

تحلیل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک

شاهرخ حسینی‌هاشمی^{۱*}, هدی اخوان^۲, محمد فدایی^۳

- ۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
 ۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
 ۳- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
 *Shh@iust.ac.ir، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، تهران

چکیده- در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم هدفمند (FG) با لایه‌های هوشمند براساس تئوری میندلین و ارائه یک حل دقیق پاسخ-بسته، مورد بررسی قرار گرفته است. این ساختار مشتمل از یک ورق FG و دو لایه پیزوالکتریک می‌باشد. در این حل فرض بر آن است که دو لایه مقابل ورق دارای شرط مرزی ساده (یعنی ورق مستطیلی Levy-type) باشند. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین از این ورق می‌توان به عنوان محرك استفاده کرد. برای بیان نحوه توزیع خواص در ماده FG از یک مدل تابع توانی استفاده می‌شود. با استفاده از اصل همیلتون و معادله الکترواستاتیکی ماکسول، شش معادله دیفرانسیل وابسته بدست می‌آید. به منظور حل معادلات مذکور، یکسری توابع کمکی و پتانسیل جدید معرفی شده و از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. دقت فرکانس‌های بدست آمده بهوسیله انجام مطالعات مقایسه‌ای با مقالات موجود و همچنین تحلیل المان محدود تایید می‌شود. در حل دقیق حاضر امکان پیش‌بینی مدهای درون-صفحه‌ای نیز علاوه بر مدهای خارج-صفحه‌ای با دقت بسیار بالایی می‌سیر می‌شود. همچنین، تاثیر پارامترهای ورق مانند شرایط مرزی، اندیس گرادیانی و افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلیدواژگان: تئوری میندلین، فرکانس‌های طبیعی، FGM، مدل تابع توانی.

Exact closed-form Free Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Functionally Graded Plates with Two Bonded Piezoelectric Layers

Sh. Hosseini-Hashemi^{1*}, H. Akhavan², M. Fadaee³

1- Assoc. Prof. of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. Tehran, Iran

2- M.Sc. Student of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. Tehran, Iran

3- P.h.d. Student of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. Tehran, Iran

*P.O.Box 16846-13114, Tehran, Iran. Shh@iust.ac.ir

Abstract- In this paper, free vibration analysis of moderately thick smart FG rectangular plate is presented on the basis of Mindlin plate theory. This structure is composed of a host FG plate and two bonded piezoelectric layers. The plate has two opposite edges simply supported (i.e., Levy-type rectangular plates). The closed circuit piezoelectric layers can be used as an actuator. According to a power-law distribution of the volume fraction of the constituents, material properties vary continuously through the thickness of host plate. Using Hamilton's principle and Maxwell electrostatic equation, six complex coupled equations are introduced. These equations are exactly solved introducing the new potential and auxiliary functions as well as using separation of variables method. The accuracy of the frequencies is verified by the available literature and the finite element method. The present exact solution can accurately predict not only the out of plane, but also the in-plane modes of FG plate. Finally, the effects of various parameters such as boundary conditions, gradient index and thickness of piezoelectric layers on the natural frequency are investigated.

Keywords: Mindlin theory, Natural Frequency, FGM, Power-Law Distribution.

شكل برشی و اینرسی دورانی را نیز در نظر می‌گیرد، بوسیله میندلین^۱ و همکارانش پیشنهاد شد [۵]. در مقایسه با تغوری‌های مرتبه بالاتر تئوری میندلین حجم و پیچیدگی محاسباتی بسیار کمتری دارد و در عین حال پاسخ‌های حاصل از آن دقیق مورد نیاز را تامین می‌کنند.

تاکنون بررسی‌های متعددی روی ورق‌های مستطیلی FG، FGPM و FG با لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است. فریرا^{۱۰} و همکاران [۶]، فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی FG را برای شرایط مرزی مختلف بدست آورده‌اند. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مربعی با شرایط مرزی ساده با استفاده از یک روش المان محدود مرتبه بالا توسط پرادیاما و باندیپادیای^{۱۱} [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. حسینی هاشمی^{۱۲} و همکاران [۸،۹]، تحلیل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی FG را بر مبنای تئوری میندلین و ردی^{۱۳} برای شش نوع شرط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. چنگ و باترا^{۱۰} [۱۰]، کمانش و ارتعاشات حالت پایدار^{۱۵} ورق FG چند ضلعی^{۱۶} با شرایط مرزی ساده را ارائه دادند. تحلیل دقیق سه بعدی فرکاس-های طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته توسط کیوپیال^{۱۷} [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. چن^{۱۸} و همکارانش [۱۲]، ارتعاشات آزاد یک ورق پیزوالکتریک مستطیلی هدفمند که اصطلاحاً FGPM نامیده می‌شود را با استفاده از روش فضای حالت^{۱۹} مورد مطالعه قرار دادند و ورق FGPM را بطور تقریبی بصورت یک ساختار

۱- مقدمه

مواد هدفمند^۱ که اصطلاحاً FGM نامیده می‌شوند نسل جدیدی از ساختارهای کامپوزیتی هستند که اولین بار توسط یک گروه از دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی شدند. مواد FGM، موادی ناهمگن^۲ ولی ایزوتروپ هستند. ریزساختار این مواد به‌گونه‌ای است که به صورت پیوسته و تدریجی از یک ماده در راستای مشخص به ماده‌ای کاملاً متفاوت میل می‌کند. این تغییرات پیوسته خواص در مقایسه با تغییرات گسسته خواص مواد مرکب، مشکل تغییر ناگهانی در سطح تماس دو ماده گوناگون را برطرف کرده و توزیع نتش پیوسته را سبب می‌شود [۱،۲].

پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که دارای خواصی، بین خواص الکتریکی و الاستیکی می‌باشند. با توجه به استفاده گسترده‌ای که این مواد در حسگرها^۳ و محرک‌ها^۴ دارند، مطالعه بر روی ورق‌هایی که دارای لایه پیزوالکتریک می‌باشند توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف ساخته است.

امروزه استفاده از مواد پیزوالکتریک همراه با کامپوزیت‌ها کاربردهای مختلفی دارند. از جمله کاربردهای این مواد در کنترل ارتعاشات و ساختارهای هوشمند^۵ می‌باشد [۳]. محرک‌ها و حسگرها به سازه‌های اصلی که اصطلاحاً به آن‌ها host گفته می‌شود، متصل می‌شوند و اتصال آن‌ها به شکل‌ها و فرم‌های مختلفی صورت می‌گیرد که به شرایط محیطی و نیازهای عملیاتی مختلف بستگی دارد [۴].

تئوری کلاسیک ورق^۶ تاثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در نظر نمی‌گیرد و نتایج حاصل از آن فقط برای ورق‌های نازک قابل قبول است. به منظور برطرف کردن کاستی‌های مربوط به تئوری کلاسیک برای ورق نسبتاً ضخیم، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۷ (FSDT) که تاثیر تغییر

- 8. Mindlin
- 9. Functionally Graded Piezoelectric Materials
- 10. Ferreira
- 11. Pradyumna and Bandyopadhyay
- 12. Hosseini-Hashemi
- 13. Reddy
- 14. Cheng and Batra
- 15. Steady state vibrations
- 16. Polygonal
- 17. Cupial
- 18. State space
- 19. Zhong and Yu

- 1. Functionally Graded Materials
- 2. Inhomogeneous
- 3. Sensors
- 4. Actuators
- 5. Smart
- 6. Classical plate Theory
- 7. First-Order shear Deformation Plate Theory

نظر گرفتن وابستگی^۵ بین ارتعاشات درون-صفحه‌ای^۶ و خارج-صفحه‌ای^۷ می‌باشد، بنابراین فرکانس‌های درون-صفحه‌ای نیز قابل اندازه‌گیری می‌باشند. همچنین بررسی‌ها نشان داده‌اند که در نظر نگرفتن این وابستگی خطاهای چشم‌گیری ایجاد می‌کند. برای بدست آوردن نتایج حل دقیق، کدنویسی در نرم افزار Mathematica انجام شده و نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از نرم افزار ABAQUS مقایسه شده است و دقت و صحت حل حاضر مورد تایید قرار گرفته شده است.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- آرایش هندسی

یک ورق FG مستطیلی نسبتاً ضخیم و مسطح به طول a و عرض b ، که دو لایه پیزوالکتریک یکسان در بالا و پایین به آن متصل شده را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده، ضخامت ورق FG، $2h$ و ضخامت لایه پیزوالکتریک h_p می‌باشد. دو لبه‌ی مقابل ورق که در امتداد محور x_2 قرار دارد (یعنی در امتداد لبه‌های $x_1=a$ و $x_1=0$) همواره دارای شرایط مرزی ساده می‌باشند، در حالی که دو لبه‌ی دیگر می‌توانند آزاد، ساده و یا گیردار باشند. سیستم مختصات کارتزین (x_1, x_2, x_3) برای استخراج معادلات ریاضی در نظر گرفته شده است، به طوریکه مبدأ مختصات در یک گوش ورق واقع شده و محورهای x_1, x_2 در صفحه‌ی میانی ورق واقع شده‌اند. سطح بالایی و پایینی هر لایه پیزوالکتریک به‌طور کامل از الکترودهای اتصال کوتاه پوشانده شده است. ضخامت الکترودها خیلی کوچک‌تر از ضخامت ورق FG فرض شده است. بنابراین در روابطی که در ادامه آورده شده، از تاثیر مکانیکی الکترودها چشم پوشی شده است. هر دو لایه‌ی پیزوالکتریک در امتداد عمود بر صفحه میانی در جهت مثبت ضخامت قطبی شده‌اند.

- 5. Coupling
- 6. In-plane
- 7. Out of plane

لایه‌ای مدل کردند و حل دقیق را برای شرایط مرزی مختلف بدست آورده‌اند. زانگ و یو^۸ [۱۳]، حل دقیق سه بعدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک ورق پیزوالکتریک FGPM مستطیلی با شرایط مرزی ساده را ارائه کردند. جابجایی و پتانسیل الکتریکی ورق را به‌شکل سری فوریه بسط داده و سپس معادلات حالت را استخراج کردند.

ردی و چنگ [۱۴]، یک ورق هوشمند FG شامل یک ورق ساخته شده از مواد هدفمند، که لایه پیزوالکتریک به‌عنوان محرك فقط روی سطح غنی شده از فلز^۹ آن نصب شده است را مورد مطالعه قرار دادند. هنگامی که سطح غنی شده از سرامیک در معرض بارگذاری ترمومکانیکی قرار گرفت، جابجایی و تنفس را تحت کنترل درآورده و دامنه ارتعاشات را بواسیله محرك با منبع الکتریکی خنثی کردند. فخاری و همکاران [۱۵]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری ورق FG با دو لایه پیزوالکتریک تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی را با استفاده از روابط کرنش-جابجایی غیر خطی فون کارمن^{۱۰} و روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله یک روش دقیق برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق میندلین مستطیلی FG با لایه‌های پیزوالکتریک برای شش نوع شرط مرزی مختلف که اصطلاحاً لوی-گونه^{۱۱} گفته می‌شود، ارائه شده است. همچنین تاثیر تغییر شکل‌های برشی و اثر اینرسی دورانی در نظر گرفته شده است. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین این ساختار به عنوان یک محرك عمل می‌کند. اصل همیلتون و معادلات الکترواستاتیکی ماسکول برای استخراج معادلات حاکم برمسئله، بکار گرفته شده است. در پایان نیز تاثیر پارامترهای ورق نظیر شرایط مرزی، ضخامت لایه پیزوالکتریک و اندیس گرادیانی مورد بررسی قرار داده شده است. از جمله نکات مثبت مقاله حاضر، در

1. Metal-rich
2. Ceramic-rich
3. Von karman
4. Levy-type

۳-۲- میدان جابجایی

برمبانی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میندلین، جابجایی‌های درون-صفحه‌ای به عنوانتابع خطی از ضخامت ورق بسط داده شده‌اند و خمس عرضی^۲ در امتداد ضخامت ورق دارای مقدار ثابتی است. میدان جابجایی به‌طوریکه در ادامه بیان شده، به کار برده شده است [۱۶]:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3, t) &= u(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_1(x_1, x_2, t) \\ V(x_1, x_2, x_3, t) &= v(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_2(x_1, x_2, t) \\ W(x_1, x_2, x_3, t) &= w(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (۳)$$

U و V جابجایی‌های درون-صفحه‌ای در صفحه‌ی میانی ورق، ψ_1 جابجایی عرضی و ψ_2 چرخش‌های^۳ صفحات میانی ورق حول محور x_1, x_2 و t زمان را مشخص می‌کند.

۴-۲- روابط تنش و کرنش

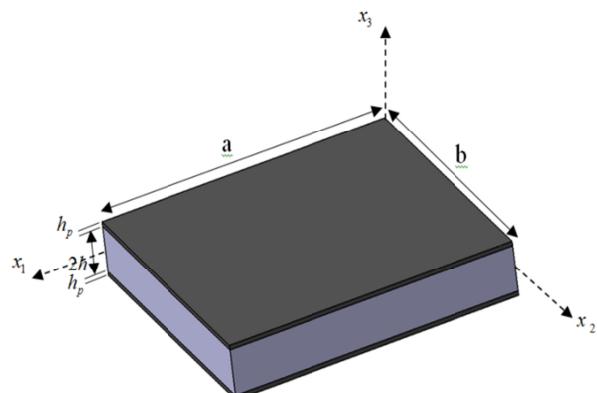
روابط کرنش-جابجایی به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,1} + z \psi_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= v_{,2} + z \psi_{2,2} \\ \varepsilon_{33} &= 0 \\ \gamma_{12} &= u_{,2} + v_{,1} + z(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) \\ \gamma_{13} &= \psi_1 + w_{,1} \\ \gamma_{23} &= \psi_2 + w_{,2} \end{aligned} \quad (۴)$$

علامت کاما که به دنبال آن ۱، ۲ و ۳ قرار دارد به ترتیب مشتق نسبت به مختصات x_1 و x_2 و x_3 را نشان می‌دهد. باید خاطر نشان کنیم که تنش عرضی عمودی σ_{33} صفر فرض شده است. براساس قانون هوک، روابط تنش-جابجایی برای ورق میانی به صورت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^h \\ \sigma_{22}^h \\ \sigma_{12}^h \\ \sigma_{13}^h \\ \sigma_{23}^h \end{array} \right\} = \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \right\} \quad (5)$$

2. Transverse deflection
3. Slope rotations



شکل ۱ ورق نسبتاً ضخیم FG با دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین آن

۲-۲- خواص مواد هدفمند

مواد هدفمند (FGMs) مواد مرکبی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور پیوسته به‌دلیل تغییرات تدریجی کسر حجمی^۱ مواد تشکیل دهنده، معمولاً در امتداد ضخامت ورق تغییر می‌کند. در این مطالعه، فرض بر آن است که خواص ورق در امتداد ضخامت با مدل تابع توانی تغییر می‌کند. سطح بالایی ورق ($x_3=h$) کاملاً سرامیک، در حالیکه سطح پایینی ورق کاملاً فلز می‌باشد. مقدار ضریب پوآسون ν در طول ($x_3=-h$) تحلیل ثابت درنظر گرفته شده است. مدول یانگ و چگالی جرمی به‌طور پیوسته در امتداد ضخامت ورق به صورت بیان شده در ادامه تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned} E(x_3) &= (E_c - E_m)V_f(x_3) + E_m \\ \rho(x_3) &= (\rho_c - \rho_m)V_f(x_3) + \rho_m \end{aligned} \quad (1)$$

زیرنویس m و c به ترتیب اجزا فلزی و سرامیکی را نشان می‌دهد و کسر حجمی V_f به صورت:

$$V_f(x_3) = \left(\frac{x_3}{2h} + \frac{1}{2} \right)^g \quad (2)$$

در نظر گرفته شده است. g اندیس گرادیانی است و فقط مقادیر مثبت را می‌پذیرد.

1. Volume fraction

$$E_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \sin \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (b-8)$$

$$E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = -\frac{\pi \varphi}{h_p} \cos \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (c-8)$$

با جایگذاری معادلات ۸ نهایتاً بردار جابجایی‌های الکتریکی متناظر D_1, D_2 و D_3 در ادامه آورده شده است:

$$D_1 = e_{15}\gamma_{13} + \Xi_{11}E_1 = e_{15}(\psi_1 + w_{,1}) - \Xi_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (a-9)$$

$$D_2 = e_{15}\gamma_{23} + \Xi_{11}E_2 = e_{15}(\psi_2 + w_{,2}) - \Xi_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (b-9)$$

$$D_3 = e_{31}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \Xi_{33}E_3 = e_{31}[(u_{,1} + v_{,2}) + x_3(\psi_{1,1} + \psi_{2,2})] - \Xi_{33} \frac{\pi \varphi}{h_p} \cos \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (c-9)$$

و Ξ_{33} ثوابت دی الکتریک هستند.

۵-۲- معادلات حرکت

برای ارتعاشات آزاد، انرژی جنبشی T و انرژی کرنشی V حاکم بر مسئله بهصورت زیر بیان شده است:

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h}^h \rho(x_3) (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dx_3 dA + \iint_A \int_h^H \rho_p (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dx_3 dA \quad (10)$$

$$V = \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h}^h (\sigma_{11}^h \varepsilon_x + \sigma_{22}^h \varepsilon_y + \sigma_{12}^h \gamma_{12} + \sigma_{23}^h \gamma_{23} + \sigma_{13}^h \gamma_{13}) dx_3 dA + \iint_A \int_h^H (\sigma_{11}^p \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^p \varepsilon_{22} + \sigma_{12}^p \gamma_{12} + \sigma_{23}^p \gamma_{23} + \sigma_{13}^p \gamma_{13} + D_1 E_1 + D_2 E_2 + D_3 E_3) dx_3 dA \quad (11)$$

ρ و ρ_p بهترتیب، چگالی ورق FG و چگالی لایه پیزوالکتریک می‌باشند.

می‌دانیم که اصل همیلتون بهصورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

می‌باشد. که $E(x_3)$ و V بهترتیب مدول یانگ و ضرب پیاسون ورق FG هستند. بهمنظور مدل کردنتابع پتانسیل الکتریکی از یک تابع سینوسی استفاده می‌شود بهنحوی که این تابع بتواند معادله ماقسول را بهطور تقریبی ارضانماید. این تابع بهصورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} \varphi(x_1, x_2, t) \sin \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p}, & h \leq x_3 \leq H \\ \varphi(x_1, x_2, t) \sin \frac{-\pi(x_3 + h)}{h_p}, & -H \leq x_3 \leq -h \end{cases} \quad (6)$$

که در رابطه بالا $\varphi(x_1, x_2, t)$ پتانسیل الکتریکی روی سطح میانی لایه پیزوالکتریک و $H = h + h_p$ همان‌گونه که از تابع فوق مشخص است پتانسیل الکتریکی در بالا و پایین لایه‌های پیزوالکتریک صفر می‌باشد. معادلات تشکیل دهنده^۱ در لایه پیزوالکتریک بهصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^p \\ \sigma_{22}^p \\ \sigma_{12}^p \\ \sigma_{13}^p \\ \sigma_{23}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{44} = 1/2(C_{11} - C_{12}) \quad (7)$$

که C_{44}, C_{12}, C_{11} و C_{55} مدول الاستیسیته تحت میدان الکتریکی ثابت؛ e_{31} و e_{15} ثوابت پیزوالکتریک؛ E_3, E_2, E_1 و x_3, x_2, x_1 مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی بهترتیب درجهت x_1, x_2, x_3 هستند، که بهعلت تقارن لایه‌های پیزوالکتریک، در اینجا از رابطه‌ی اول در معادله ۶ برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی بهصورت زیر استفاده شده است:

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \sin \frac{\pi(x_3 - h)}{h_p} \quad (a-8)$$

1. Constitutive relations

$$\begin{aligned} N_1 &= A(u_{,1} + \nu v_{,2}) + B(\psi_{1,1} + \nu \psi_{2,2}) + \\ P_1(C_{11}u_{,1} + C_{12}v_{,2}) + P_2(C_{11}\psi_{1,1} + C_{12}\psi_{2,2}) \end{aligned} \quad (16-a)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= A(\nu u_{,1} + v_{,2}) + B(\nu \psi_{1,1} + \psi_{2,2}) \\ + P_1(C_{12}u_{,1} + C_{11}v_{,2}) + P_2(C_{12}\psi_{1,1} + C_{11}\psi_{2,2}) \end{aligned} \quad (16-b)$$

$$\begin{aligned} N_{12} &= \frac{1-\nu}{2}[A(u_{,2} + v_{,1}) + B(\psi_{1,2} + \psi_{2,1})] \\ + C_{44}[P_1(u_{,2} + v_{,1}) + P_2(\psi_{1,2} + \psi_{2,1})] \end{aligned} \quad (16-c)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= B(u_{,1} + \nu v_{,2}) + D(\psi_{1,1} + \nu \psi_{2,2}) + P_2(C_{11}u_{,1} \\ + C_{12}v_{,2}) + P_3(C_{11}\psi_{1,1} + C_{12}\psi_{2,2}) - 4e_{31} \frac{h_p}{\pi} \varphi \end{aligned} \quad (16-d)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= B(\nu u_{,1} + v_{,2}) + D(\nu \psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + P_2(C_{12}u_{,1} \\ + C_{11}v_{,2}) + P_3(C_{12}\psi_{1,1} + C_{11}\psi_{2,2}) - 4e_{31} \frac{h_p}{\pi} \varphi \end{aligned} \quad (16-e)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1-\nu}{2}[B(u_{,2} + v_{,1}) + D(\psi_{1,2} + \psi_{2,1})] \\ + C_{44}[P_2(u_{,2} + v_{,1}) + P_3(\psi_{1,2} + \psi_{2,1})] \end{aligned} \quad (16-f)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \kappa^2 \frac{1-\nu}{2}(A(\psi_1 + w_{,1})) + \kappa^2 P_1 C_{55}(\psi_1 + w_{,1}) \\ + 4e_{15} \frac{h_p}{\pi} \varphi_1 \end{aligned} \quad (16-g)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \kappa^2 \frac{1-\nu}{2}(A(\psi_2 + w_{,2})) + \kappa^2 P_1 C_{55}(\psi_2 + w_{,2}) \\ + 4e_{15} \frac{h_p}{\pi} \varphi_2 \end{aligned} \quad (16-h)$$

κ^2 ضریب تصحیح برشی ورق است که در تئوری میندلین جهت جبران خطای حاصل از ثابت فرض نمودن تنش‌های برشی عرضی (σ_{23}, σ_{13}) در سراسر ضخامت ورق معرفی شده است.

در اینجا مقدار $5/6 = \kappa^2$ در نظر گرفته شده است. ضرایب سختی ورق FG هستند و P_i ها برای ساده سازی در معادلات فرض شده‌اند.

$$A, B, D = \int_{-h}^h (1, x_3, x_3^2) \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} dx_3 \quad (17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (12)$$

بعد از قرار دادن معادلات بالا در (12)، نهایتاً پنج معادله دینامیکی حرکت حاکم بر ورق مستطیلی FG با دو لایه‌ی بیزوالکتریک در بالا و پایین آن بر مبنای تئوری میندلین به شکل زیر استخراج شده است:

$$\delta u : N_{1,1} + N_{12,2} = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\psi}_1 \quad (13-a)$$

$$\delta v : N_{2,2} + N_{12,1} = I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\psi}_2 \quad (13-b)$$

$$\delta \psi_1 : M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 = I_2 \ddot{u} + I_3 \ddot{\psi}_1 \quad (13-c)$$

$$\delta \psi_2 : M_{2,2} + M_{12,1} - Q_y = I_2 \ddot{v} + I_3 \ddot{\psi}_2 \quad (13-d)$$

$$\delta w : Q_{1,1} + Q_{2,2} = I_1 \ddot{w} \quad (13-e)$$

برای مسئله موجود ترم‌های اینرسی و منتجه‌های تنش به-

صورت روابط (14) و (15) می‌باشند:

$$\begin{aligned} (I_1, I_2, I_3) &= \int_{-h}^h \rho(z)(1, x_3, x_3^2) dx_3 \\ + 2 \int_h^H \rho_p(1, x_3, x_3^2) dx_3 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (N_1, N_2, N_{12}) &= \int_{-h}^h (\sigma_{11}^h, \sigma_{22}^h, \sigma_{12}^h) dx_3 \\ + 2 \int_h^H (\sigma_{11}^p, \sigma_{22}^p, \sigma_{12}^p) dx_3 \end{aligned} \quad (15-a)$$

$$\begin{aligned} (M_1, M_2, M_{12}) &= \int_{-h}^h x_3 (\sigma_{11}^h, \sigma_{22}^h, \sigma_{12}^h) dx_3 \\ + 2 \int_h^H x_3 (\sigma_{11}^p, \sigma_{22}^p, \sigma_{12}^p) dx_3 \end{aligned} \quad (15-b)$$

$$(Q_1, Q_2) = \kappa^2 [\int_{-h}^h (\sigma_{13}^h, \sigma_{23}^h) dx_3 + 2 \int_h^H (\sigma_{13}^p, \sigma_{23}^p) dx_3] \quad (15-c)$$

براساس روابط جابجایی (3) و توزیع تنش (5) و (7)، ممان‌های خمشی، ممان‌های پیچشی و نیروهای برشی بر حسب w, v, ψ_1, ψ_2 به صورت زیر بدست می‌آید:

در معادلات بالا ∇^2 عملگر لاپلاس است، که به شکل زیر می‌باشد:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (20)$$

برای ارتعاشات آزاد فرض می‌کنیم که توابع w , ψ_1 , ψ_2 و $e^{i\omega t}$ به طور هارمونیک نسبت به زمان به صورت تابعی از تغییر می‌کند.

معادله ماقسول به شکل رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$\int_h^H \left(\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} \right) dx_3 = 0 \quad (21)$$

با جایگذاری بردار جابجایی‌های الکتریکی از معادله (۹) در معادله ماقسول خواهیم داشت:

$$(e_{15} + e_{31})h_p(\psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + e_{15}h_p\nabla^2 w - \frac{2h_p}{\pi}E_{11}\nabla^2\varphi + \frac{2\pi}{h_p}E_{33}\varphi = 0 \quad (22)$$

۶-۲- روند حل دقیق برای جابجایی عرضی (w)

به منظور حل شش معادله دیفرانسیل حرکت، توابع کمکی و پتانسیل f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 و g_1, g_2 معرفی شده است [۹]:

$$f_1 = \frac{A}{2}(1-\nu)u + \frac{B}{2}(1-\nu)\psi_1 \quad (a-23)$$

$$f_2 = \frac{A}{2}(1-\nu)v + \frac{B}{2}(1-\nu)\psi_2 \quad (b-23)$$

$$f_3 = \frac{B}{2}(1-\nu)u + \frac{D}{2}(1-\nu)\psi_1 \quad (c-23)$$

$$f_4 = \frac{B}{2}(1-\nu)v + \frac{D}{2}(1-\nu)\psi_2 \quad (d-23)$$

$$g_1 = f_{1,1} + f_{2,2} \quad (a-24)$$

$$g_2 = f_{3,1} + f_{4,2} \quad (b-24)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= 2h_p \\ P_2 &= (2hh_p + h_p^2) \\ P_3 &= \frac{2}{3}(3h^2h_p + 3hh_p^2 + h_p^3) \end{aligned} \quad (18)$$

حال روابط (۱۶) در (۱۳) جایگذاری می‌شود:

$$\begin{aligned} &[\frac{A}{2}(1-\nu) + \frac{P_1}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 u + [\frac{B}{2}(1-\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 \psi_1 \\ &+ [\frac{A}{2}(1+\nu) + \frac{P_1}{2}(C_{11} + C_{12})](u_{,1} + v_{,2})_{,1} + \\ &[\frac{B}{2}(1+\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} + C_{12})](\psi_{1,1} + \psi_{2,2})_{,1} = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\psi}_1 \end{aligned} \quad (a-19)$$

$$\begin{aligned} &[\frac{A}{2}(1-\nu) + \frac{P_1}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 v + [\frac{B}{2}(1-\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 \psi_2 \\ &+ [\frac{A}{2}(1+\nu) + \frac{P_1}{2}(C_{11} + C_{12})](u_{,1} + v_{,2})_{,2} \\ &[\frac{B}{2}(1+\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} + C_{12})](\psi_{1,1} + \psi_{2,2})_{,2} = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\psi}_2 \end{aligned} \quad (b-19)$$

$$\begin{aligned} &[\frac{B}{2}(1-\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 u + [\frac{D}{2}(1-\nu) + \frac{P_3}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 \psi_1 \\ &+ [\frac{B}{2}(1+\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} + C_{12})](u_{,1} + v_{,2})_{,1} \\ &+ [\frac{D}{2}(1+\nu) + \frac{P_3}{2}(C_{11} + C_{12})](\psi_{1,1} + \psi_{2,2})_{,1} \\ &- \kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A + P_1C_{55}](\psi_1 + w_{,1}) - 4(e_{31} + e_{15})\frac{h_1}{\pi}\varphi_{,1} = I_2\ddot{u} + I_3\ddot{\psi}_1 \end{aligned} \quad (c-19)$$

$$\begin{aligned} &[\frac{B}{2}(1-\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 v + [\frac{D}{2}(1-\nu) + \frac{P_3}{2}(C_{11} - C_{12})]\nabla^2 \psi_2 \\ &+ [\frac{B}{2}(1+\nu) + \frac{P_2}{2}(C_{11} + C_{12})](u_{,1} + v_{,2})_{,2} \\ &+ [\frac{D}{2}(1+\nu) + \frac{P_3}{2}(C_{11} + C_{12})](\psi_{1,1} + \psi_{2,2})_{,2} \\ &- \kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A + P_1C_{55}](\psi_2 + w_{,2}) - 4(e_{31} + e_{15})\frac{h_1}{\pi}\varphi_{,2} = I_2\ddot{v} + I_3\ddot{\psi}_2 \end{aligned} \quad (d-19)$$

$$\kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A + P_1C_{55}](\nabla^2 w + \psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + 4e_{15}\frac{h_1}{\pi}\nabla^2\varphi = I_1\ddot{w} \quad (e-19)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (B_{11} + B_{13}) \\ B_2 &= (B_{12} + B_{14}) \\ B_3 &= (B_{31} + B_{33}) \\ B_4 &= (B_{32} + B_{34}) \end{aligned} \quad (29)$$

با انجام مراحل ۱ و ۲ شش معادله به چهار معادله کاهاش می‌یابد و فقط لازم است که معادلات (۲۷) و (۲۸) و (e-۲۵) و (۲۶) را به نحوی ترکیب کرده و معادله مورد نظر را بیابیم.

۳. معادلات (e-۲۵) و (۲۶) را بهطور همزمان حل می‌کنیم و $\nabla^2\varphi, \varphi, \nabla^2w, w$ را برحسب g_1, g_2 بهدست می‌آوریم.
۴. g_2, g_1 بهدست آمده در مرحله ۳ را در معادلات (۲۷) و (۲۸) جایگذاری کرده و با حذف φ بین این دو معادله، سرانجام بعد از انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی یک معادله دیفرانسیل جزئی^۱ مرتبه هشت برحسب w با ضرایب ثابت حاصل می‌شود:

$$\nabla^8w + a_1\nabla^6w + a_2\nabla^4w + a_3\nabla^2w + a_4 = 0 \quad (30)$$

که ضرایب ثابت a_i ($i = 1-4$) در ضمیمه B آورده شده است.

معادله (۲۲) را می‌توان بهصورت زیر حل نمود:

$$w = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \quad (31)$$

که توابع پتانسیل W_i ($i = 1-4$) بهشكل زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla^2W_1 + \alpha_1^2W_1 = 0 \quad (a-32)$$

$$\nabla^2W_2 + \alpha_2^2W_2 = 0 \quad (b-32)$$

$$\nabla^2W_3 + \alpha_3^2W_3 = 0 \quad (c-32)$$

$$\nabla^2W_4 + \alpha_4^2W_4 = 0 \quad (d-32)$$

و α_i^2 ($i = 1-4$) ریشه‌های معادله مرتبه چهارم زیر هستند:

$$z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0 \quad (33)$$

که بهصورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{-a_1}{4} - \frac{1}{2}m_2 - \frac{1}{2} \\ &\times \sqrt{\frac{a_1^2}{2} - \frac{4a_2}{3} - \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} - \frac{m_1}{32^{1/3}} - (-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3)/(4m_2)} \end{aligned} \quad (a-34)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳a) تا (۲۳d) و (۲۴a) و (۲۴b) در (۱۹a) تا (۲۲) معادلات حرکت و ماکسول بهشكل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$B_{11}\nabla^2f_1 + B_{12}\nabla^2f_3 + B_{13}g_{1,1} + B_{14}g_{2,1} = B_{15}f_1 + B_{16}f_3 \quad (a-25)$$

$$B_{11}\nabla^2f_2 + B_{12}\nabla^2f_4 + B_{13}g_{1,2} + B_{14}g_{2,2} = B_{15}f_2 + B_{16}f_4 \quad (b-25)$$

$$\begin{aligned} B_{31}\nabla^2f_1 + B_{32}\nabla^2f_3 + B_{33}g_{1,1} + B_{34}g_{2,1} - B_{35}\varphi_{,1} = \\ B_{36}f_1 + B_{37}f_3 + B_{38}w_{,1} \end{aligned} \quad (c-25)$$

$$\begin{aligned} B_{31}\nabla^2f_2 + B_{32}\nabla^2f_4 + B_{33}g_{1,2} + B_{34}g_{2,2} - B_{35}\varphi_{,2} = \\ B_{36}f_2 + B_{37}f_4 + B_{38}w_{,2} \end{aligned} \quad (d-25)$$

$$-B_{51}g_1 + B_{52}g_2 - B_{53}\nabla^2\varphi = B_{54}w + B_{55}\nabla^2w \quad (e-25)$$

$$B_{61}g_1 - B_{62}g_2 - B_{63}\nabla^2\varphi + B_{64}\varphi = -B_{63}\nabla^2w \quad (26)$$

ضرایب B_{ij} در ضمیمه A آورده شده است.
بهمنظور یافتن حل دقیق باید ابتدا با ترکیب شش معادله (a-۲۵) تا (e-۲۵) و (۲۶) یک معادله برحسب w بهدست آوریم که برای یافتن این معادله باید مراحل زیر را اجرا کنیم:
۱. از معادله (a-۲۵) نسبت به x_1 و از معادله (b-۲۵) نسبت به x_2 مشتق می‌گیریم و دو معادله حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$B_1\nabla^2g_1 + B_2\nabla^2g_2 = B_{15}g_1 + B_{16}g_2 \quad (27)$$

۲. بهطور مشابه، از معادله (c-۲۵) نسبت به x_1 و از معادله (d-۲۵) نسبت به x_2 مشتق می‌گیریم و بهدست می‌آوریم:

$$B_3\nabla^2g_1 + B_4\nabla^2g_2 - B_{35}\nabla^2\varphi = B_{36}g_1 + B_{37}g_2 + B_{38}\nabla^2w \quad (28)$$

برای ساده‌سازی فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g_1 = n_1 \nabla^6 w + n_2 \nabla^4 w + n_3 \nabla^2 w + n_4 w \quad (a-37)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{-a_1}{4} - \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} \\ \times \sqrt{\frac{a_1^2}{2} - \frac{4a_2}{3} - \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} - \frac{m_1}{32^{1/3}} - (-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3)/(4m_2)} \quad (b-34)$$

$$g_2 = n_5 \nabla^6 w + n_6 \nabla^4 w + n_7 \nabla^2 w + n_8 w \quad (b-37)$$

۸. در این مرحله، (۳۲a) تا (۳۲d) در (۳۶) و (۳۷a) و (۳۷b) جایگذاری می کنیم:

$$\varphi = e_1 W_1 + e_2 W_2 + e_3 W_3 + e_4 W_4 \quad (38)$$

$$g_1 = d_1 W_1 + d_2 W_2 + d_3 W_3 + d_4 W_4 \quad (a-39)$$

$$g_2 = d_5 W_1 + d_6 W_2 + d_7 W_3 + d_8 W_4 \quad (b-39)$$

به دلیل حجم زیاد ضرایب n_i, d_i ($i=1-8$) و b_i, e_i ($i=1-4$) عدم امکان ارائه آنها در مقاله، روند به دست آوردن این ضرایب در بالا به طور کامل شرح داده شد. با انجام مراحل بیان شده به سادگی می توان این ضرایب را به دست آورد.

۷-۲- روند حل دقیق برای ψ_2, ψ_1, v, u
با جایگذاری معادلات (۳۲a)، (۳۲d)، (۳۸)، (۳۹a) و (۳۹b) در (۲۵a) تا (۲۵d) می توان توابع f_1, f_2, f_3 و f_4 را به صورت زیر بیان کرد:

$$f_1 = C_5 W_{1,1} + C_6 W_{2,1} + C_7 W_{3,1} + C_8 W_{4,1} + C_9 W_{5,2} + C_{10} W_{6,2} \quad (a-40)$$

$$f_2 = C_5 W_{1,2} + C_6 W_{2,2} + C_7 W_{3,2} + C_8 W_{4,2} - C_9 W_{5,1} - C_{10} W_{6,1} \quad (b-40)$$

$$f_3 = C_1 W_{1,1} + C_2 W_{2,1} + C_3 W_{3,1} + C_4 W_{4,1} + W_{5,2} + W_{6,2} \quad (c-40)$$

$$f_4 = C_1 W_{1,2} + C_2 W_{2,2} + C_3 W_{3,2} + C_4 W_{4,2} - W_{5,1} - W_{6,1} \quad (d-40)$$

$$\alpha_3^2 = \frac{-a_1}{4} + \frac{1}{2} m_2 - \frac{1}{2} \\ \times \sqrt{\frac{a_1^2}{2} - \frac{4a_2}{3} - \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} - \frac{m_1}{32^{1/3}} + (-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3)/(4m_2)} \quad (c-34)$$

$$\alpha_4^2 = \frac{-a_1}{4} + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} \\ \times \sqrt{\frac{a_1^2}{2} - \frac{4a_2}{3} - \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} - \frac{m_1}{32^{1/3}} + (-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3)/(4m_2)} \quad (d-34)$$

و m_2, m_1 در روابط بالا به شکل زیر می باشند:

$$m_1 = (2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27(a_3^2 + a_4a_1^2) - 72a_2a_4) \\ + \sqrt{-4(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)^3 + (2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27(a_3^2 + a_4a_1^2) - 72a_2a_4)^2}^{\frac{1}{3}} \quad (a-35)$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - \frac{2a_2}{3} + \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} + \frac{m_1}{32^{1/3}}} \quad (b-35)$$

حال نوبت به یافتن توابع g_1, g_2, φ بر حسب w می رسد.
۵. به این منظور با جایگذاری g_2, g_1 از مرحله ۳ در معادلات (۲۷) و (۲۸) دو معادله بر حسب $\nabla^4\varphi, \nabla^2\varphi, \varphi$ و ∇^4w, ∇^2w, w حاصل می شود که با حل همزمان این دو معادله و حذف $\nabla^4\varphi$ بین آنها معادله ای به دست می آید که $\nabla^2\varphi$ را بر حسب ∇^4w, ∇^2w و φ ارائه می کند.

۶. $\nabla^2\varphi$ حاصله از مرحله ۵ را در یکی از معادلات (۲۷) یا (۲۸) قرار داده و با انجام یک سری عملیات ریاضی تابع پتانسیل الکتریکی φ را به دست آوردهیم:

$$\varphi = b_1 \nabla^6 w + b_2 \nabla^4 w + b_3 \nabla^2 w + b_4 w \quad (36)$$

۷. $\nabla^2\varphi$ و φ به دست آمده از مرحله ۵ و ۶ را در g_2, g_1 که در مرحله ۳ داشتیم قرار می دهیم و بعد از ساده سازی خواهیم داشت:

۸-۲- روش جداسازی متغیرها

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، می‌توان یک دسته حل برای معادلات (a-۳۲) تا (d-۳۲)، (a-۴۱)، (b-۴۱) و (c-۴۱) به صورت زیر نوشت:

$$W_1 = [A_1 \operatorname{Sinh}(\mu_1 x_2) + A_2 \operatorname{Cosh}(\mu_1 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_1 x_1) + [B_1 \operatorname{Sinh}(\mu_1 x_2) + B_2 \operatorname{Cosh}(\mu_1 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_1 x_1) \quad (\text{a-۴۶})$$

$$W_2 = [A_3 \operatorname{Sinh}(\mu_2 x_2) + A_4 \operatorname{Cosh}(\mu_2 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_2 x_1) + [B_3 \operatorname{Sinh}(\mu_2 x_2) + B_4 \operatorname{Cosh}(\mu_2 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_2 x_1) \quad (\text{b-۴۶})$$

$$W_3 = [A_5 \operatorname{Sin}(\mu_3 x_2) + A_6 \operatorname{Cos}(\mu_3 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_3 x_1) + [B_5 \operatorname{Sin}(\mu_3 x_2) + B_6 \operatorname{Cos}(\mu_3 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_3 x_1) \quad (\text{c-۴۶})$$

$$W_4 = [A_7 \operatorname{Sinh}(\mu_4 x_2) + A_8 \operatorname{Cosh}(\mu_4 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_4 x_1) + [B_7 \operatorname{Sinh}(\mu_4 x_2) + B_8 \operatorname{Cosh}(\mu_4 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_4 x_1) \quad (\text{d-۴۶})$$

$$W_5 = [A_9 \operatorname{Sinh}(\mu_5 x_2) + A_{10} \operatorname{Cosh}(\mu_5 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_5 x_1) + [B_9 \operatorname{Sinh}(\mu_5 x_2) + B_{10} \operatorname{Cosh}(\mu_5 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_5 x_1) \quad (\text{e-۴۶})$$

$$W_6 = [A_{11} \operatorname{Sinh}(\mu_6 x_2) + A_{12} \operatorname{Cosh}(\mu_6 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_6 x_1) + [B_{11} \operatorname{Sinh}(\mu_6 x_2) + B_{12} \operatorname{Cosh}(\mu_6 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_6 x_1) \quad (\text{f-۴۶})$$

$$\alpha_1^2 = \mu_1^2 + \xi_1^2, \quad \xi_1^2 > 0, \quad \mu_1^2 < 0 \quad (\text{a-۴۷})$$

$$\alpha_2^2 = \mu_2^2 + \xi_2^2, \quad \xi_2^2 > 0, \quad \mu_2^2 < 0 \quad (\text{b-۴۷})$$

$$\alpha_3^2 = \mu_3^2 + \xi_3^2, \quad \xi_3^2 > 0, \quad \mu_3^2 < 0 \quad (\text{c-۴۷})$$

$$\alpha_4^2 = \mu_4^2 + \xi_4^2, \quad \xi_4^2 > 0, \quad \mu_4^2 < 0 \quad (\text{d-۴۷})$$

$$\alpha_5^2 = \mu_5^2 + \xi_5^2, \quad \xi_5^2 > 0, \quad \mu_5^2 < 0 \quad (\text{e-۴۷})$$

$$\alpha_6^2 = \mu_6^2 + \xi_6^2, \quad \xi_6^2 > 0, \quad \mu_6^2 < 0 \quad (\text{f-۴۷})$$

تابع W_5 و W_6 به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla^2 W_5 + \alpha_5^2 W_5 = 0 \quad (\text{a-۴۱})$$

$$\nabla^2 W_6 + \alpha_6^2 W_6 = 0 \quad (\text{b-۴۱})$$

ریشه‌های معادله درجه دو زیر هستند:

$$S^2 + \gamma_1 S + \gamma_2 = 0 \quad (\text{۴۲})$$

که ضرایب γ_1 و γ_2 به شکل زیر می‌باشند:

$$\gamma_1 = \frac{r_2 B_{12} - r_1 B_{16} - r_3 B_{11}}{r_1 B_{12}} \quad (\text{a-۴۳})$$

$$\gamma_2 = \frac{-r_2 B_{16} + r_3 B_{15}}{r_1 B_{12}} \quad (\text{b-۴۳})$$

و ضرایب C_i ($i=1-3$) و r_i ($i=1-10$) در ضمیمه آورده شده‌اند.

در نهایت، حل دقیق میدان جابجایی ورق مطابق تئوری میندلین با یافتن $v, u, \psi_1, \psi_2, \psi$ با استفاده از معادلات (a-۲۳) تا (d-۲۳) و جایگزینی معادلات (a-۴۰) تا (d-۴۰) در معادلات زیر به دست می‌آید:

$$u = \xi(f_3 - \frac{D}{B} f_1) \quad (\text{a-۴۴})$$

$$v = \xi(f_4 - \frac{D}{B} f_2) \quad (\text{b-۴۴})$$

$$\psi_1 = \xi(f_1 - \frac{A}{B} f_3) \quad (\text{c-۴۴})$$

$$\psi_2 = \xi(f_2 - \frac{A}{B} f_4) \quad (\text{d-۴۴})$$

که ضریب ξ به صورت زیر می‌باشد:

$$\xi = \frac{2}{B(1-\nu)(1-\frac{AD}{B^2})} \quad (\text{۴۵})$$

$$W_6 = [A_{11} \operatorname{Sinh}(\mu_6 x_2) + A_{12} \operatorname{Cosh}(\mu_6 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_6 x_1) \quad (f-49)$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

با اعمال شرایط مرزی مناسب در امتداد لبه‌های $x_2=0$ و $x_2=b$ می‌توان معادله مشخصه فرکانسی ورق را به دست آورد. این معادله برای مسئله حاضر به صورت یک دترمینان 12×12 می‌باشد که تماماً بر حسب ω می‌باشد. با مساوی صفر قرار دادن این دترمینان برای هر m می‌توان فرکانس‌های طبیعی ورق را به دست آورد.

۳- بحث و بررسی نتایج عددی

نتایج عددی برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هوشمند FG نسبتاً ضخیم مستطیلی برای ضخامت‌ها و شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. به دلیل وضوح و سادگی روند حل دقیق پاسخ‌بسته ارائه شده، فرکانس‌های دقیق ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی FG لوی-گونه با ترکیبات مختلف شرایط مرزی آزاد (F)، ساده (S) و گیردار (C) بسادگی قابل محاسبه می‌باشد. در این بخش نتایج برای مقادیر گوناگون اندیس گرadiان و افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک آورده شده‌اند. خواص مواد در جدول ۱ نشان داده شده است. این جدول خصوصیات PZT4 برای پیزوالکتریک و $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ و Al/ZrO_2 را برای FGM نشان می‌دهد. طبق بررسی‌های انجام شده توسط چی و چانگ^۲، مشاهده شد که تغییرات ضریب پوآسون تاثیر اندکی روی خواص مکانیکی ورق FG دارد، بنابراین می‌توان آن را ثابت فرض کرد. در این مقاله برای تمامی محاسبات، ضریب تصحیح برش K^2 و ضریب پوآسون V به ترتیب $5/6$ و $0/3$ در نظر گرفته شده‌اند. به منظور تسهیل در ساختار نوشتمن، شرایط مرزی به صورت مختصر نوشته می‌شوند. به طور مثال نماد SFSC به ترتیب معرف شرایط مرزی ساده، آزاد، ساده، گیردار در لبه‌های $x_1=a$ و $x_2=b$ می‌باشد.

۹-۲- شرایط مرزی در تئوری میندلین

در این مطالعه، از سه شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد در لبه‌های ورق استفاده شده است. بر مبنای تئوری میندلین، شرایط مرزی برای یک لبه‌ی موازی با محور x_1 یعنی لبه‌های $x_2=0$ و $x_2=b$ می‌تواند به صورتی که در ادامه بیان شده برقرار باشد:

- شرط مرزی ساده

$$u = 0 \quad N_2 = 0 \quad w = 0 \quad \psi_1 = 0 \quad M_2 = 0 \quad (a-48)$$

- شرط مرزی گیردار

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad \psi_1 = 0 \quad \psi_2 = 0 \quad (b-48)$$

- شرط مرزی آزاد

$$N_{12} = 0 \quad N_2 = 0 \quad M_{12} = 0 \quad M_2 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad (c-48)$$

با عوض کردن اندیس ۱ و ۲ در معادلات (a-48) تا (c-48)، شرایط مرزی برای لبه‌های $x_1=0$ و $x_1=a$ به دست می‌آید.

۱۰-۲- حل لوی-گونه^۱

حل لوی-گونه به این صورت است که دو لبه‌ی مقابل دارای شرط مرزی ساده هستند و دو لبه‌ی دیگر ورق می‌توانند هر شرط مرزی داشته باشند.

مطابق شکل (۱)، شرایط مرزی ورق در $x_1=0$ و $x_1=a$ ساده فرض شده‌اند، بنابراین معادلات (a-46) تا (f-46) به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$W_1 = [A_1 \operatorname{Sinh}(\mu_1 x_2) + A_2 \operatorname{Cosh}(\mu_1 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_1 x_1) \quad (a-49)$$

$$W_2 = [A_3 \operatorname{Sinh}(\mu_2 x_2) + A_4 \operatorname{Cosh}(\mu_2 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_2 x_1) \quad (b-49)$$

$$W_3 = [A_5 \operatorname{Sin}(\mu_3 x_2) + A_6 \operatorname{Cos}(\mu_3 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_3 x_1) \quad (c-49)$$

$$W_4 = [A_7 \operatorname{Sinh}(\mu_4 x_2) + A_8 \operatorname{Cosh}(\mu_4 x_2)] \operatorname{Sin}(\xi_4 x_1) \quad (d-49)$$

$$W_5 = [A_9 \operatorname{Sinh}(\mu_5 x_2) + A_{10} \operatorname{Cosh}(\mu_5 x_2)] \operatorname{Cos}(\xi_5 x_1) \quad (e-49)$$

۲۱ به معنی دو نیم موج در راستای x_1 ($m=2$) و یک نیم موج در راستای x_2 ($n=1$) می‌باشد.

۲-۱-۳- ورق FGM با لایه پیزوالکتریک

در این بخش، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی FG با لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است. در جداول ۳ و ۴، به منظور حصول اطمینان از درستی حل دقیق پاسخ-بسته حاضر مقایسه‌ای با روش المان محدود صورت پذیرفته و نتایج عددی برای شرایط مرزی SSSS و SFSC ورق مربعی FG با لایه $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ($a=b=1$) با لایه پیزوالکتریک PZT4 در حالت $g=1$ آورده شده است. برای بررسی ارتعاشات آزاد ۳D از نرم افزار ABAQUS استفاده کردیم. برای یافتن تعداد المان‌های مورد نیاز، همگرایی پاسخ را مورد توجه قرار دادیم. به این ترتیب که افزایش تعداد المان‌ها تا جایی ادامه داده شد که پاسخ به یک همگرایی برسد.

سه ضخامت مختلف برای ورق و لایه‌های پیزوالکتریک به‌طوری که نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق FG مقدار ثابت $h_p/2h = 1/10$ در نظر گرفته شده است.

۱-۳- نتایج مقایسه‌ای

۱-۱-۳- ورق FGM بدون لایه پیزوالکتریک

به منظور بررسی دقت حل دقیق پاسخ-بسته حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده توسط حسینی هاشمی و همکاران [۸] بر مبنای روش میندلین، برای ورق FG مقایسه شده است. با صفر قرار دادن ضخامت لایه پیزوالکتریک، فرکانس‌های مربوط به ورق FG بدست آمده است. از انجام مقایسه‌ی نتایج حاصله از حل FG حاضر با نتایج مربوط به ورق FG مشاهده می‌شود که توافق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد، به نحوی که با دقت چهار رقم اعشار درصد اختلاف نتایج صفر می‌باشد.

دو فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ($a=b=1$) ساخته شده از Al/ZrO_2 ، در سه ضخامت مختلف $0.05/0.05/0.05$ (متناظر با ورق نازک)، $0.1/0.1/0.1$ و $0.2/0.2/0.2$ (متناظر با ورق نسبتاً ضخیم) و هفت مقدار اندازه گردایانی برای شرایط مرزی SFSC در جدول ۲ آورده شده است. لازم به ذکر است که در مقاله یاد شده، پارامتر $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}/h$ پارامتر فرکانسی نامیده شده است.

شکل پودهای متناظر m و n که به ترتیب به تعداد نیم موج‌ها در راستای x_1 و x_2 اشاره می‌کنند، برای هر پارامتر فرکانسی β در جدول ۲ ارائه شده است. برای مثال بالابویس

جدول ۱ خواص مواد

| پیزوالکتریک | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|----------|----------|--------------------|----------|---------------------------------------|-----------------------------------|----------|--------------------------|--------------------|------------|---------------------------|
| | مدول الاستیسیته (GPa) | | | | | ثوابت پیزوالکتریک (C/m ²) | | | ثوابت دی الکتریک (nV/Vm) | | | چگالی Kg/m ³) |
| PZT4 | C_{11} | C_{12} | C_{13} | C_{33} | C_{55} | e_{15} | e_{31} | e_{33} | Ξ_{11} | Ξ_{22} | Ξ_{33} | ρ |
| | ۱۳۲ | ۷۱ | ۷۳ | ۱۱۵ | ۲۶ | ۱۰/۵ | -۴/۱ | ۱۴/۱ | ۷/۱۲۴ | ۷/۱۲۴ | ۵/۸۴۱ | ۷۵۰۰ |
| FGM | | | | | | | | | | | | |
| $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ | $\rho_c (\text{Kg} / \text{m}^3)$ | | | $E_c (\text{Gpa})$ | | | $\rho_m (\text{Kg} / \text{m}^3)$ | | | $E_m (\text{Gpa})$ | | |
| | ۳۸۰۰ | | | ۳۸۰ | | | ۲۷۰۲ | | | ۷۰ | | |
| $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ | ۵۷۰۰ | | | ۲۰۰ | | | ۲۷۰۲ | | | ۷۰ | | |

جدول ۲ مقایسه پارامترهای فرکانسی برای ورق مربعی Al/Al_2O_3 , شرط مرزی SFSC با نتایج مقاله [۸]

| | | | | | | اندیس گرادیانی (g) | شماره مود | | ضخامت ورق (h) |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|--------------|-----------------|---------------------|
| ۱۰ | ۸ | ۵ | ۲ | ۱ | ۰.۵ | ۰ | | | |
| ۳/۵۵۸۴ ^{۱۱} | ۳/۵۷۰۶ ^{۱۱} | ۳/۵۶۶۵ ^{۱۱} | ۳/۴۸۷۷ ^{۱۱} | ۳/۴۹۲۰ ^{۱۱} | ۳/۵۷۳۲ ^{۱۱} | ۳/۷۹۶۲ ^{۱۱} | β_1 | حل حاضر | ۰/۰۵ |
| ۳/۵۵۸۴ ^{۱۱} | ۳/۵۷۰۶ ^{۱۱} | ۳/۵۶۶۵ ^{۱۱} | ۳/۴۸۷۷ ^{۱۱} | ۳/۴۹۲۰ ^{۱۱} | ۳/۵۷۳۲ ^{۱۱} | ۳/۷۹۶۲ ^{۱۱} | β_1 | حسینی هاشمی [۸] | |
| ۹/۱۲۴۴ ^{۱۲} | ۹/۱۵۶۲ ^{۱۲} | ۹/۱۴۹۱ ^{۱۲} | ۸/۹۵۹۵ ^{۱۲} | ۸/۹۷۵۵ ^{۱۲} | ۹/۱۸۳۶ ^{۱۲} | ۹/۷۴۸۷ ^{۱۲} | β_2 | حل حاضر | |
| ۹/۱۲۴۴ ^{۱۲} | ۹/۱۵۶۲ ^{۱۲} | ۹/۱۴۹۱ ^{۱۲} | ۸/۹۵۹۵ ^{۱۲} | ۸/۹۷۵۵ ^{۱۲} | ۹/۱۸۳۶ ^{۱۲} | ۹/۷۴۸۷ ^{۱۲} | β_2 | حسینی هاشمی [۸] | |
| ۳/۴۶۶۴ ^{۱۱} | ۳/۴۷۸۶ ^{۱۱} | ۳/۴۷۶۶ ^{۱۱} | ۳/۴۰۷۴ ^{۱۱} | ۳/۴۱۴۶ ^{۱۱} | ۳/۴۹۳۶ ^{۱۱} | ۳/۷۰۶۸ ^{۱۱} | β_1 | حل حاضر | ۰/۱ |
| ۳/۴۶۶۴ ^{۱۱} | ۳/۴۷۸۶ ^{۱۱} | ۳/۴۷۶۶ ^{۱۱} | ۳/۴۰۷۴ ^{۱۱} | ۳/۴۱۴۶ ^{۱۱} | ۳/۴۹۳۶ ^{۱۱} | ۳/۷۰۶۸ ^{۱۱} | β_1 | حسینی هاشمی [۸] | |
| ۵/۵۶۵۱ ^{۱۲} | ۸/۵۹۶۴ ^{۱۲} | ۸/۶۰۱۸ ^{۱۲} | ۸/۴۶۷۰ ^{۱۲} | ۸/۵۰۰۶ ^{۱۲} | ۸/۶۹۵۳ ^{۱۲} | ۹/۲۰۲۱ ^{۱۲} | β_2 | حل حاضر | |
| ۵/۵۶۵۱ ^{۱۲} | ۸/۵۹۶۴ ^{۱۲} | ۸/۶۰۱۸ ^{۱۲} | ۸/۴۶۷۰ ^{۱۲} | ۸/۵۰۰۶ ^{۱۲} | ۸/۶۹۵۳ ^{۱۲} | ۹/۲۰۲۱ ^{۱۲} | β_2 | حسینی هاشمی [۸] | |
| ۳/۱۹۳۶ ^{۱۱} | ۳/۲۰۵۵ ^{۱۱} | ۳/۲۰۹۲ ^{۱۱} | ۳/۱۶۵۱ ^{۱۱} | ۳/۱۸۰۴ ^{۱۱} | ۳/۲۵۲۸ ^{۱۱} | ۳/۴۳۸۳ ^{۱۱} | β_1 | حل حاضر | ۰/۲ |
| ۳/۱۹۳۶ ^{۱۱} | ۳/۲۰۵۵ ^{۱۱} | ۳/۲۰۹۲ ^{۱۱} | ۳/۱۶۵۱ ^{۱۱} | ۳/۱۸۰۴ ^{۱۱} | ۳/۲۵۲۸ ^{۱۱} | ۳/۴۳۸۳ ^{۱۱} | β_1 | حسینی هاشمی [۸] | |
| ۷/۱۶۲۸ ^{۱۲} | ۷/۱۹۱۶ ^{۱۲} | ۷/۱۸۹۴ ^{۱۲} | ۷/۱۸۹۴ ^{۱۲} | ۷/۲۵۵۳ ^{۱۲} | ۷/۴۱۷۰ ^{۱۲} | ۷/۷۹۳۷ ^{۱۲} | β_2 | حل حاضر | |
| ۷/۱۶۲۸ ^{۱۲} | ۷/۱۹۱۶ ^{۱۲} | ۷/۱۸۹۴ ^{۱۲} | ۷/۱۸۹۴ ^{۱۲} | ۷/۲۵۵۳ ^{۱۲} | ۷/۴۱۷۰ ^{۱۲} | ۷/۷۹۳۷ ^{۱۲} | β_2 | حسینی هاشمی [۸] | |

می دهد که حل حاضر مودهای درون-صفحه ای را با دقت بسیار بالایی پیش بینی می کند. نتایج همچنین نشان می دهد که تعداد مودهای درون-صفحه ای در هشت فرکانس طبیعی اول با افزایش ضخامت ورق به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابند، که ناشی از این حقیقت است که انرژی خمشی ورق حساسیت بسیار بالایی نسبت به ضخامت دارد. مودهای خارج-صفحه ای نیز به طور مستقیم به انرژی خمشی ورق بستگی دارند. بنابراین تعداد مودهای خارج-صفحه ای با افزایش ضخامت ورق و افزایش تعداد مودهای درون-صفحه ای کاهش می یابد.

۳-۱-۳- مودهای درون-صفحه ای و خارج-صفحه ای
مودهای ارتعاشی ورق FG را می توان به دو دسته اصلی تقسیم نمود: ۱- مودهای خارج صفحه ای (عرضی) و مودهای درون-صفحه ای. برای مودهای درون-صفحه ای، مقدار جابجایی عرضی نسبت به جابجایی درون-صفحه ای u و v خیلی کوچکتر است.

مقادیر برجسته در جداول [۴، ۳] مودهای درون-صفحه ای را مشخص می کنند. درصد خطای داده شده در جداول مربوطه از رابطه زیر بدست آمده است:

$$\% \text{ Diff} = \frac{[(\text{FEM}) - (\text{Present method})]}{(\text{FEM})} \times 100$$

همانگونه که از جداول (۳) و (۴) مشاهده می شود سازگاری بسیار خوبی بین نتایج حل حاضر و روش المان محدود ۳D در فرکانس های بالا و پایین وجود دارد و اختلاف آن ها در بدترین حالت از ۲/۷۷ تجاوز نمی کند.

فرکانس های طبیعی با افزایش ضخامت ورق افزایش پیدا می کنند که این پدیده ناشی از افزایش صلبیت ورق می باشد. هنگامی که لبه های ورق مقیدتر باشند صلبیت سازه بالاتر می رود و در نتیجه مقادیر فرکانس های طبیعی سیستم افزایش می یابد. بنابراین شرط مرزی گیردار همواره فرکانس هایی بالاتر از سایر شرایط مرزی تولید می نماید. نتایج بدست آمده نشان

جدول ۳ هشت فرکانس طبیعی (برحسب هرتز) برای ورق SSSS مربعی Al/Al_2O_3 با لایه پیزوالکتریک PZT4 و اندیس گرادیانی $g=1$

| شماره مود | | | | | | | | | روش | |
|-----------|---------|---------|----------|----------|---------|---------|---------|-----------------|--------------|--|
| ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | | | |
| ۲۰۶۴/۸۹ | ۲۰۶۴/۸۹ | ۱۶۰۸/۹۶ | ۱۶۰۸/۹۶ | ۱۲۹۸/۶۱ | ۸۲۲/۸۲ | ۸۲۲/۸۲ | ۳۳۳/۸۴ | نتایج حاضر | $2h=+0.05$ | |
| ۲۰۸۹/۵ | ۲۰۸۹/۵ | ۱۶۲۸/۷ | ۱۶۲۸/۷ | ۱۳۱۳/۹ | ۸۳۲/۷۴ | ۸۳۲/۷۴ | ۳۳۳/۸۱ | روش المان محدود | $h_p=+0.005$ | |
| ۱/۱۸ | ۱/۱۸ | ۱/۲۱ | ۱/۲۱ | ۱/۱۶ | ۱/۱۹ | ۱/۱۹ | ۱/۱۸ | خطا٪ | | |
| ۲۸۷۵/۹۳ | ۲۸۷۵/۹۳ | ۲۳۶۳/۳۹ | ۲۲۰۷/۵۴ | ۲۲۰۷/۵۴ | ۱۵۴۳/۸۷ | ۱۵۴۳/۸۷ | ۶۴۹/۳۰ | نتایج حاضر | $2h=+0.1$ | |
| ۲۹۱۴/۰ | ۲۹۱۴/۰ | ۲۳۹۲/۶ | ۲۲۰۳/۵ | ۲۲۰۳/۵ | ۱۵۶۲/۶ | ۱۵۶۲/۶ | ۶۵۶/۹۰ | روش المان محدود | $h_p=+0.1$ | |
| ۱/۳۱ | ۱/۳۱ | ۱/۲۲ | -۰/۱۸ | -۰/۱۸ | ۱/۲۰ | ۱/۲۰ | ۱/۱۶ | خطا٪ | | |
| ۴۳۷۸/۱۹ | ۳۷۰۸/۵۶ | ۳۱۱۸/۶۱ | ۲۵۷۰/۰۵۸ | ۲۵۷۰/۰۵۸ | ۲۲۰۶/۵۶ | ۲۲۰۶/۵۶ | ۱۱۸۱/۶۹ | نتایج حاضر | $2h=+0.2$ | |
| ۴۳۰۲/۷ | ۳۷۷۴/۰ | ۳۰۸۵/۱ | ۲۶۱۰/۰ | ۲۶۱۰/۰ | ۲۱۹۳/۷ | ۲۱۹۳/۷ | ۱۱۹۶/۲ | روش المان محدود | $h_p=+0.2$ | |
| -۱/۷۵ | ۱/۷۳ | -۱/۰۹ | ۱/۵۱ | ۱/۵۱ | -۰/۵۹ | -۰/۵۹ | ۱/۲۱ | خطا٪ | | |

جدول ۴ هشت فرکانس طبیعی (برحسب هرتز) برای ورق SFSC مربعی Al/Al_2O_3 با لایه پیزوالکتریک PZT4 و اندیس گرادیانی $g=1$

| شماره مود | | | | | | | | | روش | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|-----------------|--------------|--|
| ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | | | |
| ۱۷۹۳/۳۱ | ۱۶۴۹/۰۲ | ۱۴۷۰/۲۶ | ۱۱۷۷/۸۹ | ۱۰۲۷/۳۵ | ۶۹۰/۱۰ | ۵۴۵/۵۲ | ۲۱۰/۹۰ | نتایج حاضر | $2h=+0.05$ | |
| ۱۸۲۳/۴ | ۱۶۷۵/۲ | ۱۴۹۶/۸ | ۱۱۹۴/۸ | ۱۰۴۶/۷ | ۷۰۴/۲۵ | ۵۵۶/۱۰ | ۲۱۶/۹۱ | روش المان محدود | $h_p=+0.005$ | |
| ۱/۶۵ | ۱/۵۶ | ۱/۷۶ | ۱/۴۲ | ۱/۸۵ | ۲/۰۰ | ۱/۹۰ | ۲/۷۷ | خطا٪ | | |
| ۲۸۸۲/۴۱ | ۲۶۴۰/۳۲ | ۲۳۶۱/۰۵ | ۲۱۱۶/۶ | ۱۸۷۸/۰۲ | ۱۳۰۱/۳۷ | ۱۰۲۶/۰۹ | ۴۱۱/۱۴ | نتایج حاضر | $2h=+0.1$ | |
| ۲۹۲۵/۸ | ۲۶۸۶/۰ | ۲۳۴۸/۴ | ۲۱۲۹/۲ | ۱۹۱۰/۰ | ۱۲۲۷/۰ | ۱۰۴۳/۷ | ۴۲۲/۶۷ | روش المان محدود | $h_p=+0.1$ | |
| ۱/۴۸ | ۱/۷۰ | -۰/۵۴ | ۱/۰۶ | ۱/۶۷ | ۱/۹۳ | ۱/۶۹ | ۲/۷۳ | خطا٪ | | |
| ۴۰۸۱/۷۷ | ۳۶۶۲/۹۲ | ۳۲۲۴/۳۳ | ۲۹۸۱/۵۶ | ۲۳۶۰/۵۶ | ۲۱۹۷/۳۹ | ۱۷۲۱/۸۵ | ۷۵۹/۰۷ | نتایج حاضر | $2h=+0.2$ | |
| ۴۱۱۲/۷ | ۳۵۹۰/۹ | ۳۲۲۵/۴ | ۳۰۱۷/۲ | ۲۳۳۶/۵ | ۲۲۳۶/۲ | ۱۷۳۸/۹ | ۷۷۸/۲۸ | روش المان محدود | $h_p=+0.2$ | |
| ۰/۷۵ | -۲/۰۰ | ۰/۶۲ | ۱/۱۸ | -۱/۰۳ | ۱/۷۴ | ۰/۹۸ | ۲/۴۷ | خطا٪ | | |

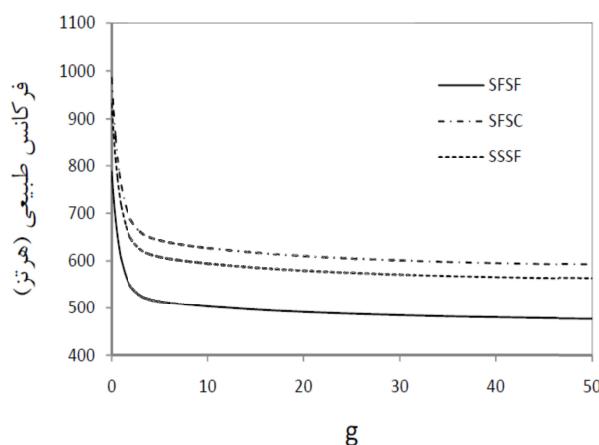
FG با دو لایه پیزوالکتریک، در شش شرط مرزی ممکن برای حل لوی-گونه را نشان می‌دهد. در این بررسی جنس ورق FG با اندیس گرادیان $g=1$ و ضخامت $2h=0.2$ و جنس ورق پیزوالکتریک PZT4 و ضخامت آن $h_p=0.02$ در نظرگرفته شده است.

رونده کاهش فرکانس‌ها با افزایش اندیس گرادیان به خوبی در این شکل مشخص است، بهنحوی که با افزایش اندیس گرادیان شبیب نمودار به سمت صفر میل می‌نماید. این میزان کاهش در ابتدا دارای شبیب نسبتاً تنیدی می‌باشد و هنگامی که این شاخص بزرگتر می‌گردد، این نرخ کاهش کمتر می‌شود. چنین رفتاری به دلیل تاثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی است.

یک اختلاف اساسی بین مودهای درون-صفحه‌ای ورق ایزوتropیک و ورق FG وجود دارد. وقتی یک ورق ایزوتropیک دارای مود درون-صفحه‌ای باشد، جابجایی عرضی وجود ندارد و ورق فقط دارای حرکت درون-صفحه‌ای می‌باشد. اما به دلیل وجود وابستگی بین ارتعاشات خارج-صفحه‌ای و درون-صفحه‌ای در ورق FG، مودهای درون-صفحه‌ای دارای هر دو نوع حرکت هستند در حالیکه ارتعاشات درون-صفحه‌ای غالب است.

۴-۱-۳- تاثیر اندیس گرادیان g روی فرکانس‌های طبیعی شکل (۲) تغییرات فرکانس‌های طبیعی اساسی (برحسب هرتز) در مقابل اندیس گرادیان g برای یک ورق مربعی ($a=b=1$)

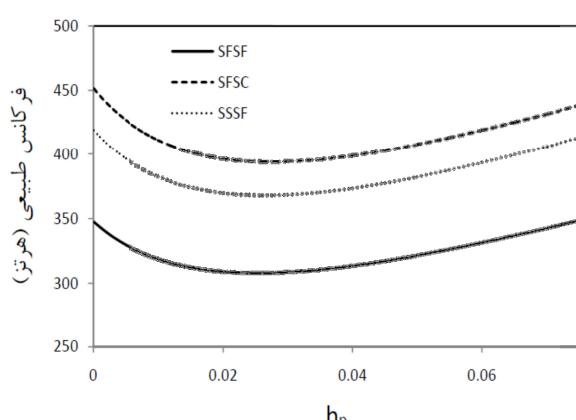
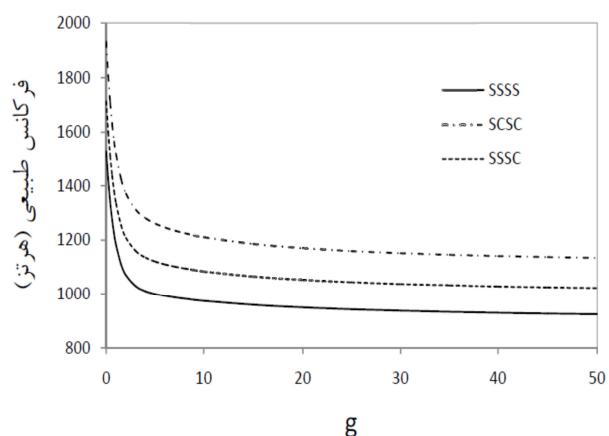
محدوده‌ی ورق میندلین یعنی $25/0$ تجاوز نکند. به دلیل این که با افزایش ضخامت پیزوالکتریک صلبیت سازه افزایش می‌یابد، انتظار می‌رود که فرکانس‌ها نیز افزایش یابند؛ اما همانگونه که مشاهده می‌شود، در ابتدا با افزایش ضخامت پیزوالکتریک فرکانس‌ها کاهش می‌یابند، این پدیده به این دلیل است که در این مودها اثر پیزوالکتریسیته در کاهش فرکانس‌ها بر اثر افزایش صلبیت خمسی غلبه می‌نماید و در نهایت موجب کاهش فرکانس می‌گردد.



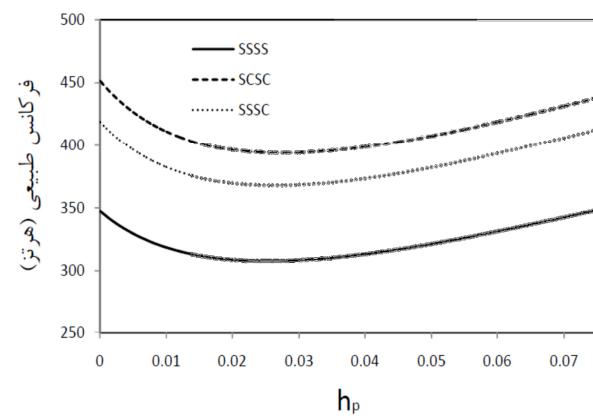
شکل ۲ تاثیر اندیس گردیان بر فرکانس‌های (برحسب هرتز) طبیعی اساسی ورق مربعی FG با لایه پیزوالکتریک PZT4/Al/Al₂O₃ ($a=b=1$) در شرایط مرزی لوی-گونه در حالتی که $h_p=0/2$ و $2h=0/1$ دارد.

۳-۵-۱-۳- تاثیر ضخامت لایه پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی

در شکل (۳) تغییرات فرکانس‌های طبیعی اساسی (برحسب هرتز) در مقابل افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک برای ورق مربعی مشابه با خصوصیات ورق بیان شده در شکل (۲) نشان داده شده است. ضخامت ورق FG، $1/2h=0/1$ در نظر گرفته شده است و ضخامت لایه پیزوالکتریک از $0/075$ تا $0/75$ افزایش داده شده است، به طوری که ضخامت کل از بیشترین حد مجاز در



شکل ۳ تاثیر افزایش ضخامت پیزوالکتریک به ورق FG زمینه بر فرکانس‌های (برحسب هرتز) طبیعی اساسی ورق مربعی FG ($a=b=1$) در شرایط مرزی لوی-گونه در حالتی که $h_p=0/1$ و $2h=0/1$ دارد.



شکل ۴ تاثیر افزایش ضخامت پیزوالکتریک با لایه پیزوالکتریک PZT4/Al/Al₂O₃ در شرایط مرزی لوی-گونه در حالتی که $h_p=0/075$ و $2h=0/1$ دارد.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله حل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی FG با لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین SSSS-SCSC-SFSF-(آن، با شرایط مرزی لوی-گونه (SCSF-SSSF-SSSC میندلین ارائه گردید. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شد. معادله ماکسول با استفاده از تابع توزیع پتانسیل الکتریکی سینوسی در امتداد ضخامت لایه پیزوالکتریک ارضا گردید. برمنای تئوری میندلین پنج معادله دیفرانسیل جزئی حرکت برای ارتعاشات آزاد ورق FG و معادله ماکسول، با استفاده از توابع کمکی معرفی شده و استفاده از روش جداسازی متغیرها به طور دقیق حل شدند. برای تایید دقت و صحت حل حاضر نتایج بدست آمده با مقالات پیشین و روش المان محدود 3D مقایسه شد. با صفر کردن ضخامت پیزوالکتریک مشاهده شد که حل حاضر سازگاری بسیار بالایی با نتایج موجود برای ورق FG دارد. برای ارزیابی نتایج مربوط به ورق FG با لایه پیزوالکتریک نیز از نرم افزار ABAQUS استفاده گردید و دقت و کارایی حل حاضر مورد تایید واقع شد. تاثیر پارامترهای ورق از قبیل اندیس گرادیان و افزایش ضخامت پیزوالکتریک بر روی فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی لوی-گونه مورد بررسی قرار گرفت.

۵- ضمیمه

۱-۵- ضمیمه A:

$$B_{16} = (-I_1 + \frac{A}{B} I_2) \xi \omega^2$$

$$B_{31} = (\frac{P_3}{2} - \frac{D}{B} \frac{P_2}{2}) (C_{11} - C_{12}) \xi$$

$$B_{32} = 1 + (\frac{P_2}{2} - \frac{A}{B} \frac{P_3}{2}) (C_{11} - C_{12}) \xi$$

$$B_{33} = (\frac{P_3}{2} - \frac{D}{B} \frac{P_2}{2}) (C_{11} + C_{12}) \xi$$

$$B_{34} = \frac{(1+v)}{(1-v)} + (\frac{P_2}{2} - \frac{A}{B} \frac{P_3}{2}) (C_{11} + C_{12}) \xi$$

$$B_{35} = 4(e_{31} + e_{15}) \frac{h_p}{\pi}$$

$$B_{36} = (\frac{D}{B} I_2 - I_3) \xi \omega^2 + \kappa^2 (\frac{1-v}{2} A + P_l C_{55}) \xi$$

$$B_{37} = (-I_2 + \frac{A}{B} I_3) \xi \omega^2 - \frac{A}{B} \kappa^2 (\frac{1-v}{2} A + P_l C_{55}) \xi$$

$$B_{38} = \kappa^2 (\frac{1-v}{2} A + P_l C_{55})$$

$$B_{51} = \kappa^2 (\frac{1-v}{2} A + P_l C_{55}) \xi$$

$$B_{52} = \kappa^2 \frac{A}{B} (\frac{1-v}{2} A + P_l C_{55}) \xi$$

$$B_{53} = 4e_{15} \frac{h_p}{\pi}$$

$$B_{54} = I_1 \omega^2$$

$$B_{55} = B_{38}$$

$$B_{61} = (e_{15} + e_{31}) \frac{h_p^2}{2\pi} \xi$$

$$B_{62} = \frac{A}{B} (e_{15} + e_{31}) \frac{h_p^2}{2\pi} \xi$$

$$B_{63} = \frac{h_p^2}{\pi} \Xi_{11}$$

$$B_{11} = 1 + (\frac{P_2}{2} - \frac{D}{B} \frac{P_1}{2}) (C_{11} - C_{12}) \xi$$

$$B_{12} = (\frac{P_1}{2} - \frac{A}{B} \frac{P_2}{2}) (C_{11} - C_{12}) \xi$$

$$B_{13} = \frac{(1+v)}{(1-v)} + (\frac{P_2}{2} - \frac{D}{B} \frac{P_1}{2}) (C_{11} + C_{12}) \xi$$

$$B_{14} = (\frac{P_1}{2} - \frac{A}{B} \frac{P_2}{2}) (C_{11} + C_{12}) \xi$$

$$B_{15} = (\frac{D}{B} I_1 - I_2) \xi \omega^2$$

$$C_i = ((B_{38} - B_{33}d_{i-4} - B_{34}d_i + B_{35}e_{i-4})(-B_{16} - B_{12}\alpha_{i-4}^2) + (B_{13}d_{i-4} + B_{14}d_i)(-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2)) / ((-B_{16} - B_{12}\alpha_{i-4}^2)(-B_{36} - B_{31}\alpha_{i-4}^2) - (-B_{15} - B_{11}\alpha_{i-4}^2)(-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2)), \quad i = 5-8$$

$$C_i = \frac{-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2}{B_{36} + B_{31}\alpha_{i-4}^2}, \quad i = 9, 10$$

$$B_{64} = \Xi_{33}$$

$$B_{65} = \frac{h_p^2}{2\pi} e_{15}$$

:B - ضمیمه ۲-۵

- مراجع ۶

- [1] Yamanouchi, M., Koizumi, M. and Hirai, Shiota I., Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan, 1990.
- [2] Koizumi, M., The concept of FGM, ceramic transactions, functionally gradient materials, 1993, 3(1): 3-10.
- [3] Lien-Wen Chen, Chung-Yi Lin and Ching-Cheng Wang., Dynamic stability Analysis and Control of a Composite Beam with Piezoelectric Layers. Elsevier, Composite structures, Vol.56, PP.97-109, 2002.
- [4] Argillon Gmbh., Piezoproducts Bending Actuator Germany, April.2001.
- [5] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic Plates. J Appl Mech 1951; 18:A31-8.
- [6] Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Jorge RMN. Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. Composite Structures 2006; 75:593-600.
- [7] Pradyumna S, Bandyopadhyay JN. Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. Journal of Sound and Vibration 2008; 318:176-92.
- [8] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. International Journal of Mechanical Science 2011; 53:11-22.
- [9] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. Composite Structures 2010; 93:722-735.

:C - ضمیمه ۳-۵

$$r_1 = B_{31} - \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{11}$$

$$r_2 = \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{15} - B_{36}$$

$$r_3 = \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{16} - B_{37}$$

$$C_i = (B_{15}B_{38} - (B_{15}B_{33} - B_{13}B_{36})d_i - (B_{15}B_{34} - B_{14}B_{36})d_{i+4} + B_{15}B_{35}e_i + B_{11}B_{38}\alpha_i^2 + (B_{13}B_{31} - B_{11}B_{33})d_i\alpha_i^2 + (B_{14}B_{31} - B_{11}B_{34})d_{i+4}\alpha_i^2 + B_{11}B_{35}e_i\alpha_i^2) / (B_{16}B_{36} - B_{15}B_{37} + (B_{16}B_{31} - B_{15}B_{32} + B_{12}B_{36} - B_{11}B_{37})\alpha_i^2 + (B_{12}B_{31} - B_{11}B_{32})\alpha_i^4), \quad i = 1-4$$

- [14] J. N. Reddy, Z.-Q. Cheng. Three-dimentional solutions of smart functionally graded plates. *Journal of Applied Mechanics* 2001;68:234-241.
- [15] Vahid Fakhari, Abdolreza Ohadi, peyman Yousefian. Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layer in thermal environment. *Composite Structure* 2011; 93:2310-2321.
- [16] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics* 1951; 18:31-8.
- [17] Chi SH, Chung YL. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – part II: numerical results. *Int J Solids Struct* 2006; 43:3675-3691.
- [10] Cheng ZQ, Batra RC. Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. *Archive of Mechanics* 2000; 52:43-58.
- [11] Piotr Cupial. Tree-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration* 2005; 283:1093-1113.
- [12] W.Q.Chen, H.J.Ding, Hangzhou, P.R. China. On free vibration of a functionally graded piezoelectric rectangular plate. *Acta Mechanica* 2000; 153:207-216.
- [13] Zheng Zhong, Tao Yu. Vibration of simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate. *Smart materials and structures* 2006; 15:1404-1412.