مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1395، دوره 16، شماره 10، ص‌ص 353-363

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تأثیر میدان مغناطیسی بر رفتار هیدرودینامیکی حباب در سیال ساکن نیوتونی

پیمان رستمی[1]، محمدرضا انصاری[2*]، محسن زارعی[1]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق‌پستی 14115-143، mra_1330@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 06 مرداد 1395
پذیرش: 19 شهریور 1395
ارائه در سایت: 24 مهر 1395

کلید واژگان:
صعود آزادانه حباب
تأثیر میدان مغناطیسی
سرعت صعود
ضریب منظر
مسیر حرکت

چکیده

در این پژوهش حرکت آزادانه حباب در کانال عمودی به صورت تجربی در محدوده نیروی تنش سطحی غالب برای 5 سیال مختلف نیوتونی مورد بررسی قرار گرفت. مسیر حرکت حباب در آب، محلول 30% و 50% حجمی گلیسیرین به صورت زیگزاگ و در دو محلول 80% و 100% حجمی گلیسیرین به صورت خطی مشاهده شده است، همچنین سرعت صعود و ضریب منظر نیز با روش آنالیز تصویر توسط نرم‌افزار متلب استخراج شد. مقایسه نتایج کار حاضر با نتایج سایر محققین و روابط موجود جهت حدس‌زدن سرعت حباب از تطابق خوبی برخوردار بود. تأثیر میدان مغناطیسی (عمود بر مسیر حرکتی حباب) بر خصوصیات هیدرودینامیک حباب نیز برای هریک از محلول‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که حضور میدان مغناطیسی هرچند در نحوه حرکت حباب تأثیری ندارد و در محدوده مورد بررسی موجب تغییر حرکت زیگزاگی یا خطی نمی‌شود، اما سبب کاهش دامنه حرکت می‌شود که این میزان کاهش با افزایش لزجت کاهش می‌یابد، همچنین حضور میدان سبب افزایش سرعت صعود حباب می‌شود که درصد این افزایش سرعت با افزایش لزجت می‌افزاید. حضور میدان مغناطیسی سبب افزایش ضریب منظر می‌شود که با افزایش لزجت میزان تغییرات ضریب منظر کاهش می‌یابد.

Effect of magnetic field on hydrodynamic of a single bubble behavior in quiescent Newtonian fluid

Peyman Rostami, Mohammad Reza Ansari*, Mohsen Zarei

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University
*P.O.B. 14115-143 Tehran, Iran, mra_1330@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 July 2016
Accepted 09 September 2016
Available Online 15 October 2016

Keywords:
Single bubble raise
Magnetic field effect
Raise velocity
Aspect ratio
Trajectory

ABSTRACT

In this paper, a single bubble free ascending in a vertical channel was studied experimentally. Five different Newtonian fluids were used where the surface tension force is dominant. The bubble trajectory was considered in water, glycerin 30 and 50 Vol% that is zigzag, however, linear behavior is observed while the weight concentration of the glycerin reaches to 80 and 100 percent. The bubble rise velocity and aspect ratio coefficient are calculated by image analysis via MATLAB software. The results are in a very good agreement with the literature for the bubble velocity. The effect of magnetic field (perpendicular to the bubble flow) on the hydrodynamic characteristics of the bubble for each of the working fluids has been scrutinized. Although the presence of the magnetic field does not affect the bubble trajectory type or change the flow pattern from zigzag to linear, it reduces the flow domain where this descending trend decreases with the increase in viscosity. It should also be noted that the magnetic field causes the bubble rise velocity to increase while this enhancement increases with higher viscosity. The magnetic field effect on the bubble aspect ratio was also considered and it was found that as viscosity increases the aspect ratio change decreases.

1-مقدمه

در جریان‌های دوفازی الگوهای جریان متفاوتی اتفاق می‌افتد که از میان آن‌ها جریان حبابی به دلیل کاربرد فراوان از جمله جریان حباب داخل خون تا حباب در استخراج نفت و همچنین قابلیت تبدیل جریان حباب به حباب تیلور و سپس وقوع جریان لخته‌ای بسیار مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته است. از این‌رو تحقیقات عددی و تجربی بسیار زیادی در این زمینه انجام شده است.

گریس [1] در سال 1973 حرکت آزادانه حباب در سیال لزج ساکن را به‌صورت تجربی مورد مطالعه قرار داد از نتایج تحقیقات او به‌عنوان یکی از نخستین تحقیقات گسترده در زمینه بررسی حرکت حباب در مقالات مختلف نام برده می‌شود. این محقق آزمایشات خود را برای حباب‌ها با قطرهای مختلف و برای سیالات با چگالی و لزجت‌های مختلف تکرار کرد. با بررسی نتایج مشخص شد که میزان تغییر شکل حباب را می‌توان به صورت تابعی از دو عدد بی بعد اتوس و مورتون نشان داد. گریس اعداد بی‌بعد را به صورت زیر تعریف کرد:

عدد رینولدز: بیانگر نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت است و با رابطه (1) نشان داده می‌شود.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l d_e V_T}{\mu_l} \qquad (1)$$

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

P. Rostami, M. R. Ansari, M. Zarei, Effect of magnetic field on hydrodynamic of a single bubble behavior in quiescent Newtonian fluid, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 10, pp. 353-363, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

در رابطه بالا d_e قطر معادل حباب، V_T سرعت نسبی صعود حباب، همچنین μ_l و ρ_l نیز لزجت و چگالی سیال مایع است.

عدد مورتون نشان‌دهنده نسبت نیروی لزجت به نیروی کشش سطحی و به صورت رابطه(2) است.

$$M = \frac{g\mu_l^4\Delta\rho}{\rho_l^2\sigma^3} \quad (2)$$

در رابطه بالا $\Delta\rho$ اختلاف چگالی، σ ضریب کشش سطحی و g شتاب گرانش است.

عدد اتوس عبارت است از نسبت نیروی شناوری به کشش سطحی و رابطه آن به صورت رابطه (3) است.

$$Eo = \frac{g\Delta\rho d_e^2}{\sigma} \quad (3)$$

عدد وبر عدد بی‌بعد دیگری که از اهمیت بسیاری برخوردار است که به صورت نسبت نیروی اینرسی به تنش سطحی رابطه (4) است.

$$We = \frac{\rho_l d_e V_T^2}{\sigma} \quad (4)$$

باگا و وبر [2] در سال 1981 در ادامه کار گریس حالت‌های بیشتری را مورد آزمایش قرار دادند. این محققین با استفاده از نتایج آزمایشات خود و نتایج تجربی گزارش شده توسط دیگران نمودار گریس را توسعه دادند و نمودار آن‌ها علاوه‌بر این‌که نتایج گریس را تأیید می‌کرد در برخی نواحی دقیق‌تر بوده و شکل نهایی حباب را بهتر پیش‌بینی می‌کرد.

با توجه به نیروهای وارده بر حباب رژیم جریان به سه رژیم، نیروی لزجت غالب، نیروی تنش سطحی غالب و نیروی اینرسی غالب تقسیم می‌شوند که برای نمونه برای حباب هوا در آب با توجه به قطر حباب، حباب با قطر کمتر 0.83 میلی‌متر جریان لزجت غالب، با قطر $0.83 < d < 6$ برحسب میلی‌متر جریان نیروی تنش سطحی غالب و با قطر حباب بیشتر از 6 میلی‌متر جریان نیروی اینرسی غالب است [3].

در جریان حباب در سیال ساکن سرعت حباب تحت تأثیر دو نیروی شناوری و نیروی پساست. تعادل بین این دو نیرو که پس از تبدیل جریان به جریان پایا اتفاق می‌افتد سبب می‌شود سرعت صعود حباب به مقدار تقریبا ثابتی میل کند که به آن سرعت ترمینال حباب گفته می‌شود. با توجه به تعادل نیروها رابطه (5) قابل استنباط است.

$$(\rho_l - \rho_g)g\frac{\pi d^3}{6} = C_D \times \frac{1}{2}\rho_l V_T \frac{\pi d^2}{4} \quad (5)$$

با حل کرد معادله با فرض دانستن ضریب پسا، سرعت ترمینال به صورت رابطه (6) محاسبه می‌شود.

$$V_T = \sqrt{\frac{4d(\rho_l - \rho_g)g}{3\rho_l C_D}} \quad (6)$$

تلاش‌های بسیاری ارائه رابطه سرعت ترمینال حباب انجام شده است که شامل ارائه رابطه مستقیم برای سرعت ترمینال حباب یا ارائه رابطه برای ضریب پسا بوده که به اختصار در جدول 1 با روابط (7-11) آمده است.

مور [4] ضریب پسا برای حباب بیضوی را در جریان، نیروی لزج غالب براساس عدد رینولدز و ضریب منظر ارائه کرد که برای جریان نیروی لزجت غالب نتایج بسیار مناسب بود. تومیاما و همکاران [5] و تومیاما [6] نیز ضریب پسا را برای در جریان نیروی تنش سطحی غالب براساس عدد اتووس و ضریب منظر ارائه کردند. مور [4] مدلی برای ضریب منظر به صورت تابعی از عدد وبر برای حباب‌های کوچک ارائه کرد. سوگیهارا و همکاران [7] شکل حباب را در آب خالص مورد مطالعه قرار دادند و مدل مور را برای حباب‌های با ضریب منظر 1-2 گسترش دادند. این دو مدل برای سیالات با لزجت کم ارائه شده‌اندو اثر لزجت را لحاظ نکرده‌اند. لژندره و همکاران [8] حرکت حباب در سیالات لزج را مورد بررسی قرار دادند و مدل مور را با معرفی فاکتور M برای لحاظ کردن نیروی لزجت اصلاح کردند.

شیوه حرکت حباب در سیال با توجه به رژیم جریان به سه دسته خطی، زیگزاگ و مارپیچ تقسیم می‌شود، وو و غریب [9] شکل و مسیر حرکت حباب را در آب تمیز برای محدوده 1-2 میلی‌متر مورد بررسی قرار دادند و دریافتند برای حباب‌های کمتر از 1.5 میلی‌متر حرکت به صورت خطی و برای حباب‌های بزرگ‌تر به صورت زیگزاگ است.

یک روش کنترل حباب اعمال میدان مغناطیسی خارجی است مطالعات زیادی بر اثر میدان مغناطیسی یکنواخت و غیر یکنواخت بر جریان حبابی انجام شده است. هرچند مطالعات درباره تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت بر حرکت حباب در سیال دی‌الکتریک بسیار نادر است و پژوهش‌های موجود صرفا جنبه عددی داشته و پژوهش تجربی در این زمینه وجود ندارد. ژانگ و همکاران [10] تأثیر میدان مغناطیسی را بر جریان حباب در فلز مایع مورد بررسی قرار داند که نتایج حاکی از افزایش سرعت حباب تحت میدان یکنواخت در سیال الکتریکی بود. نخستین بار کی [11] نشان داد میدان مغناطیسی یکنواخت بر حباب و قطره در سیال دی‌الکتریک تأثیر دارد و آن نیز به دلیل تفاوت ضریب امپدانس دو سیال است. کی فرض کرد نیروی وارده

جدول 1 روابط ارائه‌شده برای سرعت ترمینال و ضریب پسا

Table 1 Correlations which proposed for terminal velocity and drag coefficient

محقق		رابطه	توضیحات
استوکس [15]	(7)	$V_T = \frac{1}{18}\frac{(\rho_l - \rho_g)}{\mu_l}gd^2$	برای حباب‌های کوچک
تومیاما و همکاران [5]	(8)	$V_T = \frac{\sin^{-1}\sqrt{1-E^2} - E\sqrt{1-E^2}}{1-E^2} \times \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho_l d}E^{\frac{4}{3}} + \frac{\Delta\rho g d}{2\rho_l}\frac{E^{\frac{2}{3}}}{1-E^2}}$	برای حباب‌های در سیال نیوتونی خالص یا دارای ذرات
ایشی و چاولا [16]	(9)	$C_D = \max\{\frac{24}{Re}(1 + 0.1Re^{0.75}), \min[\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{Eo}]\}$	برای محدوده بزرگی از حباب‌ها در سیالات لزج
تورتون و لیونسپایل [17]	(10)	$C_D = \frac{24}{Re}(1 + 10.173Re^{0.667}) + \frac{0.413}{1 + 16300Re^{-1.09}}$	برای حباب‌های صلب و عدد رینولدز کمتر از 130
می و کلانسر [18]	(11)	$C_D = \frac{16}{Re}\{1 + \left[\frac{8}{Re} + \frac{1}{2}(1 + 3.315Re^{-0.5})\right]^{-1}$	برای تمام حباب‌ها در سیالات بدون ذرات

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

فقط بر سطح مشترک دوفاز اثر می‌کند. انصاری و همکاران [12] تأثیر میدان مغناطیسی را بر حباب هوای داخل آب را با روش لول ست مورد مطالعه قرار دادند و دریافتند وجود میدان مغناطیسی سبب افزایش سرعت صعود حباب، افزایش ضریب منظر و افزایش پایداری حباب می‌شود. حدیدی و جلالی [13] مسأله الحاق دو حباب را در حضور میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند میدان مغناطیسی سبب تعجیل در الحاق دو حباب می‌شود. حدیدی و جلالی [14] مسأله صعود دو حباب کنار هم را در سیال لزج دی‌الکتریک مورد بررسی قرار دادند که حاکی از آن بود که می‌توان از میدان مغناطیسی برای جلوگیری از الحاق دو حباب مجاور استفاده کرد. با توجه به پیشینه پژوهش، خلاء پژوهش تجربی تأثیر میدان مغناطیسی بر حباب احساس می‌شود که در این پژوهش تأثیر میدان مغناطیسی بر حباب و خصوصیات هیدرودینامیکی آن به صورت تجربی مورد بررسی قرار گرفته و نحوه اعمال میدان عمود بر مسیر حرکتی حباب است.

2- سیستم آزمایشگاهی

2-1- اجزاء سیستم آزمایشگاهی

در پژوهش حاضر رفتار حباب در پنج سیال مختلف تحت تأثیر میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور سیستم آزمایشگاهی مطابق آن‌چه در شکل 1 نشان داده، ساخته شده است. کانال جهت ملاحظه جریان داخل و رفتار حباب از جنس اکریلیک شفاف استفاده شده است. کانالی با سطح مقطع 3 در 3 و طول 100 سانتی‌متر مطابق شکل تعبیه شده است (شماره 3).

برای تولید حباب از کمپرسور هایلا[1] استفاده شده است (شماره 1) که برای کنترل جریان هوا از شیر سماوری هوا (شماره 2)، همچنین از نازل با قطر خارجی 6 و قطر داخلی 4 میلی‌متر برای تولید حباب استفاده شده است. جهت نورپردازی و فیلم‌برداری هم به ترتیب از لامپ ال‌ای‌دی[2] (شماره 5) و از صفحه کدر برای پخش‌کردن نور و انجام دادن فرآیند سایه‌نگاری[3] (شماره 6) و همچنین از دوربین کنون[4] با سرعت فیلم‌برداری 240 f/s استفاده شده است (شماره 4). محدوده فیلم برداری از فاصله 40-50 سانتی‌متری از کف است.

در جدول 2 خصوصیات فیزیکی هریک از سیالات مورد استفاده آورده شده است. دمای محیط آزمایشگاه در طول آزمایشات 25 درجه سانتی‌گراد و خصوصیات فیزیکی هم در همین دما ارائه شده است. محلول گلیسیرین S1 حاوی 30% حجمی گلیسیرین و 70% آب است. محلول گلیسیرین 50% حجمی آب 50% گلیسیرین S2 نام‌گذاری شده است. محلول S3 حاوی 80% حجمی گلیسیرین و 20% آب و در نهایت سیال S4 محلول خالص گلیسیرین و فاقد آب است.

برای تولید میدان مغناطیسی از آهن‌ربای دائمی نئودیمیومی استفاده شده که در شرایط آزمایش توانایی تولید میدان مغناطیسی 0.042 تسلا را دارد و به صورت یکنواخت اعمال شده است. دلیل انتخاب میدان عمود بر مسیر حرکتی شامل دو بخش محدودیت‌های آزمایشگاهی که امکان اعمال میدان یکنواخت در راستای حرکت را از بین برده و همچنین نزدیکی این حالت به آن‌چه در صنعت اتفاق می افتد، است به گونه‌ای که در برخی نیروگاه‌های هسته‌ای اعمال میدان در راستای عمود بر جریان اتفاق می‌افتد.

[1] HAILEA-ACO 5505
[2] LED
[3] Shadowgraphy
[4] Canon Power Shot SX 220 HS

جدول 2 خصوصیات سیالات

Table 2 Fluid properties

سیال	چگالی $(\frac{kg}{m^3})$	لزجت (mPa. s)	تنش سطحی $(\frac{mN}{m})$
آب	996.7	0.86	72
گلیسیرین (S1)	1076.0	2.575	71
گلیسیرین (S2)	1128.7	6.88	70
گلیسیرین (S3)	1207.9	66.903	67
گلیسیرین (S4)	1260.7	905.68	65
هوا	1.2	1.8×10^{-2}	-

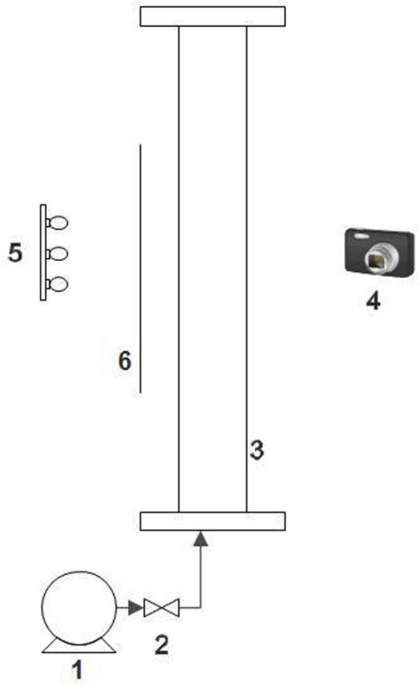

Fig. 1 Experimental apparatus: 1.compressor 2.valve 3.channel (test section) 4.camera 5.LED 6.opaque sheet

شکل 1 سیستم آزمایشگاهی 1- کمپرسور، 2- شیر دو طرفه، 3- کانال، 4- دوربین، 5- لامپ، 6- صفحه مات

2-2- پارامترهای مورد بررسی

با انجام فرآیند آنالیز تصویر علاوه‌بر به‌دست‌آوردن سرعت صعود حباب می‌توان سطح حباب، حجم حباب، شتاب حباب و همچنین ضریب دید که پارامترهای مهمی در مطالعه جریان حباب است را محاسبه و تحلیل کرد. ضریب دید حباب به صورت تقسیم قطر بزرگ حباب به قطر کوچک حباب تعریف می‌شود، که به صورت شماتیک در شکل 2 و رابطه مورد استفاده نیز در رابطه (12) آمده است.

$$E = \text{aspect ratio} = w/h \qquad (12)$$

3- آنالیز تصویر

برای انجام آنالیز تصویر ابتدا به تعدادی عکس از دوربین با سرعت بالا مانند آن‌چه در شکل 3 مشاهده می‌شود نیاز است. تصویرها چگونگی حرکت حباب هوا در سیالات مختلف را نشان می‌دهد. هریک از عکس‌ها دارای تفکیک‌پذیری[5] 320×240 پیکسل است که این قدرت تفکیک‌پذیری مربوط به

[5] resolution

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

فیلم‌برداری با سرعت 240 فریم بر ثانیه است که در نتیجه فاصله زمانی بین دو عکس متوالی برابر با 0.00416 ثانیه است. با توجه به محدوده سرعت‌های آزمایش قابل پذیرش است، همچنین با کاهش سرعت فیلم‌برداری تفکیک‌پذیری افزایش می‌یابد. تصویر برداری تحت نورپردازی کاملا یکنواخت در تمام میدان دید انجام شده و همان‌گونه که مشخص است مرز دو فاز از هم به خوبی مرز دیوار جامد و محل اتصال قابل تشخیص و تفکیک است. قسمت‌های میانی حباب با پیکسل‌های خاکستری روشن مشخص شده و در قسمت‌های مجاور پیکسل‌های تیره‌تری مشخص است که نشان‌دهنده مرز حباب است.

شکل 3 نشان‌دهنده مسیر حرکتی حباب در آب و مؤید حرکت زیگزاگ آن است.

3-1- فرآیند آنالیز تصویر

شکل 4 یکی از تصاویر است که حرکت حباب در گلیسیرین 100% را نشان می‌دهد که مراحل آنالیز تصویر روی آن انجام شده است.

با تمامی عکس‌های گرفته‌شده به‌عنوان ماتریس‌های 240×320 رفتار می‌شود که درایه‌های ماتریس به صورت عددی بین 0-256 ذخیره شده است.

مقدار هریک بستگی به میزان خاکستری بودن آن پیکسل دارد. برای مجزا کردن سطح تماس دو فاز از سطح تماس هریک از فازها با دیواره از یک عکس که فضا فقط از یک فاز پر شده استفاده می‌شود تا یک مقدار بحرانی برای عکس محاسبه شود که این مقدار شدت نرمال‌شده عکس است که با روش اوتسو[1] محاسبه شده است که مقدار هریک بستگی به میزان خاکستری بودن آن پیکسل دارد. برای مجزاکردن سطح تماس دو فاز از سطح تماس هریک از فازها با دیواره از یک عکس که فضا فقط از یک فاز پر شده استفاده می‌شود، مانند شکل 5 تا یک مقدار بحرانی برای عکس محاسبه شود است. با این روش میزان جمع وزنی متغیرهای دو مجموعه پیکسل‌ها، مقدار پیکسل‌های جلو و عقب عکس کمینه می‌شود تا در واقع به جز حباب باقی اجزاء محو شوند.

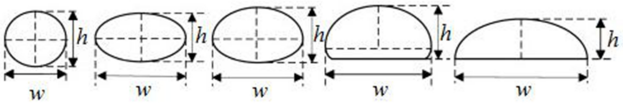

Fig. 2 Schematic diagrams of typical bubble shapes

شکل 2 تصویر شماتیک از حالات مختلف شکل حباب

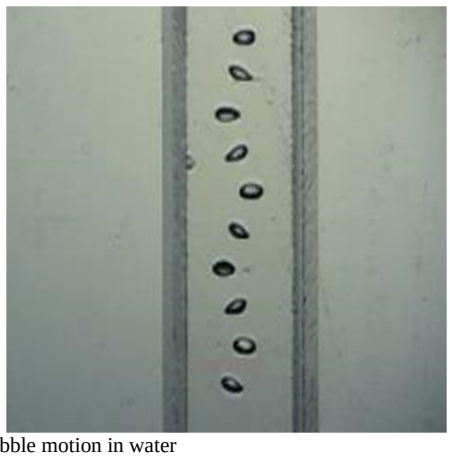

Fig. 3 Bubble motion in water

شکل 3 حرکت حباب در آب

در نتیجه با پیداکردن این مقدار بحرانی می‌توان از آن برای تبدیل عکس به عکس باینری استفاده کرد. برای این کار از تابع graythresh در نرم‌افزار متلب استفاده می‌شود. با انجام این کار می‌توان مقادیر شدتی عکس خاکستری را به مقادیر جدیدی تبدیل کرد و با استفاده از تابع imadjust در نرم‌افزار متلب می‌توان مقادیر خاکستری مربوط به پشت و جلوی عکس را فیلتر کرد. تأثیر این پیش‌پردازش روی شکل 4 و در شکل 6 نشان داده شده است.

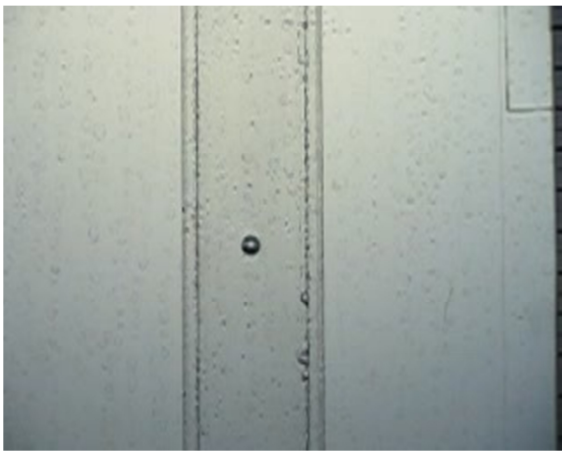

Fig. 4 Image chosen to explain the processing sequence

شکل 4 عکس انتخابی برای توضیح روند آنالیز

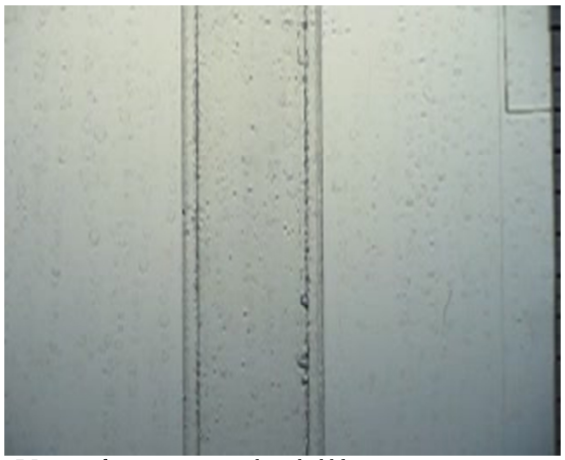

Fig. 5 Image of cross section without bubble

شکل 5 عکس سطح مقطع بدون حباب

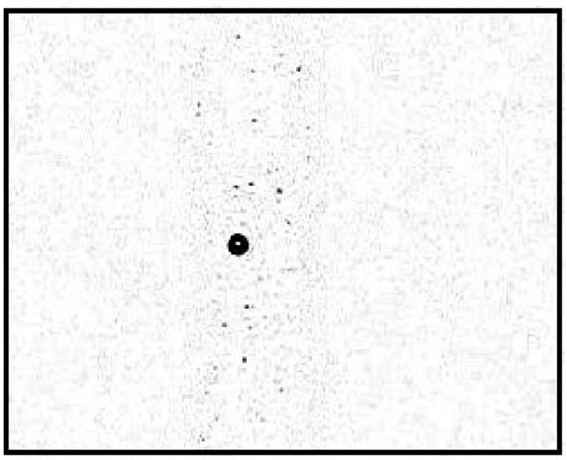

Fig. 6 Gray levels image of Fig.4

شکل 6 تصویر خاکستری حاصل از شکل 4

[1] Otsu

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

در نهایت با در نظر گرفته نشدن اجزا پشت عکس فقط مرز بین دو فاز مورد تأکید قرار می‌گیرد. در نهایت عکس می‌تواند تبدیل به عکس باینری شود که برای این کار از تابع im2bw استفاده می‌شود و نتیجه آن به صورت شکل 7 است.

سپس برای یافتن مرز حباب از دستور کنی[1] استفاده شده است که تناسب مناسبی میان دقت و سرعت محاسبات به وجود می‌آورد، همچنین با فیلتر کردن موارد اضافی شکل 8 حاصل خواهد شد. در ادامه با پرکردن ناحیه داخل قطره با تابع ایم‌فیل[2] در متلب می‌توان سطح مقطع و سرعت و قطر و مساحت قطره را محاسبه و نتایج حاصل را می‌توان استفاده کرد. شکل‌های 8 و 9 نشان‌دهنده نتایج حاصل از توابع کنی و ایم‌فیل است.

3-2- پس‌پردازش

با انجام مراحل توضیح داده شده حال امکان استفاده از تابع bw باندریز برای یافتن مرکز جرم حباب و سطح مقطع حباب وجود دارد. برای این امر تنها نیاز است ضریب تبدیلی بین پیکسل و اندازه واقعی به واحد متر تعریف کرد، سپس با داشتن موقعیت در هریک از راستاها سرعت را با تقریب خطی درجه اول به صورت رابطه (13) می‌توان به‌دست آورد.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta t} \quad (13)$$

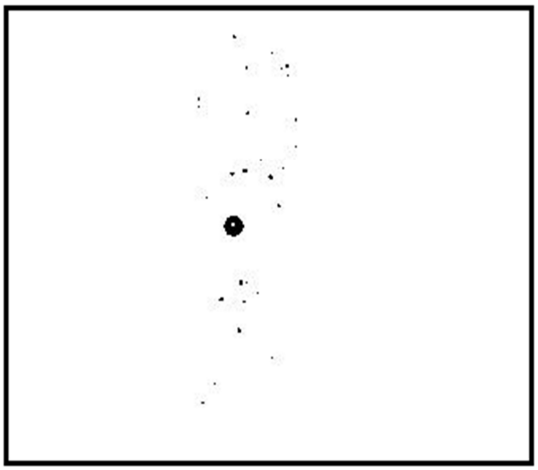

Fig. 7 Binary image of Fig.4

شکل 7 تصویر باینری شکل 4

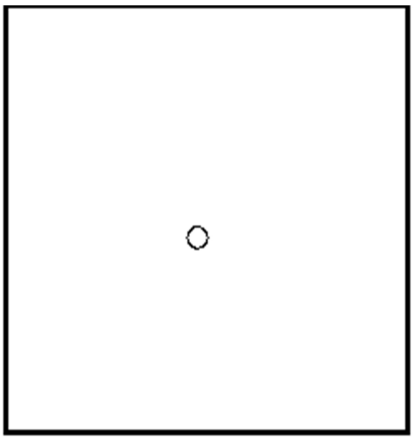

Fig. 8 Edges extracted with the canny method by the binary images

شکل 8 مرزهای تشخیص داده‌شده به روش کنی از تصویر باینری

[1] Canny
[2] Imfill

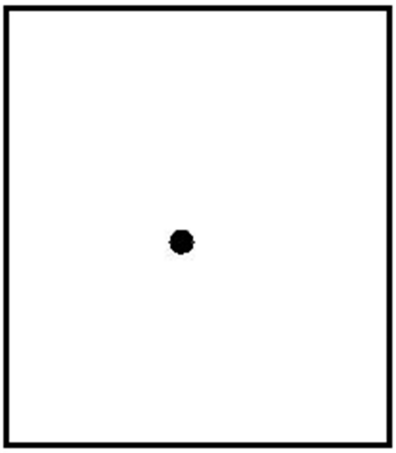

Fig. 9 Reconstructed bubble by imfill method

شکل 9 حباب بازسازی شده توسط روش imfill.

در رابطه (13) y نشان‌دهنده موقعیت در راستای حرکت حباب و Δt نشان‌دهنده معکوس تعداد فریم ثبت‌شده بر ثانیه است. در شکل 10 نمونه از تصویر پس‌پردازش شده ارائه شده است.

4-نتایج

4-1- نتایج بدون میدان مغناطیسی

از آن‌جا که سرعت صعود حباب پارامتر بسیار مهمی در جریان تک حباب است، در این قسمت علاوه‌بر مدل‌های ارائه‌شده در جدول 1 دو مدل جدید دیگر نیز ارائه شده است که به همراه مدل تومیاما و همکاران [5] با بیشترین دقت سرعت صعود را پیش‌بینی می‌کنند. مدل نخست توسط ماریو و تالایا [19] ارائه شده است. ایشان سرعت صعود حباب را براساس آنالیز ابعادی و استفاده از نتایج آزمایشگاهی برای تعیین ضرایب به‌دست آوردند. پژوهش آن‌ها طیف وسیعی از عدد رینولدز را دربر می‌گرفت که در نتیجه طیف وسیعی از قطر حباب را مورد بررسی قرار دادند. برای حباب‌های مورد بحث در پژوهش حاضر آن‌ها رابطه (14) را ارائه کردند.

$$V_T = \left(0.289\frac{g d_e \Delta\rho}{\rho_l} + 877.193\frac{\mu_l g^{0.5}}{\rho_l d_e^{0.5}}\right) \quad (14)$$

رابطه بالا برای محدوده $0.31 < d_e < 1.34$ cm قابل پذیرش است که تمامی موارد آزمایش‌شده در همین محدوده است.

مدل دوم ارائه‌شده در این قسمت رابطه ارائه‌شده توسط رودریگز و همکاران [20] است. آن‌ها برای پیش‌بینی سرعت حباب با نوشتن تعادل نیرویی و همچنین استفاده از مدل‌های موجود رابطه (15) را ارائه دادند.

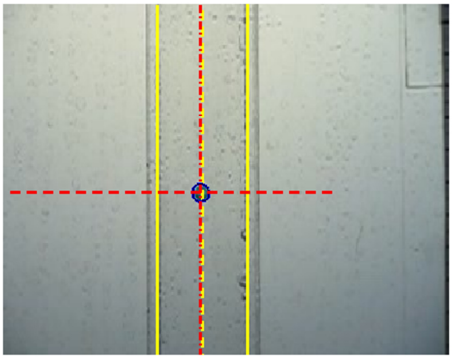

Fig. 10 Determined bubble and its centroid

شکل 10 حباب تشخیص داده‌شده و مرکز آن

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

$$V_{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{V_{\mathrm{T1}}^2} + \frac{1}{V_{\mathrm{T2}}^2}\right)}} \quad (15)$$

در رابطه بالا V_{T1} به صورت معادله (16) تعریف شده است.

$$V_{\mathrm{T1}} = V_{\mathrm{Tpot}}\left(1 + 0.73667\frac{(gd_{\mathrm{e}})^{0.5}}{V_{\mathrm{Tpot}}}^{0.5}\right) \quad (16)$$

در معادله 16 نیز V_{Tpot} نشان‌دهنده سرعت صعود حباب در جریان پتانسیل که در آن از لزجت صرف نظر شده است. سرعت حباب در سیال غیرلزج نیز به صورت معادله (17) تعریف می‌شود.

$$V_{\mathrm{Tpot}} = \frac{1}{36}\frac{\Delta\rho g d_{\mathrm{e}}^2}{\mu_{\mathrm{l}}} \quad (17)$$

همچنین V_{T2} به صورت رابطه (18) تعریف می‌شود.

$$V_{\mathrm{T2}} = \left(\frac{3\sigma}{\rho_{\mathrm{l}} d_{\mathrm{e}}} + \frac{g d_{\mathrm{e}}\Delta\rho}{2\rho_{\mathrm{l}}}\right)^{0.5} \quad (18)$$

در ادامه نتایج کار حاضر ارائه شده است.

ابتدا نتایج مربوط به جریان حباب در سیالات مختلف ارائه شده است. تمام آزمایشات برای بیش از 100 حباب تکرار شده و نتایج پس از پالایش داده‌های پرت میانگین‌گیری شده است. میزان اختلاف میان داده‌ها و داده گزارش‌شده برای تمامی موارد کم‌تر از 1% است. شکل 11 نشان‌دهنده سرعت برحسب لزجت که در آن میزان خطا نیز مشخص شده است. در شکل‌های 12 و 13 به ترتیب مسیر عبوری حباب و سرعت صعود حباب برای مقادیر مختلف مکان و زمان آورده شده است. نتایج حاکی از آن است که حرکت عبوری حباب به‌صورت زیگزاگ و همچنین سرعت صعود هم دارای نوساناتی است که سرعت ترمینال حباب (cm/s) 19.4984 است. با توجه به میزان ضریب منظر که برابر است با 1.4053 و مقادیر خصوصیت‌های فیزیکی سیالات مقادیر سرعت برای هریک از روابط ارائه‌شده در جدول 3 آمده است نتایج حاکی از دقت بیشتر مدل رودریگز و همکاران [20] دارد. قطر میانگین حباب 0.444 سانتی‌متر است.

در شکل‌های 14 و 15 به ترتیب خط مسیر و سرعت صعود حباب در سیال 30% گلیسیرین آورده شده است. در تصویر حرکت حباب آورده شده است که برای این جریان نیز حرکت به صورت زیگزاگ بوده، ولی به دلیل افزایش لزجت دامنه حرکت (فاصله بین بیشینه و کمینه محور x) کاهش یافته است. با ضریب منظر 1.45 و قطر میانگین حباب 0.4074 سانتی‌متر سرعت ترمینال حباب (19.772(cm/s است که نتایج در جدول 4 نشان‌دهنده دقت بالاتر مدل تومیاما و همکاران [5] دارد.

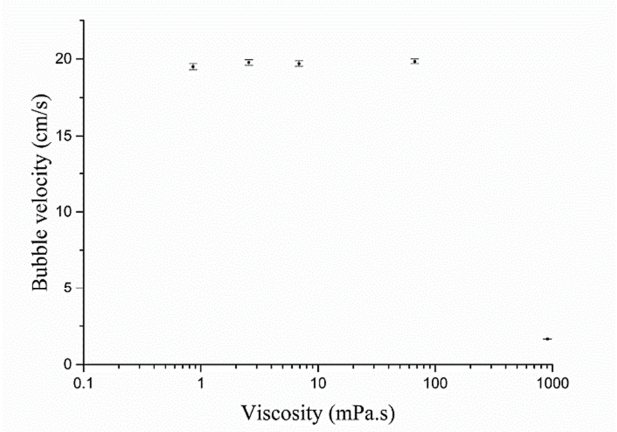

Fig. 11 Bubble raises velocity with its error bar against viscosity

شکل 11 سرعت صعود حباب با میزان خطا برحسب لزجت

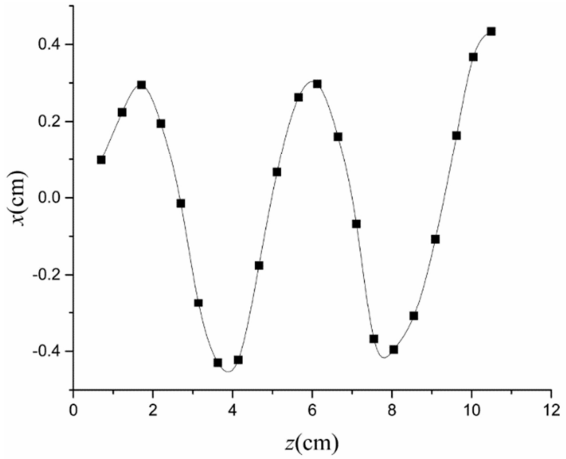

Fig. 12 Bubble trajectory in water

شکل 12 مسیر حرکت حباب در آب

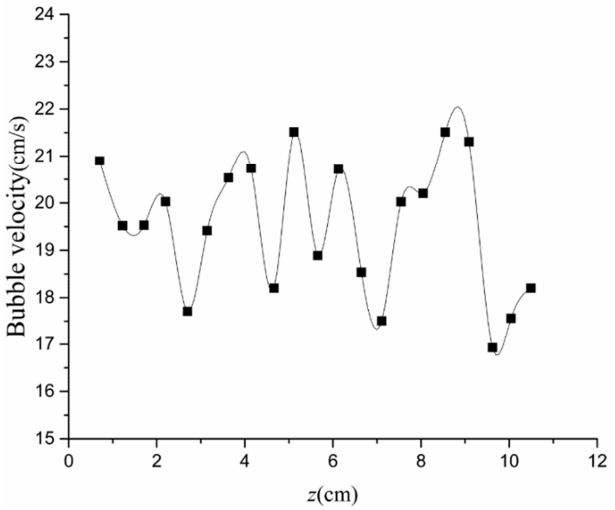

Fig. 13 Bubble raises velocity against time in water

شکل 13 سرعت صعود حباب برحسب زمان در آب

جدول 3 مقایسه نتایج کار حاضر با روابط پیشنهادی برای آب

Table 3 Comparison between this study and other correlation in water

رابطه	کار حاضر	(8)	(14)	(15)
میزان محاسبه‌شده	19.498	19.34	21.94	19.55
میزان خطا		-0.8%	12.5%	0.26%

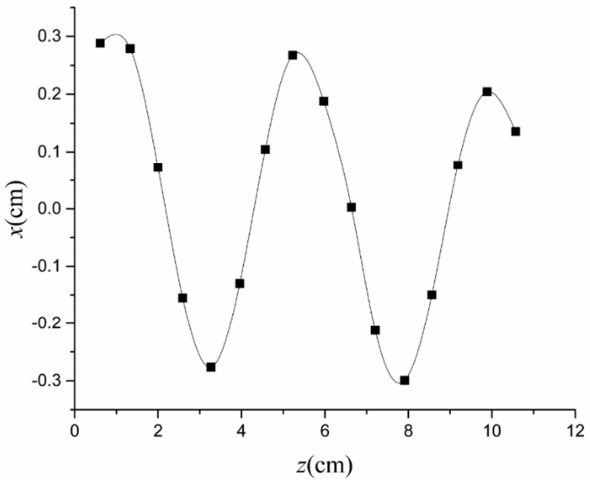

Fig. 14 Bubble trajectory in S1

شکل 14 مسیر حرکت حباب در محلول S1

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

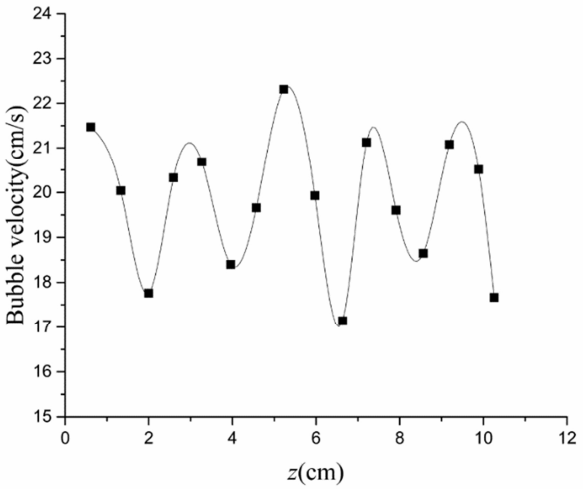

Fig. 15 Bubble raises velocity against time in S1

شکل 15 سرعت صعود حباب برحسب زمان در محلول گلیسیرین S1

جدول 4 مقایسه نتایج کار حاضر با روابط پیشنهادی برای محلول S1

Table 4 Comparison between this study and other correlation in S1

رابطه	کار حاضر	(8)	(14)	(15)
میزان محاسبه‌شده	19.772	19.30	33.84	25.67
میزان خطا		-2.1%	71.1%	29.8%

در ادامه نتایج مربوط به سیال حاوی 50% گلیسیرین آورده شده است. (شکل‌های 16 و 17) به دلیل تفاوت کم خواص فیزیکی میان سیال 0%5 و 30% نتایج حاصل با نتایج حاصل برای 30% تفاوت اندکی دارد و این بار نیز مسیر حرکت به صورت زیگزاگ و با دامنه کمی کمتر و با ضریب منظر 1.46 و قطر میانگین 0.4094 سانتی‌متر به سرعت ترمینال (cm/s) 19.6995 می‌رسد که با توجه به جدول 5 به مدل تومیاما و همکاران [5] نزدیک‌تر است.

با افزایش درصد گلیسیرین و رسیدن به 80% حجمی لزجت افزایش یافته و سبب تغییر شدید در مسیر حرکتی حباب می‌شود و مسیر حباب از زیگزاگ در لزجت‌های کمتر به حرکت تقریبا خطی در این جریان می‌رسد و دامنه حرکتی حباب به شدت کاهش پیدا می‌کند، ولی این افزایش لزجت سبب افزایش ضریب منظر و بیضوی‌ترشدن حباب و سرعت صعود می‌شود. به این صورت که با ضریب منظر 1.83 و قطر میانگین 0.4259 به سرعت ترمینال

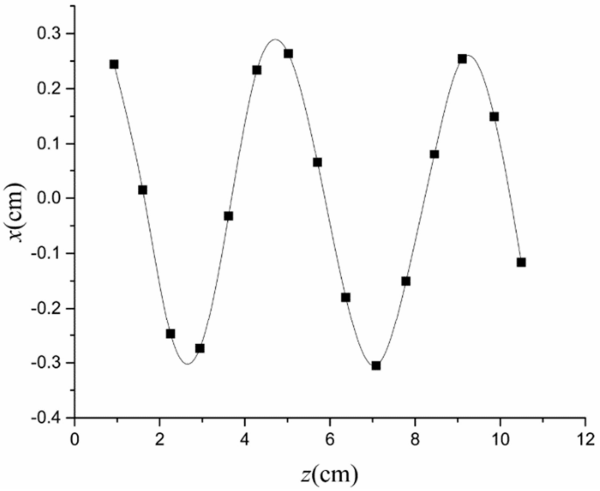

Fig. 16 Bubble trajectory in S2

شکل 16 مسیر حرکت حباب در محلول S2

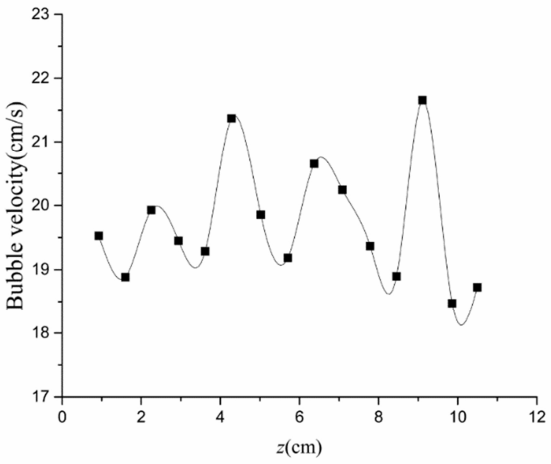

Fig. 17 Bubble raises velocity against time S2

شکل 17 سرعت صعود حباب بر زمان در محلول گلیسیرین S2

جدول 5 مقایسه نتایج کار حاضر با روابط پیشنهادی برای محلول S2

Table 5 Comparison between this study and other correlation in S2

رابطه	کار حاضر	(8)	(14)	(15)
میزان محاسبه‌شده	19.699	19.38	52.2	24.26
میزان خطا		-1.6%	164%	23.1%

(cm/s) 19.84 می‌رسد. نتایج نحوه حرکت و سرعت صعود حباب به ترتیب در شکل‌های 18 و 19، میزان خطای هریک از روابط پیش‌بینی‌کننده در جدول 6آورده شده است که حاکی از دقیق بودن مدل تومیاما و همکاران [5] دارد.

با افزایش درصد گلیسیرین به محلول خالص گلیسیرین باز هم مسیر عبوری همان‌گونه که در شکل 20 دیده می‌شود خطی باقی می‌ماند و سرعت صعود، ضریب منظر به شدت کاهش می‌یابند به گونه‌ایی که با ضریب منظر 1.05 و قطر میانگین 0.46211 سانتی‌متر سرعت ترمینال حباب برابر با 1.662 (cm/s) است. در شکل 21 سرعت صعود حباب برحسب زمان رسم شده است. در جدول 7 سرعت ترمینال حباب با مدل‌های موجود مقایسه شده که نشان‌دهنده تمام روابط پیشنهادی دارای خطای زیادی است. دلیل این امر آن است که حباب در ناحیه‌ای که نیروی لزجت غالب است قرار دارد و باید از مدل‌های مربوط به این رژیم که مدل استوکس [15] است استفاده شود. با در نظر گرفتن مدل استوکس خطای برابر 2.64% به‌دست آمد که در حد قابل پذیرش است.

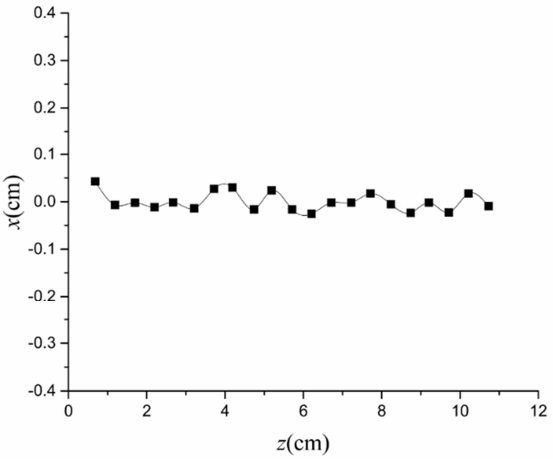

Fig. 18 Bubble trajectory in S3

شکل 18 مسیر حرکت حباب در محلول S3

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

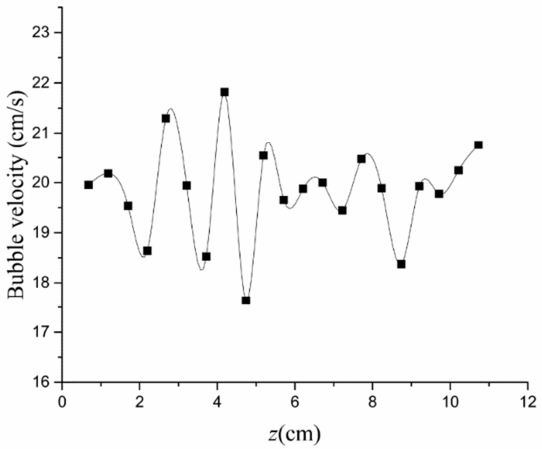

Fig. 19 Bubble raises velocity against time in S3

شکل 19 سرعت صعود حباب برحسب زمان در محلول S3

جدول 6 مقایسه نتایج کار حاضر با روابط پیشنهادی برای محلول S3

Table 6 Comparison between this study and other correlation in S3

رابطه	کار حاضر	(8)	(14)	(15)
میزان محاسبه‌شده	19.84	19.46	152.2	14.88
میزان خطا		-1.9%	667%	-25%

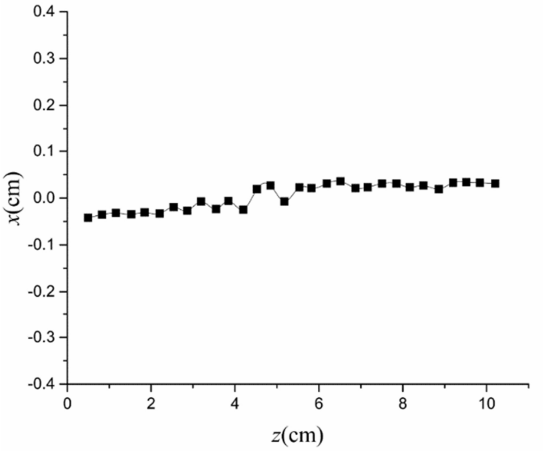

Fig. 20 Bubble trajectory in S4

شکل 20 مسیر حرکت حباب در محلول S4

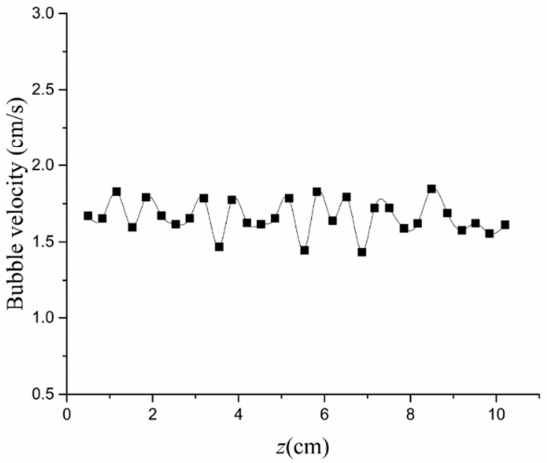

Fig. 21 Bubble raises velocity against time in S4

شکل 21 سرعت صعود حباب برحسب زمان در محلول S4

جدول 7 مقایسه نتایج کار حاضر با روابط پیشنهادی برای محلول S4

Table 7 Comparison between this study and other correlation in S4

رابطه	کار حاضر	(8)	(14)	(15)
میزان محاسبه‌شده	1.622	9.6	1.618	3.81
میزان خطا		478%	-2.64%	129.5%

با توجه به نتایج موجود در جدول 7 می‌توان دریافت که جریان حباب با قطر 0.46 سانتی‌متر در گلیسیرین در محدوده نیرویی تنش سطحی غالب قرار نمی‌گیرد و نباید از روابط موجود برای این ناحیه استفاده کرد. تا درصد حجمی 80% گلیسیرین روابط محدوده نیروی تنش سطحی غالب قابل قبول است. به طور کلی رابطه (8) برای این محدوده و رابطه (7) برای گلیسیرین 100% مطلوب است.

4-2- تأثیر میدان مغناطیسی

با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت و تحت شرایط یکسان تمام آزمایشات برای هر جریان دوباره تکرار شده است و نتایج حاصل حاکی از تأثیر میدان مغناطیسی بر جریان حباب در سیال دی‌الکتریک دارد که تاکنون به آن کمتر توجه شده است. در ادامه به بررسی اثر میدان بر هریک از جریان‌های بحث‌شده در قسمت پیشین پرداخته شده است. ابتدا نتایج مربوط به حباب هوا در آب ساکن ارائه شده که همان‌طور که در شکل 22 قابل مشاهده است حضور میدان مغناطیسی سبب تغییر مسیر حرکتی نمی‌شود و همچنان مسیر به‌صورت زیگزاگ باقی می‌ماند، اما دامنه حرکت به میزان 25.2% کاهش نشان می‌دهد. با توجه به شکل 23 که نشان‌دهنده مقایسه سرعت حباب در حضور و در عدم حضور میدان مغناطیسی است نشان‌دهنده افزایش 4.6% سرعت ترمینال حباب است هر چند وجود میدان مغناطیسی سبب بیشتربودن سرعت صعود در تمام نقاط نیست، اما به صورت میانگین سبب افزایش سرعت شده است. حضور میدان مغناطیسی سبب افزایش 7.45% در ضریب منظر می‌شود.

با افزایش گلیسیرین و رسیدن به 30% حجمی گلیسیرین نیز میدان مغناطیسی تأثیرگذار است و با توجه به شکل‌های 24 و 25 حرکت همچنان زیگزاگ باقی می‌ماند، اما دامنه حرکتی 21.7% کاهش می‌یابد که نسبت به آب خالص به میزان کمتری کاهش یافته است، همچنین سرعت صعود نیز 5.7% افزایش را نشان می‌دهد که نشان از افزایش بیشتر سرعت نسبت به

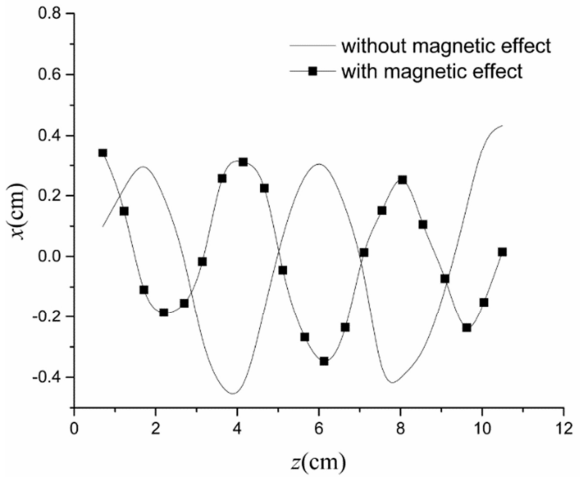

Fig. 22 Effect of magnetic field on bubble trajectory in water

شکل 22 تأثیر میدان مغناطیسی بر مسیر حرکتی حباب در آب

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

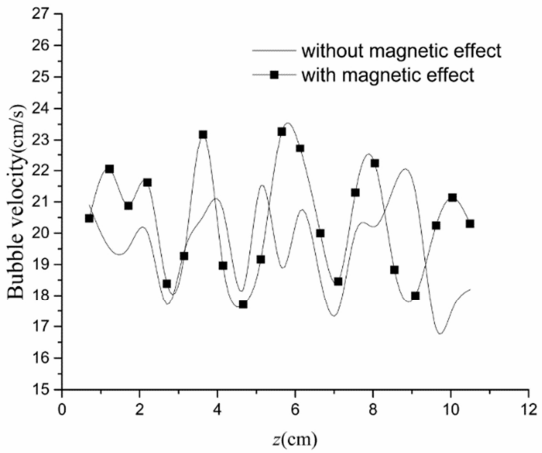

Fig. 23 Effect of magnetic field on bubble raises velocity in water

شکل 23 تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت صعود حباب در آب

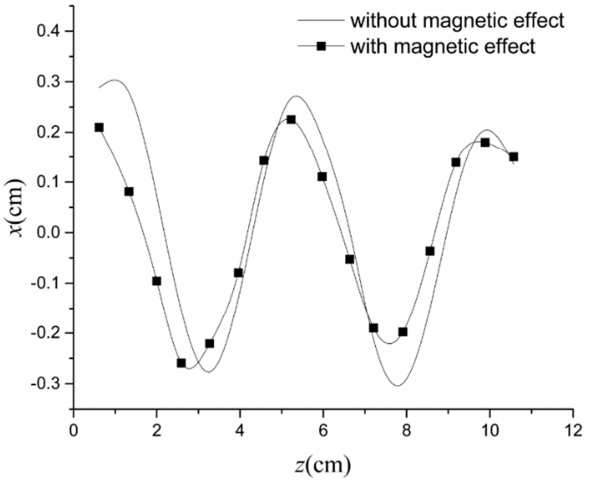

Fig. 24 Effect of magnetic field on bubble trajectory in S1

شکل 24 تأثیر میدان مغناطیسی بر مسیر حرکت حباب در محلول S1

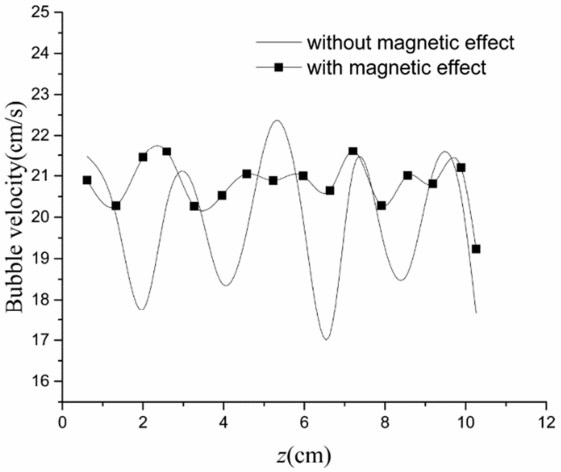

Fig. 25 Effect of magnetic field on bubble raises velocity in S1

شکل 25 تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت صعود حباب در محلول S1

سرعت در آب است. ضریب منظر 7.6% افزایش را نشان می‌دهد که تقریبا با مقدار افزایش ضریب منظر در آب یکسان است.

در ادامه نتایج مربوط به محلول 50% حجمی در شکل‌های 26 و 27 ارائه شده است بازهم با توجه به نزدیکی خصوصیات محلول 30% و 50% نتایج حاصل برای این جریان بسیار مشابه جریان در سیال 30% است. مسیر حرکت همچنان زیگزاگ است و میدان مغناطیسی سبب کاهش 20.4% دامنه حرکت، افزایش 6.3% سرعت ترمینال صعود و همچنین افزایش 7.5% ضریب دید می‌شود.

در جریان حباب داخل سیال 80% به دلیل افزایش شدید لزجت مطابق شکل 28 مسیر حرکت حباب دستخوش تغییرات زیادی نشده و تنها 4.1% کاهش داشته است. با توجه به شکل 29 سرعت ترمینال حباب 7.9% درصد افزایش داشته است که نسبت به جریان‌های پیشین بیشترین افزایش را نشان می‌دهد. در بیشتر نقاط سرعت لحظه‌ای حباب تحت اثر میدان بیشتر از حباب بدون اثر میدان است، همچنین ضریب منظر فقط 2.1% افزایش دارد.

در جریان حباب در گلیسیرین خالص نیز به دلیل لزجت بالا مسیر حرکت خطی باقی می‌ماند و با توجه به شکل 30 تغییر چندانی ندارد و دامنه حرکت 3.5% کاهش می‌یابد. با توجه به شکل 31 سرعت لحظه‌ای در تمام نقاط بیشتر از حالت بدون میدان مغناطیسی است و همچنین سرعت ترمینال حباب افزایش 10% درصدی دارد که می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. ضریب منظر به میزان 1.9% افزایش دارد که دلیل آن لزجت بالای سیال است.

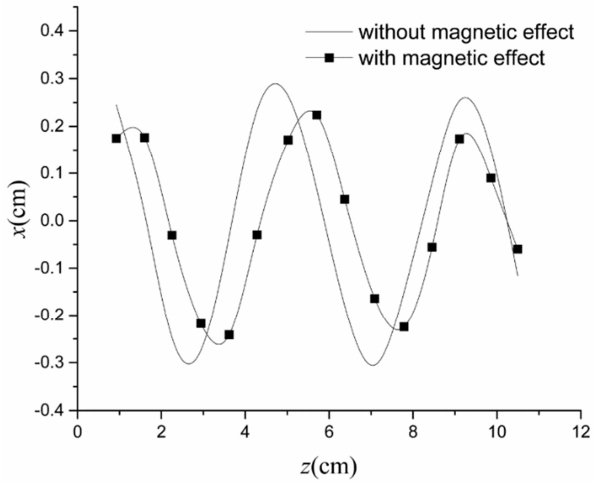

Fig. 26 Effect of magnetic field on bubble trajectory in S2

شکل 26 تأثیر میدان مغناطیسی بر مسیر حرکت حباب در محلول S2

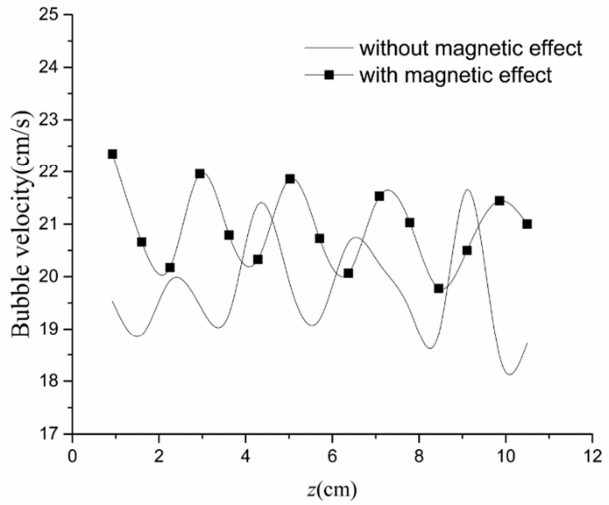

Fig. 27 Effect of magnetic field on bubble raises velocity in S2

شکل 27 تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت صعود حباب در محلول S2

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

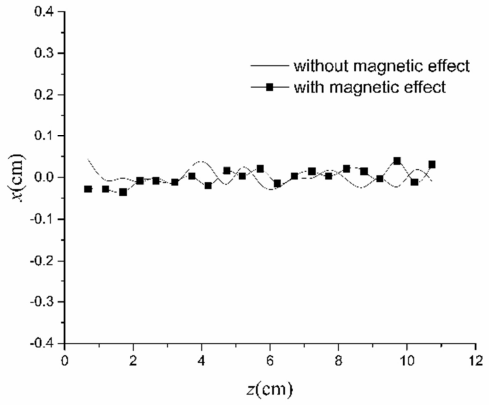

Fig. 28 Effect of magnetic field on bubble trajectory in S3

شکل 28 تأثیر میدان مغناطیسی بر مسیر حرکت حباب در محلول S3

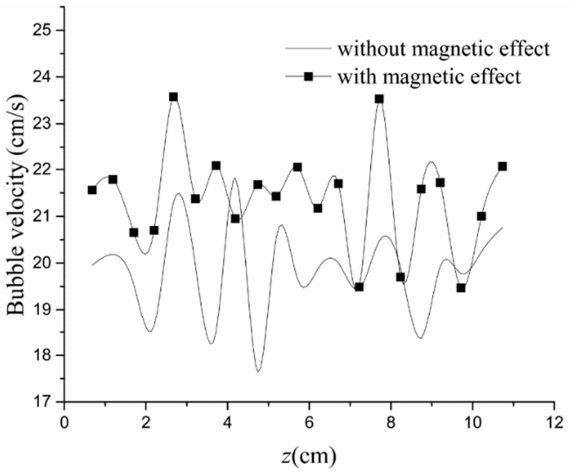

Fig. 29 Effect of magnetic field on bubble raises velocity in S3

شکل 29 تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت صعود حباب در محلول S3

3-4- ضریب پسا

در این قسمت تأثیر میدان مغناطیسی بر ضریب پسا حباب با توجه به رابطه ایشی و چاولا [16] در سه سیال آب، S1 و S2 محاسبه شده است که نتایج برای آب در شکل 32 و برای مقایسه سیال S1 و S2 در شکل 33 آورده شده است. میدان مغناطیسی با توجه به شکل سبب افزایش ضریب پسا می‌شود که دلیل آن ناشی از افزایش ضریب منظر است. به عبارت دیگر وجود میدان مغناطیسی سبب آن می‌شود که شکل حباب از حالت کروی خارج شود، این امر سبب افزایش مساحت سطح مقطع و در نتیجه افزایش ضریب منظر می‌شود. این افزایش ضریب منظر نیز برای سه سیال آب، گلیسیرین 30% حجمی و گلیسیرین 50% حجمی به ترتیب 4.06%، 3.02% و 1.31% است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش حرکت یک حباب در ستون مایع ساکن برای 5 سیال مختلف آب و محلول‌های 30%، 50%، 80% و 100% گلیسیرین مورد مطالعه تجربی قرار گرفته است. مسیر حرکت، سرعت صعود و ضریب منظر که سه پارامتر مهم در هیدرودینامیک حباب هستند مورد تحلیل قرار گرفته است که نتایج حاصل نشان‌دهنده دقت بهتر رابطه توسط تومیا و همکاران [5] رابطه (8) نسبت به سایر روابط پیشنهادی برای سرعت حباب دارد. هدف اصلی پژوهش بررسی تأثیر میدان مغناطیسی در جهت عمود بر مسیر حرکت بر حباب در سیال ساکن و تأثیر آن بر خصوصیات فیزیکی به شرح زیر است.

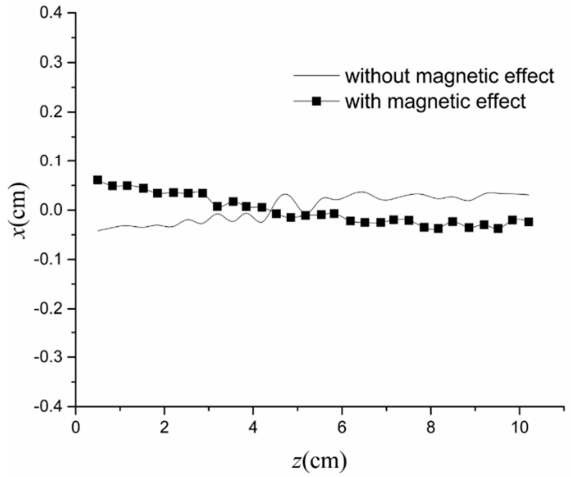

Fig. 30 Effect of magnetic field on bubble trajectory in S4

شکل 30 تأثیر میدان مغناطیسی بر مسیر حرکت حباب در محلول S4

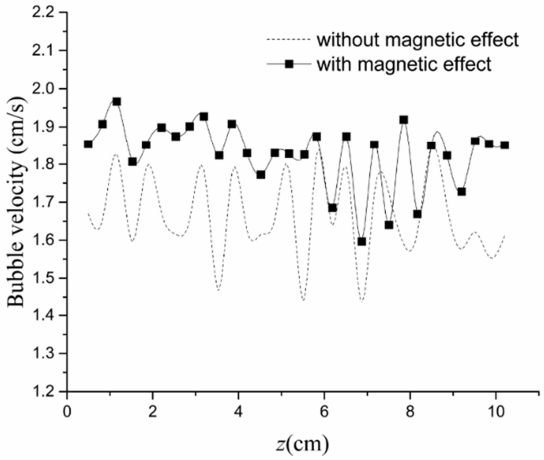

Fig. 31 Effect of magnetic field on bubble raises velocity in S4

شکل 31 تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت صعود حباب در محلول S4

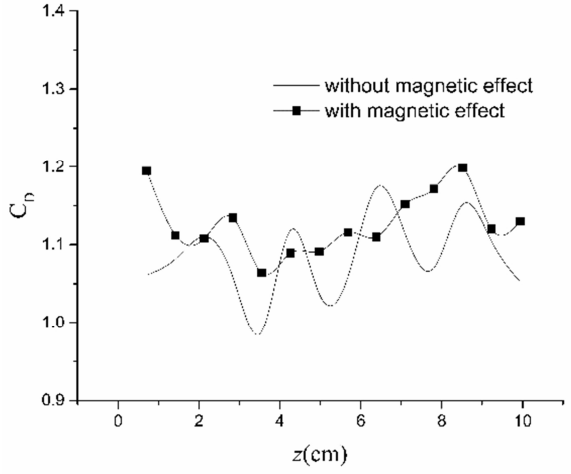

Fig.32 Effect of magnetic field on bubble drag coefficient in water

شکل 32 تأثیر میدان مغناطیسی بر ضریب پسا حباب در آب

1- کاهش دامنه حرکت حباب که این کاهش با افزایش لزجت کمتر می‌شود.

2- افزایش سرعت صعود و ترمینال حباب که این افزایش با افزایش لزجت افزوده می‌شود.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]

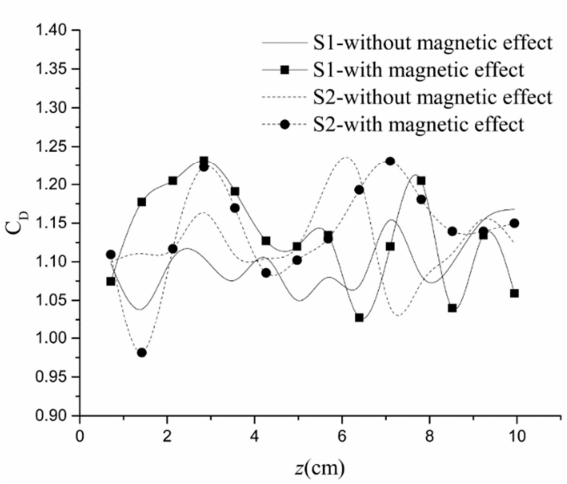

Fig.33 Effect of magnetic field on bubble drag coefficient in S1 and S2
شکل 33 تأثیر میدان مغناطیسی بر ضریب پسا حباب در محلول‌های S1 و S2

3- افزایش ضریب منظر حباب که این افزایش با افزایش لزجت کاهش می‌یابد.
4- افزایش ضریب پسا که این افزایش با افزایش لزجت کاهش می‌یابد.

6- فهرست علائم

C_D	ضریب پسا
d	قطر معادل حباب (m)
D	قطر لوله (m)
Eo	عدد اتوس
E	ضریب منظر
g	شتاب گرانش (m^2s^{-1})
h	قطر کوچک حباب (m)
M	عدد مورتون
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
Re	عدد رینولدز
u	سرعت (ms^{-1})
w	قطر بزرگ حباب (m)
We	عدد وبر

علائم یونانی

μ	لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
σ	تنش سطحی (Nm^{-1})

زیرنویس‌ها

e	معادل
g	گاز
l	مایع
T	ترمینال

7- مراجع

[1] Grace, Shapes and velocities of bubbles rising in infinite, *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, Vol. 15, No. 1, pp. 116-120, 1973.
[2] D. Bhaga, M. E. Weber, Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities *Fluid Mechanics*, Vol. 105, No. 1, pp. 61-66, 1981.
[3] H. Yan, L. Liu, G. Zhao, J. Zhuang, Experimental studies on the terminal velocity of air bubbles in water and glycerol aqueous solution, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 78, No. 1, pp. 254-265, 2016.
[4] D. W. Moore, The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity, *Fluid Mechanics*, Vol. 23, No. 04, pp. 27, 1965.
[5] G. P. Celatab. A. Tomiyamaa, S. Hosokawaa, S. Yoshidaa, Terminal velocity of single bubbles in surface tension force dominant regime *Multiphase Flow*, Vol. 28, No. 9, pp. 1497-1519, 2002.
[6] A. Tomiyama, Drag, lift and virtual mass forces acting on a single bubble, *Proceedings of the 3rd International Symposium on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation*, Vol. 22-24, 2004.
[7] K. Sugihara,T. Sanada, M. Shirota, M. Watanabe Behavior of single rising bubbles in superpurified water, *Chemical Engineering of Japan*, Vol. 33, No. 3 pp. 402–408, 2007.
[8] D. Legendre, R. Zenit, J. Rodrigo Velez-Cordero, On the deformation of gas bubbles in liquids, *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 4, pp. 200-213, 2012.
[9] M. Gharib M. Wu, Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 7, pp. 49-54, 2001.
[10] C. Zhang, S. Eckert, G. Gerbeth, Gas and liquid velocity measurements in bubble chain driven two-phase flow by means of UDV and LDA, *Proceedings of The 5th International Conference in Multiphase Flow*, Yokohama, Japan, July 18-20.2004.
[11] H. Ki, Level set method for two-phase incompressible flows under magnetic fields, *Computer Physics Communications*, Vol. 181, No. 6, pp. 999-1007, 2010.
[12] A. Hadidi. M.R. Ansari, M.E. Nimvari, Effect of a uniform magnetic field on dielectric two-phase bubbly flows using the level set method, *Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 324, No. 23, pp. 4094-4101, 2012.
[13] A.Hadidi, D. Jalali-Vahid, Numerical study of the uniform magnetic field effect on the interaction of bubbles in a viscous liquid column, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 293-302, 2015.(in Persian فارسی)
[14] A. Hadidi, D. J alali-Vahid, Effects of uniform magnetic field on the interaction of side-by-side rising bubbles in a viscous liquid, *Chemical Engineering*, Vol. 33, No. 3, pp. 795-805, 2016.
[15] S. G. G. Stokes, *Mathematical and physical papers*, pp. 134-158, London, Cambrige University Press, 1880.
[16] M. Ishii, T. Chawla, Local drag laws in dispersed two-phase flow, *Argonne National Laboratory*, Vol.75, No.105, pp. 1-44, 1979.
[17] R. Turton, O. Levenspiel, A short note on the drag correlation for spheres, *Powder Technology*, Vol. 47, No. 1, pp. 83-86, 1986.
[18] R.Mei, J.F. Klausner, Unsteady force on a spherical bubble at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity, *Physics of Fluids*, Vol. 4, No. 1, pp. 1989-1993, 2002.
[19] Mário A. R. Talaia, Terminal Velocity of a Bubble Rise in a Liquid Column, *Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, Vol. 1, No. 4, pp. 220-224, 2007.
[20] S. Baz-Rodríguez, A. Aguilar-Corona, A. Soria, Rising velocity for single bubbles in pure liquids, *Revista mexicana de ingeniería química*, Vol. 12, No. 2, pp. 269-278, 2012.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.49.0]