



# مدلسازی واگن کمرشکن و بهینه‌سازی سیستم تعلیق آن در راستای قائم بر خطوط ریلی مستقیم برای حمل ترانسفورماتورهای سنگین

محسن حاجی‌زین‌العابدینی<sup>۱</sup>، حبیب‌ا... ملاطفی<sup>۲\*</sup>، حسن ظهور<sup>۳</sup>، محسن درگزی<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، تهران

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- استاد مهندسی مکانیک و عضو قطب علمی طراحی، رباتیک و اتوماسیون دانشگاه صنعتی شریف، تهران

۴- کارشناس مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات راه آهن ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، molatefi@iust.ac.ir

**چکیده-** در این تحقیق به منظور حمل و نقل ریلی ترانسفورماتورهای سنگین با مدلسازی کامپیوتری واگن کمرشکن شش محوره به بهینه‌سازی رفتار دینامیکی سیستم تعلیق در راستای قائم پرداخته شده است. برای این کار ابتدا با نرم‌افزار ادمز/ریل و سپس روش نیوتن-اویلر، دینامیک واگن کمرشکن شبیه‌سازی شد. در ادامه با انتخاب پارامترهای موثر بر رفتار سیستم تعلیق و بر اساس معیار آسیب‌پذیری تعریف‌شده برای حمل ترانسفورماتورها به تعریف تابع بهینه‌سازی پرداخته شد. سپس با انجام تعدادی شبیه‌سازی بر روی فضای تغییرات پارامترهای منتخب با تحلیل داده‌های به‌دست آمده به بهینه‌سازی سیستم تعلیق این واگن پرداخته شد.  
**کلیدواژگان:** واگن کمرشکن، سیستم تعلیق، بهینه‌سازی، ادمز/ریل، حمل ترانسفورماتور

## Modeling of depressed center wagon and optimization of its Suspension for transporting of high weight transformers on straight rail in vertical direction

M. H. Zeynolabedini<sup>1</sup>, H. Molatefi<sup>2\*</sup>, H. Zohoor<sup>3</sup>, M. Dargazi<sup>4</sup>

1- MSc. Student, Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Tehran South Branch, Tehran, Iran

2- Assis. Prof., Mech. Eng., Iran Science and Technology Univ., Tehran, Iran

3- Prof., Mech. Eng. & Member Center of Excellence in Design, Robotics & Automation, Sharif Univ. of Technology, Tehran, Iran

4- Bs., Mech. Eng., Iran Railway Research Center, Tehran, Iran

\* P. O. B. 16846-13114 Tehran, molatefi@iust.ac.ir

**Abstract-** In this study, suspension system in vertical direction of depressed center wagon with six axles is optimized for transporting of high weight transformers on straight tracks. For this purpose, dynamics of depressed center wagon simulated in two ways, first by ADAMS / Rail software and then by Newton-Euler analysis method. In Newton-Euler analysis method non-linear equations of motion and kinematical constraints have been solved in time domain. A function for optimization has been defined based on Non Operating Shock Specification (NOSS) factor that is factor of vulnerability in transformer transportation. By performing many simulations on variation interval of selected parameters, suspension of this wagon has been optimized for transporting of transformers. Results show that for improvement of dynamics behavior of depressed center wagon, stiffness of suspension element must be changed a little.

**Keywords:** Depressed Center Wagon, Suspension System, Optimization, ADAMS/Rail, Transporting of Transformer

## ۱- مقدمه

تعلیق بهینه‌سازی شد. مشخصات جرمی المان‌های مجموعه واگن در جدول ۱ لیست شده‌اند.

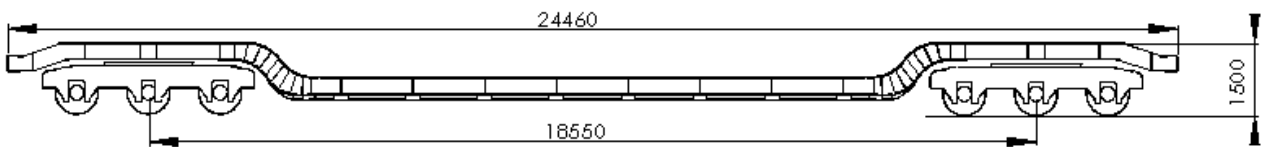
## ۲- مدل‌سازی و شبیه‌سازی دینامیکی واگن با نرم‌افزار ادمز/ریل

برنامه ادمز به عنوان یکی از مشهورترین مجموعه‌های نرم‌افزاری است که در سال ۱۹۹۵ به آن توانمندی شبیه‌سازی دینامیک وسائط نقلیه ریلی تحت عنوان ادمز/ریل اضافه شد. سپس مجوز استفاده از قابلیت‌های نرم‌افزاری مدینا<sup>۵</sup> را کسب کرد. بسته نرم‌افزاری ادمز/ریل به طور عمده جهت طراحی و تحلیل سیستم‌های ریلی ارائه شده است. این نرم‌افزار امروزه در مراکز تحقیقات ریلی مختلف جهان مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲].

## ۲-۱- سیستم تعلیق

سیستم تعلیق این واگن متشکل از فنر برگ قوس مثبت است که بین جعبه یاتاقان و بوژی نصب شده است [۳]. به دلیل وجود اصطکاک بین لایه‌های فنر برگ سیستم تعلیق بر اساس الگوی کلس<sup>۶</sup> مدل می‌شود [۴-۵]، شکل ۲، که در نرم‌افزار ادمز/ریل در قالب المان دمپر اصطکاکی<sup>۷</sup> تعریف می‌شود. بین هر جعبه یاتاقان و بوژی از سه المان دمپر اصطکاکی برای

حمل ترانسفورماتورها، به‌ویژه ترانسفورماتورهای غول‌پیکر، پروسه‌ای پرهزینه، زمان‌بر و حساس است. ترانسفورماتورها جزء محموله‌های ترافیکی با مشکلات خاص حمل خود هستند. انجمن ترانسفورماتور مهندسی قدرت IEEE<sup>۱</sup> در خصوص حساسیت و سنجش آسیب‌پذیری ترانسفورماتورها حین حمل به تعریف معیار نوس<sup>۲</sup> پرداخته و پیشنهادهایی را ارائه کرده است [۱]. از طرفی دیگر با توجه به پتانسیل موجود در حمل و نقل ریلی امکان جابه‌جایی اقتصادی‌تر و ایمن‌تر ترانسفورماتورها نسبت به حمل جاده‌ای آن‌ها وجود دارد. با بررسی‌های انجام شده از بین واگن‌های باری موجود در صنعت راه آهن ایران، واگن کمرشکن شش‌محوره آلمانی برای این منظور انتخاب شد (شکل ۱). در این کار تلاش شده است تا رفتار دینامیکی سیستم تعلیق واگن کمرشکن شش‌محوره در راستای عمودی برای حمل ترانسفورماتور سنگین بهینه‌سازی شود. ابتدا مدل بوژی و بدنه واگن و ترانسفورماتور با نرم‌افزار سالیدورکس<sup>۳</sup> ایجاد و سپس مجموعه واگن در نرم‌افزار ادمز/ریل<sup>۴</sup> مونتاژ و حرکت آن شبیه‌سازی شد. صحت و اعتبار مدل‌سازی و شبیه‌سازی انجام‌شده با نرم‌افزار ادمز/ریل با استخراج معادلات حرکت مجموعه واگن از روش نیوتن-اولر تعیین و دست آخر سیستم



شکل ۱ نقشه نمای جانبی واگن کمرشکن شش‌محوره آلمانی (ابعاد به میلی‌متر)

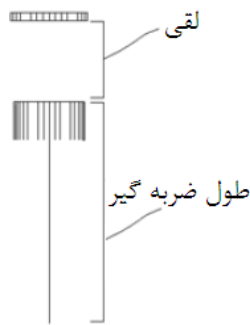
جدول ۱ مشخصات جرمی اجزای واگن کمرشکن و ترانسفورماتور

مرکز جرم (m) <sup>*</sup>	ممان اینرسی جرمی (kg m <sup>2</sup> )			جرم (kg)	المان
	I <sub>xx</sub>	I <sub>yy</sub>	I <sub>zz</sub>		
۰/۴۴۹	۸۱۰	۸۱۰	۱۱۲	۱۵۰۰	چرخ محور
۰/۴۴۹	۱/۵	۲	۱/۵	۱۵۰	جعبه یاتاقان
۰/۷۵۰	۷۰۷	۳۲۶۰	۲۶۶۵	۱۶۵۰	بوژی
۰/۷۲۴	۱۵۱۸۵	۶۴۷۲۵۱	۶۳۹۳۹۱	۲۳۴۸۰	بدنه واگن
۲/۶۲۰	۱۱۸۲۹۳	۲۴۵۲۲۱	۲۹۴۲۲۴	۶۱۵۰۰	ترانسفورماتور

\* مرکز جرم‌ها نسبت به سطح ریل هستند

5. MEDINA
6. Kolsch
7. Friction damper

1. IEEE/PES transformers committee
2. NOSS: Non Operating Shock Specification
3. Solid Works
4. ADAMS/Rail



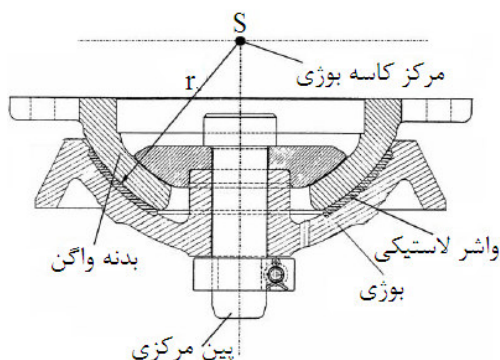
شکل ۴ شماتیک از یک المان بامپ‌استپ [۴]

## ۲-۳- کاسه بوژی

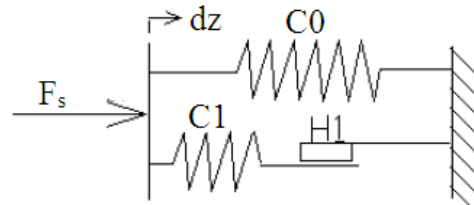
هر یک از کاسه بوژی‌ها با یک مفصل کروی<sup>۲</sup> بین بدنه واگن و بوژی مدل شده است. اصطکاک کاسه بوژی را می‌توان با سه گشتاور حول محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  مدل کرد [۸] که به ترتیب تابعی از مولفه  $x$ ،  $y$  و  $z$  سرعت زاویه‌ای نسبتی بین بدنه واگن و بوژی هستند:

$$T_{friction(i)} = \frac{\omega_i \cdot \chi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_i \cdot \chi}{\mu \cdot N \cdot r}\right)^2}} \quad i = x, y, z \quad (1)$$

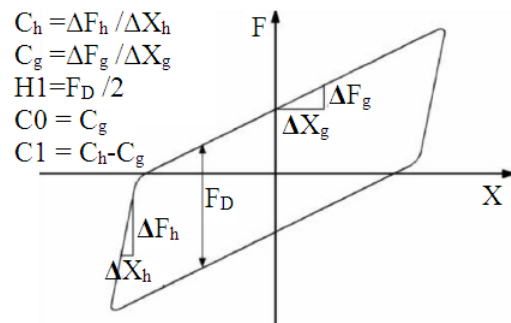
که در آن  $|\omega|$  سرعت زاویه نسبتی بین بوژی و بدنه واگن،  $\chi$  شیب نمودار در شرایط استاتیک،  $\mu$  ضریب اصطکاک،  $N$  نیروی عمود در کاسه بوژی،  $\omega_i$  سرعت زاویه نسبتی بوژی و بدنه واگن حول محور  $i$  است.  $r$  مطابق شکل ۵ شعاع کاسه بوژی و  $T_{friction(i)}$  (به اختصار  $T_{fi}$ ) گشتاور اصطکاکی حول محور  $i$  است. در ادمز/ریل این گشتاورهای اصطکاکی در مرکز کاسه بوژی حول سه محور با سه المان اکچیتور پینت ترک<sup>۳</sup> اعمال شد.

شکل ۵ کاسه بوژی و شعاع آن  $r$  [۷]

مدلسازی فنر برگ در سه راستای طولی، عرضی و عمودی استفاده شده است. مشخصات پارامترهای الگوی کلس سیستم تعلیق، مطابق شکل ۳، در جدول ۲ آورده شده است [۶].



شکل ۲ الگوی کلس در مدلسازی فنر برگ با ادمز/ریل [۴]



شکل ۳ نمودار شماتیک نیرو جابه‌جایی یک فنر جایی و رابطه شیب‌های آن با الگوی کلس (با ویرایش از [۷])

جدول ۲ پارامترهای الگوی کلس در سه راستای طولی، عرضی و قائم به‌دست آمده از نتایج تست فنر برگ [۶]

راستا	$F_D$ (kN)	$C_g$ (N/m)	$C_h$ (N/m)
طولی X	۱/۶	$2/2 \times 10^5$	$6/7 \times 10^5$
عرضی Y	۰/۶	$1/0 \times 10^5$	$1/5 \times 10^5$
قائم Z	۱۳	$2/3 \times 10^6$	$7/2 \times 10^6$

## ۲-۲- بالشتک‌ها

بالشتک‌ها به کمک المان بامپ‌استپ<sup>۱</sup> مدلسازی شده‌اند. بامپ استپ یک المان الاستیک است که مطابق شکل ۴ یک لقی قابل تعریف دارد به طوری که تا وقتی این لقی صفر نشود هیچ نیروی الاستیکی در آن ایجاد نمی‌شود، ولی چنانچه فاصله لقی کوچک و کوچک شود و از صفر بگذرد این المان سختی بزرگی از خود نشان می‌دهد.

2. Spherical joint  
3. Actuator Point Torque

1. Bumpstop

## ۲-۴- جعبه یاتاقان

حرکت دورانی نسبی بین جعبه یاتاقان و چرخ-محور با مفصل دورانی<sup>۱</sup> مدل شد و از طرفی لقی بین جعبه یاتاقان و بوژی در راستای عرضی و طولی هر یک به ترتیب به اندازه ۲۳ میلی‌متر و ۵۸ میلی‌متر با المان بامپ‌استپ مدل شد.

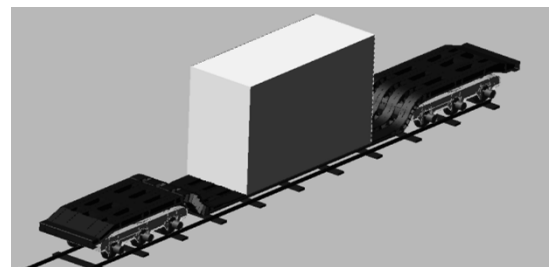
## ۲-۵- پروفیل چرخ و ریل و تئوری تماس چرخ و ریل

مشخصات هندسی چرخ، چرخ-محور و ریل در جدول ۳ آورده شده است. تئوری تماس چرخ و ریل تئوری غیرخطی کالکر اصلاح‌شده است که در غالب الگوریتمی مرسوم به FASTSIM استفاده می‌شود که در این الگوریتم پارامترهای هندسی تماسی چرخ و ریل از پیش برای حالات مختلف محاسبه شده‌اند و حین محاسبات فراخوانده می‌شوند. از این رو زمان انجام محاسبات کوتاه می‌شود [۲]. در کتابخانه ادمز/ریل نام فایل پروفیل چرخ، پروفیل ریل و فایل مربوط به مدلسازی تئوری تماس چرخ و ریل به ترتیب عبارت‌اند از: mdi\_s1002.wpf، mdi\_contact\_tab.ccf و mdi\_track\_straight.trk

جدول ۳ معرفی چرخ، چرخ-محور و ریل (ابعاد به میلی‌متر)

پارامتر	مشخصه
پروفایل چرخ	S1002
طول محور	۲۲۰۷
شعاع اسمی چرخ	۴۴۹
فاصله دو چرخ	۱۵۰۰
پروفایل ریل	UIC 60
شیب ریل	۰/۰۲۵
گیج ریل	۱۴۳۵
نوع ریل	مستقیم، بدون ناهمواری

دست‌آخر مدل نهایی مجموعه واگن مطابق شکل ۶ حاصل شد.



شکل ۶ مدل نهایی مجموعه واگن در نرم‌افزار ادمز/ریل

## ۳- استخراج معادلات حرکت مجموعه واگن جهت

## تعیین اعتبار مدلسازی و نتایج شبیه‌سازی با

## ادمز/ریل

معادلات حرکت برای مجموعه واگن با روش نیوتن-اولر و در حرکت بر یک خط ریل مستقیم و بدون ناهمواری استخراج شده است. پس از معرفی و بیان نحوه محاسبه نیروهای وارده و رسم دیاگرام جسم آزاد (FBD) برای هر یک از المان‌های مجموعه واگن، معادلات حرکت برای هر یک از المان‌ها و نیز روابط قیدی نوشته شده و سپس دستگاه معادلات به دست آمده با کدنویسی در متلب<sup>۲</sup> محاسبه و حل شده و با نتایج حاصل از شبیه‌سازی انجام‌شده در ادمز/ریل مقایسه شد. معادلات در قالب ماتریس‌های همگن  $4 \times 4$  نوشته شده‌اند [۹]. معادلات نیوتن در دستگاه مختصات مرجع نوشته شده، ولی معادلات اولر به جهت صفرشدن مشتق زمانی ممان اینرسی جرمی در دستگاه مختصات محلی جسم نوشته شده‌اند.

## ۳-۱- نیروهای تماسی

بزرگی نیروهای تماسی بین چرخ و ریل در راستای طولی و عرضی، موسوم به نیروهای خزشی طولی ( $F_{ix}$ ) و عرضی ( $F_{iy}$ )، از تئوری غیرخطی کالکر، که ترکیبی از تئوری خطی کالکر و تئوری جانسون-ورمولن است، محاسبه شدند. همچنین، گشتاور تماسی موسوم به گشتاور خزشی اسپین ( $M_{spin}^k$ ) از تئوری خطی کالکر محاسبه شد. براساس تئوری خط داریم:

$$F_{tx}^k = k_{11}\xi_x$$

$$F_{ty}^k = k_{22}\xi_y + k_{23}\xi_z$$

$$M_{spin}^k = -k_{23}\xi_y + k_{33}\xi_z \quad (2)$$

که در آن  $x$ ،  $y$  و  $z$  راستاهای دستگاه مختصات تماسی بین چرخ و ریل هستند و  $\xi$  خزش در این دستگاه مختصات است.  $k_{ij}$ ها ضرایب خزشی کالکر هستند و تابعی از هندسه چرخ و ریل، خواص مواد و نیروی عمودی وارد بر صفحه معرف سطح تماس است. ضرایب خزشی کالکر ( $k_{ij}$ ها) به کمک پایگاه داده‌های ایجادشده به کمک ماژول رسجیو<sup>۳</sup> نرم‌افزار ادمز/ریل در محاسبات فراخوانده می‌شوند.

2. MATLAB  
3. RSGEO

## ۳-۳- گشتاورهای اصطکاکی در کاسه بوژی

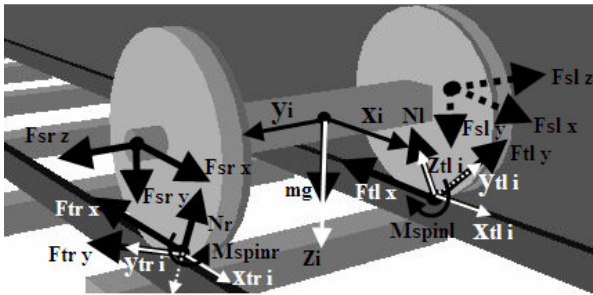
گشتاورهای اصطکاکی در کاسه بوژی در اینجا نیز از رابطه (۱) محاسبه می‌شوند.

## ۳-۴- دیاگرام جسم آزاد و معادلات حرکت چرخ-محور

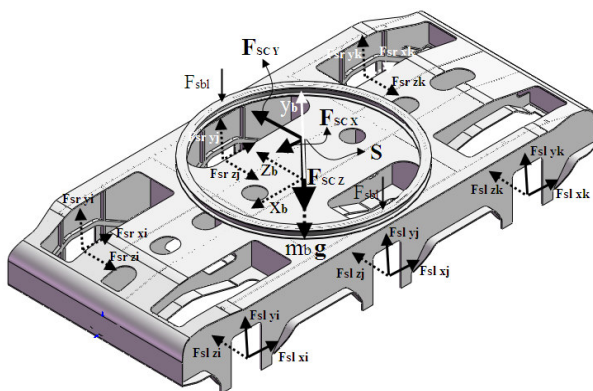
دیاگرام جسم آزاد مطابق شکل ۷ است و معادلات متناظر با آن در پیوست آورده شده است. دستگاه مختصات  $X_i, Y_i, Z_i$  دستگاه مختصات محلی چرخ-محور نام است و  $X_{tri}, Y_{tri}, Z_{tri}$  و  $X_{tli}, Y_{tli}, Z_{tli}$  به ترتیب دستگاه مختصات در نقاط تماس بین چرخ و ریل در طرف راست و چپ این چرخ-محور هستند.  $M_{spin}$  گشتاور اسپین، نیروی عمود بر صفحه تماسی و  $mg$  نیروی وزن هستند.

## ۳-۵- دیاگرام جسم آزاد و معادلات حرکت بوژی

دیاگرام جسم آزاد بوژی مطابق شکل ۸ است و معادلات متناظر با آن در پیوست آورده شده است. دستگاه مختصات  $X_b, Y_b, Z_b$  دستگاه مختصات محلی بوژی است.  $m_b g$  نیروی وزن است.



شکل ۷ دیاگرام جسم آزاد چرخ-محور نام



شکل ۸ دیاگرام جسم آزاد بوژی (سه گشتاور اصطکاکی  $T_{fx}$ ,  $T_{fy}$  و  $T_{fz}$  در مرکز کاسه بوژی  $S$  ترسیم نشده‌اند)

بر اساس قانون اصطکاک کولمب اندازه نیروی برآیند خزشی نمی‌تواند از مقدار نیروی اصطکاک در لغزش خالص یعنی  $\mu N$  تجاوز کند. با استفاده از تئوری جانسون-ورمولن، نیروی برآیند خزشی خطی  $\bar{F}_L$  محدود به مقدار غیرخطی  $F_L$  می‌شود، یعنی:

$$\bar{F}_L = \sqrt{(F_{tx}^k)^2 + (F_{ty}^k)^2} \quad (3)$$

$$F_L =$$

$$\begin{cases} \mu N \left[ \left( \frac{\bar{F}_L}{\mu N} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{F}_L}{\mu N} \right)^2 + \frac{1}{27} \left( \frac{\bar{F}_L}{\mu N} \right)^3 \right], & \bar{F}_L \leq 3\mu N \\ \mu N, & \bar{F}_L > 3\mu N \end{cases} \quad (4)$$

بنابراین ضریب محدودکننده نیروی خزشی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\epsilon = \frac{F_L}{\bar{F}_L} \quad (5)$$

بنابراین مدل غیرخطی نیروهای خزشی عبارت است از [۱۰]:

$$F_{tx} = \epsilon F_{tx}^k$$

$$F_{ty} = \epsilon F_{ty}^k \quad (6)$$

در نتیجه، در محاسبات معادلات حرکت هر چرخ-محور، دو نیروی  $F_{tx}$  و  $F_{ty}$  به اضافه گشتاور  $M_{spin}^k$  ناشی از رفتار خزشی بین هر چرخ با ریل منظور می‌شود.

## ۳-۲- نیروهای سیستم تعلیق

نیروی ایجادشده توسط سیستم تعلیق در هر یک از راستاهای  $x$ ,  $y$  و  $z$  از معادله حاکم بر الگوی کلهش به دست می‌آید.

$$F_s = C0 \times dz + K1 \quad (7)$$

که در آن  $C0$  از جدول ۲ طبق شکل ۳ مشخص می‌شود.  $dz$  میزان تغییرات دو سر الگوی کلهش است (شکل ۲) و  $K1$  نیروی ایجادشده در المان اصطکاکی است که از حل معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\dot{K}1 = C1 \times Vz$$

$$\times \left\{ 1 - 0.5 \times (1 + \text{sign}(Vz \times K1)) \left| \frac{K1}{H1} \right|^m \right\} \quad (8)$$

که در این رابطه  $Vz$  نرخ تغییر شکل  $dz$  است.  $C1$  سختی فنر و  $H1$  بیشینه نیروی ترمز المان اصطکاکی است که از جدول ۲ طبق شکل ۳ مشخص می‌شود [۴].  $\text{sign}$  تابع علامت است.

(نقطه S در شکل ۹ و شکل ۱۰). بنابراین، شتاب نقطه‌ای از بدنه واگن منطبق بر مرکز هر کاسه بوژی با شتاب نقطه‌ای از بوژی متناظر با آن برابر است. با نصب دستگاه مختصات مجموعه بدنه واگن و ترانسفورماتور  $x_w y_w z_w$  در مرکز جرم این مجموعه مطابق شکل ۱۰ و در نظر گرفتن  $\alpha_x, \omega_x$  و  $r_{S/x}$  به عنوان شتاب خطی مبدأ، شتاب زاویه، سرعت زاویه دستگاه  $x=w, b$  و بردار مکان نقطه S نسبت به این دستگاه، با توجه به ابعاد شکل ۱۰ خواهیم داشت:

$$a_S = a_w + \omega_w \times (\omega_w \times r_{S/w}) + \alpha_w \times r_{S/w} = a_b + \omega_b \times (\omega_b \times r_{S/b}) + \alpha_b \times r_{S/b} \quad (10)$$

### ۳-۹- معادلات، مجهولات و مقایسه نتایج

تعداد معادلات عبارت است از:

تعداد اجسام	تعداد معادلات	تعداد معادلات قیدی
$(6+2+1)$	$(3+3)$	$6+6+(2 \times 3)$
↑ چرخ-محور	↑ بوژی	↑ رابطه (۱۰)
↑ بوژی	↑ بوژی	↑ رابطه (۱۱)
↑ چرخ-محور	↑ بدنه واگن و ترانسفورماتور	↑ تعداد کاسه بوژی رابطه (۹)

$$(6+2+1) \times (3+3) + 6+6+(2 \times 3) = 72$$

تعداد مجهولات نیز عبارت است از:

تعداد اجسام	مختصات مجهول	نیروها مجهول
$(6+2+1)$	$(3+3)$	$(2 \times 3) + (6 \times 2)$
↑ چرخ-محور	↑ بوژی	↑ $N_r, N_l$
↑ بوژی	↑ مختصه های کارتیزیسی	↑ $F_{scx}, F_{scy}, F_{scz}$
↑ چرخ-محور	↑ زوایای کارتیزیسی	↑ تعداد چرخ-محور
↑ چرخ-محور	↑ بدنه واگن و ترانسفورماتور	↑ تعداد کاسه بوژی

$$(6+2+1) \times (3+3) + (2 \times 3) + (6 \times 2) = 72$$

### ۳-۶- دیاگرام جسم آزاد و معادلات حرکت بدنه واگن و ترانسفورماتور

دیاگرام جسم آزاد بدنه واگن و ترانسفورماتور مطابق شکل ۹ است و معادلات متناظر با آن در پیوست آورده شده است. دستگاه مختصات  $x_w y_w z_w$  دستگاه مختصات محلی بدنه واگن و ترانسفورماتور است.  $m_w g$  نیروی وزن است.

### ۳-۷- سینماتیک تماس بین چرخ-محور با ریل و معادلات قیدی حاکم بر چرخ-محور

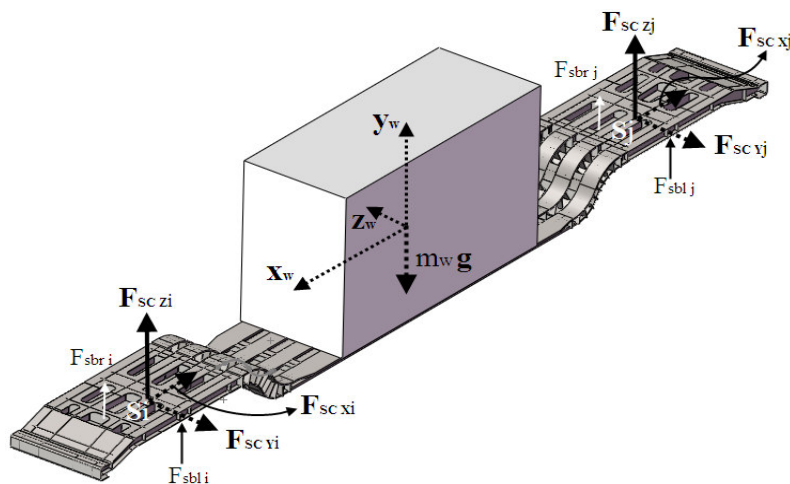
معادلات سینماتیکی تماس بین چرخ-محور با ریل و حل آن‌ها [۱۱]، به کمک ماژول رسجیو نرم‌افزار ادمز ریل تعیین شدند، به طوری که مجهولات معادلات سینماتیکی تماس بین چرخ-محور با ریل که یک سری پارامترهای هندسی هستند برحسب میزان جابه‌جایی عرضی چرخ-محور  $u_y$  بیان می‌شوند. دو تا از این مجهولات پارامترهای هندسی  $u_z$  و  $\phi$  می‌باشند که به ترتیب مولفه عمودی مکان مرکز جرم چرخ-محور و زاویه دوران آن حول محور طولی هستند. یعنی همواره دو معادله قیدی زیر برای هر چرخ-محور برقرار است:

$$u_{z i} = f(u_{y i}) \quad i = 1 \dots 6 \quad (8)$$

$$\phi_i = f(u_{y i}) \quad i = 1 \dots 6 \quad (9)$$

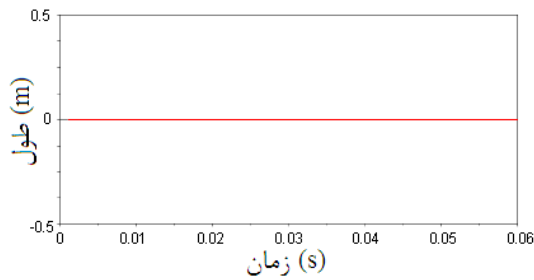
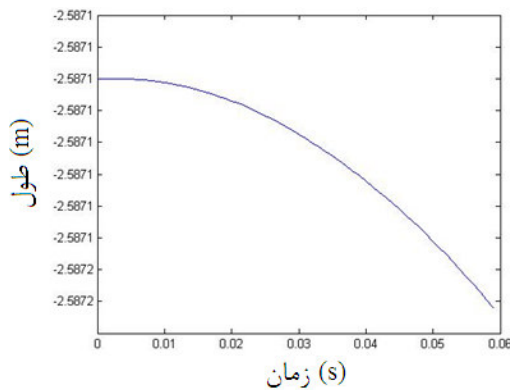
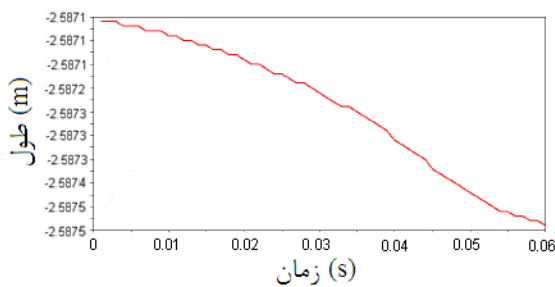
### ۳-۸- معادلات قیدی سینماتیکی کاسه بوژی

از دیگر قیدهای حاکم بر سینماتیک واگن مفصل کروی است که به موجب ساختار کاسه بوژی تعریف می‌شود. مرکز کاسه بوژی‌ها نقطه مشترک بوژی‌ها با بدنه واگن محسوب می‌شوند



شکل ۹ دیاگرام جسم آزاد بدنه واگن و ترانسفورماتور (سه گشتاور اصطکاکی  $T_{fx}, T_{fy}$  و  $T_{fz}$  در مرکز هر کاسه بوژی S ترسیم نشده‌اند)



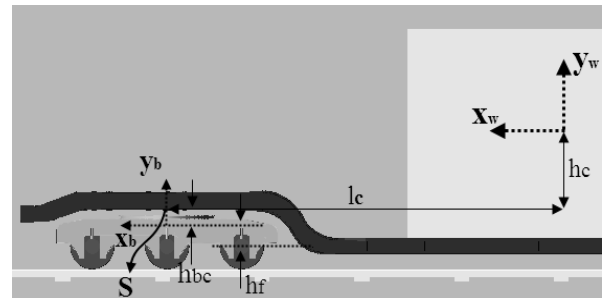
شکل ۱۴ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $y$ ، خروجی ادمزرایلشکل ۱۵ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $z$ ، خروجی متلبشکل ۱۶ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $z$ ، خروجی ادمزرایل

#### ۴- بهینه‌سازی سیستم تعلیق

به ترتیب متغیرهای بهینه‌سازی، فضای بهینه‌سازی و تابع بهینه‌سازی مشخص و تعریف شدند. سپس، با انجام ۱۰۰ شبیه‌سازی با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه، بر روی فضای بهینه‌سازی در مسیر مستقیم با ناهمواری قائم از نوع کلاسیک سینوسی با دامنه برابر ۰/۰۱ m و با دور تناوب ۱ m بر اساس تابع بهینه‌سازی تعریف‌شده، متغیرهای بهینه تعیین شدند.

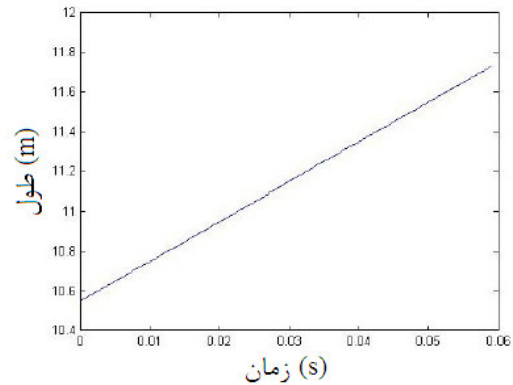
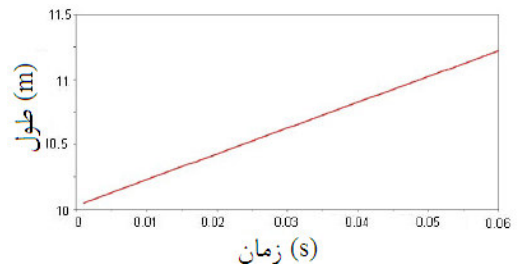
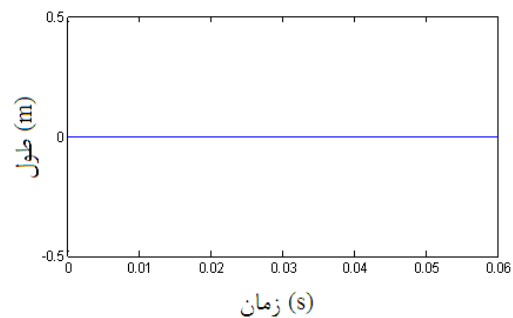
#### ۴-۱- متغیرهای بهینه‌سازی و فضای بهینه‌سازی

با توجه به استفاده از الگوی کلس برای مدل‌سازی سیستم تعلیق، به منظور تعیین سختی فنرها و بهینه‌سازی سیستم تعلیق، مقادیر ضرایب  $C_0$  و  $C_1$  الگوی کلس در راستای قائم



شکل ۱۰ معرفی ابعاد مورد نیاز در تعیین معادلات حرکت

در اینجا نتایج هر دو شبیه‌سازی صورت گرفته با ادمزرایل و روش نیوتن-اولبر با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه و با گام زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه برای موقعیت ترانسفورماتور در سه راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  در شکل‌های ۱۱ تا ۱۶ آورده شده است.

شکل ۱۱ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $x$ ، خروجی متلبشکل ۱۲ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $x$ ، خروجی ادمزرایلشکل ۱۳ موقعیت ترانسفورماتور در جهت  $y$ ، خروجی متلب

بیشینه مقدار یک موج را بازتاب نمی‌دهد. جذر میانگین ریشه‌ها برای توابع پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt} \quad (11)$$

از طرفی دیگر بیشینه مقدار یک موج خود به عنوان یک کمیت ریاضی کاملاً شناخته شده است.

حال می‌توان، با تعریف حاصل‌ضرب جذر میانگین ریشه‌ها در بیشینه مقدار یک موج، شاخص آماری تعریف کرد که هم‌زمان معرف بزرگی مساحت‌های نیم‌پالس‌های موج شتاب و بیشینه مقدار آن باشد. از طرفی چون بین مقدار عددی جذر میانگین ریشه‌های یک موج با مقدار عددی بیشینه آن اختلاف بزرگی وجود دارد، ممکن است نقش یکی در مقدار عددی حاصل‌ضرب آن دو کم‌رنگ شود؛ از این رو از حاصل‌ضرب مقدار نرمالیزه‌شده آن‌ها به عنوان شاخص آماری استفاده می‌شود. چون که بر اساس معیار نوس هم بیشینه مقدار یک موج شتاب و هم مقدار مساحت‌های نیم‌پالس‌های آن موج شتاب، در تعیین آسیب‌رسیدن به ترانسفورماتور، نقش برابری بازی می‌کنند. مقدار نرمالیزه هر یک از این مشخصه‌های حاصل از هر شبیه‌سازی، از تقسیم مقدار آن مشخصه بر بیشینه مقدار آن در بین کلیه شبیه‌سازی‌های انجام‌شده بر روی فضای بهینه‌سازی، به‌دست می‌آید.

در نتیجه تابع بهینه‌سازی در این تحقیق عبارت خواهد بود از مقدار حاصل‌ضرب مقادیر نرمالیزه‌شده جذر میانگین ریشه‌ها و بیشینه مقدار موج شتاب.

#### ۴-۳- بهینه‌سازی

مقدار تابع بهینه‌سازی به ازای مقادیر مختلف ضرایب فنرهای الگوی کلش در ۱۰۰ مرحله شبیه‌سازی محاسبه گردید، به طوری که کل فضای بهینه‌سازی تعریف‌شده را پوشش دهد. ضرایب فنرهای سیستم تعلیق بهینه برابراند با مقادیر ضرایبی که به ازای آن‌ها مقدار تابع بهینه‌سازی کمینه می‌شود. با ترسیم نمودار مقدار تابع بهینه‌سازی روی فضای بهینه‌سازی (شکل ۱۸) و بررسی نمودار و داده‌های به‌دست آمده مقادیر بهینه برای ضرایب فنرهای الگوی کلش برابرند با:

$$C0 = 2 \times 10^6 \text{ N/m}, C1 = 6 \times 10^6 \text{ N/m}$$

با توجه به ضرایب به‌دست آمده فتر بهینه انتخاب می‌شود.

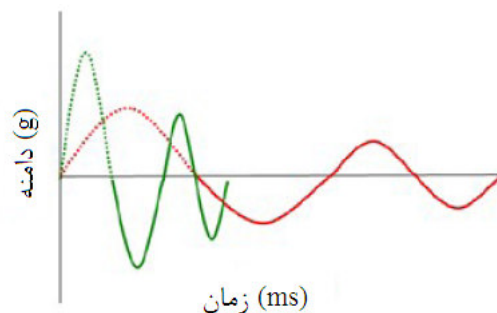
به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی یا به عبارتی دیگر پارامترهای طراحی سیستم تعلیق انتخاب شدند.

برای اجتناب از پاسخ‌های غیرواقعی، با درنظر گرفتن حدود سختی فنرهای مورد استفاده در راه‌آهن و نیز امکان ساخت فنرها، فضای بهینه‌سازی به صورت یک فضای دوبعدی در بازه طولی  $[10^6 10^7]$  برای  $C0$  و در بازه عرضی  $[10^6 10^7]$  برای  $C1$ ، که رنج متداول در راه آهن هستند، تعریف شدند.

#### ۴-۲- تابع بهینه‌سازی

معیار نوس یک معیار دوپارامتری است که برای سنجش آسیب‌پذیری ترانسفورماتورها تعریف شده است [۱]. یکی از دو پارامتر آن مقدار بحرانی شتاب وارده است و دیگری، یکی از مقادیر دوره تناوب بحرانی، فرکانس بحرانی یا تغییر سرعت بحرانی انتخاب می‌شود. به دلیل آن که انرژی وارده به ترانسفورماتور مستقیماً با تغییر سرعت رابطه دارد، تحلیل آسیب‌پذیری با پارامتر تغییر سرعت دقیق‌تر است، ولی حجم محاسبات با انتخاب دوره تناوب بحرانی یا فرکانس بحرانی ساده‌تر و کمتر می‌شود [۱]. در اینجا ما پارامتر تغییر سرعت بحرانی را انتخاب کردیم. بیشینه تغییر سرعت یک موج شتاب برابر است با بیشینه مقادیر مساحت‌های نیم‌پالس آن موج.

چنانچه نمودار موج شتاب وارده به ترانسفورماتور مطابق شکل ۱۷ باشد، براساس معیار نوس مقادیر بیشینه شتاب و تغییر سرعت در یک نیم‌پالس نباید هم‌زمان به ترتیب از مقادیر شتاب بحرانی و تغییر سرعت بحرانی تجاوز کنند.



شکل ۱۷ نمایش نیم‌پالس شوک مکانیکی با خط چین [۱]

از میان شاخص‌های کلاسیک آماری پردازش سیگنال معیار جذر میانگین ریشه‌ها (RMS) به تنهایی معرف خوبی از مساحت‌های نیم‌پالس‌های یک موج است، ولی چیزی در مورد



بالشتک هستند و اندیس  $i$  معرف تعلق نیرو به چرخ-محور یا بوژی نام است. اندیس  $X$ ,  $Y$  و  $Z$  معرف مولفه نیرو در راستای هر یک از محورهای دستگاه مختصات است.

معادله نیوتن چرخ-محور<sup>۱</sup>

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_{tr} \begin{bmatrix} -F_{trx} \\ F_{try} \\ -N_r \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_{tl} \begin{bmatrix} -F_{tlx} \\ F_{tly} \\ N_l \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_b \begin{bmatrix} F_{srx} \\ -F_{sry} \\ F_{srz} \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_b \begin{bmatrix} F_{slx} \\ -F_{sly} \\ -F_{slz} \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله اویلر چرخ-محور<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} & \left( {}^i T_{tr} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{spinr} \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} + \left( {}^i T_{tl} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{spintl} \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} + \left( {}^i T_{tr} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} \\ & \times \left( {}^i T_{tr} \begin{bmatrix} -F_{trx} \\ F_{try} \\ -N_r \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} + \left( {}^i T_{tl} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} \times \left( {}^i T_{tl} \begin{bmatrix} -F_{tlx} \\ F_{tly} \\ N_l \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ a_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( {}^i T_b \begin{bmatrix} F_{srx} \\ -F_{sry} \\ F_{srz} \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( {}^i T_b \begin{bmatrix} F_{slx} \\ -F_{sly} \\ -F_{slz} \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} \\ & \times \left( {}^i T_b \begin{bmatrix} F_{slx} \\ -F_{sly} \\ -F_{slz} \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} I_{xx} i\alpha_x \\ I_{yy} i\alpha_y - (I_{zz} - I_{xx}) i\omega_x i\omega_z \\ I_{zz} i\alpha_z \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

معادله نیوتن بوژی

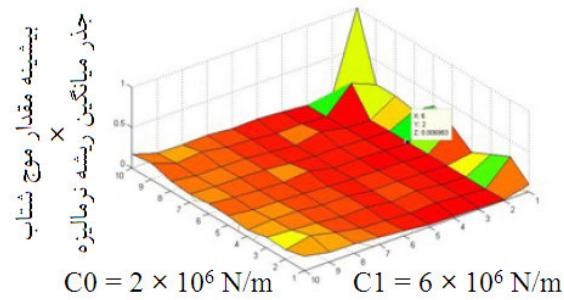
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_b g \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_b \times \begin{bmatrix} -F_{srxi} - F_{srkj} - F_{srkx} - F_{slxi} - F_{slxj} - F_{slkx} \\ F_{sryi} + F_{sryj} + F_{sryk} + F_{slyi} + F_{slyj} + F_{slyk} - F_{sbr} - F_{sbl} \\ -F_{srzi} - F_{srzj} - F_{srzk} + F_{slzi} + F_{slzj} + F_{slzk} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{SCX} \\ F_{SCY} \\ F_{SCZ} \\ 0 \end{bmatrix} = m_b \begin{bmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱-  $A T_B$  ماتریس تبدیل مختصات دستگاه مختصات B به دستگاه مختصات A است.

۲- شایان ذکر است منظور از عبارت زیر یعنی انتخاب برداری از سه مولفه

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

نخست ماتریس  $4 \times 1$  حاصله از عملیات پیش از آن:



شکل ۱۸ مقدار شاخص آماری بهینه‌سازی در فضای بهینه‌سازی و تعیین مختصات مقدار کمینه

## ۵- بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این کار، پس از چندین بار اصلاح مدل‌سازی واگن کمرشکن شش‌محوره آلمانی، در نهایت یک مدل صحه‌گذاری شده برای شبیه‌سازی دینامیک و حرکت این واگن فراهم شد. با بهینه‌سازی صورت‌گرفته، بیشینه شتاب وارده حدوداً به میزان ۱۵ درصد و تغییر سرعت تا ۵ درصد کاهش می‌یابد. بر اساس نتایج بهینه‌سازی، صلبیت فنر برگ در حالت تعادل استاتیکی باید کمی کاهش یابد، ولی صلبیت فنر در حالت دینامیکی باید افزایش یابد که برای این منظور می‌توان سختی بلندترین لایه فنر برگ (شاه‌فنر) را افزایش و سختی دیگر لایه‌های فنر را کاهش داد. در کارهای بعدی می‌توان، به منظور اجرایی‌شدن نتایج این کار، به تحلیل و شناخت خواص فنرهای مورد استفاده در راه‌آهن و نیز فرایند ساخت آن‌ها به منظور رسیدن به فنرهای با خواص مشخص مانند سختی فنرها در الگوی کلس پرداخت.

## ۶- سپاس‌گزاری

در پایان، نگارندگان بر خود لازم می‌دانند تا مراتب قدردانی خود را از حمایت‌های مرکز تحقیقات راه‌آهن ایران و نیز از همکاری کارخانه تعمیرات اساسی راه‌آهن تبریز و شرکت ایران ترانسفو در پیشبرد این کار ابراز دارند.

## ۷- پیوست‌ها

I و r در اندیس‌ها به ترتیب معرف سمت چپ و سمت راست هستند. s, t, SC, sb در اندیس نیروی F به ترتیب معرف تعلق نیرو F به نقطه تماس، سیستم تعلیق، مرکز کاسه بوژی و

$$\times {}^wT_0 \begin{bmatrix} -F_{SC xi} \\ -F_{SC yi} \\ -F_{SC zi} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} -l_c \\ -h_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times {}^wT_0 \begin{bmatrix} -F_{SC xj} \\ -F_{SC yj} \\ -F_{SC zj} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} {}^w\alpha w_x - (I_{yy} - I_{zz}) {}^w\omega w_y {}^w\omega w_z \\ I_{yy} {}^w\alpha w_y - (I_{zz} - I_{xx}) {}^w\omega w_x {}^w\omega w_z \\ I_{zz} {}^w\alpha w_z - (I_{xx} - I_{yy}) {}^w\omega w_x {}^w\omega w_y \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} {}^w\alpha w_x \\ {}^w\alpha w_y \\ {}^w\alpha w_z \\ 0 \end{bmatrix} = {}^wT_0 \begin{bmatrix} \alpha w_x \\ \alpha w_y \\ \alpha w_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} {}^w\omega w_x \\ {}^w\omega w_y \\ {}^w\omega w_z \\ 0 \end{bmatrix} = {}^wT_0 \begin{bmatrix} \omega w_x \\ \omega w_y \\ \omega w_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

### ۸- مراجع

- [1] Chauhan M., Rathi P., "Transformer Logistics Monitoring Key to Customer Satisfaction", *TRAFOTECH-2010, the 8th International Conference on Transformers*, Mumbai, India, January 2010.
- [۲] نصر اصغر، اصول و مبانی دینامیک حرکت قطارها، تهران، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران، ۱۳۸۹، ص ۴۳۰.
- [۳] آقاجانی غلامرضا، طلیعه نوری محسن، مکی سیدمحمد، نصیری محمود، آشنایی با واگن‌های باری راه آهن، گروه آموزش ناوگان مرکز آموزش عالی علمی-کاربردی راه‌آهن جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۷۷، ص ۸۱.
- [4] Help of ADAMS/Rail 2005 Software.
- [5] Kolsch H., "Schwingungsda Mpfung Durch Statische Hysterese", *VDI-Fortschritts-Bericht, Reihe*, Vol. 11, No. 190, 1993, pp 1-6.
- [6] Molatefi H., Hecht M., Kadivar M. H., "Effect of Suspension System in the Lateral Stability of Railway Freight Trucks", *Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 221, No. 3, 2007, pp. 399-407.
- [7] Molatefi H., Hecht M., Kadivar M. H., "Critical Speed and Limit Cycles in the Empty Y25-Freight Wagon", *Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 220, No. 4, 2006, pp. 347-359.
- [8] Bosso N., Gugliotta A., Soma A., "Simulation of a Freight Bogie with Friction Dampers", *5th ADAMS/Rail Users' Conference*, Haarlem, Netherlands, May 2000.
- [9] Tsai L. W., *ROBOT ANALYSIS The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, New York, John Wiley Publication, 1999, pp 29-46.
- [10] Shabana A., Zaazaa K. E., Sugiyama H., *Railroad Vehicle Dynamics, A Computational Approach*, Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008, pp. 127-144
- [11] Wickens A. H., *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics Guidance and Stability*, Lisse, Swets & Zeitlinger Publishers, 2005, pp 19-25.

معادله اویلر بوژی

$${}^bT_0 \begin{bmatrix} T_{fx} \\ T_{fy} \\ T_{fz} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} l_w \\ 0 \\ a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} -F_{sr xi} \\ F_{sr yi} \\ -F_{sr zi} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} l_w \\ 0 \\ -a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\times \begin{bmatrix} -F_{sl xi} \\ F_{sl yi} \\ F_{sl zi} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} -F_{sr xj} \\ F_{sr yj} \\ -F_{sr zj} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\times \begin{bmatrix} -F_{sl xj} \\ F_{sl yj} \\ F_{sl zj} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} -l_w \\ 0 \\ a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} -F_{sr xk} \\ F_{sr yk} \\ -F_{sr zk} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} -l_w \\ 0 \\ -a_f \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\times \begin{bmatrix} -F_{sl xk} \\ F_{sl yk} \\ F_{sl zk} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} -F_{sbr} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{sbl} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ h_{bc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times {}^bT_0 \begin{bmatrix} F_{SC X} \\ F_{SC Y} \\ F_{SC Z} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} {}^b\alpha b_x - (I_{yy} - I_{zz}) {}^b\omega b_y {}^b\omega b_z \\ I_{yy} {}^b\alpha b_y - (I_{zz} - I_{xx}) {}^b\omega b_x {}^b\omega b_z \\ I_{zz} {}^b\alpha b_z - (I_{xx} - I_{yy}) {}^b\omega b_x {}^b\omega b_y \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} {}^b\alpha b_x \\ {}^b\alpha b_y \\ {}^b\alpha b_z \\ 0 \end{bmatrix} = {}^bT_0 \begin{bmatrix} \alpha b_x \\ \alpha b_y \\ \alpha b_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} {}^b\omega b_x \\ {}^b\omega b_y \\ {}^b\omega b_z \\ 0 \end{bmatrix} = {}^bT_0 \begin{bmatrix} \omega b_x \\ \omega b_y \\ \omega b_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله نیوتن بدنه واگن و ترانسفورماتور

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_w g \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0T_b \begin{bmatrix} 0 \\ +F_{sbr i} + F_{sbl i} + F_{sbr j} + F_{sbl j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -F_{SC xi} - F_{SC xj} \\ -F_{SC yi} - F_{SC yj} \\ -F_{SC zi} - F_{SC zj} \\ 0 \end{bmatrix} = m_w \begin{bmatrix} a w_x \\ a w_y \\ a w_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله اویلر بدنه واگن و ترانسفورماتور

$${}^wT_0 \begin{bmatrix} -T_{fx i} - T_{fx j} \\ -T_{fy i} - T_{fy j} \\ -T_{fz i} - T_{fz j} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} l_c \\ -h_c \\ a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_{sbr i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$+ \begin{bmatrix} l_c \\ -h_c \\ -a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_{sbl i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} -l_c \\ -h_c \\ a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_{sbr j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$+ \begin{bmatrix} -l_c \\ -h_c \\ -a_{sb} \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_{sbl j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} l_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$