مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1396، دوره 17، شماره 6، ص‌ص 157-167

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تزریق چندسوزشی بهینه یک ماهواره به مدار زمین آهنگ با یک بلوک انتقال مداری

مجتبی علوی‌پور[1]، امیر علی نیکخواه[2*]، جعفر روشنی‌یان[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشیار، مهندسی هوافضا ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، تهران

3-استاد، مهندسی هوافضا ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، تهران

* تهران، صندوق پستی 1969764499، nikkhah@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 اسفند 1395

پذیرش: 11 اردیبهشت 1396

ارائه در سایت: 13 خرداد 1396

کلید واژگان:

تزریق بهینه

بلوک انتقال مداری

قابلیت استارت مجدد

مدار زمین آهنگ

سوزش چندگانه

چکیده

در این مقاله مسئله تزریق بهینه یک ماهواره به مدار زمین آهنگ با یک بلوک انتقال مداری با تراست محدود و قابلیت خاموش و روشنی مجدد و مقایسه آن با حالت زیر- بهینه مورد نظر می‌باشد. هدف، یافتن زاویه بردار نیروی پیشرانش، زمان‌های شروع سوزش موتور و مدت زمان بهینه هر یک از مانورهای بلوک انتقال مداری می‌باشد به گونه ای که مصرف سوخت حداقل شده و شرایط مرزی با دقت مورد نظر برآورده گردد. نوآوری این تحقیق ارائه یک الگوریتم دقیق و با سرعت همگرایی بالا برای حل بهینه مسیر چند سوزشی جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ می‌باشد. برای حل مسئله شرط مرزی در چند نقطه، از یک روش پرتابی غیرمستقیم با کارایی بالا همراه با روش نیوتن بهبود یافته، استفاده شده است. روش پیشنهادی علاوه بر تأمین دقت بسیار بالا، با سرعت خوبی نیز به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می‌شود. سلسله پروازهای مختلف با سوزش‌های چندگانه، بررسی شده و برای هریک از آنها مسیر بهینه با معیار حداقل مصرف سوخت و همچنین زمان‌های فعال و غیر فعال استخراج شده است. تصدیق و صحه‌گذاری الگوریتم پیشنهادی نیز از طریق مقایسه با مراجع انجام شده است. در نهایت نتایج حل بهینه با حالت حل زیر-بهینه که در آن زاویه بردار نیروی پیشرانش در راستای بردار سرعت فرض شده، مقایسه گردیده است.

Optimal multiple-burn injection of a satellite into geostationary orbit using an upper stage

Mojtaba Alavipour, Amir Ali Nikkhah*, Jafar Roshanian

Aerospace Engineering Department, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
*P.O.B. 1969764499 Tehran, Iran, nikkhah@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 March 2017
Accepted 01 May 2017
Available Online 03 June 2017

Keywords:
Optimal Injection
Restart Capability
Upper Stage
Geostationary Orbit
Multiple Burn

ABSTRACT

In this paper the problem of optimal multiple-burn injection of a satellite into geostationary orbit using an upper stage with a limited thrust and restart capability, and comparison with sub-optimal case is considered. The goal is finding thrust vector angle, times of the engine firings and optimal duration of active phases of the upper stage so as to minimize fuel consumption and to meet the desired boundary conditions. The contribution of this research is developing an accurate and rapid convergence algorithm for solving multiple-burn trajectory for satellite injection into geostationary orbit. To solve the multipoint boundary value problem, an improved indirect shooting method with high performance and modified Newton's method is presented and used for optimal solution. Moreover, the novel method presented for multi burn problem not only has very good accuracy, but also, it converges very fast to the desired end conditions. Various flight sequences with multiple burns are considered and the optimal trajectory with minimum fuel consumption criteria, for each flight sequence is derived. The verification and validation of the proposed algorithm is made via comparison with references. Finally, the results of optimal solutions are compared with the results of sub-optimal solution whose thrust direction is aligned to the velocity vector direction.

1- مقدمه

طراحی مسیر و هدایت فاز فعال[1] موشک‌های حامل ماهواره، حوزه‌ای است که در آن بکارگیری ابزارهای بهینه‌سازی و تئوری کنترل بهینه رایج است. در واقع الگوریتم‌های حین پرواز برای حل بهینه مسائل فاز فعال، پایه‌های هدایت حلقه بسته مراحل بالایی موشک‌های حامل را از دهه 1960 تشکیل داده‌اند. هدف یک الگوریتم هدایت بهینه تولید مجموعه فرامین متغیر با زمان بردار پیشران به منظور انتقال وسیله پرنده از یک حالت اولیه به یک حالت نهایی مطلوب است به گونه‌ای که قیود مسیر و شاخص‌های عملکرد معین برآورده گردد که معمولاً برای سیستم‌های فضایی شاخص عملکرد به صورت حداقل نمودن مصرف سوخت و یا حداقل نمودن زمان فازهای فعال انتخاب می‌شود.

طراحی مسیر بهینه در خارج از جو عموماً بر اساس تئوری کنترل بهینه پایه‌ریزی می‌شود. حل مسیر بهینه نیازمند حل مسئله بسیار مشکل شرایط مرزی در دو نقطه است. روش‌های مختلفی برای حل مسئله کنترل بهینه در مراجع ارائه شده است که در حالت کلی می‌توان آن‌ها را به روش‌های غیر

[1] Active

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Alavipour, A. A. Nikkhah, J. Roshanian, Optimal multiple-burn injection of a satellite into geostationary orbit using an upper stage, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 157-167, 2017 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

مستقیم، روش مستقیم و روش ترکیبی تقسیم‌بندی نمود. روش‌های غیر مستقیم بر اساس حل سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند که به عنوان مسئله مقدار مرزی همیلتونین مطرح بوده و عموماً به کمک حساب تغییرات بیان می‌شوند. از سوی دیگر در روش‌های مستقیم، مسئله کنترل بهینه به یک مسئله بهینه‌سازی غیر خطی[1] تبدیل می‌گردد. روش ترکیبی از مزایای هر دو روش فوق‌الذکر بهره می‌برد. روش‌های جستجوی گرادیانی مانند روش سریع ترین سقوط[2] برای تعیین مسیرها و کنترل بهینه، با ارضای شرایط بهینگی کوهن-تاکر[3] به‌کار می‌روند. همچنین از روش‌های جستجوی غیر گرادیانی مانند الگوریتم ژنتیک یا الگوریتم اجتماع پرندگان نیز می‌توان برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی استفاده نمود.

در طول چند دهه گذشته، روش‌های مختلفی برای طراحی مسیر و هدایت فاز فعال سیستم‌های حامل ماهواره مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته و توسعه یافته‌اند. براون و همکاران در سال 1969 اولین تلاش‌ها را برای دستیابی به هدایت حلقه بسته در فاز خلا انجام دادند [1]. مسئله مسیر بهینه به عنوان یک مسئله مقدار مرزی برای یافتن قوانین هدایت بهینه جهت ماموریت‌های تزریق مداری و ملاقات مداری، حل گردید. در هر سیکل هدایتی حل مسئله مقدار مرزی با استفاده از روش تکراری نیوتن، بروز رسانی می‌شد. براون و همکاران در سال 1970 راستای بهینه بردار تراست را با استفاده از شرایط بهینگی به دست آوردند [2] و از یک روش پرتابی[4] بهبود یافته برای حل مسئله مقدار مرزی در دو نقطه استفاده نمودند. کالیس در سال 2000 یک روش ترکیبی بهبود یافته برای بهینه‌سازی مسیر فاز فعال سیستم حامل ارائه داد [3]. در این تحقیق از یک الگوریتم تحلیلی/عددی برای بهینه‌سازی مسیر فاز فعال به همراه یک فاز غیر فعال بهینه ، استفاده شده است که در آن زمان‌های انتهایی آزاد بوده و آرگومان حضیض مدار نهایی به عنوان یک قید نهایی اضافه شده است که برای صعود به یک مدار انتقالی زمین آهنگ[5] مناسب است. داکمن در سال‌های 2002 و 2003 الگوریتمی را توسعه داد که در آن مسئله مقدار مرزی در دونقطه پس از خاموشی موتور اصلی آغاز می‌شود [5,4]. در تحقیق مذکور نشان داده شده که روش پرتابی چندگانه یک روش عددی مؤثر برای حل مسئله می‌باشد. لو و همکاران، در سال 2003 با استفاده از روش اختلاف محدود مسئله شرط مرزی در دونقطه را برای هدایت بهینه، حل نمودند. از لحاظ تئوری استفاده از یک توالی چند سوزشی از نظر مصرف سوخت بسیار کارا تر از یک تزریق مستقیم تک سوزشی است [6]. بسیاری از مسائل انتقال مداری نیازمند بکارگیری چند فاز فعال که با فازهای غیرفعال نسبتاً طولانی از یکدیگر جدا شده‌اند، می‌باشد. بنابر این یک سری از فعالیت‌های تحقیقاتی انجام شده مربوط به مسئله هدایت در خلا چند سوزشی می‌باشد. براون و همکاران در سال 1969 و هنچنین کوهن و براون در سال 1972 تحقیقات اولیه در خصوص بهینه‌سازی مسیر چند سوزشی را انجام دادند و در مسائل واقعی هدایت استفاده نمودند [8,7]. ژزوسکی در سال 1972 کارهای قبلی را توسعه داد و از تقریب جاذبه خطی برای بهبود کارایی محاسباتی استفاده نمود [9]. کالیس و همکاران در سال 2001 قابلیت بهینه‌سازی چند سوزشی برای یک الگوریتم هدایت ترکیبی را توسعه دادند [11,10]. کالیس و داکمن در سال 2003 شکل جدیدی از شرایط سوئیچ را توسعه دادند که برای بسیاری از شرایط نهایی قابل بکارگیری است. لو و همکاران در سال 2008 مسئله طراحی و هدایت بهینه چند سوزشی فاز خارج از جو را ارائه نمودند. در این تحقیق یک راهکار سریع و مطمئن با استفاده از روش پرتابی چند گانه برای طراحی مسیر بهینه خارج از جو یک حامل ماهواره، شامل دو فاز فعال و یک فاز غیر فعال بهینه بین فازهای فعال، پیشنهاد شده است [12]. پن و لو در سال 2009 حل مسئله بهینه‌سازی چند سوزشی را با روش پرتابی چند گانه به صورت تحلیلی ارائه نمودند. در این تحقیق نشان داده شده که حتی اگر تعداد سوزش‌ها به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شوند، الگوریتم بهینه‌سازی به حل بهینه با تعداد سوزش صحیح همگرا می‌شود [13]. جامینسون و همکاران در سال 2010 مسئله بردار اصلی[6] و تابع سوئیچ انتقال مداری را به صورت تحلیلی بررسی نمودند. در این تحقیق رفتار تابع سوئیچ برای مسئله دو جسم بررسی شده و نشان داده شده که استفاده از یک عبارت تحلیلی برای تابع سوئیچ سبب کاهش عمده زمان محاسباتی مورد نیاز جهت تعیین زمان فازهای غیر فعال می‌گردد. همچنین نشان داده شده که بردار اصلی و تابع سوئیچ مستقل از دستگاه مختصات بکار رفته می‌باشد [14]. تراشر و فیل در سال 2011 مسئله توسعه و بکارگیری الگوریتم هدایتی صریح برای فاز خارج از جو سیستم حامل اوریون را بررسی نمودند. ماموریت اوریون فراتر از تزریق در مدار ارتفاع پایین می‌باشد و باید قادر باشد تا ماموریت ملاقات مداریو اتصال به ایستگاه فضایی بین المللی را هم انجام دهد. در این تحقیق جزئیات ماموریت اوریون و ساختار هدایت مداری معرفی شده و پیشنهاداتی برای توسعه الگوریتم هدایت صریح در چارچوب هدایت مداری ارائه شده است [15]. لو و همکاران در سال 2012 حل تحلیلی متغیرهای شبه حالت در طول فاز غیر فعال بهینه را در حالت سه بعدی ارائه نمودند. در این تحقیق نشان داده شده که طول بهینه فاز غیر فعال برای مدارهای بیضوی برابر با ریشه‌های یک چند جمله ای مرتبه 5 بر حسب آنومالی حقیقی می‌باشد و برای مدارهای دایره ای، برابر با ریشه‌های یک چند جمله ای مرتبه 4 خواهد بود. این نتایج را می‌توان در طراحی مسیرهای بهینه چند سوزشی بکار برد [16]. هرناندز و آکلا در سال 2013 برای مسئله انتقال مداری تراست محدود به مدارهای دایره ای استوایی، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، یک حل تحلیلی ارائه نمودند. در این تحقیق از مدل تبدیل کی-اس[7] برای مسئله دو جسم استفاده شده که در آن معادلات حرکت غیر مغشوش، معادل با یک حرکت نوسانی ساده می‌باشد. روش هدایتی در دو فاز ارائه شده است : ابتدا انطباق با نیم قطر اصلی[8] مدار هدف با استفاده از تراست پیوسته فضاپیما محقق شده است. سپس انطباق با شیب و خروج از مرکز مدار هدف بوسیله مانور کمان‌های فعال/غیرفعال انجام شده است [17]. اولیویرا و همکاران در سال 2013 برای مسئله انتقال مداری با تراست پیوسته و با معیار حد اقل مصرف سوخت، یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر ارائه نمودند. در این تحقیق برای مانور یک فضاپیمای با تراست پایین، ضمن ارائه یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر با معیار حداقل مصرف سوخت، اثرات خطاهای ناشی از اندازه تراست نیز بررسی شده است [18]. علی حیدری و همکاران در سال 2013 مسئله طراحی مسیر و انتقال مداری با اکچویتورهای روشن-خاموش را با استفاده از یک روش تحلیلی برای تابع سوئیچ بهینه ارائه نمودند. در این تحقیق با استفاده از روش برنامه ریزی دینامیکی و بکارگیری شبکه عصبی برای آموزش سیستم، یک حل تحلیلی برای تابع سوئیچ بهینه ارائه شده است

[1] Nonlinear Programming Problem (NLP)
[2] Steepest descent
[3] Karush-Kuhn-Tucker
[4] Shooting method
[5] Geo-synchronous transfer orbit (GTO)
[6] Primer Vector
[7] Kustaanheimo Stiefel (KS)
[8] Semi major axis

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

[19]. بورتاکوفسکی و همکاران در سال 2013 برای مسئله تزریق بهینه یک ماهواره در مدار زمین آهنگ[1] با استفاده از تعداد سوزش محدود موتور و با معیار حد اقل مصرف سوخت، یک الگوریتم بهینه‌سازی مسیر ارائه نمودند. در این تحقیق حل یک مسئله ترکیبی پیوسته-گسسته با استفاده از ویژگی‌های سیستم‌های کنترل گسسته از نوع اتومیتا[2] محقق شده است. همچنین سلسله سلسله پروازهای بهینه با لحاظ نمودن معیار حد اقل مصرف سوخت و برآورده نمودن قید تعداد روشن و خاموشی موتور، بدست آمده است [20]. در این مقاله مسئله انتقال مداری به صورت صفحه‌ای و با استفاده از بلوک انتقال مداری بریز که قابلیت 9 بار خاموشی و روشنی مجدد دارد، انجام گرفته است. زمان‌های شروع سوزش موتور و مدت زمان مانور آنها نیز در یک فرایند انتقال بهینه از مدار پارک به مدار زمین آهنگ استخراج شده است. معانی و همکاران در سال 1391 برای مسئله تزریق بهینه یک ماهواره نمونه از مدار انتقال ژئوسنکرون به مدار زمین آهنگ از یک الگوریتم جستجوی سیمپلکس پارتو استفاده نمودند. در این تحقیق بهینه‌سازی هم زمان مصرف سوخت و زمان انتقال ماهواره با فرض سوزش پیوسته انجام شده است. [21]. معانی و همکاران در سال 1392 برای مسئله تزریق بهینه یک ماهواره نمونه از مدار انتقال ژئوسنکرون به مدار زمین آهنگ از یک الگوریتم ژنتیک دو هدفه استفاده نمودند. در این تحقیق بهینه‌سازی هم زمان مصرف سوخت و زمان انتقال ماهواره با فرض مانور مداری ضربه‌ای انجام شده است [22]. کوثری و همکاران در سال 1395 برای مسئله انتقال مداری هم صفحه با تراست کم از یک الگوریتم کنترل بهینه فازی با تابع هزینه کمینه زمان و قیود پایانه مسیر معین استفاده نمودند [23]. نصرت اللهی و همکاران در سال1395 طراحی سیستم بهینه یک بلوک انتقال مداری، جهت انتقال فضاپیما از یک مدار اولیه به مدار نهایی را ارائه نمودند[24]. در مرجع [25]، حل بهینه چند سوزشی، برای انتقال یک فضاپیما از یک مدار با ارتفاع پایین به مدار زمین آهنگ، ارائه شده است.

در این مقاله تمرکز بر روی طراحی مسیر بهینه برای یک بلوک انتقال مداری با قابلیت سوزش چندگانه است. طراحی مسیر بهینه بر اساس تئوری کنترل بهینه و مسئله حساب تغییرات می‌باشد. برای حل مسئله شرایط مرزی در چند نقطه، یک روش پرتابی غیر مستقیم با کارایی و دقت بسیار بالا طرح ریزی و مورد استفاده قرار گرفته است. مزایا و نوآوری‌های این مقاله نسبت به روش‌های دیگری که در سایر مراجع به آنها اشاره شده عبارتند از: 1- الگوریتم ارائه شده از مدل جاذبه نیوتنی استفاده می‌کند، در حالیکه در بیشتر مراجع از مدل خطی شده جاذبه استفاده می‌شود. 2- در الگوریتم ارائه شده متغیرهای شبه حالت اولیه و زمان پرواز به صورت تحلیلی و تابعی از پارامترهای مداری محاسبه می‌شوند که این کار باعث همگرایی سریع روش حل می‌شود. 3- به جای استفاده از زمان‌های سویچ، که حل را بسیار پیچیده می‌کند، زمان‌های سوزش فعال و غیرفعال به کمک یک فرایند ساده و بهینه انتخاب می‌شوند. 4- کلیه زمان‌های فعال به صورت بهینه و توسط تئوری کنترل بهینه استخراج می‌شوند، ولی در سایر مراجع فقط زمان فاز نهایی به صورت بهینه انتخاب می‌شود و زمان سایر فازها از قبل تعیین می‌گردد. توالی حداقل‌سازی شامل روشن شدن موتور در نقاط حضیض یا اوج مدارهای انتقالی می‌باشد. هرچقدر زمان کارکرد موتور کوتاهتر باشد، تعداد دفعاتی که موتور باید روشن شود تا ماهواره را در ارتفاع مورد نظر تزریق نماید، بیشتر خواهد بود اما مصرف سوخت کل کاهش خواهد یافت. در حد، بی‌نهایت توالی روشن شدن ضربه‌ای موتور با حداکثر تراست در مدت زمان بسیار کوچک به دست می‌آید اما این کار زمان مورد نیاز برای تزریق ماهواره در مدار را افزایش می‌دهد. مطمئناً چنین کنترلی را در عمل نمی‌توان پیاده‌سازی کرد. این یک راه حل ایده‌آل است که نشان می‌دهد امکان مدل‌سازی ریاضی با مصرف سوخت حداقل وجود دارد. در عمل به دلیل محدودیت‌های موجود بر روی سیستم پیشرانش و همچنین محدودیت بر روی زمان تزریق ماهواره به مدار نهایی، تعداد سوزش موتور بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ کمتر از شش بار می‌باشد. در این مقاله توالی پروازهای مختلف شامل سوزش‌های متعدد، بررسی شده و برای هریک از آنها مسیر بهینه و زمان‌های فعال و غیر فعال استخراج شده است. همچنین نتایج حل بهینه با حالت حل زیر-بهینه که در آن زاویه بردار نیروی پیشرانش در راستای بردار سرعت فرض شده، مقایسه گردیده است.

2- فرمول بندی مسئله

2-1- دینامیک سامانه

بلوک انتقال مداری به عنوان یک سامانه با مدل جرم نقطه‌ای لحاظ گردیده و منجر به معادلات حرکت سه درجه آزادی می‌گردد که از قانون دوم نیوتن تبعیت می‌کند. معادلات دیفرانسیل بیان کننده دینامیک سامانه فضایی فوق در دستگاه مختصات قطبی عبارتند از[26]:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u \\ \dot{u} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m} \\ \dot{v} &= \frac{-uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m} \\ m(t) &= m_0 - \dot{m}t \end{aligned} \qquad (1)$$

که در آن r فاصله شعاعی جسم از مرکز زمین در هر لحظه، u,v مؤلفه‌های شعاعی و مماسی سرعت جسم در هر لحظه، μ پارامتر جاذبه‌ای زمین، T اندازه تراست، $m(t)$ جرم سیستم در هر لحظه و ϕ زاویه تراست در صفحه پرواز است.

شمای کلی مسئله انتقال مداری در شکل 1 نشان داده شده است.

متغیرها را با پارامترهای کانونی بی بعد می‌کنیم. در واحدهای کانونی، ثابت جاذبه برابر واحد است، شعاع اولیه با واحد مسافت بی بعد می‌شود و سرعت مدار دایره ای اولیه برابر با واحد مسافت تقسیم بر واحد زمان می‌باشد. همچنین جرم اولیه فضاپیما نیز بر حسب واحد جرم بیان می‌شود.

2-2- فرمول‌بندی مسئله کنترل بهینه

برای فرمول‌بندی مسئله کنترل بهینه به منظور بهینه‌سازی مسیر با حداقل مصرف سوخت از روش استاندارد حساب تغییرات استفاده نموده و روابط

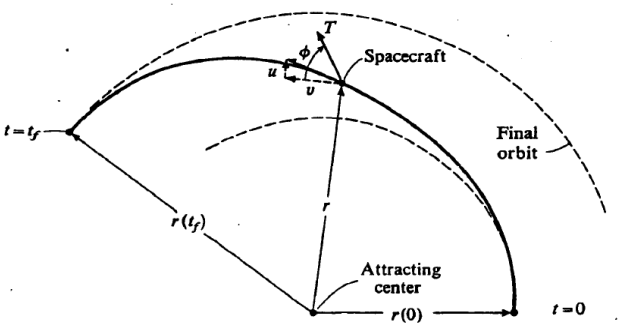

Fig. 1 The Schematic of orbit transfer problem

شکل 1 شمای کلی مسئله انتقال مداری

[1] Geostationary Orbit
[2] Automaton-type

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

حاصل به معادلات حرکت فضاپیما تحت تاثیر تراست ثابت در دستگاه مختصات قطبی اعمال می‌شود. سپس با استفاده از روابط تحلیلی بدست آمده برای شرایط اولیه متغیرهای شبه حالت ، از روش پرتابی غیر مستقیم برای حل عددی مسئله انتقال مداری که یک مسئله شرط مرزی در چند نقطه است، استفاده می‌شود.

هدف مسئله کنترل بهینه، یافتن تابع کنترل مجاز است که یک سیستم را از هر حالت اولیه در زمان اولیه به حالت نهایی در زمان نهایی با دنبال نمودن مسیر بهینه منتقل نماید به گونه ای که یک معیار عملکرد که به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود، بهینه گردد.

$$J(x(t),u(t),t) = \Phi\big(x(t_f),t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)\,dt \qquad (2)$$

بردار حالت $x(.)$ در R_n و بردار کنترلی $u(.)$ در R_m تعریف می‌شوند.

حداقل سازی معیار عملکرد معادله (2) مشروط به قیود دینامیکی سامانه تحت کنترل است که به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \qquad (3)$$

شرایط مرزی در حالت کلی به صورت رابطه (4) نوشته می‌شود:

$$\phi\big(x(t_0),t_0,x(t_f),t_f\big) = 0 \qquad (4)$$

قیود را هم می‌توان بر روی مرزهای مسیرهای مجاز به صورت نامساوی (5) در نظر گرفت:

$$C(x(t),u(t),t) \le 0 \qquad (5)$$

برای مسئله کنترل بهینه تعریف شده یک فرایند حل عمومی بر اساس حساب تغییرات به دست می‌آید. ضرایب لاگرانژ معرفی می‌شوند تا همراه با شرایط مرزی، قیود دینامیکی و قیود مسیر به تابع هزینه اضافه شوند. تابع هزینه افزوده به صورت رابطه (6) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} J_a = {} & \Phi\big(x(t_f),t_f\big) - \upsilon^{\mathrm{T}}\phi\big(x(t_0),t_0,x(t_f),t_f\big) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{ g(x(t),u(t),t) - \lambda^{\mathrm{T}}\big(\dot{x}(t) - f(x(t),u(t),t)\big) \\ & \qquad - \mu^{\mathrm{T}} C(x(t),u(t),t)\}\,dt] \end{aligned} \qquad (6)$$

حال همیلتونین[1] به صورت (7) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & H(x(t),u(t),\lambda(t),\mu(t),t) \\ & = g(x(t),u(t),t) + \lambda^{\mathrm{T}} f(x(t),u(t),t) \\ & - \mu^{\mathrm{T}} C(x(t),u(t),t) \end{aligned} \qquad (7)$$

با بدست آوردن اولین تغییرات تابع هزینه، جایگذاری معادله (7) همراه با مشتقات جزئی و با ساده سازی شرایط لازم برای ارضاء حل بهینه، شامل معادلات حالت، شبه حالت و کنترل، به صورت روابط (8) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),t) \\ & \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),t) \\ & \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),t) = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

از این معادله، پاسخ کنترل بهینه به صورت توابعی از متغیرهای حالت و شبه حالت به‌دست می‌آید. این شرط برای کنترل نامقید صادق است. در صورت مقید بودن کنترل، برای انتخاب کنترل‌های مجاز لازم است از اصل حداقل پانتریاگین استفاده گردد. شرایط لازم با استفاده از اصل حداقل پانتریاگین ایجاب می‌کند که برای کلیه کنترل‌های مجاز باید روابط (9) برقرار باشند:

$$H(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),t) \le H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),t) \qquad (9)$$

معادلات فوق شرایط بهینگی را ارائه می‌دهد. شرایط بهینگی و معادلات شبه حالت یک نتیجه بسیار قوی تئوری اویلر-لاگرانژ می‌باشند. این نتیجه می‌تواند منجر به تعیین قانون کنترل بهینه برای یک فضاپیمای با تراست ثابت گردد. در حالت کلی، حل تحلیلی سیستم معادلات دیفرانسیل فوق‌الذکر فقط برای مسایل خیلی ساده وجود دارد. این معادلات عموماً معادلات غیر خطی کوپل شده هستند که حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد. بنابراین روش‌های عددی برای حل بیشتر مسائل کنترل بهینه لازم و ضروری است. برای حل عددی معادلات حالت و شبه حالت لازم است شرایط اولیه آنها مشخص باشد. برای متغیرهای حالت فیزیکی، می‌توان شرایط اولیه و نهایی را تعیین نمود، اما برای متغیرهای شبه حالت هیچ روش تضمین شده ای برای تعیین صحیح شرایط مرزی بهینه وجود ندارد. علاوه بر این معادلات شبه حالت در عمل نسبت به شرایط اولیه بسیار حساس می‌باشند. روش پرتابی نیاز به شرایط اولیه متغیرهای شبه حالت دارد که باید به صورت منطقی انتخاب شوند. زیرا اگر آنها از مقادیر صحیح خیلی دور باشند، روش پرتابی شکست می‌خورد.

روش پرتابی یک روش غیر مستقیم برای حل مسئله شرط مرزی در دو نقطه است که با مغشوش نمودن عددی یک مسیر مرجع حاصل می‌شود. با اعمال این روش به مسئله فضاپیما با تراست ثابت، معادلات دیفرانسیل حاکم بر متغیرهای حالت و شبه حالت به صورت عددی انتگرال‌گیری می‌شوند تا مسیر مرجع را تشکیل دهند. چون مقادیر اولیه متغیرهای شبه حالت مجهول هستند، آنها را باید حدس زد. اگرچه مسیر حاصله شرایط بهینگی را ارضا می‌کند اما این نتیجه منجر به برآورده شدن شرایط نهایی مطلوب برای متغیرهای حالت فضاپیما نمی شود. برای تصحیح آن مسیرهای بیشتری لازم است تولید گردد که مقادیر اولیه متغیرهای شبه حالت آنها تغییر یافته باشند. با استفاده از ماتریس ژاکوبین، تاثیر مقادیر اولیه متغیرهای شبه حالت بر مقادیر متغیرهای حالت نهایی بررسی می‌شود و در نهایت با تکرار فرایند، می‌توان مقادیر اولیه مناسب برای متغیرهای شبه حالت تقریب زد. جزئیات روش پرتابی، در مرجع [27] ارائه شده است. معمولاً غیرخطی بودن فرایند سبب می‌شود که از یک حدس اولیه ضعیف نتوان به جواب نهایی مطلوب همگرا شد. بنابر این لازم است یک روش مناسبی برای حدس اولیه متغیرهای شبه حالت توسعه داد. در مرجع [28] مکان هندسی متغیرهای شبه حالت بهینه استخراج شده و برای ناحیه‌ای از مکان که در آن تغییر شعاع مداری کمتر از یک چهارم چرخش کامل مداری باشد، روش تحلیلی برای تقریب متغیرهای شبه حالت اولیه استخراج شده است. روش مذکور برای انتقال تک سوزشی از یک مدار دایره‌ای به مدار دیگر ارائه شده است که در این مقاله از نتایج آن استفاده شده و برای شرایط انتقال چند سوزشی از یک مدار بیضوی یا دایره ای به مدارهای بیضوی یا دایره ای دیگر نیز توسعه داده شده است.

3- حل بهینه برای یک انتقال تک سوزشی

برای دستیابی به مسیر بهینه، لازم است تابع هدف مناسبی تعریف شود. در مسئله بهینه‌سازی مسیر، تابع هدف عبارتست از حداقل نمودن مصرف سوخت که در اینجا با مسئله حداقل نمودن زمان پرواز معادل است و به صورت رابطه (10) فرموله می‌شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = (t_f - t_0) = t_f \qquad (10)$$

که در آن t_f زمان نهایی است.

در زمان اولیه $t_0=0$ متغیرهای حالت سیستم معلوم می‌باشند.

$$\begin{aligned} & m_0 = 22170\ [\mathrm{kg}]\ , v_0 = 7784.2\ [\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \\ & r_0 = 6578137\ [\mathrm{m}]\ , u_0 = 0\ [\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \end{aligned} \qquad (11)$$

شرایط نهایی را هم می‌توان برای نقاط انتهایی بکار برد. قیود نهایی متناظر با

[1] Hamiltonian

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

مدار هدف عبارتند از :

$$r_f = 42164137\ [\mathrm{m}], u_f = 0\ [\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$
$$v_f = 3074.66\ [\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \quad (12)$$

با تشکیل همیلتونین خواهیم داشت :

$$H = 1 + \lambda_r u + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T}{m}\sin\phi\right) + \lambda_v \left(\frac{-uv}{r} + \frac{T}{m}\cos\phi\right) \quad (13)$$

شرایط بهینگی نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{T}{m}(\lambda_u \cos\phi - \lambda_v \sin\phi) = 0$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda_v}\right)$$
$$\cos\phi = \frac{\lambda_u}{\sqrt{{\lambda_u}^2 + {\lambda_v}^2}} \quad , \quad \sin\phi = \frac{\lambda_v}{\sqrt{{\lambda_u}^2 + {\lambda_v}^2}} \quad (14)$$

معادلات شبه حالت نیز با استفاده از تئوری اویلر-لاگرانژ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\lambda_u\left(-\frac{v^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_v \frac{uv}{r^2}$$
$$\dot{\lambda}_u = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r}$$
$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_u\left(\frac{2v}{r}\right) + \lambda_v \frac{u}{r} \quad (15)$$

اکنون معادلات حالت و شبه حالت استخراج شده اند و باید قبل از انتگرال‌گیری شرایط اولیه آنها مشخص باشد. شرایط اولیه متغیرهای حالت معلومند، اما شرایط اولیه متغیرهای شبه حالت لاگرانژ مجهولند. اما تعداد متغیرهای شبه حالت اولیه مستقل را می‌توان کاهش داد. هریک از متغیرهای شبه حالت را می‌توان با تقسیم نمودن همیلتونین به یکی از متغیرهای شبه حالت اولیه به مقدار واحد نرمال نمود. بنابر این دو متغیر شبه حالت اولیه و زمان نهایی مجهول می‌باشند که باید توسط روش پرتابی به دست آیند.

برای مسئله انتقال مداری با تراست به وزن اولیه بزرگ یا نسبت شعاع مدار نهایی به شعاع اولیه کوچک، مسئله را می‌توان با یک فضای بدون جاذبه تقریب زد. همچنین به لحاظ تجربی ثابت شده که تغییرات جرم فضاپیما تاثیر کمی بر مکان هندسی متغیرهای شبه حالت اولیه دارد [23]. بنابر این اگر در معادلات حرکت از دو فرض ساده کننده : 1- جرم ثابت 2- فضای بدون جاذبه ، استفاده شود می‌توان از معادلات حرکت به صورت تحلیلی انتگرال گیری نمود و درنتیجه برای متغیرهای مجهول مسئله روابط تحلیلی بر حسب پارامترهای تراست به وزن اولیه و نسبت شعاع نهایی به شعاع اولیه به دست آورد.

$$t_f = 2\sqrt{\frac{(R-1)}{f}} \quad , \ \lambda_{u0} = \sqrt{\frac{(R-1)}{f}}$$
$$\lambda_{v0} = \frac{(R-1)}{f} \quad , f = \frac{T}{m g_0} \quad , \quad R = \frac{r_f}{r_0} \quad (16)$$

برای صحه‌گذاری روابط فوق، مسئله انتقال مداری بهینه برای تعدادی از بلوک‌های انتقال مداری حل شده و نتایج حل عددی بهینه با نتایج حل تحلیلی با استفاده از روابط فوق الذکر مقایسه شده است. در جدول 1 مشخصات برخی از بلوک‌های انتقال مداری که جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ به کار رفته‌اند ارائه شده است. در شکل 2 نیز برای برخی از بلوک‌های انتقال مداری جدول 1، با استفاده از روش پرتابی فوق الذکر، متغیرهای شبه حالت اولیه و زمان سوزش بر حسب شعاع بی بعد رسم شده اند و نتایج حل عددی بهینه با نتایج تحلیلی مقایسه شده اند. همانطور که از نمودارها مشخص است نتایج تحلیلی با دقت خوبی به نتایج عددی نزدیک می‌باشند.

4- حل بهینه برای حالت چند سوزشی

یک انتقال مداری چند سوزشی شامل فازهای فعال و غیر فعال متناوب می‌باشد. می‌توان نشان داد که فازهای فعال در همسایگی نقاط اوج و حضیض

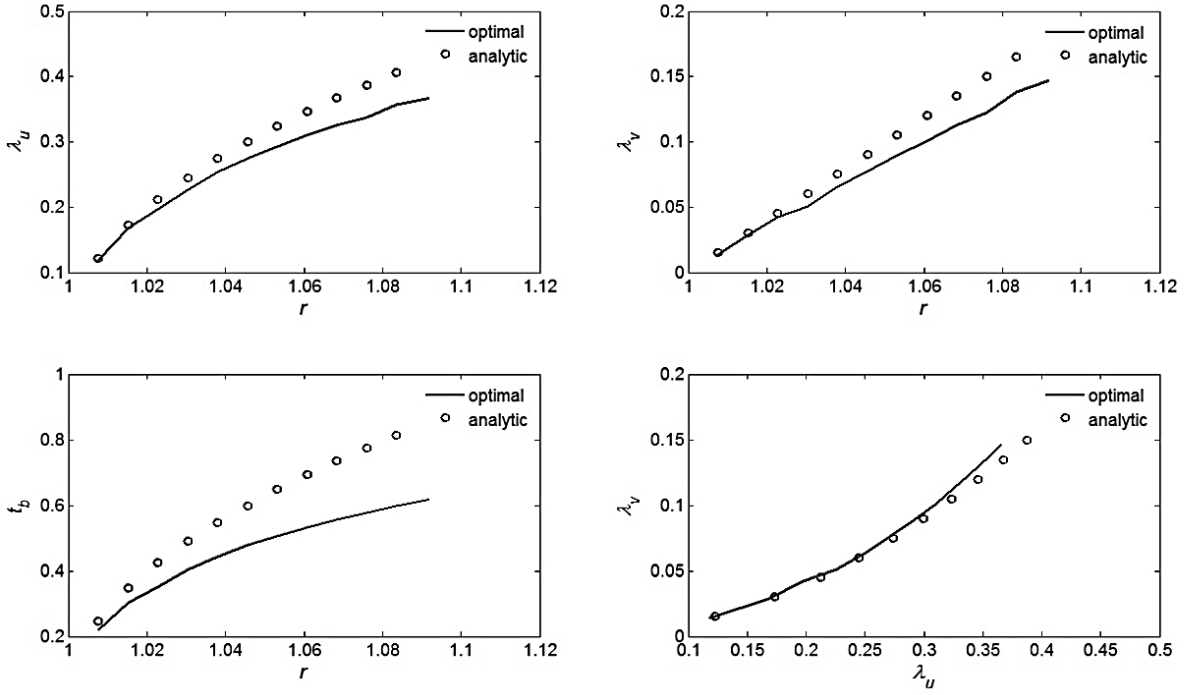

Fig. 2 Results Comparison for Centaur D Upper stage

شکل 2 مقایسه نتایج برای بلوک انتقال مداری سنتور دی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

جدول 1 مشخصات بلوک‌های انتقال مداری

Table 1 The characteristics of geostationary upper stages

نام بلوک	تراست (کیلونیوتن)	دبی جرمی (کیلوگرم بر ثانیه)	جرم سوخت (تن)	جرم کل (تن)	ضربه ویژه (ثانیه)
بریز ام	20	6.14	19.8	22.1	332
بلوک دی ام	85	24.5	15	17.1	353
فریگات	19.61	6.11	6.3	7.48	327
فریگات اس بی	19.85	6.11	10.8	13.4	331
سنتور دی	198.4	44.9	20.8	22.9	450
یاسترب	39.74	8.5	19.7	22.5	476

می‌باشند [20]. در این بازه‌ها موتور با حداکثر تراست کار می‌کند و در سایر زمان‌ها موتور خاموش است. در فاز غیر فعال حرکت فضاپیما در یک میدان مرکزی تحت تأثیر نیروی جاذبه زمین قرار دارد. در این حالت مسیر حرکت یک مدار بیضوی است و از قوانین مسئله دو جسم تبعیت می‌کند.

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \qquad (17)$$

که در آن p پارامتر کانونی، e خروج از مرکز مدار، $\boldsymbol{\theta}$ زاویه آنومالی حقیقی و r شعاع فضاپیما از مرکز زمین است. در شکل 3 بخش فعال مسیر در همسایگی نقطه حضیض مدار بوسیله خط پررنگ 2-1 نشان داده شده است. این مسیر مدار بیضوی قدیم 1 را به مدار بیضوی جدید 2 متصل می‌کند. اگر t_b مدت زمان فاز فعال باشد، e_1, p_1 پارامترهای کانونی و خروج از مرکز مدار قدیم باشند، e_2, p_2 نیز پارامترهای متناظر مدار جدید خواهد بود. برای کاهش چرخش زاویه ای محور مدار بیضوی جدید، بخش فعال مسیر را بطور متقارن حول نقطه حضیض مدار قدیم قرار داده و زمان شروع فاز فعال با $t_1=-0.5t_b$ مشخص می‌شود. به عبارت دیگر زمان روشن شدن موتور در فاز فعال حرکت برابر با $t_b/2$ قبل از عبور از نقطه حضیض می‌باشد.

در گام اول با مشخص بودن پارامترهای مدار بیضوی قدیم و زمان کارکرد موتور، پارامترهای فضاپیما در ابتدای فاز فعال شامل موقعیت، سرعت، جرم و زاویه آنومالی حقیقی، مشخص می‌شوند.

در گام دوم با داشتن شرایط اولیه متغیرهای حالت و شبه حالت در زمان t_1، نقطه 1 شکل 3، مسئله کنترل بهینه را حل نموده و در نقطه انتهای فاز فعال در زمان $t_2= t_1+t_b$، نقطه 2 شکل 3، متغیرهای حالت متناظر شامل موقعیت، سرعت، جرم و زاویه آنومالی حقیقی را به دست می‌آوریم.

در گام سوم با داشتن متغیرهای حالت در انتهای فاز فعال، پارامترهای مدار بیضوی جدید تعیین می‌شوند. در اینجا فرایند انتقال ماهواره از یک مدار به مدار دیگر با استفاده از یک فاز فعال خاتمه می‌یابد. این فرایند سه گامی برای هر فاز فعال تکرار می‌شود.

هر حالت پروازی بهینه بوسیله تعداد، مدت زمان فازهای فعال و زاویه بهینه بردار پیشرانش تعیین می‌شود. فاز فعال در همسایگی حضیض، خروج از مرکز مدار را افزایش می‌دهد و فاز فعال در همسایگی نقطه اوج، خروج از مرکز مدار را کاهش می‌دهد. برای تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ لازم است با انجام یک یا چند مانور در همسایگی نقاط حضیض، خروج از مرکز مدار را از مقدار اولیه صفر به مقدار ماکزیمم آن بر روی مدار میانی افزایش داده و پس از آن نیز با انجام یک یا چند مانور در همسایگی نقاط اوج، خروج از مرکز مدار را به مقدار صفر بر روی مدار نهایی زمین آهنگ کاهش داد.

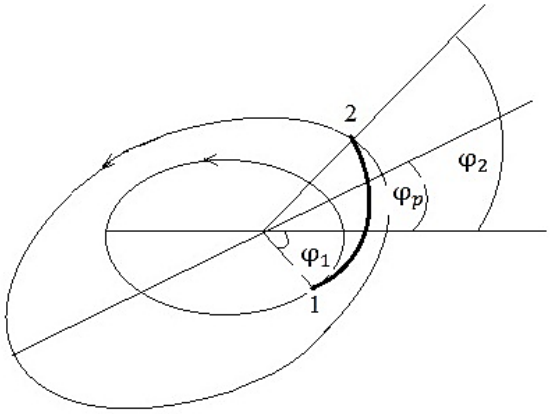

Fig. 3 Optimum burn arc in the neighborhood of the perigee

شکل 3 مسیر بهینه فاز فعال در همسایگی نقطه حضیض

بنابر این تزریق بهینه ماهواره به مدار زمین آهنگ شامل سلسله پروازهایی از فازهای فعال در نقاط حضیض و اوج می‌باشد.

5- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی مسیر بهینه طراحی شده برای بلوک انتقال مداری بریز-ام[1] ارائه می‌گردد. بلوک انتقال مداری مذکور، یک مرحله مستقل با سوخت مایع است که قابلیت ده بار خاموش و روشن شدن مجدد را دارد و مشخصات آن قبلا در جدول 1 ارائه گردیده است. بلوک انتقال مداری فوق الذکر جهت انتقال ماهواره از یک مدار پارک دایره ای با ارتفاع 200 کیلومتر از سطح زمین به یک مدار زمین آهنگ با ارتفاع 36786 کیلومتر بکار می‌رود. برای این انتقال مداری سلسله پروازهای مختلف در نظر گرفته شده و برای هریک از آنها مسیر بهینه استخراج شده است که در ادامه نتایج آنها به صورت بی بعد ارائه شده است. در شکل‌های 4 تا 7 نتایج عددی مسیر بهینه برای یک انتقال مداری دو سوزشی نشان داده شده است. در شکل‌های 4 و 5 مسیر بهینه به ترتیب برای سوزش‌های اول و دوم در دستگاه مختصات قطبی رسم شده است که شامل پارامترهای ارتفاع، سرعت‌های شعاعی و مماسی، زاویه قطبی (آنومالی حقیقی)، زاویه تراست در صفحه پرواز و زاویه مسیر پرواز می‌باشند. در شکل 6 نیز مسیر بهینه برای یک انتقال مداری دو سوزشی کامل، شامل مسیر فعال- غیرفعال-فعال برای پارامترهای فوق و همچنین تغییرات جرم بلوک انتقال مداری رسم شده است. در شکل 7 مسیر پرواز متناظر با پرواز دو سوزشی در دستگاه مختصات دکارتی در صفحه مداری رسم شده است که شامل مدارهای دایره ای اولیه و نهایی، یک فاز فعال در همسایگی نقطه حضیض مدار انتقالی، یک فاز غیر فعال بیضوی و یک فاز فعال در همسایگی نقطه اوج مدار انتقالی می‌باشند. پارامترهای مدارهای اولیه، میانی و نهایی و مدت زمان بهینه فازهای فعال برای پروازهای دو، سه، چهار و شش سوزشی جهت انتقال ماهواره به مدار زمین آهنگ به ترتیب در جداول 2 الی 5 ارائه شده است.

با بررسی نتایج روش ارائه شده در این مقاله ملاحظه می‌شود که هر فاز فعال با 10 الی 20 تکرار، به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می‌شود که نشان دهنده سرعت همگرایی مطلوب می‌باشد. بنابر این روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر تأمین دقت بسیار خوب، از سرعت همگرایی بالایی نیز برخوردار است.

[1] Breez M

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

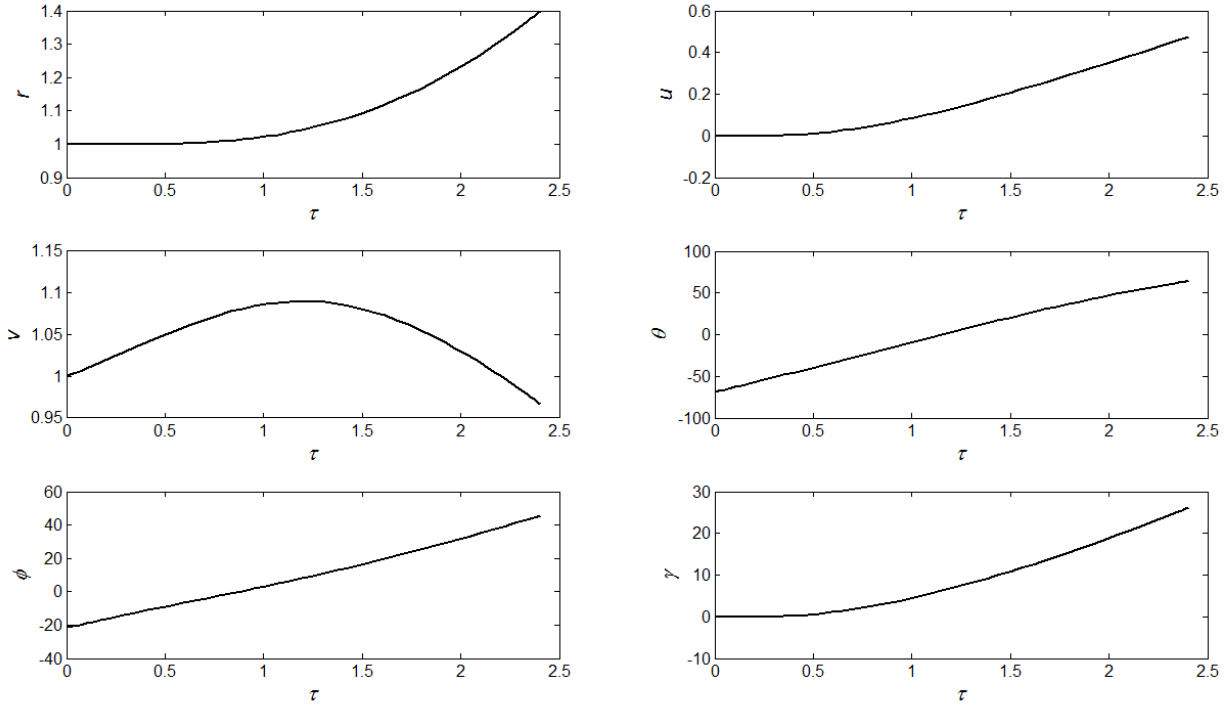

Fig. 4 Optimal trajectory for the first burn of a two burn arcs

شکل 4 مسیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال دو سوزشی

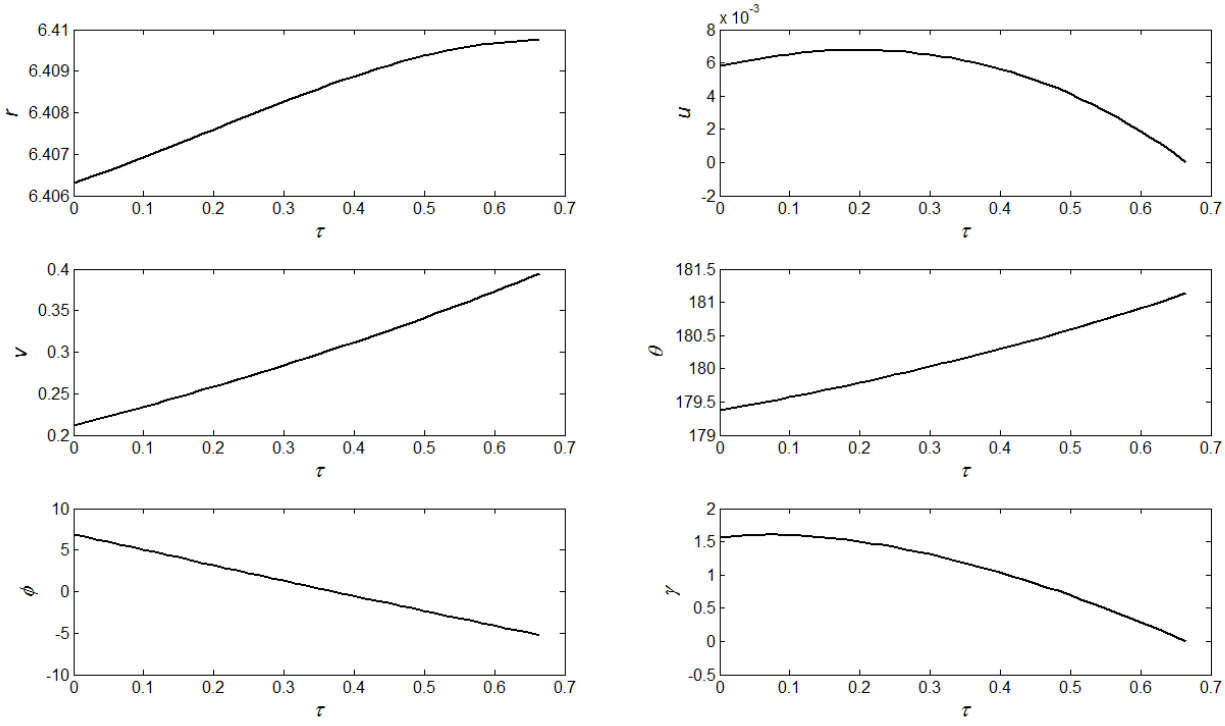

Fig. 5 Optimal trajectory for the second burn of a two burn arcs

شکل 5 مسیر بهینه برای سوزش دوم یک توالی دو سوزشی

همان‌گونه که از شکل‌های 4 تا 7 مشخص است، مسیر بهینه در سوزش اول از مدار پارکینگ دایره ای شروع شده و به نقطه ای ختم می‌شود که شروع یک فاز غیرفعال در مجاورت نقطه حضیض مدار انتقالی بیضوی می‌باشد. فاز غیرفعال تا نزدیکی نقطه اوج مدار انتقالی ادامه می‌یابد. سپس فاز فعال دوم از مجاورت نقطه اوج مدار انتقالی بیضوی شروع شده و به مدار نهایی که همان مدار دایره ای زمین آهنگ است، ختم می‌شود. در شکل 6 سرعت شعاعی و زاویه مسیر پرواز در نقطه پایانی مسیر به صفر رسیده است و اندازه شعاع نهایی نیز برابر با شعاع مطلوب می‌باشد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

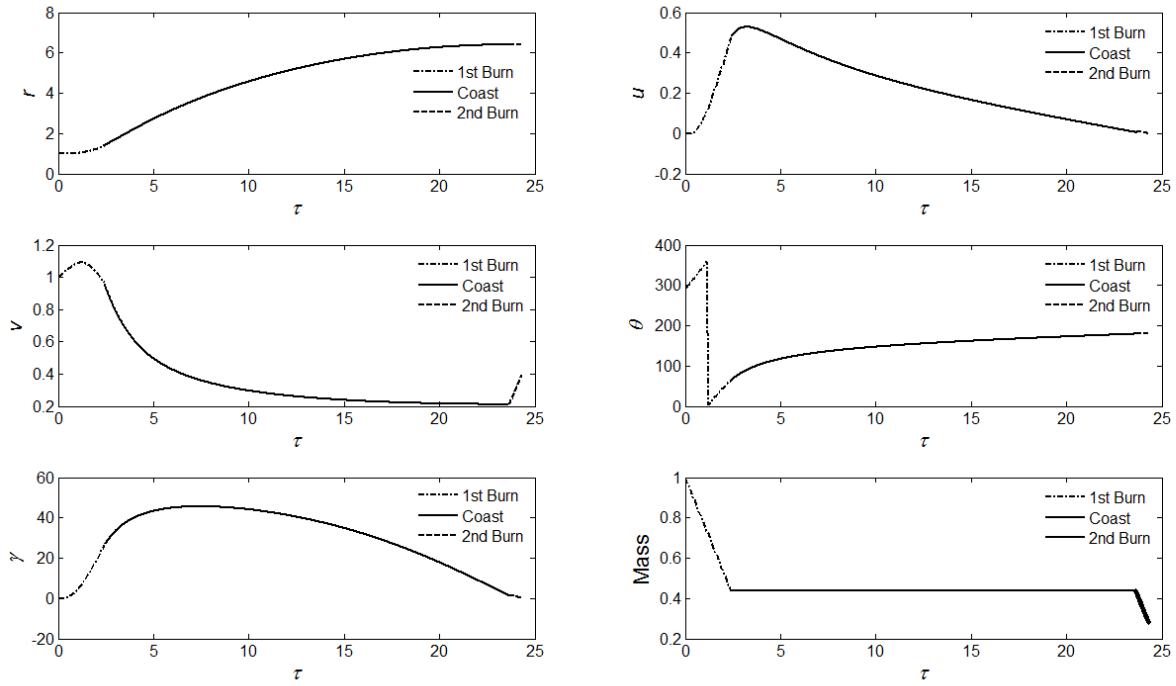

Fig. 6 Optimal trajectory for a burn-coast-burn flight sequence

شکل 6 مسیر بهینه برای یک توالی پروازی فعال- غیرفعال-فعال

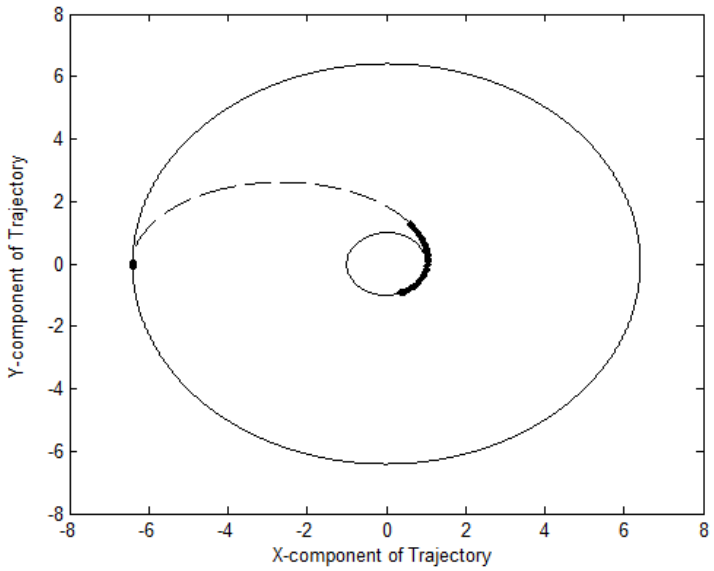

Fig. 7 Optimal trajectory for a burn-coast-burn flight sequence in Cartesian coordinate frame

شکل 7 مسیر بهینه برای یک حالت پروازی فعال- غیرفعال-فعال در دستگاه مختصات دکارتی

جدول 2 انتقال دو سوزشی ماهواره به مدار زمین آهنگ

Table 2 Two burns transfer of satellite into geostationary orbit

نوع مدار	پارامترهای مداری			فازهای فعال	
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	پریود مداری (ساعت)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)
اولیه	6578.1	0	1.47	حضیض	2033	12480
انتقالی	24588	0.7142	10.6585	اوج	562	3451
نهایی	42164	0	23.934	جمع	2595	15931

جدول 3 انتقال سه سوزشی ماهواره به مدار زمین آهنگ

Table 3 Three burns transfer of satellite into geostationary orbit

نوع مدار	پارامترهای مداری			فازهای فعال		
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	پریود مداری (ساعت)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)
اولیه	6578.1	0	1.47	حضیض	905	5554.6
انتقالی	8733.1	0.2456	2.2561	حضیض	1047.1	6429.5
انتقالی	24438	0.7247	10.561	اوج	600.6	3687.8
نهایی	42164	0	23.9344	جمع	2552.4	15672

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

به منظور تصدیق و صحه گذاری روش ارائه شده، نتایج انتقال مداری پنج

جدول 4 انتقال چهار سوزشی ماهواره به مدار زمین آهنگ

Table 4 Four burns transfer of satellite into geostationary orbit

نوع مدار	پارامترهای مداری			فازهای فعال	
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	پریود مداری (ساعت)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)
اولیه	6578.1	0	1.47	حضیض	574	3525.3
انتقالی	7733.1	0.1481	1.8799	حضیض	650	3991
انتقالی	10491	0.3706	2.9704	حضیض	703	4316.4
انتقالی	24374	0.7281	10.5197	اوج	618	3797.4
نهایی	42164	0	23.9344	جمع	2546	15630

جدول 5 انتقال شش سوزشی ماهواره به مدار زمین آهنگ

Table 5 Six burns transfer of satellite into geostationary orbit

نوع مدار	پارامترهای مداری			فازهای فعال	
	نیم قطر اصلی (کیلومتر)	خروج از مرکز	پریود مداری (ساعت)	مکان سوزش	زمان سوزش (ثانیه)	سوخت مصرفی (کیلوگرم)
اولیه	6578.1	0	1.47	حضیض	435	2670.9
انتقالی	7363.1	0.1039	1.7466	حضیض	357	2191.98
انتقالی	8365.6	0.2107	2.1152	حضیض	345	2118.3
انتقالی	9895.6	0.3317	2.7213	حضیض	387	2376.18
انتقالی	13251	0.5002	4.2166	حضیض	404	2480.56
انتقالی	24394	0.7283	10.5326	اوج	612	3757.68
نهایی	42164	0	23.9344	جمع	2540	15595.6

سوزشی مقاله حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [20] مقایسه شده و در جدول 6 ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود مدت زمان فازهای فعال و درنتیجه میزان مصرف سوخت روش ارئه شده در این مقاله از مقادیر مرجع فوق الذکر کمتر می‌باشد. در مرجع مذکور صرفاً تعداد و مدت زمان فازهای فعال بهینه می‌شود ولی در روش ارائه شده در این مقاله، علاوه بر تعیین بهینه تعداد و مدت زمان فازهای فعال، زاویه تراست نیز با استفاده از تئوری کنترل بهینه و به صورت تابعی از متغیرهای شبه حالت تعیین می‌شود. در انتها نیز نتایج حل بهینه با حالت حل زیر-بهینه که در آن زاویه تراست در راستای بردار سرعت می‌باشد، با فرض زمان سوزش مساوی استخراج و با یکدیگر مقایسه شده اند. برای نمونه تنها به نتایج انتقال مداری دو سوزشی بسنده شده است. این نتایج در شکل‌های 8 و 9 ارائه شده است. اختلاف مقادیر نهایی موقعیت، سرعت شعاعی و سرعت مماسی حل بهینه با حل زیر-بهینه در جدول 7 ارائه شده است.

جدول 6 انتقال پنج سوزشی به مدار زمین آهنگ و مقایسه آن با مرجع [20]

Table 6 Five burns transfer into GEO and comparison with Ref. [20]

نوع مدار	خروج از مرکز		زمان سوزش (ثانیه)		سوخت مصرفی (کیلوگرم)	
	مقاله حاضر	مرجع [20]	مقاله حاضر	مرجع [20]	مقاله حاضر	مرجع [20]
اولیه	0	0	474	478	2913.1	2934.9
انتقالی	0.1187	0.11689	456	479	2802.5	2941
انتقالی	0.2612	0.26119	466	481	2862.6	2953.3
انتقالی	0.4457	0.44576	524	540	3215.1	3315.6
انتقالی	0.728	0.72800	621	634	3811.2	3892.7
نهایی	0	0.00208	2541	2612	15604	16037.5

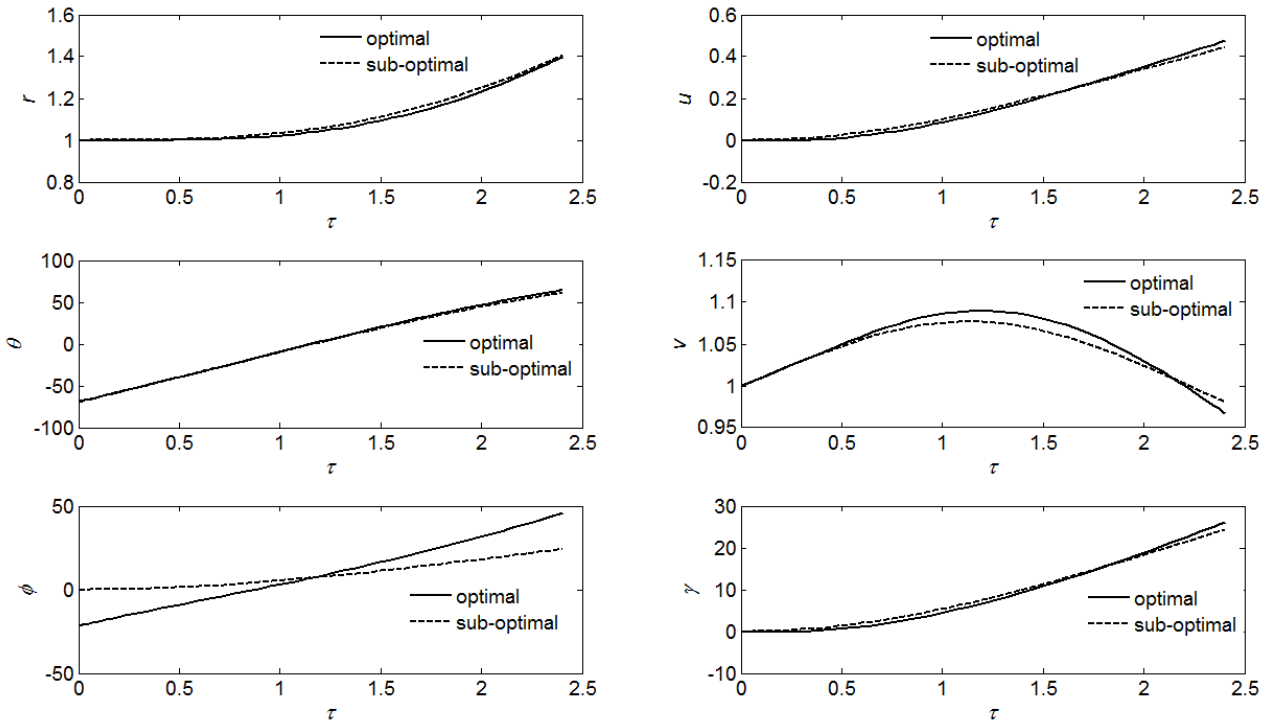

Fig. 8 Comparison of Optimal and sub-optimal trajectory for the first burn of a two burns orbit transfer

شکل 8 مقایسه مسیر بهینه با زیر بهینه برای سوزش اول یک انتقال مداری دو سوزشی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

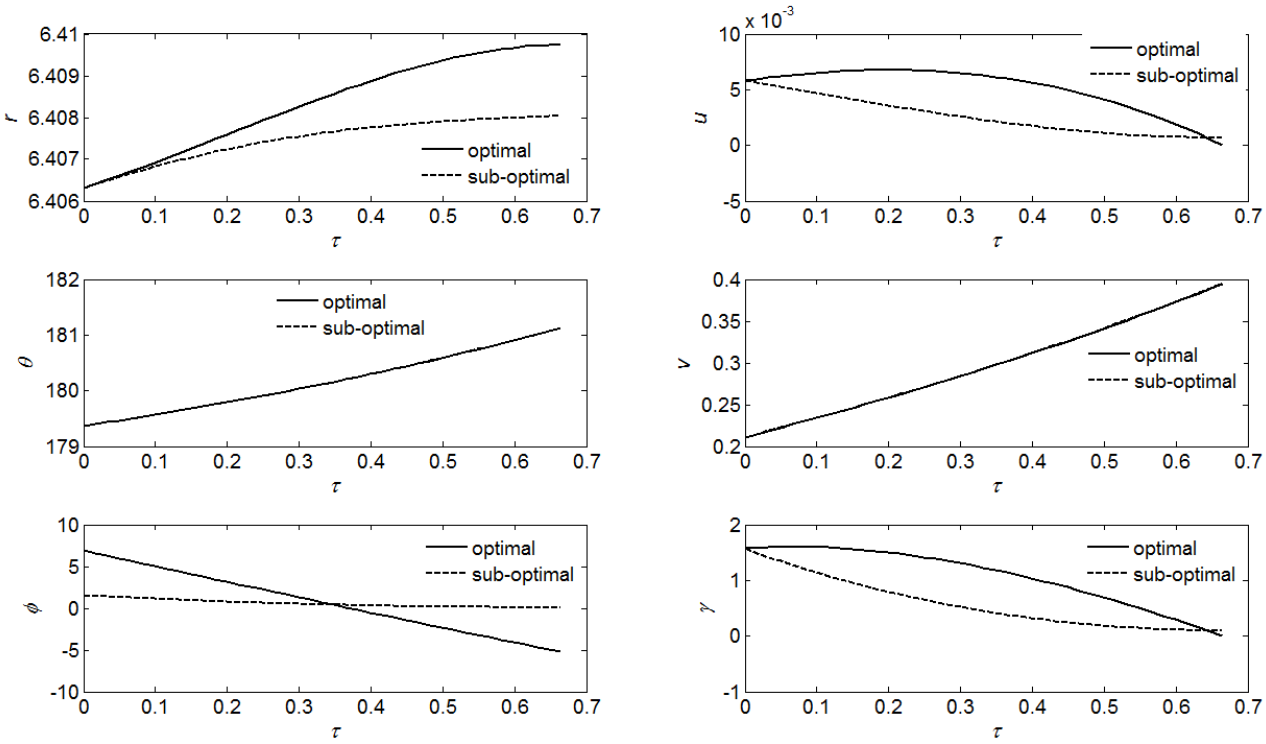

Fig. 9 Comparison of Optimal and sub-optimal trajectory for the second burn of a two burns orbit transfer

شکل 9 مقایسه مسیر بهینه با زیر بهینه برای سوزش دوم یک انتقال مداری دو سوزشی

جدول 7 مقایسه نتایج حل بهینه با حل زیر-بهینه

Table 7 Comparison the Optimal and sub-optimal solutions

شعاع نهایی		سرعت شعاعی نهایی		سرعت مماسی نهایی	
حل بهینه	حل زیر-بهینه	حل بهینه	حل زیر-بهینه	حل بهینه	حل زیر-بهینه
6.4097	6.4080	-2.2684e-08	7.0656e-04	0.3950	0.3954

از شکل‌های 8 و 9 ملاحظه می‌شود که نتایج مسیر بهینه با مسیر زیربهینه تفاوت اندکی دارد که مقادیر کمی آنها در نقطه تزریق نهایی در جدول 7 ارائه شده است. اختلاف اندازه مقادیر سرعت در نقطه تزریق نهایی برابر با 6.32 [m/s] می‌باشد و اختلاف شعاع نهایی آنها حدودا 10 [km] است که برای جبران این خطاها حدود یکصد کیلوگرم سوخت مورد نیاز می‌باشد.

6- نتیجه‌گیری

مسئله طراحی مسیر بهینه یک بلوک انتقال مداری جهت تزریق ماهواره به مدار زمین آهنگ با تراست محدود و قابلیت خاموش و روشنی مجدد و مقایسه آن با حالت زیر-بهینه مورد بررسی قرار گرفت. مسئله با استفاده از تئوری کنترل بهینه فرموله گردید و زاویه بهینه بردار پیشران، با معیار حداقل مصرف سوخت تعیین گردید. انتقال‌های مداری مختلف با سوزش‌های چندگانه، با استفاده از یک بلوک انتقال مداری با پیشران شیمیایی و تراست متوسط بررسی و برای هریک از آنها مسیر بهینه، زمان‌های شروع سوزش موتور و مدت زمان بهینه هر یک از مانورهای بلوک انتقال مداری استخراج گردید. همچنین نتایج حل بهینه با حالت حل زیر-بهینه که در آن زاویه بردار نیروی پیشرانش در راستای بردار سرعت فرض شده، مقایسه گردید. برای حل مسئله شرط مرزی در چند نقطه از یک روش پرتابی غیرمستقیم با کارایی بالا همراه با روش نیوتن بهبودیافته استفاده شده که علاوه بر دقت بسیار بالا، با سرعت خوبی به شرایط مرزی مورد نظر همگرا می‌شود. تصدیق و صحه‌گذاری روش ارائه شده بوسیله مقایسه نتایج انتقال مداری پنج سوزشی مقاله حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [20] صورت گرفت و ملاحظه گردید که مدت زمان فازهای فعال و میزان مصرف سوخت روش ارئه شده در این مقاله از مقادیر مرجع فوق الذکر کمتر می‌باشد. علاوه بر این حل بهینه با حل زیر-بهینه که در آن زاویه تراست در راستای بردار سرعت می‌باشد، با فرض زمان سوزش مساوی استخراج و با یکدیگر مقایسه شدند.

7- مراجع

[1] K. Brown, G. Johnson, Real-time optimal guidance, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 12, No. 5, pp. 501-506, 1967.
[2] K. Brown, E. Harrold, G. Johnson, Some new results on space shuttle atmospheric ascent optimization, *Guidance, Control and Flight Mechanics Conference*, August 17-18, 1970.
[3] A. J. Calise, S. Tandon, D. H. Young, S. Kim, Further improvements to a hybrid method for launch vehicle ascent trajectory optimization, *AIAA-2000-4261, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 14-17, 2000.
[4] G. A. Dukeman, Atmospheric ascent guidance for rocket-powered launch vehicles, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 5-8, 2002.
[5] G. Dukeman, A. J. Calise, Enhancements to an atmospheric ascent guidance algorithm, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 11-14, 2003.
[6] L. A. Zhang, *Fixed-point Framework for Launch Vehicle Ascent Guidance*, PhD thesis, Iowa State University, 2006.
[7] K. Brown, E. Harrold, G. Johnson, Some new results on Space Shuttle atmospheric ascent optimization, *Guidance, Control and Flight Mechanics Conference*, August 17-18, 1970.
[8] A. Cohen, K. R. Brown, Real-time optimal guidance for orbital maneuvering, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 9, pp. 1266-1272, 1973.
[9] D. J. Jezewski, Optimal analytic multiburn trajectories, *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 5, pp. 680-685, 1972.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]

Conference, Boston 2013.
[20] A. S. Bortakovskii, A. A. Konovalova, Optimal injection of a satellite into geostationary orbit using a limited number of thruster firings, *Journal of Computer and Systems Sciences*, Vol. 52, No. 6, pp. 938-948, 2013.
[21] E. Maani, A. R. Kosari, M. Fakoor, Two-objective optimization of GEO communication satellite trajectory considering continuous orbital maneuver, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 7, pp. 142-152, 2013. (In Persianفارسی)
[22] E. Maani, A. R. Kosari, M. Fakoor, Two-objective optimization of GEO communication satellite trajectory considering impulsive orbital maneuver, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 121-128, 2014. (In Persianفارسی)
[23] A. Kosari, S. A. Razavi, H. Jahanshahi, Optimization of planar low-thrust orbit transfer maneuver via fuzzy optimal control approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 1-10, 2017. (In Persianفارسی)
[24] M. Nosratollahi, M. Zakeri, A. Novinzadeh, An optimized method for upper-stage system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 101-110, 2016. (In Persianفارسی)
[25] M. Alavipour, A. A. Nikkhah, J. Roshanian, Minimum time multiple-burn optimization of an upper stage with a finite thrust for satellite injection into geostationary orbit, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2017.
[26] A. E. Bryson, *Applied optimal control: Optimization, estimation and control*, pp. 75-85, CRC Press; 1975.
[27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, pp. 745-765, Cambridge University Press, 1988
[28] J. D. Thorne, C. D. Hall, Approximate initial Lagrange costates for continuous-thrust spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* Vol. 19, No. 2, pp. 283-288, 1996.
[10] A. J. Calise, S. Tandon, D. H. Young, S. Kim, Further improvements to a hybrid method for launch vehicle ascent trajectory optimization, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 14-17, 2000.
[11] P. F. Gath, A. J. Calise, Optimization of launch vehicle ascent trajectories with path constraints and coast arcs, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 2, pp. 296-304, 2001.
[12] P. Lu, B. J. Griffin, G. A. Dukeman, F. R. Chavez, Rapid optimal multiburn ascent planning and guidance, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, pp. 1656-1664, 2008.
[13] P. Binfeng, P. Lu, Rapid optimization of multiburn rocket trajectories revisited, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Chicago, Illinois, August 10-13, 2009.
[14] B. R. Jamison, V. Coverstone, Analytical study of the primer vector and orbit transfer switching function, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, pp. 235-245, 2010.
[15] S. W. Thrasher, T. J. Fill, Orion's exoatmospheric burn guidance architecture and algorithm, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 08-11, 2011.
[16] B. Pan, P. Lu, Z. Chen, Three-dimensional closed-form costate solutions in optimal coast, *Acta Astronautica*, Vol. 77, pp. 156-166, 2012.
[17] S. Hernandez, M. R. Akella, Finite-Thrust orbit transfers to any circular-equatorial orbit using lyapunov-based feedback control, *Fifth International Conference on Spacecraft Formation Flying Missions and Technologies*, 2013.
[18] T. C. Oliveira, E. M. Rocco, J. L. Ferreira, A. F. Prado, Minimum fuel low-thrust transfers for satellites using a permanent magnet hall thruster, *Mathematical Problems in Engineering*, Feb- 25, 2013.
[19] A. Heydari, S. N. Balakrishnan, Optimal orbit transfer with on-off actuators using a closed form optimal switching scheme, *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control*

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.6.52.2]