

ماهنامه علمى پژوهشى

دسی مکانیک مدر س





مدلسازي رفتار هايير الاستيك لاستيكهاي ناهمكن مدرج تابعي تحت بار گذاري مكانيكي وحرارتي

 *2 ياور عنانى 1 ، غلامحسين رحيمى

1 - دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران 2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران * تهران، صندوق پستى modares.ac.ir ،14115-143 rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مقاله رفتار لاستیکهای ناهمگن مدرج تابعی با تغییر شکل بزرگ و تحت بارگذاریهای مختلف و با فرض ماده هایپرالاستیک تراکم	مقاله پژوهشی کامل
ناپذیر مدلسازی شده است. در بخش اول، رفتار لاستیکهای همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی، تحت بارگذاری کششی تک محوره، دو محوره و	دریافت: 24 مرداد 1394
شهرین مدینه می از این می	پذیرش: 20 مهر 1394
برس محص مورد بررسی قرار کرفته است. در بخش دوم رفتار لا سیکهای همسانکرد ناهمکن مدرج تابعی تخت بار کداری همرمان مکانیکی و	ارائه در سایت: 17 آبان 1394
حرارتی و با استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل، تحلیل شده است. در بخش سوم نیز، رفتار لاستیکهای عرضی ناهمگن مدرج تابعی	<i>کلید واژگان:</i>
تحت بارگذاری مکانیکی تک محوره، دو محوره و برش محض بررسی شده است. در مواد هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی خواص مکانیکی	ماده هایپرالاستیک
به طور پیوسته و در راستاهای مختلف ماده تغییر میکند. برای مدل کردن رفتار غیرخطی ماده از تئوری هایپرالاستیسیته و توابع انرژی کرنشی	تغییر شکلهای بزرگ
که تابعی از ناورداهای تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین هستند، استفاده گردیده است. برای اینکه بتوان توابع انرژی موجود را برای مواد	لاستیک
نامیه است.	مواد ناهمگن مدرج تابعی
ناهمگن مدرج تابعی به کاربرد میبایست در آن اصلاحاتی صورت پدیرد، بنابراین تغییرات ثوابت مربوط به توابع آنرژی دکرشده نیز با توجه به ناهمگن مدرج تابعی بودن ماده به صورت نمایی و در طول میله فرض شدهاند. به دلیل ناهمگن مدرج تابعی بودن ماده، تغییر طول نقاط مختلف میله بارگذاری شده نیز تابعی از تغییر خواص است. نتایج تحلیلی با دادههای تجربی مقایسه شده و مشخص گردیده است، توابع به کار برده شده،	همسانگرد صفحهای
با تقریب بسیار خوبی رفتار ماده را توصیف می کند.	

Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load

Yavar Anani, Gholam Hossein Rahimi^{*}

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran * P.O.B. 14115143 Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

ABSTRACT

Original Research Paper Received 15 August 2015 Accepted 12 October 2015 Available Online 08 November 2015

Keywords: Hyperelastic material Finite deformation Rubber

In this paper, behavior of functionally graded rubbers with large deformation has been modeled under different loading conditions. Rubbers have been assumed incompressible hyperelastic material. In the first section of this paper, behavior of isotropic FG rubber has been investigated in uniaxial extension, equibiaxial extension and pure shear. In the second section, behavior of isotropic FG rubber is investigated in mechanical and thermal loads, simultaneously. For this purpose, multiplicative decomposition of deformation gradient tensor has been used. At last, behavior of transversely isotropic FG rubber has been investigated in uniaxial extension, equibiaxial extension and pure shear. Material properties vary continuously in different specific direction in FG hyperelastic materials. For modeling nonlinear behavior of hyperelastic materials, strain energy functions are used. Strain energy functions are function of invariants of left Cauchy-Green stretch tensor. Modification in strain energy functions is required in order to for them to be used as FG rubbers. For this purpose, material constants of strain energy functions have been assumed to vary exponentially in the axial direction of bar. Moreover, stretches in different points of the bar are considered to be function of material properties variation in the length direction. Analytical solution has been compared with experimental data and good agreement has been found between them, therefore the proposed constitutive law has modeled material behavior with a proper approximation.

Functionally graded materials Transversely Isotropic

واضحترین خاصیت فیزیکی لاستیکها و مواد لاستیک-مانند، میزان 1- مقدمه کشش پذیری زیاد آن ها تحت تنش های کم (در مقایسه با مواد جامدی مثل دستههای مختلفی از مواد مثل الاستومرها، پلیمرها، فوم ها و بافتهای فلزات) و وابستگی تنش به تاریخچه کرنش است. لاستیکها به طور گسترده بیولوژیکی قابلیت تغییر شکلهای بزرگ هایپرالاستیک را دارند. مهمترین و

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید: Please cite this article using: Y. Anani, Gh. H. Rahimi, Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 11, pp. 359-366, 2015 (In Persian)

به عنوان عایق ارتعاشی، قطعات ذخیره کننده انرژی در صنایع اتومبیل، سپر و حائل در قطعاتی که در معرض بارهای ضربه ای قرار دارد و سایر موارد به کار می روند. به طور کلی، رفتار مکانیکی مواد را می توان بسته به نوع ماده و کاربردی که برای آن در نظر گرفتهشده تحت عناوین مختلفی دستهبندی نمود. بسیاری از مواد مورد استفاده در شاخههای مهندسی و فیزیک غیرالاستیک بوده و در هر تغییر شکل مجاز، تلف کننده انرژی میباشند. در مواردی که تغییرشکل و بارگذاری بزرگی بر یک قطعه اعمال می گردد، باید طراحی مناسبی نیز برای تولید آن در نظر گرفته شود. در شرایطی نیز لازم است استفاده بهینه از ماده تضمین شود تا از تغییرشکل غیرقابلقبول و یا شکست قطعه در خلال عملکرد پرهیز شود. در عمل این ملزومات طراحی می تواند با در اختیار گذاردن روش هایی برای تحلیل تنش و کرنش رفتارهای ماده مورد نظر فراهم گردد. اساسا این مسئله نیازمند برخی فرم های تئوری برای مدل کردن رفتار ماده، تکنیک های تجربی برای اندازه گیری پارامترهای آن و روشهایی برای انجام محاسبات مربوط به یک کاربرد خاص است. با افزایش کاربرد مواد غیرخطی لاستیک-مانند و سازه های پیشرفته ساخته شده از آنها در صنایع مختلف و نیاز به تحلیل رفتار آنها، تحلیلهای غیرخطی مورد توجه اغلب محققين قرار گرفته است. طبيعت غيرخطي معادلات حاكم و عدم دسترسی به معادله رفتاری ماده- که بتواند رفتار ماده را به درستی توصيف نمايد- دو مشكل عمده در حل مسايل مقدار مرزى غيرخطى میباشند. با توسعه و گسترش کامپیوترها و پیشرفت روزافزون روشهای عددی از جمله روش اجزاء محدود، مشکل اول تا حدودی بر طرف شده است ولى مشكل دوم همچنان باقى مانده است. در مواد هايپرالاستيك، ماكزيمم مقدار كشش معمولا در محدوده 10-5 (نسبت طول ثانویه به طول اولیه) است و منحنی تنش-کشش غیرخطی است، لذا ماده از قانون هوک تبعیت نمی کند. برای کششهای کوچک می توان شیب منحنی را به عنوان مدول الاستیسیته تعریف کرد که در حدود یک مگاپاسکال است. کشش پذیری زیاد و مدول الاستیسیته پایین لاستیکها در مقایسه با جامداتی مثل فلزات که مدول الاستیسیته آنها حدود 200 گیگا پاسکال و ماکزیمم کشش پذیری آنها حدود 1.01 است، باعث می شود تا اختلاف چشمگیری بین لاستیکها و جامدات سختى مثل فلزات وجود داشته باشند. رفتار الاستيك غيرخطي مواد لاستیک-مانند می تواند با استفاده از توصیف فیزیکی اثر متقابل مولکولها و با استفاده از تئوری هایی مثل تئوری کلاسیک گوسی، تئوری باندهای لغزشی، تئوری شبکه ماکرو مولکولی، که توسط افرادی چون ترلور، بویس و ارودا، بیشاف و همکارانش، میسنر و ماتجکا بحث شده است [1-3]، بیان شود و یا با استفاده از روشهایی که مبتنی بر پدیدهشناسی میباشند، توصيف گردد. توابع انرژی که با استفاده از روشهای مولکولی فرمول بندی می شوند معمولا پیچیده بوده و مخصوص ماده خاصی میباشند. ولی در روشهای مبتنی بر پدیدهشناسی، ماده به صورت یک محیط پیوسته فرض

هایپرالاستیک، اتارد تحلیل رفتار تیر تیموشنکو با تغییر شکل بزرگ را با در نظر گرفتن تابع انرژی نئو هوکین تعمیمیافته انجام داده است [5]. وی همچنین کمانش تیرهای هایپرالاستیک تحت بارگذاری محوری و عرضی را نیز مورد بررسی قرار داده است [6].

از طرف دیگر اکثر مواد موجود در طبیعت همگن نیستند و فرض همگن بودن مواد، تنها برای ساده سازی روابط استفاده می شود. یکی از فرضیات کاربردی برای در نظر گرفتن اثرات ناهمگنی، استفاده از فرض مواد ناهمگن مدرج تابعی است [7]. انتشار مقالات درباره مواد ناهمگن مدرج تابعی بعد از برگزاری دو سمپوزیوم جهانی مواد ناهمگن مدرج تابعی که در سالهای 1990 و 1992 به ترتيب در سندايي و سانفرانسيسكو برگزار شد، افزايش یافت [9،8]. در پژوهشی، فوکوی (1991) در زمینه ساخت این مواد با استفاده از روش گریز از مرکز مطالبی ارائه کرد [10]. بررسی استاتیکی و دینامیکی سازه های ساخته شده از مواد ناهمگن مدرج تابعی در طی دهه گذشته توجه بسیاری از محققان را برانگیخته است. به عنوان مثال، سانکار حل الاستیسیته برای تیر اویلر-برنولی تحت بارگذاری استاتیکی عرضی را ارائه نمود [11]. در پژوهشی دیگر، بناتا حل تحلیلی برای تیرهای مواد ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی ارائه نموده است [12]. جهت شناخت و پیشبینی رفتار غیرخطی مواد طبیعی و مصنوعی مثل لاستیکها و فومها و بافتهای موجودات زنده که دارای رفتار الاستیک غیرخطی هستند-که می توان آن را به صورت رفتار هایپرالاستیک بیان کرد- و همچنین دارای درجاتی از ناهمگنی میباشند، نیاز به تبیین و تحلیل معادلات ساختاری آنها است تا بر این اساس بتوان این مواد را که نیازمندیها و کاربردهای فراوانی یافتهاند را شبیهسازی نمود. در واقع، مواد هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی موادی هستند که علاوه بر رفتار هایپرالاستیک، خواص مکانیکی آنها نیز به طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر در راستای معین تغییر میکند؛ به عبارت دیگر این مواد به طور تدریجی از مادهای به ماده دیگر تبدیل می شوند. غیر همگنی می تواند در طی فرایند ولکانیزاسون لاستیکها و یا در اثر تماس با یک محیط با دمای بالا و یا اکسیدکنندگی بالا ایجاد شود. اولین بار لاستیکهای ناهمگن مدرج تابعی توسط ایکیدا در آزمایشگاه ساخته شد [13]. بیلگیلی، برنشتین و ارسطوپور اثرات ناهمگنی را بر روی قطعات لاستیکی تحت بارگذاریهای کششی و برشی بررسی کردند [14]. در پژوهش دیگری نیز سه محقق فوق الذکر به بررسی اثرات بارگذاری حرارتی بر روی قطعات لاستیکی ناهمگن پرداختند [15]؛ ضمنا باترا نیز به بررسی رفتار مخازن جدار ضخیم ناهمگن غیرخطی با تغییر شکلهای بزرگ با استفاده از روشهای عددی پرداخته است [16]. در خصوص بررسی رفتار ویسکو-هایپرالاستیک لاستیکها و فوم ها در بارگذاری کشش تک محوره، دو پژوهش توسط عنانی و همکاران انجام شده است [18،17]. حسنی و همکاران نیز به فرمول بندی و حل مسائل

هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر، با روش تحلیل ایزوژئومتریک پرداختهاند [19].	میشود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی استخراج میگردد که معمولا بر
با توجه به مسائل ذکرشده بالا، در بخش اول و دوم این مقاله معادله	حسب ناورداهای تغییر شکل است. جهت نشان دادن رفتار غیرخطی ماده
ساختاری میله ساختهشده از ماده هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد	معمولا به چندین ثابت مادی نیاز است. این ثوابت با استفاده از نتایج تجربی
ناهمگن مدرج تابعی، تحت بارگذاری مکانیکی و بارگذاری همزمان مکانیکی و	آزمایشهای انجامشده روی ماده تعیین میگردند. در خصوص بررسی رفتار
حرارتی با استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تانسور گرادیان تغییر شکل، به	هایپرالاستیک لاستیکها، ترلور آزمایشهای متعددی انجام داده است. پس از
دست میآید. علاوه بر این، در بخش سوم این مقاله نیز، تحلیل رفتار میله	آن افراد مختلفی به ارائه توابع انرژی مختلفی که بتواند رفتار لاستیکها را به
ساختهشده از ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی تراکم ناپذیر همسانگرد	خوبی بیان نماید پرداختهاند. از جمله معروفترین این توابع انرژی، تابع انرژی
صفحهای تحت بارگذاری مکانیکی نیز مد نظر قرار گرفته است. در پایان این	مونی -ریولین، نئو هوکین، آگدن، یئوه است [4]. در خصوص رفتار سازه های

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11

مقاله، معادلات ساختاری استخراجشده و نتایج به دست آمده، با نتایج آرمایشگاهی موجود در بارگذاریهای مختلف، مقایسه می گردد و میزان دقت تئوری به دست می آید.

2- هايپرالاستيسيته

رفتار الاستیک لاستیکها و یا بافتهای بیولوژیک، به صورت زیر بیان می *گ*ردد:

- الف) رفتار ماده، الاستیک ایده آل فرض می گردد. این بدین معنی است که اولا در تغییر شکلهای صورت گرفته در دمای ثابت و یا آدیاباتیک، تنش تنها تابع کرنش موجود است و مستقل از نرخ کرنش و تاریخچه بارگذاری است و ثانیا رفتار ماده بازگشت پذیر است که این بدین معناست که هیچ کار خالصی بر روی جسم هنگامی که در یک سیکل بسته تحت کرنش قرار می گیرد انجام نمی شود.
- ب) ماده در مقابل تغییر حجم مقاومت می کند. مدول حجمی لاستیکها تقریبا معادل و مساوی مدول حجمی فلزات است.
- ج) ماده مقاومت کرنشی بسیار کمی دارد. مدول برشی این مواد 100000 مرتبه کوچکتر از مدول برشی اغلب فلزات است.
- د) مدول برشی مستقل از دما است. مقاومت برشی ماده بر خلاف فلزات با افزایش دما، افزایش مییابد.

حالت خاص از الاستیسیته کوشی، هایپرالاستیسیته یا الاستیسیته گرین نام دارد. در این تئوری فرض بر این است که تابع انرژی کرنشی یا تابع انرژی ذخیرهشده (F) = W = W در فضای گرادیانهای تغییر شکل به صورتی تعریف شود که برای مواد بدون قید رابطه $\frac{\partial W}{\partial F} = I^{-1}F = G$, بقرار باشد [4] شود که برای مواد بدون قید رابطه $\frac{\partial W}{\partial F} = I^{-1}F = \sigma$ برقرار باشد [4] که σ تانسور تنش کوشی، F ، تانسور گرادیان تغییر شکل و I دترمینان Fاست. در واقع مادهای هایپرالاستیک یا مستقل از مسیر نامیده میشود که کار انجامشده توسط تنشها در فرآیندهای تغییر شکل تنها به پیکربندی اولیه در زمان $_0 t$ و پیکربندی نهایی در زمان t بستگی داشته باشد. ذرهای را که ابتدا زمان $_0 t$ و پیکربندی نهایی در زمان t بستگی داشته باشد. ذرهای را که ابتدا در مختصات مادی X قرار دارد در نظر بگیرید، با جابجایی این ذره به موقعیت در مختصات مادی F قرار دارد در نظر بگیرید، با جابجایی این دره به موقعیت مرکن X = X(X,t) به صورت کوشی -گرین چپ و راست به ترتیب به صورت F = 3 و $T^{-1}F$ با

3- تراکم ناپذیر همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی

درلاستیک های تراکم ناپذیر، $I_3 = det(B) = I_3$ فرض می شود و با استفاده از روش ریویلین [4]، رابطه ساختاری برای مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد به صورت زیر بیان می شود:

کشیدگی در طول میله به صورت $\begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix} = \lambda_0 (\frac{x}{l})$ فرض میشود. لذا تانسور گرادیان تغییر شکل، F به صورت زیر به دست میآید: $F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{x}{l}\right)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{x}{l}\right)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix}$ (2)

در حالت بارگذاری کشش تک محوره، B = B می شود. در این حالت تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین B به صورت زیر بیان می شوند:

$$C = B = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 \begin{pmatrix} \frac{x}{l} \\ l \end{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_0 \begin{pmatrix} \frac{x}{l} \\ l \end{pmatrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_0 \begin{pmatrix} \frac{x}{l} \\ l \end{pmatrix}} \end{bmatrix}$$
(3)

1-3- تابع انرژی نئو هوکین

تابع انرژی به صورت تابع انرژی نئو هوکین **(3** – **(1)(x)** = W در نظر گرفته میشود **[4]**. که μ بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این بخش، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، یافته است. در این بخش، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به میشود. بنابراین تابع انرژی نئو هوکین برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به صورت زیر است:

$$W = \mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) (l_1 - 3) \tag{4}$$

با قرار دادن ناورداهای B در معادله (4) تابع انرژی به صورت زیر به دست میآید:

$$W = \mu_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) (l_{1} - 3) = \mu_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{\lambda_{0}^{3} \left(\frac{x}{l}\right)^{3} + 2}{\lambda_{0} \left(\frac{x}{l}\right)} - 3\right)$$
(5)
: e i limit is the second second

$$\sigma_{1} = -p + 2\mu_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \lambda_{0}^{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{2}$$

$$B_{22} = \sigma_{3} = \sigma_{3} = \mathbf{0} \quad \text{in the set of } \mathbf{0} \quad \mathbf{0} = \sigma_{2} = \sigma_{3} = \mathbf{0} \quad \mathbf{0}$$

$$p = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}$$
(8)

در نهایت رابطه ساختاری در حالت بارگذاری تک محوره بر حسب

کشیدگیها به صورت زیر به دست می اید: $\sigma_1 = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(-\frac{l}{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$ (9) (9) رابطه کشیدگی Λ_1 و کرنش مهندسی ϵ_1 ، در جهت نیروی تک محوره اعمال شده، به صورت $\epsilon_1 + 1 = 1$ است. دادههای تجربی مورد استفاده، از نمودارهای تنش کشیدگی در حالت استاتیکی و برای لاستیک آزمایش شده توسط تریلور استخراج شده است [20]. در حالت شبه استاتیکی، آزمایش با نرخ کرنش ($\frac{1}{\eta_{i_{x}k}}$) 0.001 انجام می شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها، مقدار (مگاپاسکال) $\mu_0 = 0.113$ به دست می آید. در یافتن

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11

این ضرایب فرض می شود در نرخ کرنش های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنی های تجربی و مدل به کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 1 آمده است که میزان خطای استاندارد 9.3 درصد را نشان می دهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاری هایپرالاستیک به کاررفته، مورد تأیید قرار می گیرد.

برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی = Wبرای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی = Wنظر $(I_1 - 3)^n (I_1 - 3)$ مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به نظر گرفتن مقدار **113 = 0.11** مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست میآید که در این حالت بارگذاری، مقدار مناسب**2.63 = n** به دست میآید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هایپرالاستیک در بارگذاریهای کشش دو محوره و برش محض نیز با استفاده از این ثوابت مورد بررسی قرار می گیرد. تانسور گرادیان تغییر شکل، F در بارگذاری کشش دو محوره به صورت زیر است:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\lambda_1^2} \end{bmatrix}$$
(10)

 $\sigma_{1} = \sigma_{2} = \sigma \quad \text{idd} \quad \mathcal{T}_{2} = \sigma \quad \text{idd} \quad \mathcal{T}_{3} = \sigma \quad \text{idd} \quad \mathcal{T}_{3} = \sigma \quad \text{idd} \quad \mathcal{T}_{3} = \mathbf{0} \quad \text{idd} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}$

برای انجام آزمایش بارگذاری برشی محض در مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر، ماده در یک جهت کشیده می شود درحالی که در جهت دوم مقید گردیده است و جهت سوم نیز فاقد تنش است که در شکل 2 نشان داده شده است. به دلیل اینکه رفتار ماده کاملا نزدیک تراکم ناپذیر است، حالت بارگذاری برش محض، با 45 درجه دوران نسبت به جهت بارگذاری کششی در قطعه نشان داده شده در شکل 2 در نظر گرفته می شود. بنابراین، تانسور گرادیان تغییر شکل، F در این حالت به صورت زیر است:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix}$$
(12)

با استفاده از روابط (1) و (4) و (12)، و با در نظر گرفتن $\sigma_3 = \mathbf{0}$ تنش در راستای یک به صورت زیر به دست میآید:

$$\sigma_1 = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^2 + \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$$
(13)





Fig. 2 Planner tension test specimen outline (Pure shear) (برش محض) بارگذاری کشش صفحه ای برش محض)

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکلهای 3 و 4 نشان شده است. مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تئوری، بیانگر این است که تئوری به کاررفته، با تقریب بسیار خوبی، می تواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاریهای کشش دو محور و برش محض را نیز مدل نماید.

4- لاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری همزمان مکانیکی حرارتی

یکی از متداول ترین روش ها برای ساختن مدل های ترموالاستیک در کرنش های بزرگ استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل به قسمت های الاستیک و غیر الاستیک است که اولین بار توسط گرین و توبولسکی پیشنهاد گردید [4]. در این بخش نیز تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل برای مدل به کاررفته که برای تغییر شکل بزرگ به فرم زیر و مطابق شکل 5 در نظر گرفته می شود:

$$F = F_T F_M$$

F گرادیان تغییر شکل کلی را نشان میدهد و F_T و F_M به ترتیب گرادیان تغییر شکل وابسته به تغییر شکل حرارتی و مکانیکی است. F_T گرادیان تغییر شکل حرارتی است و به صورت زیر بیان می شود:

(14)

$$F_T = \gamma(T)I \tag{15}$$

با فرض مستقل از دما بودن ضریب انبساط طولی و کوچک بودن تغییر شکلهای حرارتی در مقایسه با تغییر شکل مکانیکی، تابع تغییر شکل حرارتی به صورت زیر بیان میشود: (16) دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل، به صورت زیر در میآید:

$$J = J_M J_T$$
(17)





Fig. 3 Cauchy stress vs. extension ratio in equibiaxial extension of isotropic functionally graded hyperelastic material **شکل 3** تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری کشش دو محوره

Fig. 1 Cauchy stress vs. extension ratio in uniaxial extension of isotropic functionally graded hyperelastic material **شکل 1** تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری کشش تک محوره

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11

0

0]

 $\left[\lambda_0\left(\frac{x}{t}\right)\right]$



Fig. 4 Cauchy stress vs. extension ratio in pure shear of isotropic functionally graded hyperelastic material

$$J_M = \mathbf{1} \tag{18}$$

$$J = J_T = \gamma^3 \tag{19}$$

$$C_M = F_M^T F_M = \frac{c}{\gamma^2}, B_M = F_M F_M^T = \frac{B}{\gamma^2}$$
 (20)

$$\mathbf{I}_{1M} = \mathbf{tr} \, C_{\mathrm{M}} = \frac{\mathbf{I}_{1}}{\gamma^{2}} \tag{21}$$

$$I_{2M} = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} C_M)^2 - \operatorname{tr} C_M^2 \right] = I_2 / \gamma^4$$
(22)

$$I_{3M} = \det C_M = I_3 / \gamma^6 \tag{23}$$

درلاستیک های تراکم ناپذیر، $\mathbf{I} = I_{3M}$ فرض می شود و رابطه ساختاری برای مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد تحت بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی به صورت زیر بیان می شود [4]:

$$\sigma = -pI + 2 \frac{\rho_0 (x)}{\gamma^7} F\left(\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_{1M}} I + \frac{\partial W}{\partial I_{2M}} (I_1 I - C)\right) F^T$$
(24)

در میله هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری کششی و حرارتی، جابجایی مکانیکی هر نقطه از این میله به دلیل شرایط ناهمگنی در طول ماده، به صورت تابعی از طول میله در نظر گرفته میشود؛ بنابراین کشیدگیها در طول میله به صورت $\left(\frac{x}{l}\right)_{0} \lambda_{1}(x) = \lambda_{1}(x)$ فرض میشود. ضمنا بین کشیدگیها نیز روابط زیر برقرار است:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \gamma^3 \,_{2} \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} \tag{25}$$

در این حالت گرادیان تغییر شکل و تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین به صورت زیر بیان میشوند:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix}, C = B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma^3}{\lambda_0(\frac{x}{l})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \frac{\gamma^3}{\lambda_0(\frac{x}{l})} \end{bmatrix}$$
(26)

$$T = \theta - \theta_0 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} x + \theta_1 \text{ torse of } \theta_1 \text{ torsee of } \theta_1 \text{ t$$

 $\left[\lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$

0

در دمای 20 سانتی گراد قرار دارد و بعد از بارگذاری حرارتی دمای دو انتهای آن به ترتیب 40 و 80 درجه سانتیگراد خواهد بود.

1-4- تابع انرژی نئو هوکین

0

تابع انرژی به صورت تابع انرژی نئو هوکین **(3** – $(I_{1M} - 3)$ در نظر گرفته میشود **[4]؛** که r بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این مقاله، چگالی و ثابت ماده در تابع انرژی به ترتیب به صورت $(\frac{x}{l})$ و $\rho(x) = \rho_0 \exp(\frac{x}{l})$ در نظر گرفته میشود؛ بنابراین تابع انرژی نئو هوکین برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به صورت زیر می باشد:

$$W = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) (I_{1M} - 3) \tag{28}$$

با قرار دادن ناورداهای B از رابطه (26) در معادله (28) تابع انرژی به صورت زیر به دست میآید:

$$W = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(I_{1M} - \mathbf{3} \right) = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{\lambda_{1M}^3 + \mathbf{2}\gamma^3}{\lambda_{1M}} - \mathbf{3} \right)$$
$$= c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{\lambda_{0M}^3 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \mathbf{2}}{\lambda_{1M}} - \mathbf{3} \right)$$
(29)

$$\sigma = -p \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + 2 \frac{\rho(x)C_0}{\gamma^5} \exp\left(\frac{x}{l}\right)^2 \begin{bmatrix} \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\lambda_0 \left(\frac{x}{l}\right)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\lambda_0 \left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix}$$
(30)

تنش در راستای اعمال بار به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_{1} = -p + 2 \frac{\rho(x)c_{0}}{\gamma^{5}} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \lambda_{0}^{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{2}$$
(31)
فشار هیدرواستاتیک با استفاده از شر ط 0 = $\sigma_{2} = \sigma_{3} = 0$ و رابطه

$$B_{2} = B_{3} = B_{3} = B_{3} + C^{-0.5}$$

363

$$p = 2 \frac{\rho(x)c_0}{\gamma^5} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}$$
(32)
c, is in the initial initial



Fig. 5 Multiplicative decomposition of deformation gradient tensor into thermal and mechanical parts

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11



Fig.7 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal loading and equibiaxial mechanical extension

شکل 7 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری همزمان کششی دو محوره و حرارتی

مشخصه که ماده در راستای آنها ناهمسانگرد است، متفاوت است. دستهای مهم از مواد ناهمسانگرد، مواد همسانگرد عرضی هستند که ماده در یک صفحه به صورت همسانگرد است و خواص ماده در جهت مشخص و عمود بر این صفحه به صورت همسانگرد است و خواص ماده در جهت مشخص و عمود بر این صفحه به صورت همسانگرد است و خواص ماده در جهت مشخص و مود بر ماند رگ آئورت و یا مثانه نام برد. همچنین کامپوزیت های تقویت شده در مانند رگ آئورت و یا مثانه نام برد. همچنین کامپوزیت های تقویت شده در الاستیسیته کوشی، تنش ماده همسانگرد عرضی با جهت مشخصه M به صورت زیر تعریف میگردد [4].

راستای مشرقی (مار)
در ماده هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد عرضی، راستای مشخصه
ناهمسانگردی در حالت تغییر شکل نیافته با بردار
$$M$$
 بیان می گردد. در این
صورت بردار عمود بر صفحه همسانگرد در حالت تغییر شکل یافته به صورت
 $m = FM$ بیان می شود. تابع انرژی مواد ناهمسانگرد صفحهای، علاوه بر
ناورداهای تانسور B ، تابع دو ناوردای دیگر نیز است که تابعی از جهت و
راستای مشخصه ناهمسانگردی و تانسور B هستند و به صورت زیر می باشند:

$$I_4 = m \cdot m \tag{37}$$

$$I_5 = m \cdot (Bm) \tag{38}$$

در مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد صفحهای، تانسور تنش



(<mark>1)</mark> 0.001 انجام می شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها مقدار (مگایاسکال) $K_0 = 0.0834$ به دست میآید. در یافتن این ضرایب فرض می شود در نرخ کرنش های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنیهای تجربی و مدل به کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 6 آمده است که میزان خطای استاندارد 6.62 درصد را نشان میدهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاري هاييرالاستيک به کاررفته، مورد تأييد قرار مي گيرد. برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی به شکل = W ر نظر $c_0\left(\frac{x}{t}\right)^n$ (I_{1M} – 3) برای تابع انرژی استفاده می گردد. در این حالت، با در نظر $c_0\left(\frac{x}{t}\right)^n$ n گرفتن مقادیر به دست آمده برای توزیع نمایی ضرایب تابع انرژی، مقدار مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست میآید که در این حالت بارگذاری n = **1.42** به دست میآید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هاییرالاستیک در بارگذاریهای کشش دو محوره و برش محض نیز مورد بررسی قرار می گیرد. با استفاده از روابط و (28) و (10)، و با در نظر گرفتن $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و $\sigma_3 = \sigma_2$ در (24) بارگذاری کشش دو محوره، تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_{1} = \sigma_{2} = \sigma = \frac{K_{0}}{\gamma^{5}} \exp\left(2\frac{x}{l}\right) \left(-\left(\frac{l}{\lambda_{0}x}\right)^{4} + \lambda_{0}^{2}\left(\frac{x}{l}\right)^{2}\right)$$
(34)

در بارگذاری برشی محض، با استفاده از روابط (24) و (28) و (12)، و با در نظر گرفتن $\sigma_3 = \mathbf{0}$ تنش در راستای یک به صورت زیردست میآید: $\sigma_1 = \frac{K_0}{\gamma^5} \exp\left(2\frac{x}{l}\right) \left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^2 + \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$ (35)

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکلهای 7 و 8 نمایش داده شده است. مقایسه این نتایج بیانگر این است که تئوری به کاررفته با تقریب بسیار خوبی می تواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاریهای مذکور را مدل نماید.

5- لاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد عرضی ناهمگن مدرج تابعی

در مواد همسانگرد خواص ماده در هر نقطه، در جهات مختلف یکسان است اما به طور کلی، نمی توان تمامی مواد موجود در طبیعت و مواد مصنوعی را به عنوان ماده همسانگرد مدلسازی کرد، زیرا شرایط طبیعی و فرآیندهای ساخت، موجب ایجاد ناهمسانگردی در ماده می گردند. در بسیاری از مواد موجود، خواص ماده در جهات مشخصی تغییر می کند که سبب ایجاد ناهمسانگردی در آن می شود. به طور کلی، در مواد مختلف، تعداد این جهات



Fig. 8 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal and pure shear mechanical loading

 $\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}_{10}$

Fig. 6 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal loading and uniaxial mechanical extension

مہندسی مکانیک مدرس، بہمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11

$$\sigma = -pI + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}B + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1B - B^2)\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_4}(m \otimes m) + 2\frac{\partial W}{\partial I_5}(m \otimes Bm + Bm \otimes m)$$
(39)

جابجایی هر نقطه از این میله به دلیل شرایط ناهمگنی در طول ماده، به صورت تابعی از طول آن در نظر گرفته می شود؛ بنابراین کشیدگی در طول میله به صورت $\lambda_1(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{t}\right)$ میله به صورت زیر به دست می آید: *F* به صورت زیر به دست می آید:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ l \end{pmatrix}}} \end{bmatrix}$$
(40)

در حالت بارگذاری کشش تک محوره، B = B می شود. در این حالت تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین B به صورت زیر بیان می شوند:

$$C = B = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{2} \left(\frac{x}{l}\right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_0 \left(\frac{x}{l}\right)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_0 \left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix}$$
(41)

5-1- تابع انرژی به کاررفته برای مواد همسانگرد صفحه ای در این بخش تابع انرژی به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می شود: (42) $W = G(I_1) + H(I_4)$

مدل در نظر گرفتهشده در واقع، تابع انرژی را به دو بخش همسانگرد و تاهمسانگرد تقسیم میکند.. در این بخش تابع انرژی به صورت زیر در نظر گرفته می شود [21 و22]:

$$W = \frac{\eta(x)}{2} ((l_1 - 3) + \zeta (l_4 - 1)^2)$$
(43)

که $(\frac{2}{l}) = \eta_0 \exp(\frac{2}{l})$ است و ζ بیانگر میزان و درجه ناهمسانگردی در راستای در نظر گرفته شده است. امتداد ناهمسانگردی M در راستای طول در نظر گرفته می شود و با قرار دادن تابع انرژی فوق در رابطه (39)، تنش کوشی به صورت زیر به دست می آید:



$$p = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}$$
(46)

$$\begin{array}{l} \text{(46)} \\ \text{(46)}$$

$$*(\lambda_0^4 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2)$$
(47)

رابطه کشیدگی، λ_1 و کرنش مهندسی $arepsilon_1$ ، در جهت نیروی تک محوره λ_1 اعمال شده، به صورت $\lambda_1 = \mathbf{1} + \mathbf{\epsilon}_1$ است. دادههای تجربی مورد استفاده، از نمودارهای تنش-کشیدگی در حالت استاتیکی و برای لاستیک آزمایششده توسط تریلور استخراج شده است [20]. در حالت شبه استاتیکی آزمایش با نرخ کرنش (1) 0.001 انجام می شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها مقادیر (مگاپاسکال) $\eta_0 = 0.0164$ و $\zeta = 0.14$ و γ_0 میآید. در یافتن این ضرایب فرض می شود در نرخ کرنش های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنیهای تجربی و مدل به کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 9 آمده است که میزان خطای استاندارد 3.41 درصد را نشان میدهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاری هایپرالاستیک فوق، مورد تأیید قرار می گیرد. برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی (($I_1 - 3$) رابطه توانی ($\eta(x) = \eta_0 \left(\frac{x}{t}\right)^n$ ($I_1 - 3$) رابطه توانی در این حالت، با در نظر گرفتن مقادیر به دست آمده برای توزیع نمایی (ŋ(x) مقدار n مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست میآید که در این حالت بارگذاری، n = 2.18 به دست میآید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هایپرالاستیک در بارگذاریهای کشش دو محوره و برش محض نیز مورد بررسی قرار میگیرد. با استفاده از روابط (39) و (43) و (10)، و با در نظر گرفتن $\sigma_2 = \sigma_2 = \sigma_2$ در $\sigma_3 = 0$ روابط (39) بارگذاری کشش دو محوره، تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_{1} = \sigma_{2} = \sigma = \eta_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(-\left(\frac{l}{\lambda_{0}x}\right)^{4} + \lambda_{0}^{2}\left(\frac{x}{l}\right)^{2}\right) + \zeta \eta_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(\lambda_{0}^{4}\left(\frac{x}{l}\right)^{4} - \lambda_{0}^{2}\left(\frac{x}{l}\right)^{2}\right)$$
(48)

در نظر گرفتن
$$\sigma_{3} = \mathbf{0}$$
 تنش در راستای یک به صورت زیر به دست میآید:

$$\sigma_{1} = \eta_{0} \exp\left(\frac{x}{l}\right) \left(-\left(\frac{l}{\lambda_{0}x}\right)^{2} + \lambda_{0}^{2}\left(\frac{x}{l}\right)^{2}\right) + 2\zeta\eta_{0}\exp\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\left(\lambda_{0}^{4}\left(\frac{x}{l}\right)^{4} - \lambda_{0}^{2}\left(\frac{x}{l}\right)^{2}\right)$$
(49)





Fig. 9 Cauchy stress vs. extension ratio in uniaxial extension of transversely isotropic functionally graded hyperelastic material شکل 9 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری کشش تک محوره

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکلهای 10 و 11 نشان داده شده است. مقایسه این نتایج بیانگر این است که تئوری به کاررفته، با تقریب بسیار خوبی میتواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاریهای مذکور را مدل نماید.

6- بحث و نتيجه گيري

با استفاده از روش به کار گرفته شده در فرمول بندی روابط ساختاری در این مقاله، معادلات جدیدی برای توصیف تغییر شکل های بزرگ در لاستیک های تراکم ناپذیر ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری مکانیکی و یا بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی به دست میآید. همچنین روابط ساختاری برای توصیف تغییر شکل های بزرگ لاستیک های تراکم ناپذیر ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری مکانیکی به دست آمده است. در بارگذاری مکانیکی، معادله ساختاری بر اساس روابط هایپرالاستیک و پتانسیل کرنشی الاستیک است. روابط ماده هایپرالاستیک بر مبنای تابع انرژی میشود که ثوابت تابع انرژی و خواص ماده به صورت نمایی در طول میله تغییر میکنند. در بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی، روش به کار برده شده استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل است و سپس با به دست آوردن توزیع دما و استفاده از توابع انرژی معادله ساختاری ماده به دست میآید. در استخراج معادله ساختاری مواد همسانگرد عرضی، علاوه بر سه



Fig. 10 Cauchy stress vs. extension ratio in equibiaxial of transversely isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 10 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری کشش دو محوره



ناوردای اصلی تانسور چپ تغییر شکل از ناورداهای چهارم و پنجم که تابع تانسور چپ تغییر شکل و راستای ناهمسانگردی هستند استفاده شده است.

میزان صحت و دقت معادلات ساختاری بر اساس نتایج آزمایشگاهی موجود سنجیده شده و تطابق خوبی بین نتایج عملی و ارائه شده در این مقاله به دست آمده است. با استفاده از روش به کاررفته و معادلات ساختاری به دست آمده، می توان روابط تنش - کرنش سازه های مختلف ساخته شده از مواد هایپرالاستیک مدرج تابعی را تحت بارگذاری های مختلف استخراج نمود که یکی از مهم ترین کاربردهای این مواد در لاستیک اتومبیل ها و شیرهای کنترلی نیرو گاه ها و پتروشیمی ها است.

7- فهرست علائم

علائم يونانى

دما (C)

كشيدگى

کشیدگی مکانیکی

چگالی (kgm⁻³)

α

γ

ζ

 θ

λ

 λ_M

ρ

 σ

 (m^{-1}) ضريب انبساط طولى

درصد و میزان ناهمسانگردی

تانسور تنش كوشى (²⁻Nm)

مؤلفه تانسور گرادیان تغییر شکل حرارتی

$$B$$
 تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 B_M
 تانسور تغییر شکل راست کوشی - گرین مکانیکی

 C_M
 تانسور تغییر شکل راست کوشی - گرین مکانیکی

 C_M
 تانسور گرادیان تغییر شکل راست کوشی - گرین مکانیکی

 F
 تانسور گرادیان تغییر شکل مکانیکی

 F_M
 تانسور گرادیان تغییر شکل محازتی

 F_T
 تانسور گرادیان تغییر شکل حرارتی

 I_1
 ناوردای اول تانسور تغییر شکل حرارتی

 I_1
 ناوردای اول تانسور تغییر شکل حی کوشی - گرین مکانیکی

 I_1
 ناوردای اول تانسور تغییر شکل حی کوشی - گرین مکانیکی

 I_1
 ناوردای اول تانسور تغییر شکل حی کوشی - گرین مکانیکی

 I_2
 ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 I_2
 ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 I_3
 ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 I_3
 ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 I_3
 ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی - گرین مکانیکی

 I_4
 ناوردای دوم تانسور گرادیان تغییر شکل

 I_4
 ناوردای چینم گل خرارتی

 I_5
 ناوردای چنجم به کاررفته در تابع انرژی مواد همسانگرد صفحه ای

 I_6
 درمینان تانسور گرادیان تغییر شکل

 I_7
 درمینان گارسانگردی د

تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری برش محض

مہندسی مکانیک مدرس، بہمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11

Polymer Science, Vol. 87, pp. 61-67, 2003.

- [14] E. Bilgili, B. Bernstein, H. Arastoopour, Influence of material nonhomogeneity on the shearing response of a Neo-Hookean slab, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 75, pp. 347–363, 2002.
- [15] E. Bilgili, B. Bernstein, H. Arastoopour, Effect of material nonhomogeneity on the inhomogeneous shearing deformation of a Gent slab subjected to a temperature gradient. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 38, pp. 1351–1368, 2003.
- [16] R. Batra, Optimal design of functionally graded incompressible linear elastic cylinders and spheres. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 46, No. 8, pp.2050–2057, 2008.
- [17] Y. Anani, R. Naghdabadi, R. Avazmohammadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of foams in uniaxial tension, *Proceedings of The 16th International Conference on Iranian Society of Mechanical Engineering(ISME 2008)*, Kerman, Iran, 2008. (in Persian)
- [18] Y. Anani, R. Naghdabadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of rubbers in uniaxial tension, *Proceedings* of 7th Conference of Iranian Aerospace Society(AERO 2008), Tehran, Iran, 2008. (in Persian, et al. 2008)
- [19] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, M. Ardiani, Solution of nonlinear nearly incompressible hyperelastic problems by isogeometric analysis method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.15, No.6, pp.240-248, 2015(in Persian, فارسى)
- [20] L. R. G., Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, *Trans. Faraday Soc.* Vol. 40, pp. 59–70, 1944.
- [21] G. Y. Qiu, T. J. Pence, Remarks on the behavior of simple directionally reinforced incompressible nonlinearly elastic solids, *Journal of Elasticity*, Vol. 49, No. 1, pp 1-30, 1997.
- [22] R. Izadi, M. R. Hematiyan, An inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.15, No.5, pp.367-376, 2015 (in Persian)

[1] H. M. James, H. M., E. Guth, 1943, Theory of the elastic properties of rubber, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 11, No. 10, pp. 455-481, 1943.

8- مراجع

- [2] L. R. G. Treloar, *The physics of rubber elasticity*, Second Edittion, pp 120-160, New York: Oxford University Press, 2005.
- [3] P.J. Flory, theory of elasticity of polymer networks, the effect of local constraints on junctions, *Journal of Chemical Physics*. Vol. 66, No. 12, pp. 5720-5729, 1997.
- [4] Y. B. Fu, R. W. Ogden, Nonlinear Elasticity: Theory and Applications, First Edition, pp 75-125, London: Cambridge University Press, 2001.
- [5] M. M. Attard, Finite strain beam theory, *Inernational Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 17, pp. 4563–4584. 2003.
- [6] M. M. Attard, G. W. Hunt, Hyperelastic constitutive modeling under finite strain, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 5327– 5350, 2004.
- [7] S. Suresh, A. Mortensen, *Fundamentals of functionally graded materials*, First Edition, pp 23-40, London: IOM Communication Limited, 1998.
- [8] M. Yamanouchi., M. Koizumi, I. Shiota, *Proceeding of first international symposium on functionally gradient materials*, Japan, pp. 273-281. 1990.
- [9] M. Koizumi, *Ceramic Engineer Science Proceeding*, Japan, pp. 333–347, 1992.
- [10] Y. Fukui, Fundamental investigation of functionally graded material manufacturing system using centrifugal force, *International Joural of Japan Society of Mechanical Engineering, Series III*, Vol. 34, pp.144-148, 1998.
- [11] B. V. Sankar., An elasticity solution for functionally graded beams, *Composites Sciences and Technology*, Vol. 61, No. 5, pp. 689-696, 2001.
- [12] M. A. Benatta, I. Mechab, A. Tounsi, E. A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 2, pp. 765-773, 2008.
- [13] Y. Ikeda, Graded styrene-butadiene rubber vulcanizates., Journal of Applied.

367

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دورہ 15، شمارہ 11