simulations, *Experiments in Fluids*, Vol. 33, No. 1, pp. 170-180, 2002.
- [24] A. A. Aleksandrov, E. V. Dzhuraeva, V. F. Utenkov, Viscosity of aqueous solutions of sodium chloride, *High Temperature*, Vol. 50, No. 3, pp. 354-358, 2012.
- [25] S. Sawamura, Y. Yoshimura, K. Kitamura, Y. Taniguchi, Effects of pressure, temperature, and concentration on the viscosity of an aqueous solution of sodium chloride, *The Journal of Physical Chemistry*, Vol. 96, No. 13, pp. 5526-5529, 1992.
- [26] J. H. Jiang, D. L. Wu, Ice and water permittivities for millimeter and sub-millimeter remote sensing applications, *Atmospheric Science Letters*, Vol. 5, No. 7, pp. 146-151, 2004.
- [27] R. A. Hart, A. K. da Silva, Experimental thermal-hydraulic evaluation of constructal microfluidic structures under fully constrained conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, No. 15-16, pp. 3661-3671, 2011.
- [28] K. Kim, R. Taylor, J. Y. Sim, S. J. Park, J. Norman, G. Fajardo, D. Bernstein, B. L. Pruitt, Calibrated micropost arrays for biomechanical characterization of cardiomyocytes, *Micro & Nano Letters*, Vol. 6, No. 5, pp. 317, 2011.
- [29] A. Karchani, R. S. Myong, Convergence analysis of the direct simulation Monte Carlo based on the physical laws of conservation, *Computers & Fluids*, Vol. 115, No. 1, pp. 98-114, 2015.
- [30] F. Pukelsheim, The three sigma rule, *The American Statistician*, Vol. 48, No. 2, pp. 88-91, 1994.

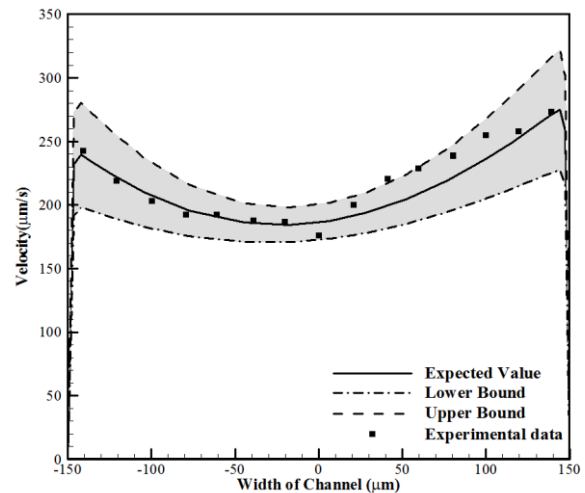


Fig. 22 Expected value, upper and lower bound of velocity at D-D

شکل 22 میانگین، کران بالا و پایین سرعت در مقطع D-D

الحاقی نشان داد که پارامترهای هندسی به همراه لزجت سیال بیشترین و دما به همراه چگالی سیال کمترین تأثیر را بر روی نتایج دارند. نمونه‌برداری از 9 پارامتر غیرقطعی به روش ابرمکعب لاتین انجام گردید و شبیه‌سازی مونت کارلو در 9 حالت با تعداد نمونه‌های مختلف صورت گرفت. پس از همگرایی شبیه‌سازی در 5000 نمونه، نتایج در این تعداد نمونه ارائه گردید. در نهایت میزان عدم قطعیت در دبی جرمی تا 12.2% و در سرعت به صورت میانگین 6.3% محاسبه گردید. با توجه به قابل ملاحظه بودن میزان عدم قطعیت در نتایج، می‌توان این نتیجه را گرفت که تحلیل اثر پارامترهای غیرقطعی بر روی جریان الکترواسموتیک می‌بایست در کاربردهای مهندسی صورت بگیرد.

#### 6- فهرست علائم

$dx$	خطای ساخت در عرض کانال عمودی (m)
$dy$	خطای ساخت در عرض کانال افقی (m)
$e$	بار الکترون (As)
$E$	میدان الکتریکی ( $\text{kgms}^{-3}\text{A}^{-1}$ )
$K_b$	ثابت بولتزمن ( $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$ )
$n_0$	غلظت یونی سیال (mol)
$P$	فشار ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )
$T$	دما (K)
$U$	سرعت ( $\text{ms}^{-1}$ )
$Z$	ظرفیت

#### علائم یونانی

$\epsilon$	ثابت دی‌الکتریک
$\zeta$	پتانسیل زتا ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$ )
$\mu$	لزجت دینامیکی ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ )
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\phi$	پتانسیل الکتریکی خارجی ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$ )
$\psi$	پتانسیل الکتریکی در EDL ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$ )

#### 7- مراجع

- [1] M. Eldred, B. Adams, K. Copps, B. Carnes, P. Notz, M. Hopkins, J. Wittwer, Solution-verified reliability analysis and design of compliant micro-electro-mechanical systems, *Proceedings of the 48th Structural Dynamics, and Materials Conference*, pp. 2881-2896, 2007.