مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1397، دوره 18، شماره 02، ص‌ص 179-188

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# طراحی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند با استفاده از شبکه‌های عصبی موجکی کوانتومی برای ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی

زینب صاحبی[1]، مجید یار احمدی[2*]

1- دانشجوی دکتری، ریاضی کاربردی، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد
2- استادیار، ریاضی کاربردی، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد
* خرم‌آباد، صندوق پستی 465، yarahmadi.m@lu.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 08 آبان 1396
پذیرش: 19 دی 1396
ارائه در سایت: 05 بهمن 1396

*کلید واژگان:*
کنترل تطبیقی کوانتومی
شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی
کنترل هوشمند کوانتومی
ردیابی مسیر کوانتومی
کنترل‌کننده ترکیبی کوانتومی

**چکیده**

در این مقاله، یک کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند جدید برای ردیابی یک مسیر دینامیک در سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی ارائه شده است. مشکل بروز تکینی‌های ذاتی در سیگنال‌های کنترل‌کننده‌ی ردیابی مسیرهای دینامیکی در کنترل سیستم‌های کوانتومی، منجر به رشد شدید دامنه‌ی سیگنال‌های کنترل و در نتیجه افزایش هزینه‌ی کنترل و ناپایداری سیستم کنترل می‌شود. ابتدا بر اساس تئوری پایداری لیاپانوف یک کنترل‌کننده‌ی تطبیقی برای ردیابی مسیر دینامیک طراحی می‌شود. سپس برای رفع مشکل تکینی در سیگنال‌های کنترل تطبیقی، یک کنترل‌کننده‌ی هوشمند کوانتومی مبتنی بر شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با قوانین یادگیری پس‌انتشار دسته‌ای طراحی و بوسیله‌ی یک پارامتر ناظر تکینی با کنترل‌کننده‌ی تطبیقی ترکیب شده است. کنترل‌کننده‌ی ارائه شده با ترکیب مؤثر سیگنال‌های کنترل تطبیقی و هوشمند، حالت سیستم کوانتومی را طوری تنظیم می‌کند که فرایند ردیابی مسیر دینامیک از پیش تعیین شده، به خوبی کنترل می‌شود. کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی علاوه بر ردیابی مسیر هدف، اثرات نامطلوب ناشی از بروز پدیده‌ی تکینی و دامنه بزرگ سیگنال‌های کنترل را حذف می‌کند. عملکرد کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند پیشنهادی در مساله‌ی کنترل انتقال جمعیت یک سیستم کوانتومی بسته‌ی چهار سطحی در ردیابی مسیر دینامیک پاسخ پله، مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی نتایج شبیه‌سازی کاهش خطای ردیابی، کم شدن هزینه‌ی کنترل با تنظیم مؤثر سیگنال‌های کنترل و کاهش قابل ملاحظه‌ی تعداد دفعات بروز پدیده‌ی تکینی را نشان می‌دهد

# Hybrid adaptive intelligent controller design using quantum wavelet neural networks for trajectory tracking control in finite dimensional closed quantum systems

**Zeinab Sahebi, Majid Yarahmadi***

Department of Mathematics and Computer Science, Lorestan University, Khorramabad, Iran
* P.O.B. 465, Khorramabad, Iran, yarahmadi.m@lu.ac.ir

**ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper
Received 30 October 2017
Accepted 09 January 2018
Available Online 25 January 2018

*Keywords:*
Quantum Adaptive Control
Quantum Wavelet Neural Network
Quantum Intelligent Control
Quantum Trajectory Tracking
Quantum Hybrid Controller

**ABSTRACT**

In this paper, a new hybrid adaptive intelligent controller is introduced to track a dynamic trajectory in finite dimensional closed quantum systems. The problem of inherent singularities in control signals of trajectory tracking in quantum systems leads to a sharp increase in control signal amplitude. As a result, the amplitude of the large signal increases the control cost and control system instability. Consequently, the large control signal amplitude increases the control cost and leads to instability in control system. Firstly, according to the Lyapunov stability theory, an adaptive controller is designed to track the dynamic path. Then, to overcome the singularity drawback, a quantum intelligent controller is designed based on a quantum adaptive wavelet neural network with batch back propagation learning and combined with adaptive controller by a singularity observer. The proposed hybrid adaptive intelligent controller by combining the adaptive and intelligent control signals adjusts the quantum state so that the desired dynamic trajectory is traced effectively and simultaneously eliminates the effects of singularities and reduces the control amplitude. The performance of the hybrid adaptive intelligent controller is checked for step response tracking in a population transfer of a four-level closed quantum system. The simulation results show that the introduced controller reduces the tracking error and significantly decreases the number of singular points. Also, the control cost is reduced by effective adjustment of the control signal's amplitude.

## 1- مقدمه

با شروع قرن بیستم ناتوانی فیزیک کلاسیک در حوزه‌های نسبیتی و میکروسکوپی منجر به پیدایش مکانیک کوانتومی شد. پس از پیدایش مکانیک کوانتومی و تحلیل دقیق پدیده‌های کوانتومی در سه دهه‌ی اخیر،

**Please cite this article using:**

Z. Sahebi, M. Yarahmadi, Hybrid adaptive intelligent controller design using quantum wavelet neural networks for trajectory tracking control in finite dimensional closed quantum systems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 179-188, 2018 (in Persian)

**برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:**

تئوری کنترل سیستم‌های کوانتومی با الهام گرفتن از پیشرفت‌های تجربی و مسائل مطرح شده در برخی از علوم مانند شیمی کوانتومی، اطلاعات کوانتومی، اپتیک کوانتومی، فیزیک اتمی و مولکولی گسترش یافت. اخیرا بسیاری از روش‌های کنترل کلاسیک از جمله کنترل لیاپانوفی [1]، کنترل بهین [2]، کنترل مقاوم [3]، کنترل تطبیقی [4-6]، روش‌های رزونانس مغناطیسی هسته‌ای[1] [7]، کنترل یادگیر کوانتومی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک [8] و کنترل هوشمند فازی [9] برای کنترل حالت سیستم‌های کوانتومی توسعه داده شده‌اند. کنترل پدیده‌های کوانتومی در بسیاری از سیستم‌های کاربردی مانند اپتیک کوانتومی و نیمه هادی‌های نانو ساختار [10-12]، فیزیک اتمی و مولکولی و شیمی فیزیک [13] و رزونانس مغناطیسی هسته‌ای [14] مطرح می‌شود.

هدف اصلی کنترل کوانتومی، کنترل مؤثر سیستم به منظور هدایت آن از یک حالت اولیه‌ی دلخواه به یک حالت نهایی مطلوب با به‌کارگیری میدان‌های کنترل خارجی می‌باشد. اگر حالت مطلوب سیستم کوانتومی تحت کنترل ایستا باشد مساله‌ی کنترل، یک مساله‌ی کنترل تنظیم حالت[2] است و در صورتی که حالت مطلوب سیستم یک تابع وابسته به زمان باشد، مساله‌ی کنترل به مساله‌ی ردیابی مسیر[3] تبدیل می‌شود [15]. با اینکه حالت‌های درهمتنیده، آمیختگی و برهمنهی در سیستم‌های کوانتومی، موجب پیچیدگی فرایند کنترل ردیابی مسیر می‌شوند، روش‌های مختلفی در این زمینه بکار گرفته شده‌اند. به عنوان مثال روش‌های ردیابی مسیر سیستم کوانتومی با مساله‌ی شرودینگر [16,4]، ردیابی مسیر مرجع سیستم‌های کوانتومی همدوس [6]، کنترل ردیابی مسیر لیاپانوفی برای تنظیم حالت سیستم کوانتومی با معادله‌ی لیوویل [15] و ردیابی مداری یک سیستم هدف تحول آزاد در سیستم کوانتومی بسته [17] برای کنترل حالت سیستم‌های کوانتومی بررسی شده‌اند. در فرایند کنترل ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی ممکن است سیگنال‌های کنترل تکین شده یا دامنه‌ی آن‌ها بسیار بزرگ شود. تکینی سیگنال‌های کنترل بر اساس مشخصه‌ی کنترل‌پذیری سیستم به تکینی‌های ذاتی و رفع‌شدنی تقسیم می‌شوند [18]. در حالت تکینی‌های رفع‌شدنی، ردیابی مسیر مطلوب توسط سیستم امکان‌پذیر است اما روبرو شدن با سیگنال‌های کنترل با دامنه‌ی بسیار بزرگ دور از انتظار نیست. هرگاه تکینی سیگنال‌های کنترل از نوع ذاتی باشد، سیستم کنترل‌پذیر نبوده و در لحظه‌ی بروز تکینی نمی‌تواند مسیر هدف را به صورت دقیق ردیابی کند [19,18]. تحقیقات معدودی در زمینه‌ی بررسی و رفع مشکل تکینی در کنترل سیستم‌های کوانتومی انجام شده است. رفتار تکین سیگنال‌های کنترل در [20] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرجع تکینی‌های غیر ذاتی با استفاده از یک شاخص رتبه شناسایی شده و سپس طی یک فرایند محدودسازی رفع می‌شوند. همچنین، در [19,18] از روش کنترل تطبیقی برای رفع ناپایداری ناشی از پارازیت تکینی سیگنال‌های کنترل و مدیریت اثرات نامطلوب دامنه‌ی بزرگ سیگنال¬های کنترل در ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته استفاده شده است.

با گسترش مطالعات در زمینه‌ی محاسبات کوانتومی در دهه‌ی 1990 مفهوم شبکه‌های عصبی کوانتومی ارائه شد. عملکرد این شبکه‌ها مبتنی بر اصول مکانیک کوانتومی بوده و به منظور غلبه بر نارسایی‌ها و نقایص مدل شبکه‌های عصبی کلاسیک طراحی می‌شوند. می‌توان حالت پردازش شبکه‌های عصبی کلاسیک را بر اساس فیزیک کوانتومی تشریح کرد [21]. در نتیجه، تحقیقات در زمینه‌ی شبکه‌های عصبی قابل اجرا در کامپیوترهای کوانتومی و دست‌یابی به سیستمی با قابلیت پردازش سریع و موازی اطلاعات، منجر به ارائه‌ی یک مدل نرون کیوبیتی سازگار با اصول مکانیک کوانتومی شد. آموزش این نرون از طریق قانون یادگیری پس‌انتشار کوانتومی انجام می‌شود. سپس، مدلی از شبکه‌های عصبی کوانتومی ارائه شد که در آن برهمکنش بین نرون‌های کیوبیتی از قواعد فیزیک کوانتومی پیروی کرده و کارایی آن نسبت به شبکه‌های عصبی کلاسیک بیشتر است [22]. همچنین در [23] با تکیه بر ویژگی فراگیری گیت دورانی تک کیوبیتی و گیت کنترلی NOT و استفاده از نرون‌های کوانتومی در لایه‌های مخفی و خروجی، یک مدل شبکه‌ی عصبی پس‌انتشار کوانتومی طراحی شد. شبکه‌های عصبی پس‌انتشار کوانتومی از لحاظ سرعت یادگیری، نرخ همگرایی و مقاومت نسبت به شبکه‌های عصبی کلاسیک دارای برتری هستند [24]. با انتشار این نتایج، مدل‌های متنوعی از شبکه‌ی عصبی طراحی شد: مدل شبکه‌های عصبی کوانتومی چندلایه [26,25]، شبکه‌های عصبی پرسپترون کوانتومی خودگردان [27] و شبکه‌های عصبی کوانتومی با وزن‌های کوانتومی [29,28]. بعلاوه در [30] مدل پرسپترون کوانتومی به عنوان تعمیم مستقیم پرسپترون‌های کلاسیک، ارائه شده است. این شبکه توسط الگوریتم یادگیری کوانتومی آموزش داده می‌شود. محققان از روش‌های کلاسیک مختلفی برای بهبود عملکرد شبکه‌های عصبی کوانتومی استفاده کرده‌اند. یکی از این روش‌ها استفاده از توابع موجک در معماری شبکه‌ی عصبی است. انواع مختلف شبکه‌های عصبی کلاسیک با تکیه بر قابلیت خاص تبدیل‌های موجکی در آشکارسازی ویژگی‌های موضعی توابع و استفاده از موجک‌ها به عنوان تابع محرک طراحی شده‌اند [31-34]. در سال 2010 بر اساس تئوری آنالیز موجکی و تئوری برهمنهی کوانتومی، یک مدل شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی ارائه شده که در آن تابع موجک غیرخطی، به عنوان جایگزین تابع محرک سیگموئیدی لایه‌ی مخفی بکار رفته است [35]. سپس، در [36] یک شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی با ترکیب تابع موجک پایه‌ای گاوسی و تابع پایه‌ای شعاعی در یک شبکه‌ی عصبی کوانتومی چندلایه، طراحی شد. این شبکه می‌تواند با شناسایی عدم اطمینان داده‌های نمونه، مدت زمان فرایند یادگیری شبکه را کاهش دهد. از کاربردهای کلاسیک کنترلی شبکه‌های عصبی کوانتومی می‌توان به استفاده از آن‌ها در کنترل سیستم پاندول معکوس [26,25]، کنترل پسخوردی ربات دوچرخه با استفاده از شبکه‌ی عصبی کوانتومی چندلایه [26]، طراحی کنترل‌کننده‌ی هوشمند تناسبی-انتگرالی-دیفرانسیلی[4] خودتنظیم مدل مرجع با استفاده از نرون‌های کیوبیتی [37] و کنترل سیستم پاندول معکوس و نوسانگر دافینگ[5] با طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم هوشمند کوانتومی مبتنی بر مد لغزشی با لایه‌ی مرزی [3] اشاره کرد. همچنین، شبکه‌های عصبی کوانتومی به طور موفقیت‌آمیز در بازیابی تصویر [25]، آنالیز و کلاسبندی سیگنال‌های الکتروانسفالوگرافی[6] 36][ و شناسایی الگوی خرابی جعبه‌دنده [30] مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در این مقاله، با توجه به اهمیت کنترل ردیابی مسیر در سیستم‌های کوانتومی و همچنین کارایی مؤثر شبکه‌های عصبی کوانتومی در شناسایی سیستم‌های کنترل، با ترکیب روش ردیابی مسیر تطبیقی و کنترل‌کننده‌ی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی، رویکرد جدیدی برای کنترل ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته با بعد متناهی ارائه می‌شود. حالت اولیه‌ی سیستم کوانتومی به صورت دلخواه انتخاب شده و حالت مطلوب آن یک تابع پیوسته

[1] Nuclear Magnetic Resonance (NMR)
[2] Regulation
[3] Trajectory tracking control
[4] Proportional-Integral-Derivative (PID)
[5] Duffing oscillator
[6] Electroencephalography (EEG)




[ DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.50.9 ]

از زمان در نظر گرفته می‌شود. قوانین کنترل تطبیقی بر اساس روش لیاپانوف طراحی شده و پایداری سیستم تحت کنترل با اثبات یک قضیه تضمین می‌شود. سپس مشکلات ناشی از دامنه‌ی بزرگ و تکینی ذاتی در سیگنال های کنترل تطبیقی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی هوشمند کوانتومی رفع می‌شوند. در صورتی که در سیگنال‌های کنترل تطبیقی تکینی رخ داده یا دامنه‌ی آن‌ها بسیار بزرگ شود، سیگنال‌های کنترل‌کننده‌ی هوشمند به صورت آنلاین توسط شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی محاسبه شده و فرایند ردیابی مسیر سیستم را کنترل می‌کنند. در طراحی این شبکه‌ی عصبی، داده‌ها و وزن‌های لایه‌ی ورودی به صورت حالت‌های کوانتومی و داده‌های خروجی آن کلاسیک در نظر گرفته شده و از موجک کلاه مکزیکی به عنوان تابع محرک لایه‌ی مخفی شبکه استفاده شده است.

ادامه‌ی مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است.

در بخش 2 به معرفی مدل دینامیکی مساله و فرایند کنترل سیستم‌های کوانتومی بسته پرداخته می‌شود. سپس قوانین کنترل تطبیقی و شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی در بخش 3 طراحی شده و در نهایت کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی معرفی می‌شود. بخش 4 به ارائه‌ی نتایج شبیه‌سازی انتقال جمعیت یک سیستم کوانتومی چهار سطحی بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی اختصاص داده شده است. در پایان، نتایج نوآوری و عملکرد کنترل‌کننده‌ی پیشنهاد شده در کنترل ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته در بخش 5 خلاصه می‌شوند.

## 2- دینامیک و فرایند کنترل سیستم کوانتومی

حالت یک سیستم کوانتومی n-سطحی عضو فضای هیلبرت $\mathbb{S}^{2n-1}$ است و با تابع موج $|\psi(t)\rangle$ نمایش داده می‌شود. اگر ماتریس‌های هرمیتی $H_0$ و $H_k$ به ترتیب همیلتونی‌های آزاد (داخلی) و کنترل (خارجی) سیستم باشند، آنگاه همیلتونی کل سیستم به صورت $H=[H_0+\sum_{k=1}^{M}u_k(t)H_k]$ تعریف می‌شود. در کنترل ردیابی مسیر حالت خالص، دینامیک سیستم کوانتومی n-سطحی بسته با معادله‌ی شرودینگر (1) توصیف می‌شود [1]:

$$i\hbar\,|\dot{\psi}(t)\rangle=\left[H_0+\sum_{k=1}^{M}u_k(t)H_k\right]|\psi(t)\rangle,\qquad |\psi(0)\rangle=|\psi_0\rangle \tag{1}$$

که در آن $|\psi_0\rangle$ حالت اولیه‌ی سیستم کوانتومی است. توابع $u_k(t)\in\mathbb{R}$ به عنوان سیگنال‌های کنترل، از طریق ماتریس‌های وابسته به زمان همیلتونی‌های کنترل با سیستم کوپل می‌شوند. برای سادگی، ثابت پلانک $\hbar=1$ در نظر گرفته می‌شود. در مکانیک کوانتومی، هر اندازه‌گیری از سیستم کوانتومی با یک عملگر هرمیتی موسوم به مشاهده‌پذیر متناظر است و هرگاه یک سیستم کوانتومی با حالت $|\psi(t)\rangle$ توسط مشاهده‌پذیر $O(t)$ اندازه‌گیری شود، نتیجه‌ی اندازه‌گیری یکی از مقدارهای ویژه‌ی این مشاهده‌پذیر می‌باشد. اگر J یک زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیر از طیف عملگر $O(t)$ و $O_j$ عملگر تصویرگر متناظر با مقدار ویژه‌ی $\lambda_j$ باشد، آنگاه تجزیه‌ی طیفی گسسته‌ی $O(t)$ به صورت رابطه‌ی (2) است [38]:

$$O(t)=\sum_j\lambda_jO_j\,. \tag{2}$$

بنابراین، مقدار ویژه‌ی $\lambda_j$ با احتمال $\mathrm{Pr}(\lambda_j)$ به عنوان خروجی اندازه‌گیری مشاهده می‌شود:

$$\mathrm{Pr}(\lambda_j)=\langle\psi(t)|O_j|\psi(t)\rangle. \tag{3}$$

بعلاوه، مقدار چشمداشتی اندازه‌گیری سیستم با رابطه‌ی (4) داده می‌شود:

$$Y(t)=\langle O(t)\rangle_{|\psi(t)\rangle}=\sum_j\lambda_j\mathrm{Pr}(\lambda_j)=\sum_j\lambda_j\langle\psi(t)|O_j|\psi(t)\rangle$$
$$=\langle\psi(t)|\textstyle\sum_j\lambda_jO_j\,|\psi(t)\rangle=\langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle. \tag{4}$$

در اینجا هدف، کنترل مؤثر سیستم کوانتومی است تا در نتیجه‌ی آن مقدار چشمداشتی عملگر مشاهده‌پذیر $O(t)$ مسیر مطلوب $S(t)$ را ردیابی کند:

$$S(t)-\langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle\ \longrightarrow 0,\ t\longrightarrow+\infty. \tag{5}$$

بنابراین، در فرایند کنترل ردیابی مسیر سیستم کوانتومی سیگنال‌های کنترل باید طوری طراحی شوند که حالت $|\psi(t)\rangle$ شرط (5) را برقرار کند. مسیر مطلوب $S(t)$ را می‌توان به اشکال مختلف در نظر گرفت. در این مقاله تابع پاسخ پله، به عنوان یکی از پر کاربردترین سیستم‌های هدف در بررسی عملکرد کنترل سیستم‌های مهندسی، در نظر گرفته می‌شود. با توجه به ماهیت احتمالی تحول جمعیت در معادله‌ی (4) و مسیر هدف در نظر گرفته شده، $Y(t)$ و $S(t)$ در بازه‌ی $[0,1]$ قرار دارند. در نتیجه، برای رسیدن به هدف کنترل کافیست سیگنال‌های کنترل طوری طراحی شوند که $Y(t)$ مسیر هدف $S(t)$ را ردیابی کند. به منظور بررسی عملکرد کنترل ردیابی مسیر، تفاضل بین $S(t)$ و $Y(t)$ به عنوان سیگنال خطای ردیابی در نظر گرفته می‌شود:

$$e(t):=S(t)-Y(t)=\ S(t)-\ \langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle. \tag{6}$$

## 3- طراحی سیستم کنترل

### 3-1- طراحی قانون کنترل ردیابی مسیر تطبیقی

در این بخش، قانون‌های تطبیقی کنترل با استفاده از روش لیاپانوف، طوری طراحی می‌شوند که انتقال جمعیت در سیستم کوانتومی n-سطحی بسته‌ی (1) با مشاهده‌پذیر $O(t)$ مسیر هدف $S(t)$ را ردیابی کند. برای این منظور، پایداری سیستم کنترل کوانتومی توسط قضیه‌ی پایداری لیاپانوف تضمین می‌شود. اساس روش لیاپانوف مبتنی بر انتخاب تابعی مانند $V$ با مشتق‌های جزئی پیوسته است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- $V$ یک تابع نیمه معین مثبت است: $V\ge 0$؛
- مشتق زمانی مرتبه اول $V$ غیر معین منفی است: $\dot{V}\le 0$.

تابع $V$ با شرایط فوق یک تابع لیاپانوف نامیده می‌شود.

**قضیه 1**

سیستم کوانتومی بسته‌ی (1) در نظر گرفته می‌شود. اگر سیگنال‌های کنترل $u_1$ و $u_k$ برای $k=2,3,\dots,M$ با رابطه‌های (7) و (8) تعریف شوند:

$$u_1(t)=\frac{\dot{S}(t)-2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(\mathrm{t})\cdot H_0|\psi(t)\rangle)}{2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_1|\psi(t)\rangle)}, \tag{7}$$

$$u_k(t)=\ g_ke(t)\cdot 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_k|\psi(t)\rangle) \tag{8}$$

که در آن $g_k$ بهره‌ی کنترل است، آنگاه سیستم کنترل داده شده پایدار لیاپانوف است.

**اثبات**

برای اثبات پایداری سیستم (1)، تابع $V(t)$ به صورت رابطه (9) در نظر گرفته می‌شود:

$$V(t):=\frac{1}{2}e^2(t) \tag{9}$$




[ DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.50.9 ]

سیگنال خطای $e(t)$ توسط رابطه‌ی (6) تعریف می‌شود. تابع $V(t)$ به وضوح نیمه معین مثبت است و مشتق مرتبه اول آن نسبت به زمان به صورت رابطه‌ی (10) است:

$$\dot{V}(t) = e(t)\cdot\dot{e}(t) \tag{10}$$

و $\dot{e}(t)$ مشتق زمانی مرتبه اول سیگنال خطا می‌باشد:

$$\dot{e}(t) = \dot{S}(t) - \langle\dot{\psi}(t)|O(t)|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\dot{O}(t)|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|O(t)|\dot{\psi}(t)\rangle. \tag{11}$$

با جایگذاری $\langle\psi(t)|$ از رابطه‌ی (1) در (11) خطای $\dot{e}(t)$ به صورت (12) به دست می‌آید:

$$\dot{e}(t) = \dot{S}(t) - \langle\psi(t)|i[H(t),O(t)] + \dot{O}(t)|\psi(t)\rangle \tag{12}$$

که در آن $H(t) = \left(H_0 + \sum_{k=1}^{M} u_k(t)H_k\right)$ و عملگر $[\cdot,\cdot]$ معرف براکت لی می‌باشد. با استفاده از رابطه‌ی (12) در (10) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}(t) = e(t)\cdot\left(\dot{S}(t) - 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_0|\psi(t)\rangle) - 2\sum_{k=1}^{M} u_k(t)\,\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_k|\psi(t)\rangle)\right) \tag{13}$$

حال می‌توان تابع $\dot{V}(t)$ را به صورت (14) بازنویسی کرد:

$$\dot{V}(t) = e(t)\cdot\left(\dot{S}(t) - 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_0|\psi(t)\rangle) - 2u_1(t)\,\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_1|\psi(t)\rangle) - 2\sum_{k=2}^{M} u_k(t)\,\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_k|\psi(t)\rangle)\right) \tag{14}$$

با توجه به تعریف $u_1(t)$ در رابطه‌ی (7) می‌توان رابطه (15) را نوشت:

$$e(t)\cdot\left(\dot{S}(t) - 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_0|\psi(t)\rangle) - 2u_1(t)\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_1|\psi(t)\rangle)\right) = 0. \tag{15}$$

در نتیجه رابطه (16) بدست می‌آید:

$$\dot{V}(t) = -2e(t)\cdot\left(\sum_{k=2}^{M} u_k(t)\,\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_k|\psi(t)\rangle)\right). \tag{16}$$

با جایگذاری $u_k(t)$ از (8) در رابطه‌ی (16) نتیجه می‌شود: $\dot{V}(t) \le 0$. بنابراین، $V(t)$ برای سیستم کوانتومی بسته‌ی (1) یک تابع لیاپانوف است و این اثبات را کامل می‌کند.

## 3-2- طراحی شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی

### 3-2-1- نرون عصبی موجکی کوانتومی

در این بخش، با استفاده از تابع موجک به عنوان تابع تحریک لایه‌ی مخفی، یک مدل نرون عصبی موجکی کوانتومی جدید ارائه می‌شود. تابع تحریک این نرون عضو خانواده‌ی توابع دو پارامتری $\Psi_{a,b}(x) = \Psi(x-b/a)/\sqrt{|a|}$ است که توسط پارامترهای انتقال و اتساع $a$ و $b$ از تابع $\Psi(x)$ ساخته می‌شوند. تابع $\Psi(x)$، تابع موجک مادر نامیده شده و در شرط (17) صدق می‌کند:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega < +\infty \tag{17}$$

که در آن $\hat{\Psi}(\omega)$ تبدیل فوریه‌ی تابع $\Psi(x)$ است. نرون عصبی موجکی کوانتومی شامل ورودی‌های کوانتومی حقیقی‌سازی شده، وزن‌دهی از طریق ضرب داخلی بردارهای کوانتومی، تحریک حاصل‌جمع ورودی‌های وزن‌دار و خروجی کلاسیک است. از این نرون در معماری شبکه‌ی عصبی کوانتومی شکل 1 استفاده شده است. حالت‌های کوانتومی $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_R\rangle$، عضو فضای هیلبرت n-بعدی $\mathcal{H} = \{|x\rangle : |x\rangle = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}}, x_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,\dots,n\}$، به عنوان داده‌های ورودی آموزشی نرون در نظر گرفته می‌شوند. حال نگاشت حقیقی‌ساز $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ با رابطه‌ی (18) تعریف می‌شود:

$$T\,|x\rangle := (\mathrm{Re}|x\rangle, \mathrm{Img}|x\rangle)^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

به منظور جلوگیری از پیچیدگی محاسبات ناشی از ورودی‌های مختلط $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_R\rangle$ فرم حقیقی‌سازی شده‌ی این حالت‌ها به عنوان داده‌های ورودی نرون در نظر گرفته می‌شوند:

$$|\underline{x}_k\rangle := T|x_k\rangle = [\mathrm{Re}|x_k\rangle, \mathrm{Img}|x_k\rangle]^{\mathrm{T}}, \quad k = 1,2,\dots,R. \tag{19}$$

به عبارت دیگر، ورودی‌های حقیقی‌سازی شده‌ی $|\underline{x}_1\rangle, |\underline{x}_2\rangle, \dots, |\underline{x}_R\rangle$ به نرون اعمال می‌شوند. ورودی‌های حقیقی‌سازی شده با ضرب داخلی در وزن‌های کوانتومی $|W_1\rangle, \dots, |W_R\rangle$ وزن‌دار شده و حاصل‌جمع آن‌ها به عنوان ورودی خالص نرون عصبی موجکی کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. نرون عصبی موجکی کوانتومی از طریق تابع موجک $\Psi_{a,b}(x)$ تحریک شده و خروجی آن با رابطه‌ی (20) محاسبه می‌شود:

$$\hat{y} = \Psi_{a,b}\left(\sum_{k=1}^{R}\langle W_k|\underline{x}_k\rangle\right) \tag{20}$$

که در آن $|W_k\rangle$-ها وزن‌های کوانتومی نرون هستند و ضرب داخلی $|\underline{x}_k\rangle$ و $|W_k\rangle$ با رابطه‌ی $\langle W_k|\underline{x}_k\rangle = \sum_{i=1}^{2n}\overline{W}_{k_i}\cdot\underline{x}_{k_i}$ محاسبه می‌شود. همچنین، $\overline{W}_{k_i}$ مزدوج مختلط عدد $W_{k_i}$ است. پارامترهای قابل تنظیم نرون عصبی موجکی تطبیقی شامل وزن‌های کوانتومی $|W_k\rangle$ و پارامترهای $a$ و $b$ می‌باشند.

### 3-2-2- مدل شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی

در این بخش، با ترکیب نرون‌های عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی، مدل شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی طراحی می‌شود. شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی در شکل 1 نشان داده شده است. ساختار این شبکه از $R$ ورودی کوانتومی، $S_1$ نرون عصبی موجکی کوانتومی در لایه‌ی مخفی و $S_2$ خروجی حقیقی تشکیل شده است. در شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی، $|\underline{x}_1\rangle, |\underline{x}_2\rangle, \dots, |\underline{x}_R\rangle$ بردارهای ورودی، $j = 1,2,\dots,S_1$ و $i = 1,2,\dots,R$. حالت‌های $|W_{ij}\rangle$ وزن‌های اتصال بین لایه‌ی ورودی $i$-ام و لایه‌ی مخفی $j$-ام، $\mathrm{net}_j$ ورودی خالص نرون $j$-ام و موجک $\Psi_{a_j,b_j}$ تابع تحریک نرون $j$-ام می‌باشند. همچنین، $c_{jk}$ برای $j = 1,2,\dots,S_1,\ k = 1,2,\dots,S_2$ وزن اتصال بین $j$-امین نرون لایه‌ی مخفی و $k$-امین نرون لایه‌ی خروجی شبکه بوده و $f_k$-ها توابع انتقال سیگموئیدی در نظر گرفته می‌شوند.

رابطه‌ی ورودی-خروجی لایه‌های شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی در رابطه‌های (21) و (22) نشان داده شده است:

$$\mathrm{net}_j := \sum_{i=1}^{R}\langle W_{ij}|\underline{x}_i\rangle, \; i = 1,2,\dots,R, j = 1,2,\dots,S_1 \tag{21}$$

$$\hat{y}_k = f_k\left(\sum_{j=1}^{S_1} c_{jk}\,\Psi_{a_j,b_j}(\mathrm{net}_j)\right), k = 1,2,\dots,S_2. \tag{22}$$

### 3-2-3- الگوریتم یادگیری شبکه

شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی شامل وزن‌ها و پارامترهای قابل تنظیم $|W_{ij}\rangle$، $a_j$، $b_j$ و $c_{jk}$ است که باید بروزرسانی شوند. پارامترهای انتقال

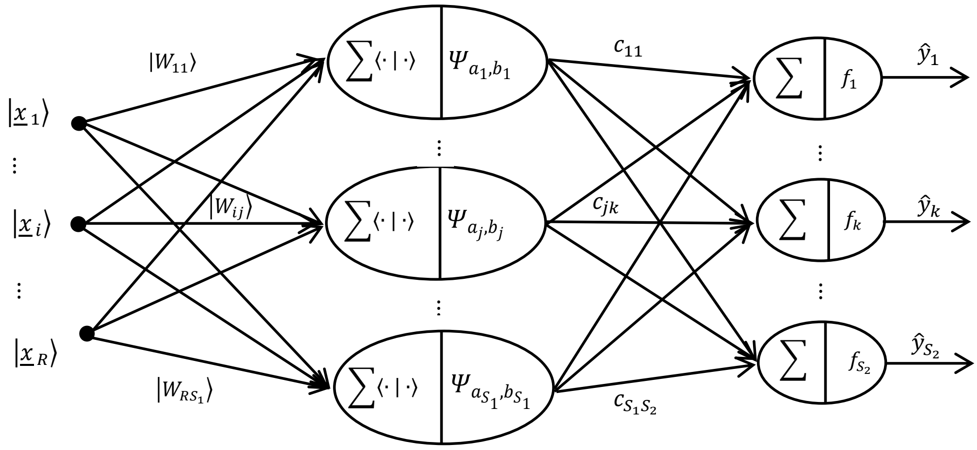


**Fig. 1** The three layered multiple-input multiple-output quantum adaptive wavelet neural network

**شکل 1** شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی سه لایه‌ی چند ورودی-چند خروجی

و اتساع تابع موجک به صورت قابل تنظیم در نظر گرفته شده و شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی یک شبکه‌ی تطبیقی است. تا کنون از روش‌های مختلفی مانند روش کاهش گرادیان [29]، روش گرادیان مزدوج [26] و روش یادگیری مبتنی بر الگوریتم جستجوی گروور[1] [39] برای آموزش شبکه‌های عصبی کوانتومی استفاده شده است. اینجا از فرم دسته‌ای الگوریتم پس‌انتشار خطا برای تنظیم وزن‌ها و پارامترهای شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی استفاده می‌شود. در این الگوریتم پس از ارائه‌ی همه‌ی داده‌های یادگیری به شبکه، بروزرسانی وزن‌ها و پارامترها با استفاده از شاخص جمع وزن‌دار خطاهای خروجی شبکه انجام می‌شود. اگر فرض شود که مجموعه‌های $\left\{|\underline{x}_1^p\rangle, |\underline{x}_2^p\rangle, \dots, |\underline{x}_R^p\rangle\right\}_{p=1}^N$ و $\left\{y_1^p, y_2^p, \dots, y_{S_2}^p\right\}_{p=1}^N$ به ترتیب داده‌های آموزشی ورودی و خروجی‌های مطلوب شبکه باشند، در این صورت، جمع وزن‌دار خطاهای شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی به صورت (23) است:

$$E := \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} E_p = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{S_2}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)^2\right) \tag{23}$$

که در آن $N$ تعداد داده‌های آموزشی شبکه و $\hat{y}_k^p$ خروجی حاصل از اعمال $k$-امین داده‌ی ورودی به شبکه است. طبق الگوریتم کاهش گرادیان:

$$\frac{\partial E}{\partial|W_{ij}\rangle} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial E_p}{\partial|W_{ij}\rangle} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{S_2}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)^2\right)}{\partial|W_{ij}\rangle}$$
$$= \sum_{p=1}^{N}\left(\frac{-|\underline{x}_i^p\rangle}{a_j\sqrt{|a_j|}}\Psi'_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{S_2} c_{jk}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)f_k'\left(\sum_{j=1}^{S_1}\frac{c_{jk}}{\sqrt{|a_j|}}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right) \tag{24}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_{jk}} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial E_p}{\partial c_{jk}} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{S_2}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)^2\right)}{\partial c_{jk}}$$
$$= \sum_{p=1}^{N}\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{|a_j|}}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)f_k'\left(\sum_{j=1}^{S_1}\frac{c_{jk}}{\sqrt{|a_j|}}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right), \tag{25}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial E_p}{\partial a_j} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{S_2}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)^2\right)}{\partial a_j}$$
$$= \sum_{p=1}^{N}\left(\left(\frac{\mathrm{sgn}(a_j)}{2\sqrt{|a_j|}^3}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right) + \frac{\mathrm{net}_j^p}{a_j\sqrt{|a_j|}}\Psi'_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{S_2} c_{jk}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)f_k'\left(\sum_{j=1}^{S_1}\frac{c_{jk}}{\sqrt{|a_j|}}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right), \tag{26}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial E_p}{\partial b_j} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{\partial\left(\sum_{k=1}^{S_2}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)^2\right)}{\partial b_j}$$
$$= \sum_{p=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{a_j\sqrt{|a_j|}}\Psi'_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{S_2} c_{jk}\left(y_k^p - \hat{y}_k^p\right)f_k'\left(\sum_{j=1}^{S_1}\frac{c_{jk}}{\sqrt{|a_j|}}\Psi_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right)\right)\right) \tag{27}$$

که در آن $\Psi'_{a_j,b_j}\left(\mathrm{net}_j^p\right) = d\Psi(x)/dx\big|_{x=\mathrm{net}_j^p}$ و $f_k'$ مشتق مرتبه اول تابع انتقال $f_k$ است. بعلاوه، ورودی خالص نرون $j$-ام با اعمال $p$-امین ورودی به شبکه با رابطه‌ی (28) محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{net}_j^p := \frac{\sum_{i=1}^{R}\langle W_{ij}|\underline{x}_i^p\rangle - b_j}{a_j}. \tag{28}$$

در نتیجه، قوانین تنظیم وزن‌ها و پارامترهای شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با استفاده از الگوریتم پس‌انتشار خطا طبق رابطه‌های (29) تا (32) به دست می‌آیند:

$$|W_{ij}(l+1)\rangle = |W_{ij}(l)\rangle - \eta\frac{\partial E}{\partial|W_{ij}\rangle}, \tag{29}$$

$$c_{jk}(l+1) = c_{jk}(l) - \eta\frac{\partial E}{\partial c_{jk}}, \tag{30}$$

$$a_j(l+1) = a_j(l) - \eta\frac{\partial E}{\partial a_j}, \tag{31}$$

[1] Grover learning

$$b_j(l+1) = b_j(l) - \eta \frac{\partial E}{\partial b_j} \tag{32}$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, R$، $j = 1, 2, \dots, S_1$، $k = 1, 2, \dots, S_2$ و $\eta > 0$ نرخ یادگیری شبکه است.

## 3-3- طراحی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی ردیاب مسیر کوانتومی

در کنترل تطبیقی ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی (1)، ممکن است سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_k(t)$ در فرایند ردیابی دچار تکینی شوند. این پدیده موجب بزرگ شدن بیش از اندازه‌ی دامنه‌ی سیگنال‌های کنترل و رشد ناگهانی خطای ردیابی می‌شود. بروز تکینی در سیستم کنترل، همزمان با افزایش هزینه‌ی کنترل ناشی از بزرگی دامنه‌ی سیگنال‌های کنترل می‌تواند منجر به ناپایداری سیستم کوانتومی شود. در این بخش، با ترکیب کنترل‌کننده‌ی تطبیقی ردیاب مسیر و کنترل‌کننده‌ی هوشمند عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی، یک کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند طراحی می‌شود. این کنترل‌کننده با هدف ردیابی تطبیقی مسیر سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی و رفع مشکل تکینی سیگنال‌های کنترل‌کننده‌ی تطبیقی طراحی می‌شود. تمایل سیستم کنترل تطبیقی به تکینی از طریق مشاهده‌ی دامنه‌ی سیگنال‌های کنترل تطبیقی و سیگنال خطای ردیابی قابل تشخیص است.

**نمادگذاری 1.**

اگر فرض شود که سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{ad}_k}(t), k = 1, 2, \dots, M$ بر اساس رابطه‌های (7) و (8) تعریف شده باشند:

$$u_{\mathrm{ad}_1}(t) := \frac{\dot{S}(t) - 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_0|\psi(t)\rangle)}{2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_1|\psi(t)\rangle)}, \tag{33}$$

$$u_{\mathrm{ad}_k}(t) := g_k e(t)\cdot 2\mathrm{Img}(\langle\psi(t)|O(t)\cdot H_k|\psi(t)\rangle),\quad k = 2, \dots, M. \tag{34}$$

در این صورت، بردار سیگنال‌های کنترل تطبیقی ردیاب مسیر سیستم کوانتومی (1) را با $u_{\mathrm{ad}}(t) = \left[u_{\mathrm{ad}_1}(t),\, u_{\mathrm{ad}_2}(t), \dots,\, u_{\mathrm{ad}_M}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید $\mathrm{bnd}_k$ و tol به ترتیب کران‌های قابل پذیرش دامنه‌ی سیگنال کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{ad}_k}(t)$ و سیگنال خطای ردیابی $e(t)$ باشند. به منظور تعیین وضعیت تکینی کنترل‌کننده‌ی تطبیقی، پارامتر ناظر تکینی $\theta$ با رابطه‌ی (35) تعریف می‌شود:

$$\theta := \begin{cases} 0, & \|u_{\mathrm{ad}_k}(t)\| < \mathrm{bnd}_k,\ \ |e(t)| < tol, \\ 1, & \mathrm{o.w.} \end{cases} \tag{35}$$

طبق رابطه‌ی (35) همزمان با بروز تکینی در سیستم کنترل‌کننده‌ی تطبیقی، پارامتر ناظر تکینی مقدار برابر با 1 می‌گیرد. در وضعیت تکینی سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{ad}_k}(t)$ قادر به ردیابی دقیق مسیر مطلوب $S(t)$ نیستند. در نتیجه، برای ادامه‌ی فرایند ردیابی و مدیریت رفتار تکین کنترل‌کننده‌ی تطبیقی، از سیگنال‌های کنترل هوشمند استفاده می‌شود.

**نمادگذاری 2.**

بردار سیگنال‌های کنترل هوشمند عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی را با $u_{\mathrm{int}}(t) = \left[u_{\mathrm{int}_1}(t),\, u_{\mathrm{int}_2}(t), \dots, u_{\mathrm{int}_M}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ نمایش داده می‌شود.

سیگنال‌های هوشمند $u_{\mathrm{int}_k}(t)$ با اعمال بردارهای حالت $|\underline{\psi}_1(t)\rangle, |\underline{\psi}_2(t)\rangle, \dots, |\underline{\psi}_R(t)\rangle$ به شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با ساختار $(R, S_1, S_2 = M+1)$ به صورت آنلاین تنظیم می‌شوند:

$$u_{\mathrm{int}_k}(t) = f_k\left(\sum_{j=1}^{S_1} \frac{c_{jk}^*}{\sqrt{|a_j^*|}} \Psi_{a_j^*, b_j^*}\left(\frac{\sum_{i=1}^{R}\left\langle W_{ij}^* \middle| \underline{\psi}_i(t)\right\rangle - b_j^*}{a_j^*}\right)\right),\quad k = 1, 2, \dots, M \tag{36}$$

که در آن $a_j^*$، $b_j^*$، $c_{jk}^*$ و $\left|W_{ij}^*\right\rangle$ پارامترهای بهینه‌ی حاصل از آموزش شبکه هستند.

**نکته 1.**

به منظور افزایش کارایی کنترل هوشمند، بردار سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{int}}(t)$ و مسیر هدف $S(t)$ در بازه‌ی زمانی منتهی به لحظه‌ی تکینی، به عنوان خروجی مطلوب داده‌های آموزشی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، بردارهای خروجی مطلوب و خروجی شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با (37) و (38) نمایش داده می‌شوند:

$$y = \left[u_{\mathrm{ad}_1}(t),\, u_{\mathrm{ad}_2}(t), \dots,\, u_{\mathrm{ad}_M}(t), S(t)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{37}$$

$$\hat{y} = \left[u_{\mathrm{int}_1}(t), u_{\mathrm{int}_2}(t), \dots,\, u_{\mathrm{int}_M}(t), Y(t)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{38}$$

سیگنال کنترل ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی به صورت (39) تعریف می‌شوند:

$$u(t) := (1-\theta)u_{\mathrm{ad}}(t) + \theta u_{\mathrm{int}}(t). \tag{39}$$

دیاگرام کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند در شکل 2 نشان داده شده است. با توجه به ساختار سیگنال‌های ترکیبی $u(t)$ و تعریف پارامتر $\theta$، ردیابی مسیر سیستم کوانتومی بسته‌ی متناهی (1) توسط سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{ad}_k}(t)$ انجام می‌شود. به محض تشخیص تکینی در سیستم کنترل توسط پارامتر ناظر تکینی، شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی به صورت آنلاین وظیفه‌ی ردیابی مسیر مطلوب را بعهده می‌گیرد. در نتیجه، کنترل‌کننده‌ی طراحی شده با مدیریت مؤثر وضعیت تکینی و اجتناب از سیگنال‌های کنترل با دامنه‌ی بزرگ با اتلاف انرژی کمتر انتقال جمعیت سیستم کوانتومی بسته‌ی متناهی را به صورت پایدار کنترل می‌کند. فرایند کنترل ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی به طور خلاصه در بخش 3-4 ارائه شده است.

## 3-4- الگوریتم طراحی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی

1- مقدار چشمداشتی عملگر مشاهده‌پذیر $O(t)$ را در زمان $t_0$ و حالت اولیه‌ی داده شده‌ی $|\psi_0\rangle$ محاسبه کنید:

$$Y(t_0) = \langle\psi(t_0)|O(t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{40}$$

2- بردار سیگنال‌های کنترل تطبیقی $u_{\mathrm{ad}}(t)$ را با استفاده از مسیر مطلوب $S(t)$ و رابطه‌های (33) و (34) تنظیم کنید.

3- با توجه به مقدار پارامتر ناظر تکینی وضعیت تکینی سیستم کنترل را تعیین کنید. اگر $\theta = 0$ آنگاه قرار دهید $u(t) = u_{\mathrm{ad}}(t)$ و به گام 5 بروید. در غیر این صورت به گام 4 بروید.

4- با استفاده از شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با ساختار $R - S_1 - (S_2 = M+1)$ بردار سیگنال‌های هوشمند $u_{\mathrm{int}}(t)$ را به صورت آنلاین تنظیم کنید. قرار دهید $u(t) = u_{\mathrm{int}}(t)$ و سپس به گام 5 بروید.

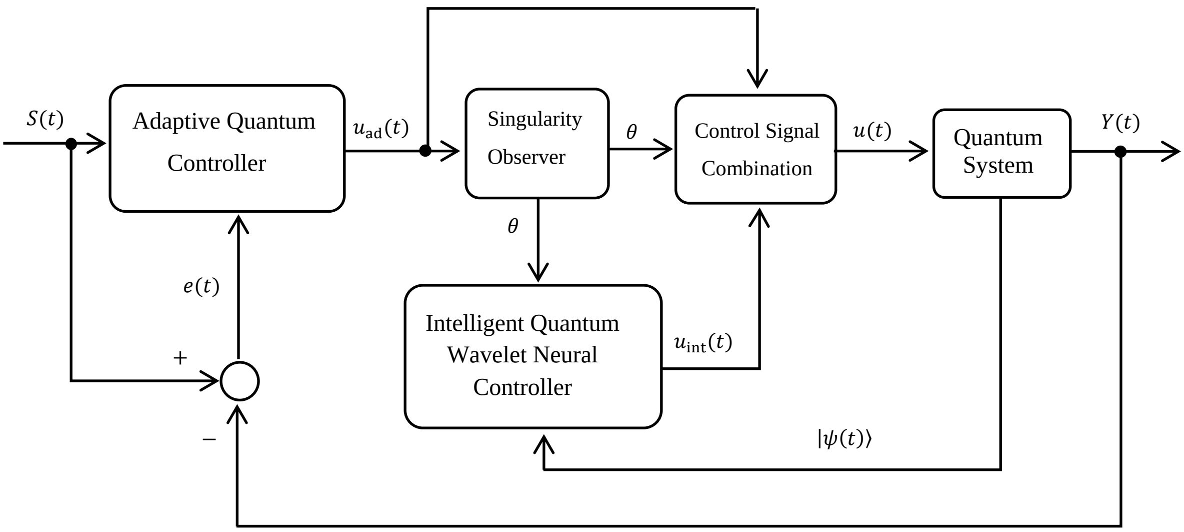


**Fig. 2** Schematic diagram of the hybrid adaptive intelligent quantum wavelet neural controller

**شکل 2** دیاگرام فرایند کنترل ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی

5- با استفاده از سیگنال کنترل $u(t)$ انتقال جمعیت سیستم کوانتومی (1) را کنترل کنید.

## 4- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، برای بررسی کارایی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند پیشنهاد شده، مساله‌ی کنترل ردیابی انتقال جمعیت کوانتومی سیستم کوانتومی بسته‌ی چهار سطحی (41) شبیه‌سازی می‌شود:

$$i\left|\dot{\psi}(t)\right\rangle = (H_0 + u_1(t)H_1 + u_2(t)H_2)|\psi(t)\rangle. \tag{41}$$

ماتریس همیلتونی آزاد $H_0$ و همیلتونی‌های کنترل سیستم به صورت (42) و (43) در نظر گرفته می‌شوند:

$$H_0 = \mathrm{Diag}(0.4948, 1.4529, 2.3691, 3.2434), \tag{42}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

مقادیر ویژه‌ی همیلتونی آزاد با $\lambda_k(k = 1, 2, 3, 4)$ نمایش داده شده و بردارهای ویژه‌ی متناظر آن‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= [1, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \qquad |\lambda_2\rangle = [0, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \\ |\lambda_3\rangle &= [0, 0, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \qquad |\lambda_4\rangle = [0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{44}$$

حالت اولیه‌ی سیستم به صورت برهمنهی بردارهای ویژه‌ی همیلتونی آزاد در نظر گرفته شده است:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_1\rangle + \frac{1}{2}|\lambda_2\rangle + \frac{1}{2}|\lambda_3\rangle + \frac{1}{2}|\lambda_4\rangle. \tag{45}$$

هدف، کنترل مؤثر سیستم (41) برای ردیابی مسیر پاسخ پله‌ی $S(t) = 1 - \exp(-t^2/2\tau^2), t \geq 0$ توسط مقدار چشمداشتی عملگر مشاهده‌پذیر $O(t) = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|$ است. مقدار چشمداشتی با رابطه‌ی (46) داده می‌شود:

$$Y(t) = \langle\psi(t)|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|\psi(t)\rangle = |\langle\psi(t)|\lambda_1\rangle|^2. \tag{46}$$

در طراحی بخش تطبیقی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند از پارامترها و مقادیر اولیه‌ی (47) استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\Delta t = 0.01, \qquad \tau = 20, \\ &u_1(0) = u_2(0) = 0.005, \\ &g_2 = 220, \qquad \mathrm{bnd}_1 = 2, \qquad \mathrm{bnd}_2 = 5. \end{aligned} \tag{47}$$

با توجه به قانون کنترل ترکیبی (39) در صورتی که دامنه‌ی سیگنال کنترل $u_{\mathrm{ad}_1}(t)$ یا $u_{\mathrm{ad}_2}(t)$ در لحظه‌ی $t_s$ از کران داده شده بزرگتر باشد، پارامتر $\theta$ بروز تکینی را پیش‌بینی می‌کند. در نتیجه، ردیابی مسیر از لحظه‌ی $t = t_s - \Delta t$ تا زمان رفع وضعیت تکینی، بوسیله‌ی کنترل‌کننده‌ی هوشمند انجام می‌شود. در لحظه‌ی تکینی سیگنال‌های کنترل هوشمند به صورت آنلاین توسط یک شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با ساختار 3-5-1 تنظیم می‌شوند.

حالت‌های $\left\{\left|\underline{\psi}(t_s - p\Delta t)\right\rangle\right\}_{p=1}^{4}$ و سیگنال‌ها و مسیرهای مطلوب $\left\{\left[u_{\mathrm{ad}_1}(t_s - p\Delta t), u_{\mathrm{ad}_2}(t_s - p\Delta t), S(t_s - p\Delta t)\right]\right\}_{p=1}^{4}$ به ترتیب به عنوان داده‌های آموزشی ورودی و خروجی‌های مطلوب به شبکه اعمال می‌شوند. موجک کلاه مکزیکی و توابع سیگموئیدی به ترتیب به عنوان توابع محرک لایه‌ی مخفی و توابع انتقال لایه‌ی خروجی انتخاب شده‌اند:

$$\begin{cases} \Psi(t) = (1 - t^2)\exp\left(\dfrac{-t^2}{2}\right), \\ f_1(t) = f_2(t) = \mathrm{sig}(t) = \dfrac{1}{1 + \exp(-t)}, \\ f_3(t) = \mathrm{tansig}(t) = \dfrac{2}{1 + \exp(-2t)} - 1. \end{cases} \tag{48}$$

بعلاوه، به ازای $i = 1$، $j = 1,2,3,4,5$ و $k = 1,2,3$ مقادیر اولیه‌ی وزن‌ها و پارامترهای شبکه به صورت (49) در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} &\left|W_{ij}^0\right\rangle = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}, \\ &a_j^0 = b_j^0 = 0.2, \qquad c_{jk}^0 = 0.25. \end{aligned} \tag{49}$$

همچنین، از الگوریتم یادگیری پس‌انتشار دسته‌ای با نرخ یادگیری $\eta = 0.1$ برای آموزش شبکه استفاده می‌شود. در صورت اجرای 200 مرحله آموزش یا رسیدن به خطای کمتر از $E = 0.1$ آموزش شبکه متوقف شده و سیگنال‌های هوشمند کنترل با اعمال ورودی $\left|\underline{\psi}(t_s)\right\rangle$ به شبکه‌ی آموزش دیده تنظیم می‌شوند. شکل 3 مسیر مطلوب $S(t)$ و مسیر ردیابی شده‌ی $Y(t)$ را نمایش می‌دهد.



[ DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.50.9 ]

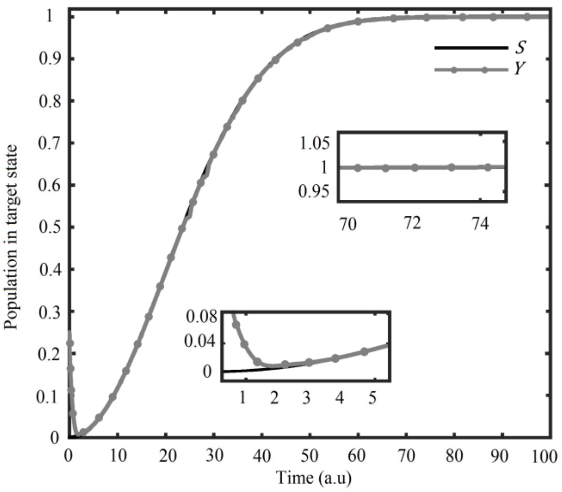


**Fig. 3** The step response of the hybrid adaptive intelligent quantum wavelet neural controller and the target trajectory

**شکل 3** پاسخ پله‌ی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی و مسیر مطلوب

با وجود خطای اولیه‌ی $e(0) = -0.25$ بین مسیر مطلوب و مسیر ردیابی شده، مسیر $S(t)$ در بازه‌ی $[0,5.40]$ به خوبی توسط بخش تطبیقی کنترلر ترکیبی ردیابی شده است. در لحظه‌ی $t_s = 5.41$ دامنه‌ی اولین سیگنال‌کنترل از کران داده شده بزرگتر شده $(\|u_1(t_s)\| = 2.3862 > \mathrm{bnd}_1)$ و ناظر تکینی با تشخیص وضعیت تکین در کنترلر تطبیقی، مقدار پارامتر ناظر تکینی را به $\theta = 1$ تغییر می‌دهد. در نتیجه سیگنال کنترل $u_1(t_s)$ به صورت آنلاین توسط شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی با مقدار جدید $u_1(t_s) = -0.9983$ تنظیم می‌شود. به ویژه، می‌توان به لحظه‌ی $t_s = 41.74$ به عنوان یک نمونه از وضعیت تکینی ذاتی اشاره کرد. در این لحظه مخرج کسر سیگنال کنترل تطبیقی $u_1(t_s)$ با عدد بسیار کوچک $2.8152 \times 10^{-5}$ برابر است که موجب رشد بیش از اندازه‌ی دامنه‌ی این سیگنال $(\|u_1(t_s)\| = 420.2668)$ و در نتیجه افزایش شدید خطای ردیابی می‌شود. بنابراین، با تنظیم مجدد سیگنال $u_1(t)$ توسط کنترلر هوشمند و خنثی شدن اثر مخرج کسر کوچک با کاهش سریع‌تر صورت کسر، ردیابی مسیر اصلاح شده و خطای ردیابی کاهش می‌یابد. شکل 4 مخرج کسر

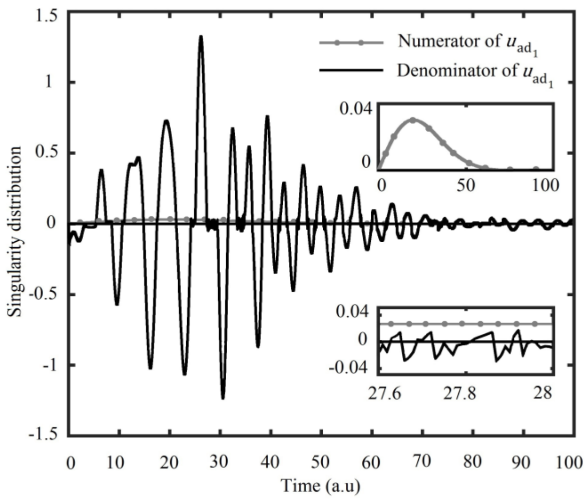


**Fig. 4** The time dependence graph of the numerator and denominator of the adaptive control law (33)

**شکل 4** نمودار زمانی تغییرات صورت و مخرج کسر قانون کنترل تطبیقی (33)

اولین سیگنال کنترل تطبیقی و پراکندگی نقاط تکین آن را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در شکل‌های 5 و 6 مشاهده می‌شود، کنترلر ترکیبی تطبیقی هوشمند به طور هموار از نقاط تکین عبور کرده و با ترکیب مؤثر سیگنال‌های کنترل تطبیقی و هوشمند، مشکل بروز تکینی‌های سیستم کنترل را پس از لحظه‌ی $t = 71.6$ رفع می‌کند. مشاهده می‌شود کنترلر پیشنهادی، با کاهش چشمگیر خطای ردیابی مسیر مطلوب انتقال جمعیت سیستم کوانتومی را به صورت پایدار کنترل می‌کند (شکل 7). نتایج شبیه‌سازی کنترلر پیشنهادی و عملکرد کنترلر تطبیقی ارائه شده در مرجع [15] در جدول 1 مقایسه شده‌اند. در روش ارائه شده در [15] مشکل تکینی سیستم کوانتومی بسته‌ی مرتبه چهار از طریق اصلاح مسیر مطلوب $S(t)$ مدیریت شده است. شاخص عملکرد کنترل به صورت $\mathrm{IAE} = \int_0^{100} |e(t)|^2 dt$ در نظر گرفته شده است. نتایج جدول 1 نشان می‌دهد کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، انتقال جمعیت سیستم کوانتومی را با شاخص عملکرد بهتر کنترل کرده و با کاهش دامنه‌ی سیگنال‌های کنترل هزینه‌ی کنترل را به خوبی کاهش می‌دهد. همچنین، تعداد دفعات بروز تکینی در سیگنال‌های کنترل بوسیله‌ی کنترل‌کننده‌ی ترکیبی به طور چشمگیر کاهش داده شده است. به طور کلی، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی، عملکرد کنترل ردیابی مسیر را در سیستم کوانتومی بسته‌ی چهار سطحی بهبود می‌دهد.

## 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با طراحی یک شبکه‌ی عصبی موجکی کوانتومی جدید و ترکیب آن با کنترل‌کننده‌ی تطبیقی طراحی شده یک کنترل‌کننده‌ی ترکیبی

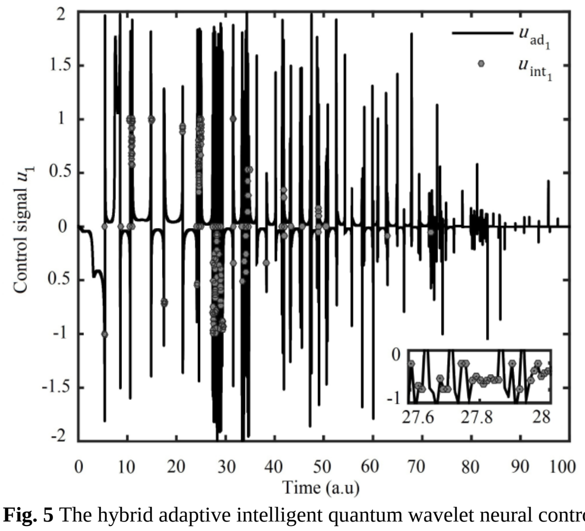


**Fig. 5** The hybrid adaptive intelligent quantum wavelet neural control signal $u_1$

**شکل 5** سیگنال کنترل ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی $u_1$

**جدول 1** عملکرد کنترل ردیابی مسیر

**Table 1** Performance of trajectory tracking control

| شاخص عملکرد | کنترل‌کننده‌ی تطبیقی ردیابی مسیر کوانتومی [15] | کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی |
|---|---|---|
| IAE | 0.0182 | 0.0173 |
| $\|u_1\|$ | 39.7493 | 31.3635 |
| $\|u_2\|$ | 18.9577 | 18.7144 |
| تعداد تکینی‌ها | 702 | 295 |

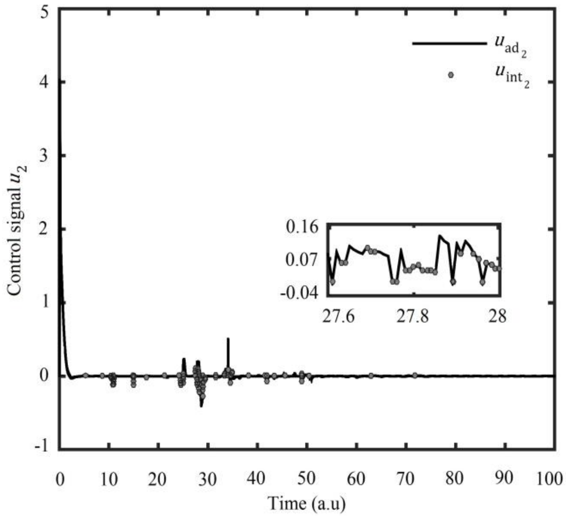


**Fig. 6** The hybrid adaptive intelligent quantum wavelet neural control signal $u_2$

**شکل 6** سیگنال کنترل ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی $u_2$

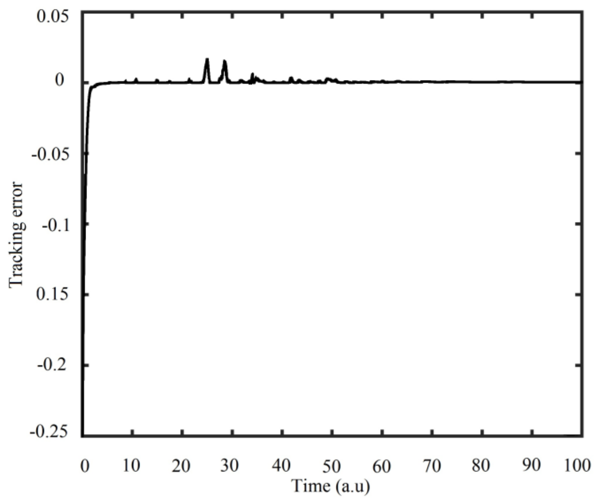


**Fig. 7** Tracking error of the hybrid adaptive intelligent quantum wavelet neural controller

**شکل 7** خطای ردیابی مسیر توسط کنترل‌کننده‌ی ترکیبی تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی

تطبیقی هوشمند عصبی موجکی کوانتومی برای ردیابی مسیر دینامیک سیستم‌های کوانتومی بسته‌ی متناهی ارائه شد. قوانین کنترل تطبیقی بر اساس تئوری پایداری لیاپانوف طراحی شده و پایداری سیستم کنترل تطبیقی با اثبات یک قضیه تضمین شده است. با طراحی نرون عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی یک مدل جدید شبکه‌ی عصبی موجکی تطبیقی کوانتومی با ورودی و وزن‌های کوانتومی و خروجی کلاسیک پیشنهاد شد. سیگنال‌های کنترل هوشمند از طریق آموزش آنلاین شبکه‌ی عصبی پیشنهادی با قوانین یادگیری کاهش گرادیان در روش پس‌انتشار دسته‌ای تنظیم شده‌اند. ترکیب کنترل‌کننده‌های تطبیقی و هوشمند عصبی موجکی کوانتومی از طریق یک پارامتر ناظر تکینی انجام می‌شود. کنترل‌کننده‌ی ترکیبی طراحی شده، مشکلات بروز تکینی‌های ذاتی در سیگنال‌های کنترل تطبیقی و دامنه‌ی بزرگ سیگنال‌های کنترل را که موجب افزایش هزینه‌ی کنترل و ناپایداری کنترل در ردیابی مسیر سیستم‌های کوانتومی می‌شوند، به خوبی مدیریت و رفع کرده است. نتایج شبیه‌سازی انتقال جمعیت یک سیستم کوانتومی بسته‌ی چهار سطحی در ردیابی مسیر دینامیک پاسخ پله، نشان‌دهنده‌ی کارایی مؤثر کنترل‌کننده‌ی پیشنهاد شده در ردیابی مسیر سیستم کوانتومی و برتری آن در کاهش خطای ردیابی، کم کردن هزینه‌ی کنترل و کاهش چشمگیر تعداد دفعات بروز تکینی در سیستم کنترل، نسبت به روش‌های موجود است.

## 6- فهرست علایم

| | |
|---|---|
| $e(t)$ | خطای ردیابی |
| $g_k$ | بهره‌ی کنترل |
| $H_0$ | همیلتونی آزاد |
| $H_k$ | همیلتونی کنترل |
| Img | قسمت موهومی |
| $i$ | عدد موهومی واحد |
| $O_j$ | عملگر تصویر |
| $O(t)$ | عملگر مشاهده‌پذیر |
| Pr | تابع احتمال |
| Re | قسمت حقیقی |
| $S(t)$ | مسیر مطلوب (پاسخ پله) |
| Sgn | تابع علامت |
| $u(t)$ | سیگنال کنترل |
| $Y(t)$ | مقدار چشمداشتی |

**علایم یونانی**

| | |
|---|---|
| $\hbar$ | ثابت پلانک |
| $\eta$ | نرخ یادگیری شبکه |
| $\theta$ | پارامتر ناظر تکینی |
| $\lambda$ | مقدار ویژه |
| $\lvert\psi(t)\rangle$ | تابع موج، کت حالت |
| $\Psi_{a,b}$ | تابع موجک |

**زیرنویس‌ها**

| | |
|---|---|
| ad | مربوط به سیگنال کنترل تطبیقی |
| int | مربوط به سیگنال کنترل هوشمند |

## 7- مراجع

[1] S. Cong, F. Meng, A survey of quantum lyapunov control methods, *The Scientific World Journal*, Vol. 2013, pp. 1-14, 2013.
[2] F. Albertini, D. D'Alessandro, Time-optimal control of a two level quantum system via interaction with an auxiliary system, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 59, No. 11, pp. 3026-3032, 2014.
[3] S. Chegini, M. Yarahmadi, Design of an adaptive sliding mode controller based on quantum neural network, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 305-310, 2017. (in Persianفارسی)
[4] J. M. Coron, A. Grigoriu, C. Lefter, G. Turinici, Quantum control design by Lyapunov trajectory tracking for dipole and polarizability coupling, *New Journal of Physics*, Vol. 11, No. 10, pp. 105034, 2009.
[5] J. Liu, S. Cong, Y. Zhu, Adaptive trajectory tracking of quantum systems, *Proceeding of The 12th International Conference on Control, Automation and Systems*, ICC, Jeju Island, Korea, October 17-21, 2012.
[6] M. Mirrahimi, G. Turinici, P. Rouchon, Reference trajectory tracking for locally designed coherent quantum controls, *The Journal of Physical Chemistry A*, Vol. 109, No. 11, pp. 2631-2637, 2005.
[7] L. M. Vandersypen, I. L. Chuang, NMR techniques for quantum control and computation, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 76, No. 4, pp. 1037, 2005.
[8] A. Arjmandzadeh, M. Yarahmadi, Quantum genetic learning control of quantum ensembles with hamiltonian uncertainties, *Entropy*, Vol. 19, No. 8, pp. 1-12, 2017.
[9] H. Sedghee Rostami, B. Rezaie, Controlling state of quantum system using fuzzy controller, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 124-134, 2016. (in Persianفارسی)

[26] K. Takahashi, M .Kurokawa, M. Hashimoto, Controller application of a multi-layer quantum neural network trained by a conjugate gradient algorithm, *Proceeding of 37th Annual Conference on IEEE industrial Electronics Society*, IEEE, pp. 2353-2358, 2011.
[27] A. Sagheer, M. Zidan, Autonomous quantum perceptron neural network, *arXiv preprint arXiv:1312.4149*, 2013.
[28] H. Cao, F. Cao, D. Wang, Quantum artificial neural networks with applications, *Information Sciences*, Vol. 290, pp. 1-6, 2015.
[29] D. Mu, Z. Guan, H. Zhang, Learning algorithm and application of quantum neural networks with quantum weights, *International Journal of Computer Theory and Engineering*, Vol. 5, No. 5, pp. 788-792, 2013.
[30] A. J. da Silva, T. B. Ludermir, W. R. de Oliveira, Quantum perceptron over a field and neural network architecture selection in a quantum computer, *Neural Networks*, Vol. 76, pp. 55-64, 2016.
[31] R. Cheng, Y. Bai, A novel approach to fuzzy wavelet neural network modeling and optimization, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 64, pp. 671-678, 2015.
[32] J. E. Guillermo, L. J. R. Castellanos, E. N. Sanchez, A. Y. Alanis, Detection of heart murmurs based on radial wavelet neural network with Kalman learning, *Neurocomputing*, Vol. 164, pp. 307-317, 2015.
[33] H. Z. Hosseinabadi, B. Nazari, R. Amirfattahi, H. R. Mirdamadi, A. R. Sadri, Wavelet network approach for structural damage identification using guided ultrasonic waves, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 63, No. 7, pp. 1680-1692, 2014.
[34] F. Zhou, L. Wang, H. Lin, Z. Lv, High accuracy state-of-charge online estimation of EV/HEV lithium batteries based on Adaptive Wavelet Neural Network, *Proceeding of 2013 IEEE ECCE Asia Downunder*, IEEE, pp. 513-517, 2013.
[35] K. Liu, L. Peng, Q. Yang, The algorithm and application of quantum wavelet neural networks, *Proceeding of 2010 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, IEEE, pp. 2941-2945, 2010.
[36] S. M. Taha, A. K. Nawar, A new quantum radial wavelet neural network model applied to analysis and classification of EEG signals, *International Journal of Computer Applications*, Vol. 85, No. 7, 2014.
[37] K. Takahashi, Y .Shiotani, M. Hashimoto, Remarks on model reference self-tuning PID controller using quantum neural network with qubit neurons, *Proceeding of 2013 International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR)*, IEEE, pp. 253-257, 2013.
[38] D. D'Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*, pp. 1-35, Chapman & Hall, London, 2007.
[39] C. Y. Liu, C. Chen, C. T. Chang, L. M. Shih, Single-hidden-layer feed-forward quantum neural network based on Grover learning, *Neural Networks*, Vol. 45, No. Supplement C, pp. 144-150, 2013.
[10] A. Borzì, G. Stadler, U. Hohenester, Optimal quantum control in nanostructures: Theory and application to a generic three-level system, *Physical Review A*, Vol. 66, No. 5, pp. 1-7, 2002.
[11] R. Mathew, C. E. Pryor, M. E. Flatté, K. C. Hall, Optimal quantum control for conditional rotation of exciton qubits in semiconductor quantum dots, *Physical Review B*, Vol. 84, No. 20, pp. 1-11, 2011.
[12] J. L. Herek, W. Wohlleben, R. J. Cogdell, D. Zeidler, M. Motzkus, Quantum control of energy flow in light harvesting, *Nature*, Vol. 417, No. 6888, pp. 533-535, 2002.
[13] M. Shapiro, P. Brumer, Principles of the quantum control of molecular processes, *Principles of the Quantum Control of Molecular Processes*, Moshe Shapiro, Paul Brumer, pp. 250. Wiley-VCH, 2003.
[14] D. Dong, I. R. Petersen, Quantum control theory and applications: a survey, *IET Control Theory & Applications*, Vol. 4, No. 12, pp. 2651-2671, 2010.
[15] J. Liu, S. Cong, Trajectory tracking of quantum states based on Lyapunov method, *Proceeding of The 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Santiago, Chile, December 19-21, 2011.
[16] M. Mirrahimi, P. Rouchon, Trajectory tracking for quantum systems: A lyapounov approach, *Proceedings of the International Symposium MTNS*, pp. 1-6, 2004.
[17] S. Cong, J. Liu, Trajectory tracking theory of quantum systems, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 27, No. 4, pp. 679-693, 2014.
[18] W. Zhu, H. Rabitz, Quantum control design via adaptive tracking, *Chemical Physics*, Vol. 119, No. 7, pp. 3619-3625, 2003.
[19] S. Cong, *Control of Quantum Systems: Theory and Methods*, pp. 381-402 John Wiley & Sons, Singapore, 2014.
[20] W. Zhu, M. Smit, H. Rabitz, Managing singular behavior in the tracking control of quantum dynamical observables, *Chemical Physics*, Vol. 110, No. 4, pp. 1905-1915, 1999.
[21] S .Kak, On quantum neural computing, *Information Sciences*, Vol. 83, No. 3-4, pp. 143-160, 1995.
[22] N. Matsui, N. Kouda, H. Nishimura, Neural network based on QBP and its performance, *Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on Neural Networks*, IEEE, pp. 247-252, 2000.
[23] L. Panchi, L. Shiyong, Learning algorithm and application of quantum BP neural networks based on universal quantum gates, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, Vol. 19, No. 1, pp. 167-174, 2008.
[24] M. Khosravi, M. Zekri, A review of quantum neural networks, *Soft Computing Journal*, Vol. 1, No. 1, pp. 46-55, 2013. (in Persianفارسی)
[25] S. S. Mukherjee, R. Chowdhury, S. Bhattacharyya, Image restoration using a multilayered quantum backpropagation neural network, *Proceeding of International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks*, IEEE, pp. 426-430, 2011.