



## تحلیل ناپایداری پوسته‌های استوانه‌ای مشبک بهینه وزنی بر اساس یک مدل جدید

سعید کلانتری<sup>1</sup>، محمد فدایی<sup>2\*</sup>

1- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

2- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی قم، قم

\* قم، صندوق پستی 37195-1519، fadaee@qut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 10 خرداد 1393  
پذیرش: 12 مرداد 1393  
ارائه در سایت: 23 مهر 1393  
کلید واژگان:  
ناپایداری پوسته‌های استوانه‌ای  
تئوری پوسته‌های نازک فلز  
پوسته استوانه مشبک  
بار محوری  
مدل المان محدود

### چکیده

در این مقاله، یک روش تحلیلی برای بررسی کماتش خطی سازه‌های تقویت شده با شبکه منظم متساوی‌الاضلاع ارائه شده است. پوسته مشبک تحت بار محوری قرار دارد. شرط مرزی پوسته در دو طرف، تکیه‌گاه ساده است. معادلات تعادل سازه با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها و شبکه منظم بر مبنای یک روش معادل‌سازی جدید ارائه شده است. ماتریس سفتی کل پوسته از جمع ماتریس سفتی پوسته و ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی‌های مشخص استخراج می‌شود. در این تحلیل، با استفاده از روش انرژی، معادلات تعادل پوسته مشبک با استفاده از فرضیات تئوری پوسته فلز به دست آمده است. برای حل مسئله، از روش تحلیلی ناوبر استفاده شده است. به منظور اعتبارسنجی و صحت‌گذاری بر نتایج، از یک مدل سه‌بعدی المان محدود ایجاد شده در نرم‌افزار انسیس استفاده شده است. نتایج حاکی از دقت بالای روش حاضر در قیاس با دیگر روش‌هاست. در پایان، تاثیر هر یک از پارامترهای هندسی بر روی بار بحرانی کماتش استوانه مشبک بررسی شده است. روش حاضر می‌تواند، به عنوان یک مدل دقیق و پایدار، توسط طراحان و مهندسان مورد استفاده قرار گیرد که منجر به بالا رفتن کیفیت طراحی آن‌ها خواهد شد.

## Stability analysis of weight optimum waffle cylindrical shells -A new approach

Saeed Kalantari<sup>1</sup>, Mohammad Fadaee<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

2- Department of Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran

\* P.O.B. 37195-1519 Qom, fadaee@qut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 31 May 2014  
Accepted 03 August 2014  
Available Online 15 October 2014

#### Keywords:

Buckling of Cylindrical Shell  
the Thin Shell Theory of Flugge  
Waffle Cylindrical Shell  
Finite Element Analysis  
Axial Loading

### ABSTRACT

In this article, an analytical procedure is presented for prediction of linear buckling load of a waffle cylinder stiffened by an array of equilateral triangles. The grid stiffened shell is subjected to axial loading condition. The shell has simply supported boundary conditions at its two edges. The equivalent stiffness of the stiffener and skin is computed by superimposing between the stiffness contributions of the stiffeners and skin using a new method. Total stiffness matrix of the shell is composed of stiffness matrix of skin and grids with special volume fractions. In this analysis, using energy method, equilibrium equations of the grid stiffened shell are extracted based on the thin shell theory of Flugge. The Navier solution is applied to solve the problem. A 3-D finite element model was also built in ANSYS software to show the accuracy and validity of the present solution. The results show that the presented new approach has high accuracy and precision. The effect of various geometrical parameters on the critical buckling load is investigated. Due to the stability and accuracy, the presented method can be used by many designers and engineers to improve design quality.

### 1- مقدمه

جهت، در صنایع هوافضا کاربرد بالایی دارند. سازه مشبک، سازه‌ای است که در آن شبکه‌ای از تقویت‌کننده‌ها به صورت یک پارچه، با یک پوسته ساخته می‌شوند. یکی از مسایل مهم در این گونه سازه‌ها بررسی رفتار کماتشی آن‌هاست [1].

امروزه، این گونه از سازه‌ها کاربرد زیادی در صنایع هوافضا دارند، به طوری که برای اولین بار، در موشک‌های دلتا<sup>1</sup> و ساترن<sup>2</sup> از سازه‌های مشبک استفاده شد. یکی از اولین کتابچه‌های طراحی سازه‌های مشبک، در سال

پوسته‌های استوانه‌ای مدور معمولاً در سازه‌هایی همچون سفینه‌ها، موشک‌ها، سیلواها، خطوط لوله انتقال گاز و نفت، مخازن، اتومبیل‌ها و برخی سازه‌های دریایی استفاده می‌شوند. این سازه‌ها، در حین باربری، اغلب تحت فشار محوری قرار دارند. به علاوه، این سازه‌ها اغلب دارای ناپیوستگی‌های هندسی همچون تقویتی‌ها و گشودگی‌ها هستند. این ناپیوستگی‌ها می‌توانند تمرکز تنش ذاتی را در سازه موجب شوند و متعاقباً بر روی پایداری سازه‌ها تأثیر بگذارند.

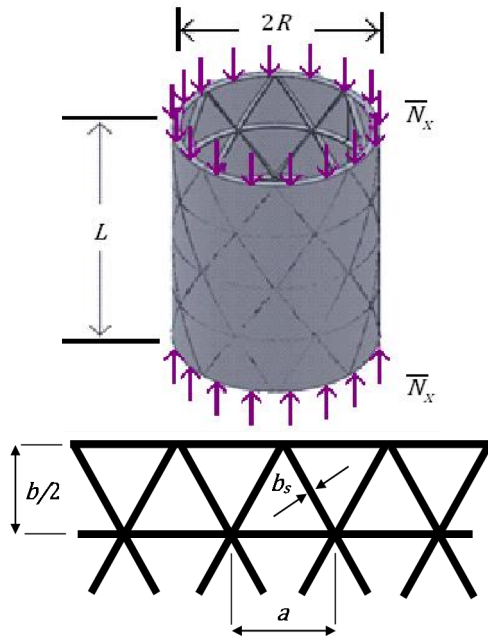
سازه‌های تقویت شده مشبک، به عنوان یک سازه بهینه، دارای نسبت استحکام به وزن بالایی در مقابل دیگر سازه‌های مشابه هستند. به همین

1- Delta  
2- Saturn

Please cite this article using:

S. Kalantari, M. Fadaee, Stability analysis of weight optimum waffle cylindrical shells -A new approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 177-184, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:



شکل 1 هندسه پوسته استوانه‌ای مشبک

هندسه مسئله در شکل 1 قابل مشاهده است که در آن پوسته استوانه‌ای تقویت شده با شبکه منظم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با طول  $L$ ، شعاع  $R$  و ضخامت پوسته  $t$  نشان داده شده است. پوسته مشبک تحت نیروی محوری  $\bar{N}_x$  قرار دارد. با توجه به شکل 1، ارتفاع و  $b_s$  عرض تقویت کننده‌هاست. همچنین، طول ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است.

## 2-2- انتخاب المان معادل

برای تعیین ماتریس سفتی تقویت کننده‌ها، ابتدا یک سلول واحد به گونه‌ای انتخاب می‌شود که معرف خصوصیات کل ساختار تقویت شده باشد (شکل 2). در این روند، عکس العمل‌های نیرویی و ممان تقویت کننده‌ها بر روی پوسته، به‌عنوان تابعی از انحناها و کرنش‌های صفحه میانی پوسته،  $(\epsilon_x^0, \epsilon_\theta^0, \epsilon_{x\theta}^0, k_x, k_\theta, k_{x\theta})$  مورد تحلیل قرار می‌گیرد [5]. در این روش، فرضیاتی در نظر گرفته شده است که عبارت‌اند از:

- 1) با توجه به این که ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تقویت کننده‌ها بسیار کوچک است، تقویت کننده‌ها فقط بارهای در راستای محورشان را تحمل می‌کنند.
  - 2) کرنش، در سرتاسر سطح مقطع عرضی تقویت کننده‌ها، یکنواخت است.
- با توجه به شکل 2، نیروی داخلی تمامی تقویت کننده‌ها، هم‌جهت با محور مختصات انتخابی نیست. لذا، باید از ماتریس تبدیل استفاده شود. بنابراین، رابطه بین کرنش‌ها در دستگاه کلی استوانه‌ای  $(x-\theta)$  و دستگاه مستقر بر روی تقویت کننده  $(l-t)$  به‌صورت معادله (1) است:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \epsilon_t \\ \epsilon_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$c$  و  $s$  به ترتیب کسینوس و سینوس زاویه  $\phi$  است که زاویه چرخش سطح مقطع تقویت کننده نسبت به محور استوانه است.

## 2-2-1- تحلیل نیرویی المان معادل

با توجه به المان انتخاب شده در شکل 2، نیروهای اعمالی بر یک سلول واحد،

1973، توسط شرکت مک دانل داگلاس<sup>1</sup> منتشر شد. این تحقیق تحت نظارت سازمان فضایی آمریکا<sup>2</sup> انجام شده است. در این تحقیق، با استفاده از روش تحلیل نیرویی، ماتریس سفتی تقویتی‌ها به دست می‌آید. سپس، با ماتریس سفتی پوسته، جمع و در نهایت، ضخامت معادل و مدول الاستیسیته معادل برای سازه تقویت شده به دست می‌آید [2].

یکی از نکات مهم و اساسی در تحلیل سازه‌های مشبک مدل کردن صحیح تقویت کننده‌هاست. روش‌های مختلفی برای مدل کردن تقویت کننده‌ها وجود دارد. یکی از این مدل‌ها، توسط وازلین و لوتین ارائه شده که در این مدل، ریب‌ها<sup>3</sup> با تابع دیراک<sup>4</sup> مدل شده‌اند. البته این روش توسط محققان ذکر شده، با استفاده از المان محدود، بهبودهای زیادی پیدا کرده است [3]. پایداری الاستیک سازه‌های کامپوزیتی مشبک با کاربرد هوافضایی توسط فرولونی و همکارانش بررسی شده است. در این تحقیق، با استفاده از المان پوسته هشت نقطه‌ای موجود در نرم‌افزار آنسیس<sup>5</sup>، مسئله تحلیل شده است [4]. یکی از روش‌ها، جهت مدل کردن تقویت کننده‌ها و پوسته، توسط کیدان ارائه شده است. در این روش، عکس العمل‌های نیرویی و ممان تقویت کننده‌ها بر روی پوسته، به‌عنوان تابعی از انحناها و کرنش‌های صفحه میانی پوسته، در نظر گرفته می‌شود [5]. هو و گرامول رفتار کمانش خطی پوسته استوانه‌ای مشبک را تحت بار محوری بررسی کرده‌اند [6]. قاسمی و همکارانش بار کمانش بحرانی یک پوسته کامپوزیتی مشبک لوزی تحت بار محوری را بررسی کرده‌اند [7]. رن و همکارانش کمانش خطی استوانه‌های کامپوزیتی مشبک را توسط سه روش عددی و همچنین آزمون‌های آزمایشگاهی بررسی کرده‌اند [8]. دقت نه‌چندان مناسب در نتایج موجود در تمامی تحقیقات قبلی، در ارتباط با تحلیل پایداری استوانه‌های مشبک با ساختار مثلث متساوی‌الاضلاع، نیاز به ارائه یک مدل دقیق‌تر را نمایان می‌سازد. از این رو، این مقاله سعی بر ارائه چنین مدلی دارد.

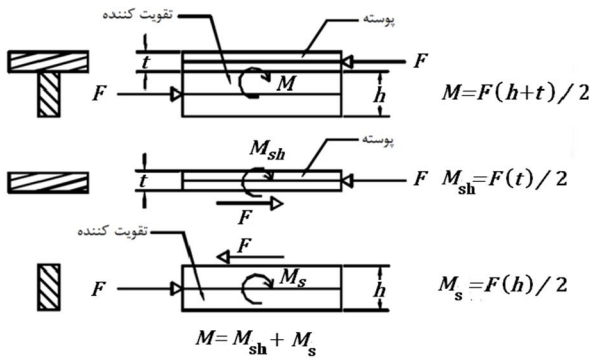
در این مقاله، تحلیل کمانشی سازه‌های تقویت شده با شبکه منظم متساوی‌الاضلاع، تحت بار محوری و برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته است. جهت استخراج معادلات تعادل، ابتدا ماتریس سفتی سازه مشبک به دست آمده است. این هدف، به‌وسیله یک روش تحلیلی بر مبنای تعیین ماتریس سفتی معادل در پوسته استوانه‌ای تقویت شده مشبک انجام می‌شود. یک سلول از شبکه انتخاب و با وارد کردن نیروها و ممان‌های ناشی از تقویت کننده‌های روی پوسته، ماتریس سفتی معادل تقویت کننده‌ها به دست می‌آید. سپس، ماتریس سفتی کل، از جمع ماتریس سفتی پوسته با ضریب یک و ماتریس سفتی تقویت کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت کننده‌ها به حجم کل، استخراج می‌شود. این روش جمع کردن دو ماتریس سفتی، برای اولین بار، به‌عنوان یک نگرش جدید از سوی نویسندگان ارائه شده که نتایج بسیار مطلوبی را در پی داشته است. در ادامه، با استفاده از روش انرژی، معادلات تعادل پوسته مشبک، بر مبنای تئوری فلوگه<sup>6</sup> استخراج شده است. سپس، ماتریس سفتی به دست آمده، در معادلات حرکت جایگذاری شده و معادلات حرکت بهبود یافته استوانه تقویت شده مشبک به دست می‌آید.

## 2- استخراج روابط و معادلات ریاضی حاکم

### 2-1- هندسه مسئله

برای استخراج معادلات ریاضی، ابتدا به بررسی هندسه شکل پرداخته می‌شود.

1- Mc Donnell Douglas  
2- NASA  
3- Ribs  
4- Dirac function  
5- ANSYS  
6- Flugge theory



شکل 4 گشتاور ایجاد شده توسط تقویت کننده‌ها

3-2- استخراج ماتریس سفتی سازه

2-3-1- ماتریس سفتی شبکه تقویت کننده‌ها

در این بخش، ماتریس سفتی شبکه تقویت کننده استخراج می‌شود. معادلات (2) تا (4) مشخص کننده میزان نیرو بر واحد طول و معادلات (5) تا (7) معرف ممان بر واحد طول هستند که با جمع‌بندی آن‌ها، ماتریس سفتی ناشی از شبکه تقویت کننده‌ها به صورت رابطه (8) به دست می‌آید. بالانویس  $st$  مشخص کننده سهم تقویت کننده‌هاست.

$$\begin{bmatrix} N_x^{st} \\ N_\theta^{st} \\ N_{x\theta}^{st} \\ M_x^{st} \\ M_\theta^{st} \\ M_{x\theta}^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{st} & B_{ij}^{st} \\ B_{ij}^{st} & D_{ij}^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^{st} = AE \begin{bmatrix} \frac{2c^3}{a} & \frac{2s^2c}{a} & 0 \\ \frac{2c^2s}{b} & \frac{(2s^3+2)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2c^2s}{b} \end{bmatrix}$$

$$B_{ij}^{st} = AE \begin{bmatrix} \frac{tc^3}{a} & \frac{ts^2c}{a} & 0 \\ \frac{tc^2s}{b} & \frac{(2s^3+2)t}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{tc^2s}{b} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^{st} = AE \begin{bmatrix} \frac{t^2c^3}{2a} & \frac{s^2ct^2}{2a} & 0 \\ \frac{sc^2t^2}{2b} & \frac{(2s^3+2)t}{4b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s^2ct^2}{2b} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ماتریس بیان شده در رابطه (8)، بر مبنای انحنا و کرنش‌های صفحه میانی پوسته است. زیر ماتریس‌های  $A_{ij}^{st}$  و  $B_{ij}^{st}$  به ترتیب زیر ماتریس کششی، کوپلینگ و خمشی هستند. در اولین نگاه، ماتریس رابطه (8) ممکن است نامتقارن به نظر برسد، اما به سبب رابطه هندسی بین پارامترهای  $a, b, \sin(\phi)$  و  $\cos(\phi)$ ، این مقادیر با هم برابر هستند.

قابل استحصال است. طبق فرضیات ذکر شده و با توجه به شکل 3، نیروها بر واحد طول یعنی  $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$  به صورت معادلات (2) تا (4) به دست می‌آید.

$$N_x = \frac{AE}{b} \left( 2c^3\varepsilon_x^0 + 2c^3k_x \left( \frac{t}{2} \right) + 2cs^2\varepsilon_x^0 + 2cs^2k_x \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (2)$$

$$N_\theta = \frac{AE}{b} \left( 2sc^2\varepsilon_x^0 + 2sc^2k_x \left( \frac{t}{2} \right) + (2s^3+2)\varepsilon_x^0 + (2s^3+2)k_x \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (3)$$

$$N_{x\theta} = \frac{AE}{b} \left( 2sc^2\varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2k_{x\theta} \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (4)$$

که در آن  $E$  و  $A$  به ترتیب سطح مقطع تقویت کننده‌ها و مدول الاستیسیته آن‌ها است.

2-2-2- تحلیل گشتاور المان معادل

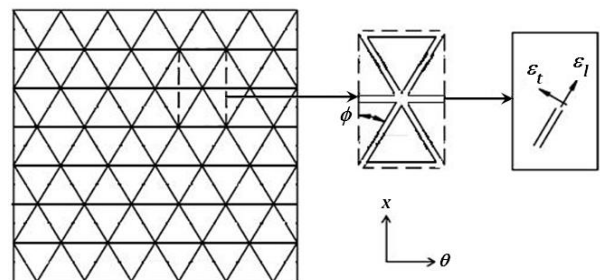
به واسطه وجود نیرو در تقویت کننده‌ها و اختلاف ارتفاع بین آن‌ها و نیروی داخل پوسته، ممان تولید می‌شود که این موضوع در شکل 4 به خوبی نمایش داده شده است.

شبهه تحلیل نیرو، می‌توان گشتاورهای موجود در المان را نیز به صورت معادلات (5) تا (7) استخراج کرد:

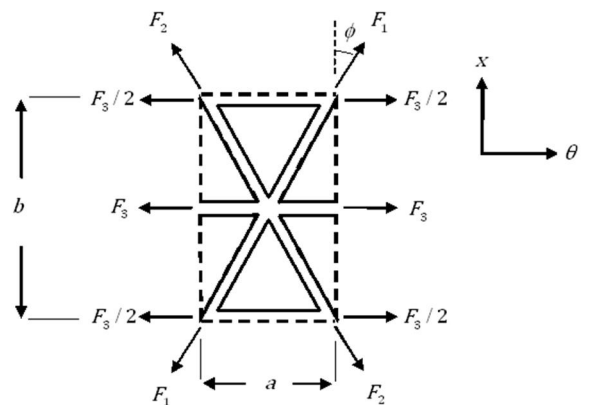
$$M_x = \frac{AET}{b} \left( c^3\varepsilon_x^0 + c^3k_x \left( \frac{t}{2} \right) + cs^2\varepsilon_x^0 + cs^2k_x \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (5)$$

$$M_\theta = \frac{AET}{b} \left( sc^2\varepsilon_x^0 + sc^2k_x \left( \frac{t}{2} \right) + (s^3+1)\varepsilon_x^0 + (s^3+1)k_x \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (6)$$

$$M_{x\theta} = \frac{AET}{b} \left( sc^2\varepsilon_{x\theta}^0 + sc^2k_{x\theta} \left( \frac{t}{2} \right) \right) \quad (7)$$



شکل 2 سلول واحد و سیستم مختصات



شکل 3 توزیع نیرو

2-3-2- ماتریس سفتی پوسته

پوسته مورد استفاده در اینجا از یک ماده همسانگرد ساخته شده و بنابراین ماتریس سفتی آن به صورت رابطه (9) است [9]:

$$\begin{bmatrix} N_x^{sh} \\ N_\theta^{sh} \\ N_{x\theta}^{sh} \\ M_x^{sh} \\ M_\theta^{sh} \\ M_{x\theta}^{sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{sh} & B_{ij}^{sh} \\ B_{ij}^{sh} & D_{ij}^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix}, \quad A_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} Et & Etv & 0 \\ \frac{Et}{1-\nu^2} & \frac{Etv}{1-\nu^2} & 0 \\ Etv & \frac{Et}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

$$B_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu^2)} & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et^3}{24(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در آن  $\nu$  ضریب پواسون پوسته است. بالابویس sh مشخص کننده سهم پوسته است.

2-3-3- ماتریس سفتی کل سازه

روش‌های مختلفی برای تعیین ماتریس سفتی وجود دارد که در این مقاله، ماتریس سفتی کل، از جمع ماتریس سفتی پوسته با ضریب یک و ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت‌کننده‌ها به حجم کل، به دست می‌آید. دلیل این پیشنهاد، آن است که پوسته، به طور کامل و با تمامی حجم خود با نیروی محوری فشاری درگیر بوده، درحالی که شبکه تقویتی، به علت گسسته بودن، باید به نسبت حجم خود درگیر شود. بنابراین، برای ماتریس سفتی کل می‌توان معادله (10) را نوشت:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st} A^{st} + V_{sh} A^{sh} & V_{st} B^{st} + V_{sh} B^{sh} \\ V_{st} B^{st} + V_{sh} B^{sh} & V_{st} D^{st} + V_{sh} D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k \end{bmatrix}$$

$$V_{sh} = 1, \quad V_{st} = \frac{V_{st}}{V_{sh} + V_{st}} \quad (10)$$

که در آن  $V_{st}$  و  $V_{sh}$  به ترتیب حجم مربوط به پوسته و تقویت‌کننده‌ها هستند. بنابراین، می‌توان برای کل سازه معادله (11) را نوشت:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{33}, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{33}, D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$  و  $D_{33}$  از معادله (12) به دست می‌آید.

$$A_{11} = \frac{Et}{1-\nu^2} + V_{st} \times AE \times \frac{2c^3}{a} \quad B_{11} = V_{st} \times AE \times \frac{c^3 t}{a}$$

$$A_{12} = \frac{Etv}{1-\nu^2} + V_{st} \times AE \times \frac{2s^2 c}{a}$$

$$A_{22} = \frac{Et}{1-\nu^2} + V_{st} \times AE \times \frac{(2s^3 + 2)}{a} \quad B_{22} = V_{st} \times AE \times \frac{(2s^3 + 2)t}{2b}$$

$$A_{33} = \frac{Et}{2(1+\nu)} + V_{st} \times AE \times \frac{2c^2 s}{b} \quad B_{33} = V_{st} \times AE \times \frac{c^2 st}{b}$$

$$D_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_{st} \times AE \times \frac{c^3 t^2}{2a}$$

$$D_{12} = \frac{Et^3 \nu}{12(1-\nu^2)} + V_{st} \times AE \times \frac{s^2 c t^2}{2a}$$

$$D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_{st} \times AE \times \frac{(2s^3 + 2)t^2}{4b}$$

$$D_{33} = \frac{Et^3}{24(1+\nu)} + V_{st} \times AE \times \frac{c^2 s t^2}{2b} \quad (12)$$

2-4- استخراج معادلات تعادل

در این بخش، با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون، معادلات تعادل حاکم بر استوانه مشبک، استخراج می‌شود. براساس اصل همپلتون، کل انرژی پتانسیل جسم الاستیک در حالت تعادل، مینیمم خواهد شد [6]. برپایه این اصل، می‌توان معادله (13) را نوشت [9]:

$$\delta \Pi = \delta U_e - \delta V = 0 \quad (13)$$

که در آن  $U_e$  انرژی کرنشی الاستیک، با فرض  $\theta = y/R$ ، به صورت معادله (14) تعریف می‌شود [9]:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz dy dx \quad (14)$$

و مقدار کار نیروی محوری به صورت معادله (15) خواهد بود [9]:

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \bar{N}_x [U_x^2 + V_x^2 + W_x^2] dy dx \quad (15)$$

که در آن  $U, V, W$  به ترتیب جابه‌جایی صفحه میانی پوسته در راستاهای  $x, y, z$  بوده و  $\bar{N}_x$  نیروی محوری کمانشی بر واحد طول است.

مقادیر  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  و  $k_x, k_y, k_{xy}$  در رابطه (11)، طبق تئوری فلوگه، به صورت معادله (16) تعریف می‌شوند [10]:

$$\varepsilon_x^0 = U_{,x} \quad k_x = -W_{,xx}$$

$$\varepsilon_y^0 = V_{,y} + \frac{1}{R} W \quad k_y = -W_{,yy} - \frac{W}{R}$$

$$\gamma_{xy}^0 = V_{,x} + U_{,y} \quad k_{xy} = \frac{V_{,x}}{R} - \frac{U_{,y}}{R} - 2W_{,xy} \quad (16)$$

با اعمال اصل تغییرات بر روی رابطه (13) و استفاده از روابط (14) تا (16)، معادلات تعادل پوسته به شکل (17-الف) و (17-ب) و (17-ج) خواهد شد:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{R \partial y} - \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (17-الف)$$

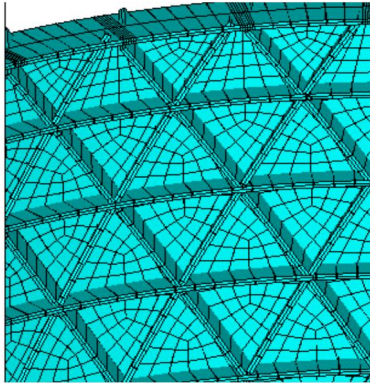
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{R \partial x} - \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (17-ب)$$

$$\frac{N_y}{R} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{M_y}{R^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial x \partial y} - \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (17-ج)$$

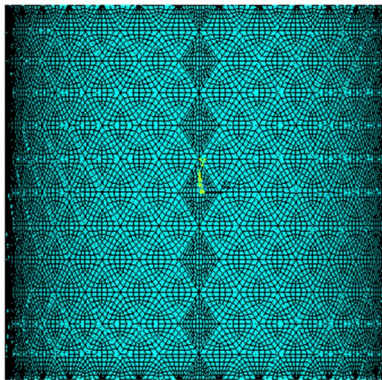
حال با قرار دادن معادلات (16) در رابطه (11) و سپس استفاده از نتیجه حاصل در معادلات تعادل (17) و استفاده از تغییر متغیر  $\theta = y/R, \varphi = x/R$ ، می‌توان معادلات تعادل را به شکل نهایی (18-الف)، (18-ب) و (18-ج) بازنویسی کرد:

### 3-1- مدل‌سازی و شبکه‌بندی

پس از دریافت ورودی‌ها، ابتدا استوانه ساده با استفاده از ابعاد داده شده، توسط کاربر ساخته می‌شود. با توجه به اینکه استوانه مورد تحلیل، با یک شبکه منظم مثلثی متساوی‌الاضلاع، تقویت شده است. در مرحله بعد، تقویت-کننده‌های مورب با زاویه 60 درجه، به مدل اضافه می‌شود. در مرحله سوم، ریب‌ها یا تقویت‌کننده‌های افقی، به مدل اضافه شده و مدل، نهایی می‌شود (شکل 5). همان‌طور که در بالا به آن اشاره شد، اندازه ریب‌ها (طول و عرض) و اندازه مثلث‌ها، توسط کاربر قابل تغییر است که با توجه به طراحی مورد نیاز، قابل تغییر است.



شکل 5 المان‌بندی شبکه منظم



شکل 6 نمونه نهایی پوسته استوانه‌ای مشبک المان‌بندی شده

جدول 1 بررسی تاثیر ابعاد المان‌ها بر روی همگرایی بار بحرانی

اندازه المان	بار بحرانی کماتش (تن)
0/04	3713
0/03	3595
0/025	3561
0/02	3561
0/017	3550
0/016	3550
0/015	3550

جهت مدل کردن پوسته استوانه، از المان پوسته 63<sup>1</sup> و برای مدل کردن تقویت-کننده‌ها، از المان تیر 188<sup>2</sup> استفاده شده است. جنس پوسته از آلایژ آلومینیوم با مدول الاستیسیته 72 گیگا پاسکال و نسبت پواسون 0/3 در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که جنس نیز، توسط کاربر می‌تواند در کد تغییر یابد.

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) + (A_{12} + A_{33} - \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} + (A_{12} - \frac{B_{12}}{R}) \frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{B_{11}}{R} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} \right) + (-\frac{B_{12}}{R} - \frac{2B_{33}}{R} + \frac{2D_{33}}{R}) \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^2 \partial \phi} + (A_{33} - \frac{2B_{33}}{R} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) \quad (18-الف)$$

$$A_{22} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + (-\frac{B_{12}}{R} - \frac{2B_{33}}{R} - \frac{2D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^2 \partial \theta} + (A_{22} - \frac{B_{22}}{R}) \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{B_{22}}{R} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} \right) + (A_{33} + \frac{2B_{33}}{R} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + (A_{12} + A_{33} - \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial \theta} = \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) \quad (18-ب)$$

$$-\frac{B_{11}}{R} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial \phi^3} \right) - (\frac{B_{12}}{R} + \frac{2B_{33}}{R} + \frac{2D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^3 V}{\partial \phi^2 \partial \theta} + (-\frac{2B_{12}}{R} + \frac{2D_{12}}{R^2}) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{D_{11}}{R^2} \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \phi^4} \right) + (\frac{2D_{12}}{R^2} + \frac{4D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^4 W}{\partial \phi^2 \partial \theta^2} + (A_{12} - \frac{B_{12}}{R}) \frac{\partial U}{\partial \phi} + (A_{22} - \frac{B_{22}}{R}) \frac{\partial V}{\partial \theta} + (A_{22} - \frac{2B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^4}) W + (-\frac{2B_{22}}{R} + \frac{2D_{22}}{R^2}) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{B_{22}}{R} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} \right) - (\frac{B_{12}}{R} + \frac{2B_{33}}{R} - \frac{2D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^2 \partial \phi} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} = \bar{N}_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) \quad (18-ج)$$

برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، توابع جابه‌جایی پوسته به صورت معادله (19) در نظر گرفته می‌شوند [11]:

$$U(\phi, \theta) = \cos(m\pi \frac{R}{L} \phi) \cos(n\theta) \\ V(\phi, \theta) = \sin(m\pi \frac{R}{L} \phi) \sin(n\theta) \\ W(\phi, \theta) = \sin(m\pi \frac{R}{L} \phi) \cos(n\theta) \quad (19)$$

که در آن  $m, n$  به صورت رابطه (20) خواهد بود.

$$m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

حال با قرار دادن روابط (19) در معادلات حرکت (18) می‌توان مقدار بار کماتش بحرانی را به دست آورد.

### 3- تحلیل المان محدود

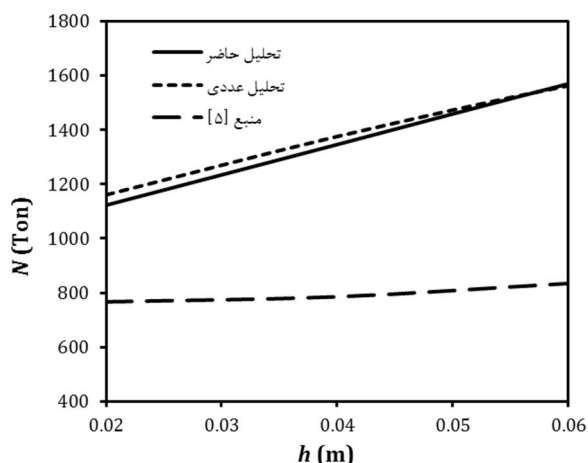
یک مدل المان محدود سه‌بعدی با استفاده از نرم‌افزار انسیس نسخه 11، جهت تحلیل استوانه تقویت شده مشبک ایجاد شده است. در این مدل، ابتدا کل استوانه ایجاد شده است. سپس، تقویت‌کننده‌های عرضی به آن اضافه شده و در نهایت، جهت تشکیل شبکه منظم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، تقویت‌های مورب، به استوانه مورد نظر اضافه می‌شود.

1- Shell-63 element  
2- Beam-188 element

تقویت‌کننده‌ها با ضخامت 5 میلی‌متر در نظر گرفته شده است که برای ضخامت پوسته 6 میلی‌متر، نتایج ارائه شده است. طول ضلع مثلث‌های تقویتی نیز برابر 10 سانتی‌متر است. بار بحرانی براساس تن و ارتفاع تقویت‌کننده‌ها برحسب متر است. در شکل (8)، از یک استوانه با قطر و طول نیم متر استفاده شده است. در این مورد هم ضخامت پوسته 6 میلی‌متر و طول ضلع مثلث‌های تقویتی نیز برابر 10 سانتی‌متر است.

با دقت در نتایج شکل‌های 7 و 8، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، میزان باربری سازه افزایش می‌یابد که این افزایش به دلیل افزایش کمی ماتریس سفتی کل سازه است. نکته‌ای که مخصوصاً در نمودارها باید مورد تأمل قرار گیرد، نتایج حاصل از منبع [5] است که علی‌رغم انتظار، در ابتدا با افزایش  $h$ ، بار بحرانی کاهش می‌یابد. این موضوع به این دلیل است که ماتریس سفتی پوسته، از نظر کمی، بزرگ‌تر از ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها است.

بنابراین، هنگامی که حجم تقویت‌کننده‌ها کم باشد، به دلیل کوچک‌تر از یک بودن ضریب ماتریس سفتی پوسته و کوچک بودن ضریب ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها، ماتریس سفتی کل کاهش می‌یابد. در نتیجه، بار بحرانی سازه کاهش می‌یابد. این رفتار، یکی از نقایص اصلی روش دوم یا همان منبع [5] بوده که اهمیت ارائه یک روش جدید جایگزین را مشهود می‌سازد. بنابراین، روش سوم یا تحلیل حاضر ارائه شد. در روش حاضر، ضریب ماتریس سفتی پوسته، یک در نظر گرفته می‌شود و با ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها، با ضریب حجم تقویت‌کننده‌ها به حجم کل، جمع می‌شود. با توجه به نتایج حاصل از المان محدود، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که روش سوم (روش حاضر)، روشی مناسب و کارآمد است. همچنین، شایان ذکر است که با افزایش ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، اختلاف بین دو روش المان محدود و روش حاضر بیشتر شده و نتایج روش المان محدود کمتر از نتایج روش حاضر است. دلیل آن است که با افزایش ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، ممان ایجاد شده توسط تقویتی‌ها بیشتر شده و روش میانگین‌گیری دچار خطا می‌شود. در شکل (8)، هنگامی که ارتفاع تقویت‌کننده‌ها به سمت صفر میل می‌کند، نتیجه حاصل از سه روش به یکدیگر نزدیک می‌شود. این نکته نشان‌دهنده صحت و پایداری نتایج روش حاضر است.



شکل 7 تاثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری برای

$$L = 1 \text{ m}, R = 0.5 \text{ m}, t = 0.006 \text{ m}$$

با توجه به پیچیدگی مدل و تاثیر چگونگی المان‌بندی بر روی دقت جواب‌ها، در این تحقیق، برای حل مسئله، از یک المان‌بندی منظم استفاده شده است و این المان‌بندی در دو مرحله انجام می‌گیرد. در مرحله اول، پوسته المان‌بندی می‌شود و مرحله دیگر، المان‌بندی تقویت‌کننده‌ها انجام می‌گیرد (شکل 6). اندازه المان‌ها نیز توسط کاربر قابل تنظیم است. جدول 1 همگرایی المان‌بندی انجام شده بر روی یک استوانه با قطر و طول یک متر و تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع پنج سانتیمتر و عرض پنج میلیمتر را نشان می‌دهد. پس از مشخص شدن اندازه مناسب برای ابعاد المان‌ها، ب-طوری که این ابعاد در نتایج تاثیرگذار نیستند، این مقدار برای کلیه تحلیل‌ها، به‌عنوان مبنا قرار گرفته می‌شود.

### 3-2- شرایط مرزی

مسئله مورد نظر، در حالت شرط مرزی تکیه‌گاه ساده تحلیل شده است. شایان ذکر است شرایط مرزی به المان‌های واقع در دو لبه انتهایی اعمال می‌شود. برای حالت تکیه‌گاه ساده، جابه‌جایی این المان‌ها، در جهت‌های عرضی و محیطی یعنی  $V$  و  $W$  و چرخش آن‌ها در جهت  $Y$  بسته شده است.

### 4- نتایج و تفسیر آن‌ها

در این بخش، نتایج و بررسی‌ها بر روی بار بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای مشبک  $\bar{N}_x$  ارائه می‌شود. در تمامی نمودارها، بار بحرانی برحسب تن و با استفاده از رابطه  $N = 2\pi R \bar{N}_x / 10000$  به دست می‌آید. جهت بررسی جامع‌تر نتایج، پارامترهای مختلفی از سازه انتخاب و تاثیر آن‌ها بر پایداری سازه تحلیل شده است. در بررسی تاثیر هر پارامتر انتخابی بر روی بار کماتش محوری، سه روش مختلف بررسی شده که عبارت‌اند از:

**روش اول** تحلیل حاصل از المان محدود است که به تفصیل بیان شد. نتایج حاصل از این روش، با نام تحلیل عددی، در نمودارها ارائه شده است.  
**روش دوم** تحلیل بر مبنای حل معادلات تعادل پوسته مشبک با استفاده از روش ارائه شده در منبع [5] است. نتایج حاصل از این روش، با عنوان منبع [5]، در نمودارها مشخص است.

در این روش، ماتریس سفتی پوسته و تقویت‌کننده با نسبت‌های حجمی زیر با هم جمع می‌شوند. به عبارت دیگر رابطه (21) برقرار است:

$$V_{sh} = \frac{V_{sh}}{V_{st} + V_{sh}} \quad V_{st} = \frac{V_{st}}{V_{st} + V_{sh}} \quad (21)$$

تاکید می‌شود که نتایج [5]، طبق روند ارائه شده در منبع [5] بوده و هیچ‌کدام از نتایج، عیناً از منبع [5] آورده نشده است.

**روش سوم** تحلیل ارائه شده در این مقاله است که با نام تحلیل حاضر در نمودارها ارائه شده است.

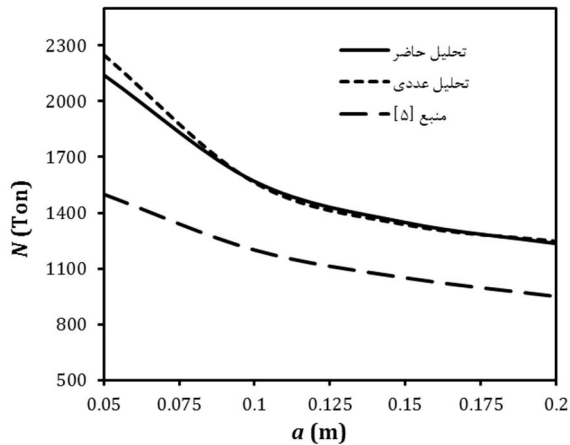
روش دوم، دارای نقایصی است. لذا، در این مقاله، روش متفاوتی ارائه شده تا بتواند این کمبودها را رفع کند. در روش حاضر، ماتریس سفتی پوسته، با ضریب یک و ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت‌کننده‌ها به کل، با یکدیگر جمع می‌شوند.

### 4-1- تاثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها $h$ بر بار کماتش محوری

در تحلیل استوانه مشبک، یکی از موارد مهم و تاثیرگذار بر مقاومت کماتشی سازه، ارتفاع تقویت‌کننده‌ها است. در این بخش، استوانه‌هایی با ابعاد مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در شکل 7، قطر استوانه یک متر، طول یک متر و



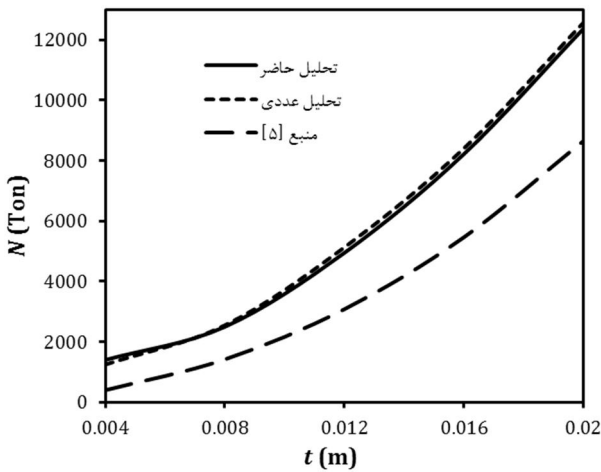
همسانگرد مشبک پیشرفته، برای تحلیل کمانش خطی آن‌ها تحت بار محوری، ارائه شد.



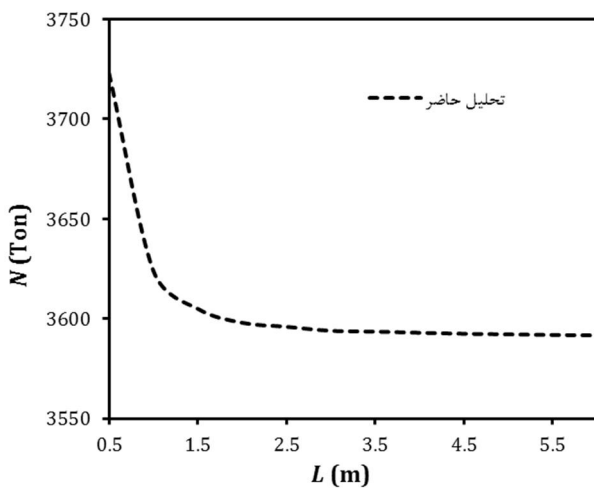
شکل 8 تاثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری برای

$$L = 0.5 \text{ m}, R = 0.25 \text{ m}, t = 0.006 \text{ m}$$

شکل 9 تاثیر طول ضلع مثلث‌های تقویتی  $a$  بر بار بحرانی

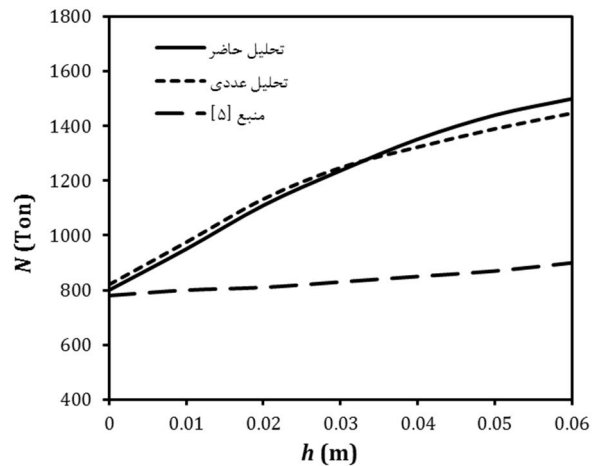


شکل 10 تاثیر ضخامت پوسته بر بار بحرانی پوسته مشبک



شکل 11 تاثیر طول استوانه مشبک بر بار بحرانی

استوانه با استفاده از یک شبکه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقویت شده است. ابتدا، با استفاده از تحلیل نیرویی و ممان، ماتریس سفتی شبکه تقویتی به دست آمد. سپس، با استفاده از یک مدل جدید نسبت حجمی، ماتریس‌های تقویتی شبکه و پوسته با یکدیگر در آمیخته شد تا ماتریس سفتی کل سازه به دست آید. با استفاده اصل همپلتن، معادلات تعادل سازه بر مبنای تئوری



#### 2-4- تاثیر طول ضلع مثلث‌های تقویت‌کننده $a$ بر بار کمانش محوری

یکی از پارامترهایی که در بار بحرانی سازه تاثیرگذار است ابعاد مثلث‌های به کار رفته در شبکه تقویت‌کننده‌هاست. در شکل 9، به این مورد پرداخته شده است. استوانه مورد نظر دارای قطر و طول یک متر و تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع 6 سانتی‌متر و ضخامت 6 میلی‌متر است. با دقت در شکل 9 مشاهده می‌شود که با افزایش طول ضلع مثلث‌های تقویت‌کننده، ظرفیت کمانشی سازه کاهش می‌یابد که دلیل آن کوچک شدن ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها است. با توجه به نتایج، می‌توان دید که هرچه فاصله تقویت‌کننده‌ها زیاد می‌شود، یعنی ابعاد مثلث‌های به کار رفته بزرگ می‌شوند، بار بحرانی کاهش می‌یابد. کاملاً مشهود است که نتایج حاصل از روش حاضر، دارای قرابت بسیار بالایی با نتایج حاصل از روش المان محدود دارد، درحالی که تحلیل بر مبنای فرضیات منبع [5]، اختلاف چشمگیری با نتایج المان محدود را گزارش می‌دهد.

#### 3-4- تاثیر ضخامت پوسته $t$ بر بار کمانش محوری

در این بخش به بررسی اثر ضخامت پوسته بر بار کمانش پرداخته شده است. استوانه مورد تحلیل، دارای قطر و طول یک متر و تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع 6 سانتی‌متر و طول ضلع  $a$  برابر 10 سانتی‌متر است. با دقت در نتایج شکل 10، این نکته قابل مشاهده است که با افزایش ضخامت پوسته، بار کمانش افزایش می‌یابد که این موضوع به دلیل افزایش مقدار ماتریس سفتی پوسته بوده و در نتیجه، ظرفیت کمانشی سازه افزایش می‌یابد. اختلاف بسیار ناچیز بین نتایج حاضر و مدل المان محدود، حاکی از دقت بالای روش حاضر و وجود خطای چشمگیر در روش منبع [5]، به دلیل فرضیات آن است.

#### 4-4- بررسی اثر طول استوانه $L$ بر بار کمانش محوری

یکی از موارد مهم، بررسی افزایش طول استوانه بر بار کمانش است که در شکل 11 ارائه شده است.

ابعاد استوانه همانند بخش (3-4) و با ضخامت پوسته 10 میلی‌متر، د نظر گرفته شده و فقط طول افزایش می‌یابد. طبیعی است که با افزایش طول استوانه، بار کمانش کاهش یابد. نمودار 11 نشان می‌دهد که با افزایش طول سازه، یا افزایش نسبت طول به شعاع، باربری سازه کاهش می‌یابد.

#### 5- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، یک مدل ریاضی جدید برای ماتریس سفتی استوانه‌های

- [4] E. Frulloni, J. Kenny, P. Conti, L. Torre, Experimental study and finite element analysis of the elastic instability of composite lattice structures for aeronautic applications, *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 519-528, 2007.
- [5] S. Kidane, *Buckling Analysis of Grid Stiffened Composite Structures*, Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Louisiana State University, 2002.
- [6] A. Hou, K. Gramoll, Compressive strength of composite latticed structures, *Journal of Reinforce Plastic Composite*, Vol. 17, pp. 462-483, 1998.
- [7] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, S. M. Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2014. (In Persian)
- [8] M. Ren, T. Li, Q. Huang, B. Wang, Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell, *Journal of Reinforce Plastic Composite*, 13 June 2014, doi: 10.1177/0731684414537881.
- [9] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, Second Edition, Boca Rawm, New York, Washington D.C., 2004.
- [10] P. Mirfakhraei, D. Redekop, Buckling of circular cylindrical shells by the Differential Quadrature Method, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 75, pp. 519-528, 1998.
- [11] Sh. Hosseini-Hashemi, S. Fazeli, M. Fadaee, Obtaining the natural frequencies of moderately thick orthotropic plates with piezoelectric patches using the Ritz method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 65-73, 2011. (In Persian)
- پوسته نازک فلوگه به‌دست آمده و در پایان، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و با استفاده از بسط سری فوریه، بار کمانش محوری پوسته به‌دست آمده است. با استفاده از دو روش المان محدود و روش ارائه شده در منبع [5]، روش پیشنهادی حاضر مورد صحت‌سنجی قرار گرفت. نتایج برای پارامترهای مختلف هندسی استوانه مشبک، نشان از دقت بالای مدل ریاضی حاضر دارد. اختلاف بین نتایج حاضر و المان محدود ناچیز است. بنابراین، مهندسان و محققان می‌توانند مدل ریاضی حاضر را، به‌عنوان یک روش دقیق، در تحلیل و طراحی کمانشی استوانه‌های مشبک به‌کار برند.

## 6- منابع

- [1] Sh. Hosseini Hashemi, S. Kalantri, M. Fadaee, Application of polynomial differential quadrature method for buckling analysis of waffle cylindrical shell under axial load, in *The 12th Conference of Iranian Aerospace Society*, Tehran, Iran, 2013. (In Persian)
- [2] B. Huntington, *Isogrid Design Handbook*, Marshall Space Flight Center, Alabama, NASA, CR-124075, 1973.
- [3] V. Vasiliev, A. Lopatin, Theory of lattice and stiffened composite shells, in *Proceeding of the First SSR-US Symposium On Mechanics of Composite Materials*, Riga, Lavita USSR: ASME Publ. House, pp. 23-26, 1989.