



## حل بلادرنگ سینماتیک مستقیم ربات موازی 3-آرپی اس با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی هموتوپی

میلاذ شفیعی آشتیانی<sup>1</sup>، عقیل یوسفی کما<sup>2\*</sup>، حسین کشاورز<sup>3</sup>، سید مجتبی واردی کولایی<sup>4</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران  
 2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران  
 3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
 4- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود،  
 \* تهران، صندوق پستی 11155-4563، aykoma@ut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 04 خرداد 1396  
 پذیرش: 11 خرداد 1396  
 ارائه در سایت: 25 خرداد 1396  
 کلید واژگان:  
 سینماتیک مستقیم  
 بازوی ماهر موازی  
 ربات 3-آرپی اس  
 استرووسکی- هموتوپی کانتینوشن

### چکیده

در این مقاله، حل سینماتیک مستقیم ربات موازی 3-آرپی اس برای اولین بار با استفاده از ترکیب یک روش عددی (روش استرووسکی) و روش نیمه تحلیلی هموتوپی کانتینوشن انجام شده است. ویژگی اصلی روش پیشنهادی، سرعت همگرایی بالا می باشد که قابلیت حل بلادرنگ مسئله سینماتیک مستقیم رباتها را امکان پذیر می سازد. در ربات مورد نظر، مفاصل دورانی در هر بازو محرک هستند و معادله سینماتیک مستقیم ربات منتج به یک سیستم سه معادله و سه مجهول به شدت غیرخطی می شود. در این پژوهش از روش استرووسکی- هموتوپی کانتینوشن برای اولین بار برای حل معادلات سینماتیک مستقیم ربات موازی استفاده شده است. از مزایای این روش علاوه بر سرعت بالا، می توان به مستقل بودن از انتخاب حدس اولیه و یافتن تمام پاسخ های معادلات بدون واگرایی به وسیله ی تغییر دادن توابع هموتوپی اشاره کرد. مثال عددی و شبیه سازی برای حل معادلات سینماتیک مستقیم ربات موازی 3-آرپی اس منتج به 7 پاسخ حقیقی می شود. نتایج نشان می دهد که این روش نسبت به دیگر روش های هموتوپی از جمله روش نیوتون- هموتوپی کانتینوشن بسیار سریع تر می باشد به گونه ای که زمان محاسبات را بین 77-97 درصد کاهش می دهد. در نتیجه برای کاربردهای بلادرنگ که سرعت حل و دقت روش اهمیت بالایی دارد، مانند مسائل جلوگیری از برخورد با موانع و یا جلوگیری از تکیگی بسیار مفید است.

## Real Time Direct Kinematics Solution of 3-RPS Parallel Robot Using a Semi-Analytical Homotopy Method

Milad Shafiee-Ashtiani<sup>1</sup>, Aghil Yousefi-Koma<sup>1\*</sup>, Hossein Keshavarz<sup>2</sup>, Seyed Mojtaba Varedi-Koulaei<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran  
 2- Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran  
 3- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
 \* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aykoma@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 25 May 2017  
 Accepted 01 June 2017  
 Available Online 15 June 2017

**Keywords:**  
 Direct Kinematics  
 Parallel manipulators  
 3-RPS Robot  
 Ostrowski-Homotopy Continuation

### ABSTRACT

In this paper, the forward kinematics of a parallel manipulator with three revolute-prismatic-spherical (3RPS), is analyzed using a combination of a numerical method with semi-analytical Homotopy Continuation Method (HCM) that due to its fast convergence, permits to solve forward kinematics of robots in real-time applications. The revolute joints of the proposed robot are actuated and direct kinematics equations of the manipulator leads to a system of three nonlinear equations with three unknowns that need to be solved. In this paper a fast and efficient Method, called the Ostrowski-HCM has been used to solve the direct kinematics equations of this parallel manipulator. This method has some advantages over conventional numerical iteration methods. Firstly, it is the independency in choosing the initial values and secondly, it can find all solutions of equations without divergence just by changing auxiliary Homotopy functions. Numerical example and simulation that has been done to solve the direct kinematic equations of the 3-RPS parallel manipulator leads to 7 real solutions. Results indicate that this method is more effective than other conventional Homotopy Continuation Methods such as Newton-HCM and reduces computation time by 77-97 % with more accuracy in solution in comparison with the Newton-HCM. Thus, it is appropriate for real-time applications.

### 1- مقدمه

مقایسه با بازوان سری می باشد. مزیت اصلی مکانیسم های موازی دقت بالای حرکت موقعیت مجری نهایی، توانایی تحمل بالای بار و صلبیت در ساختار مکانیکی می باشد [1]. البته ربات های موازی دارای معایبی همچون فضای کاری محدود و مشکلات ناشی از معادلات سینماتیک مستقیم پیچیده

بازوان رباتیک موازی توجه بسیاری از مهندسان و محققان را به دلیل کاربرد گسترده در رباتیک، ماشین ابزار، سیستم های مکان یابی و وسایل اندازه گیری به خود جلب کرده است. این محبوبیت به دلیل مزایای بازوان موازی در

### Please cite this article using:

M. Shafiee-Ashtiani, A. Yousefi-Koma, H. Keshavarz, S. M. Varedi-Koulaei, Real Time Direct Kinematics Solution of 3-RPS Parallel Robot Using a Semi-Analytical Homotopy Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 303-310, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

آن مفاصل انتقالی تحریک شده‌اند، به وسیله‌ی هانت [19] معرفی شد و در دو دهه اخیر توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است [20-22]. تحلیل سینماتیکی این ربات موازی به وسیله‌ی گالاردو [23] با استفاده از تئوری پیچواره انجام شده است.

تحلیل سینماتیک مستقیم ربات موازی 3-آرپی اس که در آن مفاصل دورانی تحریک شده‌اند، به وسیله‌ی زرکندی [24] با استفاده از روش بهبود یافته‌ی سیلوستر دیالیتیک<sup>2</sup> ارائه شده است. این روش منجر به یک چندجمله‌ای می‌شود که حل تحلیلی ندارد و برای حل آن باید از روش حدس و خطا استفاده شود. به جای استفاده از این روش پیچیده و رسیدن به روند حدس و خطا، در این تحقیق برای اولین بار روش استرووسکی-هموتویی کانتینووشن (استرووسکی-اچ‌سی‌ام) برای رسیدن به حل سینماتیک مستقیم این ربات ارائه شده است. روش استرووسکی-اچ‌سی‌ام زمان محاسبات حل سینماتیک مستقیم این ربات را نسبت به روش نیوتن-اچ‌سی‌ام بین 77-97 درصد، برای پاسخ‌های مختلف، کاهش می‌دهد. این روش می‌تواند کاربردهای وسیعی در حل معادلات سینماتیک ربات‌ها داشته باشد و جایگزین روش‌های با سرعت پایین برای کاربردهای بلادرنگ شود [25]. در این مقاله، با استفاده از روش استرووسکی-اچ‌سی‌ام برای بازوی موازی پیشنهاد شده به 7 دسته پاسخ حقیقی دست یافته می‌شود، در این راستا در بخش دوم روش استرووسکی-اچ‌سی‌ام برای دسته معادلات جبری غیرخطی توسعه داده می‌شود. در بخش سوم معادلات سینماتیکی ربات مورد نظر ارائه می‌شود. در بخش چهارم به ارائه نتایج پرداخته می‌شود و نتایج با روش نیوتن-اچ‌سی‌ام مقایسه می‌شود. در نهایت در بخش پنجم به نتیجه‌گیری تحقیق پرداخته می‌شود.

## 2- روش هموتویی کانتینووشن (اچ‌سی‌ام)

در استفاده از یک روش عددی، به‌عنوان مثال روش نیوتن، دو موضوع چالش برانگیز وجود دارد. یکی مربوط به حدس مقدار اولیه مناسب که کار آسانی نمی‌باشد و دیگری مربوط به بحث همگرایی پاسخ‌ها می‌باشد. روش اچ‌سی‌ام می‌تواند بر این مشکلات فائق شود. در این روش، در ابتدا توابع هموتویی با استفاده از یک سری توابع کمکی نوشته، سپس با روش‌های عددی نیوتن و یا استرووسکی می‌توان این معادلات غیرخطی را حل نمود. دستگاه معادلات غیرخطی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(X) = 0 \quad i.e. \quad \begin{cases} f(x, y, \dots, z) = 0 \\ g(x, y, \dots, z) = 0 \\ \vdots \\ h(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

در روش هموتویی، با حذف برخی جملات و افزودن جملات جدید، دستگاه معادلات (1)، به یک دستگاه معادلات جدید تبدیل می‌شود که پاسخ معادلات بهبود یافته به آسانی قابل حدس و یا به‌دست آمدن می‌شود. سپس ضرایب سیستم جدید، طوری با تغییرات جزئی تغییر داده می‌شود تا در نهایت پاسخ‌های سیستم اصلی به‌دست آید. به این روش، تکنیک هموتویی کانتینووشن می‌گویند. برای به‌دست آوردن پاسخ معادلات (1)، باید یک سیستم ساده یا یک تابع کمکی هموتویی را برای شروع انتخاب نمود:

$$G(X) = 0 \quad (2)$$

$G(X)$  باید معلوم باشد و به آسانی حل شود و باید به گونه‌ای انتخاب شود که ماتریس ژاکوبین آن در هر مرحله معکوس‌پذیر باشد. سپس، تابع هموتویی کانتینووشن به صورت زیر نوشته می‌شود:

می‌باشند. برخلاف بازوان موازی، سینماتیک مستقیم بازوان سری سراسر است و آسان می‌باشد درحالی‌که سینماتیک معکوس آن‌ها بسیار پیچیده است و نیازمند حل یک سیستم معادلات غیرخطی است. برای سینماتیک مستقیم ربات موازی، با یک دسته معادلات به هم وابسته به شدت غیرخطی مواجه هستیم [3,2]. متغیرهای این معادلات حالت موقعیت مجری نهایی را بیان می‌کند و این معادلات ممکن است پاسخ‌های زیادی داشته باشد [4,3]. متأسفانه به‌جز در چند مورد خاص، در یافتن حل بسته تحلیلی مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی چالش‌های اساسی وجود دارد و حل تحلیلی موجود نمی‌باشد [5]. بنابراین برای دست یافتن به پاسخ مسئله سینماتیک مستقیم بازوان موازی، دستگاه معادلات غیرخطی باید با روش‌های عددی حل شود [4]. بسیاری از محققان اعتقاد دارند که ترکیبی از روش‌های عددی و نیمه تحلیلی دقیق منتج به نتایج مفیدی می‌شود [7,6]. امروزه روش‌های متنوع و زیادی مانند روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات غیرخطی مشابه استفاده می‌شود. ولی این روش همواره نیاز به یک حدس اولیه در مراحل سعی و خطا دارد. حدس اولیه مناسب موجب حل سریع معادلات می‌شود در حالی که حدس اولیه بد، ممکن است باعث واگرایی پاسخ‌ها شود.

روش هموتویی کانتینووشن (اچ‌سی‌ام)<sup>1</sup> یک روش نیمه-تحلیلی می‌باشد که برای جلوگیری از حل دستگاه معادلات غیرخطی ارائه شده است [9,8]. با انتخاب مناسب یک تابع هموتویی کمکی، این روش می‌تواند حل معادله را با یک مسیر مطمئن تضمین کند. این روش معایب سایر روش‌ها از جمله نیازمندی به انتخاب حدس اولیه مناسب را برطرف می‌کند [10].

و [10]، برخی تکنیک‌ها را با ترکیب کردن روش‌های نیوتن و هموتویی برای جلوگیری از واگرایی پاسخ معادلات غیرخطی ارائه داد. او چند تابع کاندید هموتویی از جمله توابع جبری، سینوسی و نمایی را پیشنهاد داد [11]. همچنین او [12] از روش نیوتن-اچ‌سی‌ام در آنالیز سینماتیک معکوس ربات‌ها استفاده کرد. واردی [13] از روش نیوتن-اچ‌سی‌ام در آنالیز سینماتیک مستقیم یک ربات موازی بهره برد. سلیمی و همکارانش با بهبود روش نیوتن-اچ‌سی‌ام به حل سینماتیک مستقیم یک ربات موازی با در نظر گرفتن نواحی تکینه پرداختند [14]. روش نیوتن-اچ‌سی‌ام دارای مرتبه همگرایی 2 می‌باشد. روش عددی دیگری که همگرایی مرتبه 4 را دارا می‌باشد و بهبود یافته روش نیوتن (با همگرایی مرتبه 2) می‌باشد، توسط استرووسکی معرفی شده است [15]. این روش علاوه بر دقت بهتر، سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش نیوتن دارد. بنابراین می‌تواند به‌عنوان جایگزینی برای روش نیوتن مورد استفاده قرار گیرد.

اکثر پیشرفت‌های اخیر در مورد روش استرووسکی به‌وسیله‌ی گرو [16] و چان [17] انجام شده است. نور [18] برخی تکنیک‌ها را با ترکیب کردن روش‌های استرووسکی و هموتویی برای به‌دست آوردن ریشه یک چندجمله‌ای ارائه داد. در این پژوهش به ترکیب روش استرووسکی و روش هموتویی کانتینووشن برای دسته معادلات جبری غیرخطی پرداخته می‌شود و برای حل سینماتیک مستقیم ربات مورد نظر استفاده می‌شود.

ربات موازی 3-آرپی اس یک بازوی موازی سه درجه آزادی است که در آن صفحه متحرک با سه شاخه به صفحه ثابت متصل است. هر شاخه شامل یک پایین تنه و یک بالاتنه است که با یک مفصل انتقالی به یکدیگر متصل می‌باشند. سه شاخه ربات به‌وسیله سه مفصل کروی و سه مفصل دورانی به ترتیب به صفحات متحرک و ثابت متصل‌اند. ربات موازی 3-آرپی اس، که در

<sup>2</sup> Sylvester Dialytic

<sup>1</sup> Homotopy Continuation Method (HCM)

می آید و در (8) جایگزین می شود. روش استروسکی مرتبه همگرایی مرتبه چهارم دارد و توسعه یافته ی روش نیوتن می باشد که مرتبه همگرایی آن دو می باشد.

روش استروسکی - اچ سی ام برای حل عددی معادله (3) به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{x}_i = x_i - \frac{H(x_i)}{H'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = \bar{x}_i - \frac{H(x_i)}{H(x_i) - 2H(\bar{x}_i)} \frac{H(\bar{x}_i)}{H'(\bar{x}_i)} \quad (9)$$

که در آن  $i = 0, 1, \dots, k-1$  شماره گام تکرار حل می باشد و  $t \in [0, 1]$  می باشد که از صفر تا یک در هر گام به میزان  $1/(k-1)$  افزایش می یابد. برای حل یک سیستم معادلات جبری غیرخطی، داریم:

$$\bar{X}_{i+1} = X_i - [D_x H(X_i, t)]^{-1} H(X_i, t)$$

$$X_{i+1} = \bar{X}_i - [D_x H(X_i, t)]^{-1} \frac{H(X_i)H(\bar{X}_i)}{H(X_i) - 2H(\bar{X}_i)} \quad (10)$$

که  $H(X_i, t)$  و  $\bar{X}_i, X_{i+1}, X_i$  بردارهایی با اندازه های  $n \times 1$ ،  $X_i = [x_i \ y_i \ \dots \ z_i]^T$  و  $\bar{X}_i = [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \dots \ \bar{z}_i]^T$  ماتریس ژاکوبین با اندازه ی  $n \times n$  و  $H(X_i)$  و  $H(\bar{X}_i)$  اسکالر می باشند. ماتریس ژاکوبین برای تابع هموتویی به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_x H(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial z} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial x} & \frac{\partial H_n}{\partial y} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

با تکرار معادله (10) و افزایش مقدار  $t$  از صفر تا یک ریشه های معادلات حاصل می شوند. در حقیقت در  $t = 1$ ، همان  $X_{i+1}$  بردار پاسخ معادلات می باشد.  $t$  در هر گام به میزان  $1/(k-1)$  افزایش می یابد. مقدار  $k$  میزان دقت محاسبه را نشان می دهد (با افزایش  $k$ ، تعداد تکرار، در نتیجه دقت حل افزایش می یابد).

### 3- مدل سینماتیکی ربات 3-RPS

در "شکل 1" ربات موازی 3-آرپی اس که شامل دو صفحه متحرک و ثابت و سه ساق می باشد نشان داده شده است. تحلیل سینماتیک مستقیم این ربات شامل یافتن مکان و جهت گیری صفحه متحرک نسبت به پایه ثابت است به گونه ای که مقادیر زوایای چرخش عملگرهای دورانی  $\theta_i (i = 1, 2, 3)$  معلوم باشند. تعیین این زوایا با محاسبه ی مختصات مراکز مفاصل کروی  $B_i (i = 1, 2, 3)$  که به صفحات متحرک متصل است، معادل است (شکل 2).

همان طور که در "شکل 2" نشان داده شده است، مختصات مرجع چهارچوب  $O\{x, y, z\}$  به پایه ثابت متصل است در حالی که محور  $z$  عمود بر صفحه ای است که از  $A_i (i = 1, 2, 3)$  عبور می کند. مختصات نقاط  $A_i (i = 1, 2, 3)$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$A_i = (u_i, v_i, w_i) \quad (12)$$

که  $u_i, v_i, w_i$  مقادیر معلومی می باشند. کوچکترین زاویه بین جهت مثبت محور  $z$  و خط عبوری از پایه ی  $i$  ام که با  $\theta_i (i = 1, 2, 3)$  نشان داده شده است و همچنین  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  زاویه بین جهت مثبت محور  $x$  و قسمت  $\vec{B}_i \vec{C}_i$  که  $C_i$  تصویر نقطه ی  $B_i$  روی صفحه ی  $O-xy$  است.

$$H(X, t) \equiv tF(X) + (1-t)G(X) = 0 \quad (3)$$

$t$  یک پارامتر اختیاری است و از مقدار صفر تا یک تغییر می کند، یعنی  $t \in [0, 1]$ . بنابراین دو شرط مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$H(X, 0) = G(X) \quad (4)$$

$$H(X, 1) = f(X)$$

حال به جای دستگاه معادلات  $F(x) = 0$ ، دستگاه معادلات  $H(X, t) = 0$  باید حل شود. در ابتدای فرایند، وقتی  $t$  برابر صفر است، انگار فقط دستگاه  $G(X) = 0$  حل می شود و چون این توابع انتخابی هستند حل آن ها نیز ساده است. در پایان فرایند حل و با تغییر  $t$  از صفر تا یک، در نهایت فقط دستگاه  $F(x) = 0$  حل می شود. در واقع تغییرات  $t$  و حل عددی مسئله در هر مرحله، از واگرایی حل نهایی جلوگیری می کند.

### 2-1 روش نیوتون - اچ سی ام

فرمول بازگشتی و عددی روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات (1) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial g(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_n, y_n, \dots) \\ -g(x_n, y_n, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

که در آن  $\partial f(x_n, y_n, \dots) / \partial x$  مشتق جزئی معادله اول نسبت به متغیر  $x$  می باشد و برای سایر معادلات و سایر متغیرها تکرار می شود تا ماتریس ژاکوبین  $D_x F(x, t)$  را ایجاد کند. مقادیر  $x_{n+1}$  و  $y_{n+1}$  حدس اولیه متغیرها برای هر گام حل می باشند  $x_{n+1}$  و  $y_{n+1}$  مقادیر مطلوب متغیرها می باشد که باید در هر بار روش نیوتن به دست آیند و به عنوان حدس اولیه گام بعدی استفاده شوند و تا زمانی که پاسخها با دقت معلوم حاصل نشوند این تکرار ادامه می یابد. می توان معادله فوق را برای حل توابع هموتویی (معادله (3)) در هر مرحله از تغییرات  $t$  به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial H_1(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial H_2(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial H_2(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1(x_n, y_n, \dots) \\ -H_2(x_n, y_n, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6)$$

برای جلوگیری از واگرایی، وو [12]، چند انتخاب مفید برای تابع هموتویی کمکی پیشنهاد نمود. این توابع چندجمله ای، سینوسی، نمایی یا هر ترکیبی از آن ها می باشند.

### 2-2 روش استروسکی - اچ سی ام

روش استروسکی توسط الکساندر ماکوویچ استروسکی برای یافتن ریشه های تابع غیرخطی یک متغیره معرفی شد. این روش دو مرحله حدس و خطا را با استفاده از معادلات زیر به کار می برد [15]:

$$\bar{x}_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (7)$$

$$x_{i+1} = \bar{x}_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - 2f(\bar{x}_i)} \frac{f(\bar{x}_i)}{f'(\bar{x}_i)} \quad (8)$$

که (7) روش کلاسیک نیوتن می باشد در حالی که (8) فرمول استروسکی است. متغیر  $\bar{x}$  به عنوان متغیر میانی تعریف می شود از معادله (7) به دست

$$H_1 = (m_2 S^2 + m_1 + m_0) \times t + (1 - t) \times G_1 = 0 \quad (18-a)$$

$$H_2 = (n_2 S^2 + n_1 S + n_0) \times t + (1 - t) \times G_2 = 0 \quad (18-b)$$

$$H_3 = (M_2 P^2 + M_1 P + M_0) \times t + (1 - t) \times G_3 = 0 \quad (18-c)$$

با تغییر پارامتر هموتویی  $t$  از صفر تا یک و با استفاده از روش استرووسکی-اچ سی ام معادلات (18a)-(18b)-(18c) را می توان حل نمود.

#### 4- نتایج و جمع بندی

در این بخش به ارائه حل مسئله سینماتیک ربات موازی 3-RPS می پردازیم. برای حل سینماتیک مستقیم ربات موردنظر، از مقادیر هندسی زیر استفاده می شود که عبارتند از [24]:

$$A_1 = (0, 0, 0), A_2 = (25, 0, 0), A_3 = (12.5, 21.65, 0)$$

$$d_{ij} = 20 \quad (i, j = 1, 2, 3), \theta_i = 25, \alpha_1 = 30, \alpha_2 = 150, \alpha_3 = 270$$

مقادیر  $\Delta_i (i = 1, \dots, 18)$  براساس پارامترهای فوق، محاسبه می شوند که در پیوست A آورده شده است.

حدس اولیه ی پارامترهای مجهول نیز به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$(P, T, S) = (-500, -50, 2)$$

با حل معادلات (18a-18c) با روش استرووسکی-اچ سی ام، مقادیر  $S, T$  و  $P$  محاسبه شده و در جدول 1 آورده شده است. سپس با جایگزینی آن ها در معادله (13) می توان مختصات نقاط  $B_i (i = 1, 2, 3)$  را نیز محاسبه نمود (جدول 2). با انتخاب مناسب توابع کمکی هموتویی، هفت دسته جواب بدون واگرایی به دست می آید. در "شکل 4" تا "شکل 10"، نمایش گرافیکی این 7 دسته جواب ارائه شده است.

قابل توجه است که مقادیر حدس اولیه تأثیری بر واگرایی و همگرایی روش فوق نمی گذارد و این ویژگی اصلی و مقید روش هموتویی می باشد. به طور مثال دیده می شود که با حدس اولیه 500- برای متغیر  $P$  جواب متعلق به دسته اول جواب های این متغیر 21.46 می باشد که فاصله بسیار زیادی با حدس اولیه را دارا است. بنابراین روش پیشنهادی مبتنی بر هموتویی نیاز به حدس اولیه مناسب ندارد و هر حدس اولیه ای به جواب همگرا می شود و با تغییر توابع هموتویی دسته جواب های مختلف حاصل می شود در صورتی که برای سایر روش های عددی حدس اولیه نامناسب منتج به واگرایی حل می شود. توابع کمکی هموتویی برای این دسته جواب ها در جدول 1 آورده شده است. در شبیه سازی، معیار مورد استفاده برای اندازه گیری تعداد مراحل حدس و خطای روش استرووسکی به صورت زیر می باشد:

$$\left| F_i(X_{k-1}(\text{newton-HCM})) \right| > \left| F_i(X_{k-1}(\text{ostrowski-HCM})) \right|$$

$$\left\| (X_{k-1}(\text{newton-HCM})) - (X_{k-1}(\text{ostrowski-HCM})) \right\| < 10^{-6}$$

که  $F_i$  با جایگذاری پاسخ ها در معادله (15) به دست می آید و  $X_{k-1}$  جواب های به دست آمده برای معادلات می باشد. در حقیقت در معیار فوق دو مسئله را به طور هم زمان بررسی می کنیم. ابتدا در شرط اول بررسی می کنیم که دقت پاسخ به دست آمده از روش استرووسکی-اچ سی ام بیشتر از روش نیوتن-اچ سی ام باشد تا بتوانیم زمان محاسبات دو روش را به صورت صحیح مقایسه کنیم. قابل توجه است که برای دقیق تر بودن پاسخ به دست آمده، مقادیر معادلات (15) به اعضای جواب های به دست آمده، باید نزدیک تر به صفر باشند. همچنین در شرط دوم بررسی می کنیم که دقت پاسخ های بدست آمده کمتر از  $10^{-6}$  باشد.

شبیه سازی با استفاده از برنامه متلب و با سیستم 64 بیتی، با 4GB RAM و پنج هسته ای انجام شده است.

نتایج حاصل از روش استرووسکی-اچ سی ام در مقایسه با روش نیوتن-اچ سی ام نشان می دهد که با وجود دقت بیشتر در جواب ها، زمان محاسبات

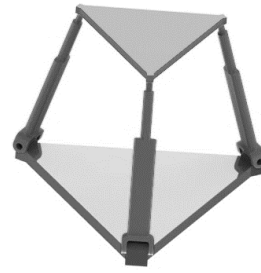


Fig. 1 The 3-RPS parallel robot

شکل 1 ربات موازی 3-آرپی اس

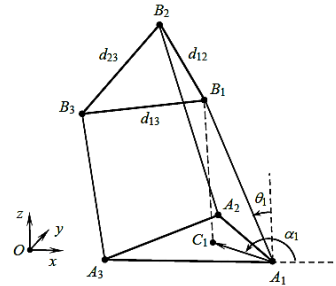


Fig. 2 Geometric parameters of the 3-RPS parallel robot

شکل 2 پارامترهای هندسی ربات موازی 3-آرپی اس

با در نظر گرفتن پایه های ربات به صورت خطوط سه بعدی، معادلات پارامتری این خطوط به صورت زیر بیان می شود:

$$A_1 B_1: \begin{cases} x_1 = a_1 S + u_1 \\ y_1 = b_1 S + v_1 \\ z_1 = c_1 S + w_1 \end{cases}$$

$$A_2 B_2: \begin{cases} x_2 = a_2 T + u_2 \\ y_2 = b_2 T + v_2 \\ z_2 = c_2 T + w_2 \end{cases}$$

$$A_3 B_3: \begin{cases} x_3 = a_3 P + u_3 \\ y_3 = b_3 P + v_3 \\ z_3 = c_3 P + w_3 \end{cases} \quad (13)$$

که در آن:

$$a_i = \sin(\theta_i) \cos(\alpha_i)$$

$$b_i = \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i)$$

$$c_i = \cos(\theta_i) \quad (14)$$

و  $S, T$  و  $P$  متغیرهای مستقل می باشند.

قیود هندسی جهت معماری ربات می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d_{12}^2$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_{13}^2$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = d_{23}^2 \quad (15)$$

که در آن  $d_{ij} = \overline{B_i B_j} (i = 1, 2, 3)$  با جایگذاری معادلات (5) در معادلات (2) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$m_2 S^2 + m_1 S + m_0 = 0$$

$$n_2 S^2 + n_1 S + n_0 = 0$$

$$M_2 P^2 + M_1 P + M_0 = 0 \quad (16)$$

که در آن:

$$m_2 = \Delta_1, m_1 = \Delta_2 T + \Delta_3, m_0 = \Delta_4 T^2 + \Delta_5 T + \Delta_6$$

$$n_2 = \Delta_7, n_1 = \Delta_8 P + \Delta_9, n_0 = \Delta_{10} P^2 + \Delta_{11} P + \Delta_{12}$$

$$M_2 = \Delta_{13}, M_1 = \Delta_{14} T + \Delta_{15}$$

$$M_0 = \Delta_{16} T^2 + \Delta_{17} T + \Delta_{18} \quad (17)$$

و  $\Delta_i (i = 1, \dots, 18)$  ضرایب وابسته به پارامترهای هندسی ربات می باشند که در پیوست A آورده شده است.

بنابراین، می توان تابع هموتویی کانتینیویشن را به صورت زیر نوشت:

جدول 1 نتایج روش هموتویی کانتینیوشن برای سینماتیک مستقیم

Table 1. The results of Homotopy Continuation Method for Direct kinematics

درصد کاهش زمان محاسبه	$G_1$	روش مورد استفاده	(S)	زمان شبیه سازی (ثانیه)	شماره نتیجه
	$G_2$		(P)		
	$G_3$		(T)		
78.012	$-s + 1$	استروسکی - اچ سی ام	(21.469326991374611)	0.021487	1
	$-p + 25$		(6.829633187542384)		
	$-t + 5$		(6.830135277539459)		
97.790	$s + 150$	نیوتن - اچ سی ام	(21.469327292470958)	0.097723	2
	$-p - 90$		(6.829633732534094)		
	$t + 195$		(6.830134686071279)		
96.864	$s + 5$	استروسکی - اچ سی ام	(6.830635612960599)	0.002134	3
	$-p - 16$		(21.471527455560615)		
	$t + 1$		(6.830635562010444)		
97.837	$s + 1000$	نیوتن - اچ سی ام	(6.830635305128267)	0.096598	4
	$-p - 90$		(21.471529441385488)		
	$t + 195$		(6.830635427247805)		
97.855	$s + 71$	استروسکی - اچ سی ام	(6.830134309909616)	0.003097	5
	$-p - 98$		(6.829634156907760)		
	$t + 51$		(21.469347241668533)		
77.986	$-s^2 + 220$	نیوتن - اچ سی ام	(6.830134686912658)	0.098781	6
	$p - 55$		(6.829633764148901)		
	$-t + 25$		(21.469327300626365)		
77.282	$s + 10$	استروسکی - اچ سی ام	(61.475720443940510)	0.002126	7
	$p + 2$		(61.474217555831579)		
	$t$		(61.475720444921649)		
77.986	$s$	نیوتن - اچ سی ام	(61.475720445357268)	0.098307	8
	$p$		(61.474217556757154)		
	$t$		(61.475720445357318)		
77.986	$-s + 1000$	استروسکی - اچ سی ام	(61.475433873897387)	0.002126	9
	$-p + 220$		(61.474756408727302)		
	$-t + 30$		(46.835018139660860)		
77.986	$-s^2 + 8$	نیوتن - اچ سی ام	(61.475225183977365)	0.099078	10
	$-p - 555$		(61.474719820123063)		
	$t + 31$		(46.834560987030763)		
77.986	$-s + 20$	استروسکی - اچ سی ام	(61.4757204226884826)	0.022019	11
	$-p^2 + 1$		(46.836760444705014)		
	$t + 10$		(61.475720428887428)		
77.282	$s + 4$	نیوتن - اچ سی ام	(61.475720454116960)	0.100026	12
	$-p - 100$		(46.836760436259397)		
	$-t + 31$		(61.475720442970037)		
77.282	$-s + 100$	استروسکی - اچ سی ام	(46.834560071431113)	0.021785	13
	$-p + 220$		(61.474718603318145)		
	$-t + 300$		(61.475219506776249)		
77.282	$s + 5$	نیوتن - اچ سی ام	(46.834560066530102)	0.095895	14
	$-p - 1$		(61.474718608845535)		
	$t + 1$		(61.475219508850095)		

جدول 2 مختصات کارترین نقاط Bi

Table 2. The (X, Y, Z) Coordinates Of Bi Points

$B_3$	$B_2$	$B_1$	شماره
7.8577339	22.50018311	22.50018311	1
4.53666482	1.443269949	1.443269949	
19.45781823	6.190204788	6.190204788	
2.5000000	22.5000000	22.5000000	2
1.4433756	1.44337566	1.44337566	
6.1906582	6.19065820	6.19065820	
2.49981652	17.1422586	17.1422586	3
1.443269744	4.53666910	4.53666910	
6.19020391	19.45783658	19.45783658	
22.499999	2.4999999	2.4999999	4
12.990381	12.9903810	12.9903810	
55.7159241	55.7159241	55.7159241	
22.499895	7.8584699	7.8584699	5
12.9903205	9.8966669	9.8966669	
55.7156644	42.4469416	42.4469416	
22.499999	2.5000000	2.5000000	6
12.9903810	12.990381	12.990381	
55.7159241	55.7159241	55.7159241	
17.14136237	2.50018334	2.50018334	7
9.896570183	12.9902752	12.9902752	
42.44652649	55.7154701	55.7154701	

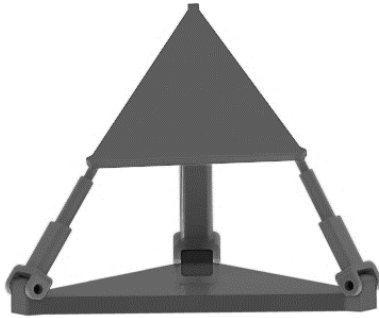


Fig. 5 Graphical representation of the solution 2

شکل 5 نمایش گرافیکی پاسخ 2

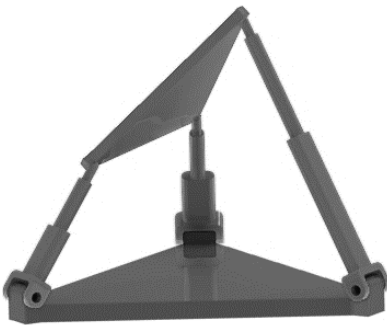


Fig. 6 Graphical representation of the solution 3

شکل 6 نمایش گرافیکی پاسخ 3

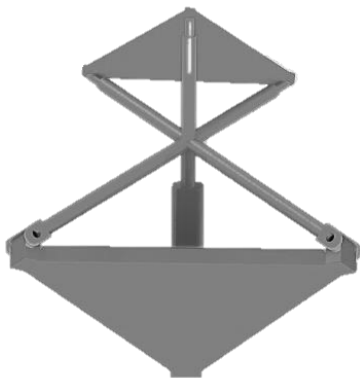


Fig. 7 Graphical representation of the solution 4

شکل 7 نمایش گرافیکی پاسخ 4

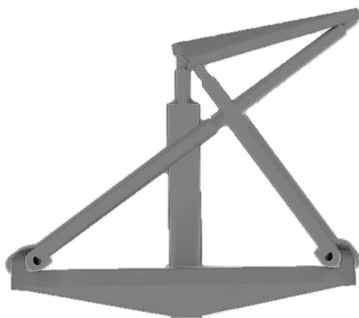


Fig. 8 Graphical representation of the solution 5

شکل 8 نمایش گرافیکی پاسخ 5

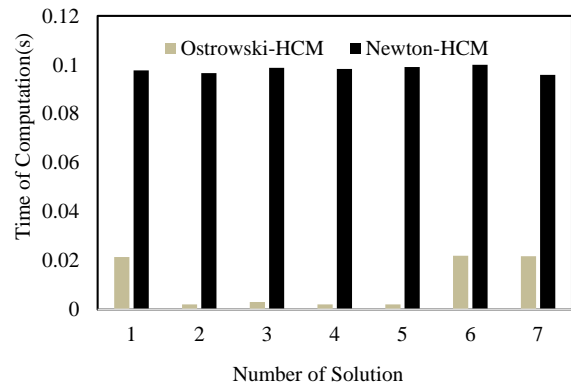


Fig. 3 Comparison of Computation time of Ostrowski-HCM and Newton-HCM for Solutions of Table. 1

شکل 3 مقایسه زمان محاسبات روش پیشنهادی (استرووسکی-اچ سی ام) با روش

نیوتن-اچ سی ام برای راه حل های مختلف جدول 1

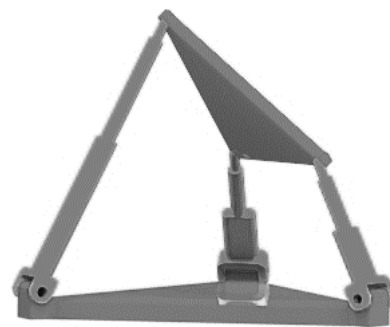


Fig. 4 Graphical representation of the solution 1

شکل 4 نمایش گرافیکی پاسخ 1

سینماتیکی ربات‌های موازی پیشنهاد شده است.

### 5- نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل سینماتیک مستقیم ربات موازی 3-آرپی اس که در آن مفاصل دورانی تحریک شده‌اند، برای اولین بار به روش استروسکی-اچ‌سی‌ام انجام شده است. روش ارائه شده نسبت به روش [23] به حدس اولیه حساس نیست بنابراین همواره به پاسخ همگرا می‌باشد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که 7 دسته جواب واقعی برای معادلات سینماتیک مستقیم این ربات وجود دارد. نتایج اثبات می‌کند که روش استروسکی-اچ‌سی‌ام نسبت به روش متداول نیوتون هموتویی استفاده شده در [13] زمان محاسبات را به طرز قابل توجهی کاهش می‌دهد. بنابراین این روش مؤثرتر و سریع‌تر از روش‌های دیگر نظیر نیوتن رافسون و روش‌های معمول اچ‌سی‌ام است. در نتیجه برای کاربردهای بلادرنگ که سرعت حل و دقت روش اهمیت بالایی دارد، مانند مسائل جلوگیری از برخورد با موانع و یا جلوگیری از تکیگی بسیار مفید است.

### 6- پیوست

ضرایب  $\Delta_i (i = 1, \dots, 18)$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \\ \Delta_2 &= -2(c_1c_2 + a_1a_2 + b_1b_2) \\ \Delta_3 &= 2(a_1u_1 - b_1v_2 + b_1v_1 - c_1w_2 - a_1u_2 + c_1w_1) \\ \Delta_4 &= c_2^2 + a_2^2 + b_2^2 \\ \Delta_5 &= 2(-v_1b_2 + b_2v_2 - w_1c_2 + a_2u_2 - u_1a_2 + c_2w_2) \\ \Delta_6 &= -d_{12}^2 + u_1^2 - 2u_1u_2 + v_1^2 - 2v_1v_2 + u_2^2 + w_2^2 + w_1^2 \\ &\quad - 2w_1w_2 + v_2^2 \\ \Delta_7 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \\ \Delta_8 &= -2(a_1a_3 + c_1c_3 + b_1b_3) \\ \Delta_9 &= 2(c_1w_1 - a_1u_3 - c_1w_3 + b_1v_1 + a_1u_1 - b_1v_3) \\ \Delta_{10} &= c_3^2 + b_3^2 + a_3^2 \\ \Delta_{11} &= 2(-u_1u_3 + a_3u_3 - v_1b_3 + c_3w_3 + v_3b_3 - w_1c_3) \\ \Delta_{12} &= -2u_1u_3 + u_3^2 - d_{13}^2 + u_1^2 + w_1^2 + v_1^2 - 2w_1w_3 \\ &\quad - 2v_1v_3 + v_3^2 + w_3^2 \\ \Delta_{13} &= c_3^2 + b_3^2 + a_3^2 \\ \Delta_{14} &= -2(b_3b_2 + a_3a_2 + c_3c_2) \\ \Delta_{15} &= 2(a_3u_3 + c_3w_3 - a_3u_2 + b_3v_3 - b_3v_2 - c_3w_2) \\ \Delta_{16} &= c_2^2 + b_2^2 + a_2^2 \\ \Delta_{17} &= 2(-u_3a_2 - v_3b_2 + a_2u_2 + b_2v_2 + c_2w_2 - w_3c_2) \\ \Delta_{18} &= -d_{23}^2 + u_3^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - 2u_3u_2 + v_3^2 \\ &\quad - 2w_3w_2 - 2v_3v_2 + w_3^2 \end{aligned}$$

### 7- مراجع

- [1] H. Taghirad, *Parallel Robots, Mechanics and Control*, CRC press, pp. 86-99, 2013.
- [2] M. Mazare, M. Taghizadeh, M. R. Najafi, Design, manufacturing and kinematic analysis of a kind of 3-DOF translational parallel manipulator, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 327-334, 2016. (in Persian)
- [3] G. Abbasnejad, H. M. Daniali, A. Fathi, Closed form solution for direct kinematics of a 4PUS+ 1PS parallel manipulator, *Scientia Iranica*, Vol. 19, No. 2, pp.320-326, 2012.
- [4] L. Gao, W. Wu, Forward kinematics modeling of spatial parallel linkage mechanisms based on constraint equations and the numerical solving method, *Robotica*, Vol. 35, No. 2, pp. 1-17, 2015.
- [5] S. M. V. Koulaei, H. M. Daniali, M. Farajtabar, B. Fathi, M. Sh. Ashtiani, Reducing the undesirable effects of joints clearance on the behavior of the planar 3-RRR parallel manipulators, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86, No. 2, pp.1007-1022, 2016.
- [6] F. Jianxun, F. Gao, Y. Pan, H. Du, Forward kinematics solutions of a special six-degree-of-freedom parallel manipulator with three limbs, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 7, No. 5, pp. 1-11, 2015.



Fig. 9 Graphical representation of the solution 6

شکل 9 نمایش گرافیکی پاسخ 6

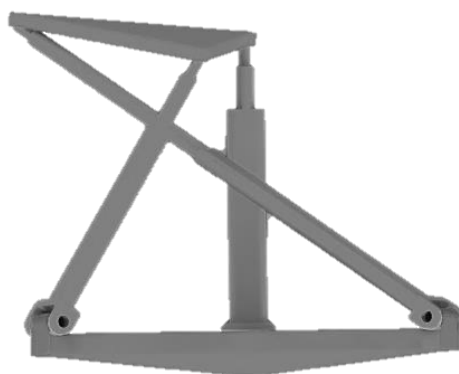


Fig. 10 Graphical representation of the solution 7

شکل 10 نمایش گرافیکی پاسخ 7

به صورت چشم‌گیری کاهش یافته است. این روش در مقایسه با روش نیوتن-اچ‌سی‌ام زمان محاسبات مسئله سینماتیک مستقیم ربات پیشنهاد شده را برای دسته جواب‌های مختلف از 77 تا 97 درصد کاهش می‌دهد (جدول 1). میزان تفاوت زمان محاسبات روش پیشنهادی با روش متداول نیوتون-اچ‌سی‌ام برای دسته جواب‌های مختلف در نمودار "شکل 1" نشان داده شده است.

بنابراین روش پیشنهاد شده در این مقاله دارای مزایای زیر می‌باشد:

1- روش پیشنهاد شده در این پژوهش در مقایسه با روش‌های متداول، به طور مثال روش پژوهش [24]، نیاز به حدس اولیه نزدیک و مناسب برای همگرایی به جواب ندارد و نسبت به حدس اولیه حساس نیست. به طور مثال حدس اولیه مربوط به متغیر  $P$  500- می‌باشد، در صورتی که جواب مربوطه متعلق به دسته اول جواب‌ها 21.46 می‌باشد. بنابراین پاسخ به دست آمده فاصله بسیار زیادی با حدس اولیه را دارا است ولی با این وجود روش هموتویی به جواب همگرا می‌شود.

2- به کارگیری روش استروسکی-اچ‌سی‌ام نسبت به روش متداول نیوتون هموتویی استفاده شده در [12] برای حل سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی، زمان محاسبات را به شدت کاهش می‌دهد. در حقیقت برای به کارگیری ربات‌های موازی در کاربردهای بلادرنگ نیاز به زمان محاسبات کوتاهی داریم که روش پیشنهادی با سرعت بالای حل و یافتن تمامی دسته جواب‌ها بدون واگرایی پیاده‌سازی کاربردهای بلادرنگ را ممکن می‌سازد که سایر روش‌های عددی به کار گرفته شده برای تحلیل سینماتیک ربات‌های موازی فاقد این ویژگی می‌باشند و این روش برای اولین بار توسط نویسندگان برای تحلیل

- method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 173, No. 1, pp. 450-456, 2006.
- [17] C. Chun, Y. M Ham, Some sixth-order variants of Ostrowski root-finding methods, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 193, No. 2, pp.389-394, 2007.
- [18] H. M. Nor, A. Rahman, A. Izani, A Majid Numerical solution of polynomial equations using Ostrowski Homotopy continuation method, *Matematika*, Vol. 30, No. 1, pp. 47-57, 2014.
- [19] K. H Hunt, Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, No. 4, pp.705-712, 1998.
- [20] L. K. Meng, K. S. Dharman, Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, Vol. 4, No. 3, pp. 354-360, 1998.
- [21] H. S. Kim, L. W. Tsai, Kinematic synthesis of spatial 3-RPS parallel manipulators, *ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers*, Montreal, Quebec, Canada, pp. 873-880, 2002.
- [22] N. M. Rao, Kinematic synthesis of a spatial 3-rps parallel manipulator using particle swarm optimization, *I-Manager's Journal on Future Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 4, pp. 35-40, 2010.
- [23] J. Gallardo, O. Horacio, M. R. José, Kinematics of 3-RPS parallel manipulators by means of screw theory, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 36, No. 5, pp. 598-605, 2008.
- [24] S. Zarkandi, M. R. Esmaili, Direct position kinematics of a three revolute-prismatic-spherical parallel manipulator *International Journal of Recent Research and Applied Studies*, Vol. 7, No.1, pp. 88-95, 2011.
- [25] M. Ashkvari, A. Y. Koma, M. S. Panahi, H. Keshavarz, Design and optimization of an ankle joint actuating mechanism of a humanoid robot, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 99, No. 9, pp. 1-11, 2016. (in Persian فارسی).
- [7] M. S. Ashtiani, A. Y. Koma, M. S. Panahi, Robust Bipedal Locomotion Control Based on Model Predictive control and Divergent Component of Motion, 2017 *Robotics and Automation (ICRA) IEEE International Conference on*, IEEE, Singapore. pp. 3505-3510, 2017.
- [8] M. S. Ashtiani, A. Y. Koma, M. S. Panahi, M. Khadiv. Push Recovery of a Humanoid Robot Based on Model Predictive Control and Capture Point, in *Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2016 4th RSI/ISM International Conference on*, Tehran, Iran, pp. 433-438, 2016.
- [9] E. Allgower, K. Georg, Numerical Continuation Methods: An Introduction, Vol. 13, *Springer Science & Business Media*, pp. 12-27, 2012.
- [10] T. M. Wu, A study of convergence on the Newton-Homotopy Continuation Method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 168, No. 2, pp. 1169-1174, 2005.
- [11] T. M. Wu, The inverse kinematics problem of spatial 4P3R robot manipulator by the Homotopy Continuation Method with an adjustable auxiliary Homotopy function, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 64, No. 10, pp. 2373-2380, 2006.
- [12] T. M. Wu, Solving the nonlinear equations by the Newton-Homotopy Continuation Method with adjustable auxiliary Homotopy function, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 173, No. 1, pp. 383-388, 2006.
- [13] S. M. Varedi, H. M. Daniali, D. D. Ganji, Kinematics of an offset 3-UPU translational parallel manipulator by the Homotopy Continuation Method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, No. 3, pp.1767-1774, 2009.
- [14] A. S. Lafmejani, A. Kalhor, M. T. Masouleh, A new development of homotopy continuation method, applied in solving nonlinear kinematic system of equations of parallel mechanisms, *Robotics and Mechatronics (ICROM), 2015 3rd RSI International Conference on*, pp. 737-742, 2015.
- [15] M. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Elsevier, pp. 35-43, 1973.
- [16] M. Grau, J. L. Barrero, An improvement to Ostrowski root-finding