



## تحلیل رفتار دینامیکی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی هدفمند با تغییرات پله‌ای ضخامت تحت نیروهای دینامیکی مختلف

محمد ملاعلی‌پور\*

استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

\* بابلسر، صندوق پستی 47416-13534، m.mollaalipour@umz.ac.ir

### چکیده

در این مطالعه خمش دینامیکی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تغییرات پله‌ای ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس تئوری برشی مرتبه اول استخراج شده و با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی بر مبنای روش‌های سری توانی و رانج-کوتای مرتبه چهارم حل شده است. براساس روند تحلیل ارائه شده رفتار دینامیکی ورق‌ها تحت بارگذاری‌های دینامیکی مختلف از قبیل نیروهای پله‌ای، پالس پله‌ای، پالس مثلثی و نوسانی که می‌تواند بر هر ناحیه دلخواهی از ورق اعمال شود، قابل محاسبه است. همچنین ورق‌های نامتقارن عرضی متشکل از قسمت‌های پله‌ای متنوع و با شرایط مرزی مختلف قابل تحلیل است. جهت استخراج مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم، ورق‌های پله‌ای حلقوی به قسمت‌های مختلف حلقوی با ضخامت ثابت و ورق‌های پله‌ای دایره‌ای نیز به قسمت‌های مختلف حلقوی و یک قسمت دایره‌ای ضخامت ثابت تقسیم شده‌اند. معادلات حاکم برای هر یک از قسمت‌ها به صورت مجزا نوشته شده، سپس شرایط پیوستگی مربوط به جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در محل اتصال بخش‌های مختلف اعمال شده است. مقایسه انجام شده با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود (با استفاده از نرم‌افزار آباکوس) براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی نشان می‌دهد که روند تحلیل ارائه شده برای ورق‌های متنوع تحت بارگذاری‌های دینامیکی مختلف از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 12 اردیبهشت 1395  
پذیرش: 13 خرداد 1395  
ارائه در سایت: 02 مرداد 1395  
کلید واژگان:  
رفتار دینامیکی  
روش نیمه تحلیلی  
خمش  
ورق پله‌ای

## Dynamic behavior analysis of FG circular and annular plates with stepped variations of thickness under various load

Mohammad Molla-Alipour\*

Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar 47416-13534, Iran

\* P.O.B. 47416-13534 Babolsar, Iran, m.mollaalipour@umz.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 01 May 2016  
Accepted 02 June 2016  
Available Online 23 July 2016

Keywords:  
Dynamic Behaviour  
Semi-analytical Solution  
Bending  
Stepped plate

### ABSTRACT

In this study, dynamic bending of FG circular and annular plates with stepped thickness variations is examined. System of governing differential equations is derived based on the first order shear deformation theory and solved by using a semi-analytical method based on the power series and the fourth-order Runge-Kutta methods. On the basis of presented solution procedure, dynamic behavior may be obtained for the plates under various dynamic loads such as stepped, stepped pulse, triangular pulse and harmonic loads which can be imposed on the arbitrary parts of plates. Also, transverse asymmetric plates with various stepped segments with various boundary conditions may be analyzed. For derivation of system of governing differential equations, Stepped annular plates are divided into multiple constant thickness annular segments and stepped circular plates are divided into multiple annular and one circular segment with constant thickness. Governing equations are written for each segment, individually. Then, continuity conditions of displacements and stresses are imposed between various segments. Comparisons made with results of a numerical finite element code (ABAQUS software) on the basis of the three dimensional theory of elasticity reveal that the obtained results by using the proposed solution procedure have very good accuracy for various stepped plates under various dynamic loads.

### 1- مقدمه

کمک بسیاری به طراحان می‌کند که به دلیل وجود پیچیدگی نسبی، مطالعات کمتری بر رفتار دینامیکی و گذرای سازه‌ها انجام شده است. چن [1] رفتار دینامیکی ورق‌های دایره‌ای متقارن را توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش‌های عددی مورد تحلیل قرار داد. سیوالک [2] با استفاده از روش‌های عددی، خمش استاتیکی و دینامیکی ورق‌های

تحلیل ورق‌ها و پوسته‌ها به عنوان اجزاء اصلی تشکیل دهنده سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در برخی موارد به دلیل وجود محدودیت‌ها و یا جهت بهینه‌سازی وزن، این اجزاء با تغییرات پله‌ای ضخامت ساخته می‌شوند. از سوی دیگر بررسی یافتن پاسخ دینامیکی اجزاء در اثر بارگذاری‌های مختلف

Please cite this article using:

M. Molla-Alipour, Dynamic behavior analysis of FG circular and annular plates with stepped variations of thickness under various load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 251-260, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کلاسیک ورق به‌صورت عددی تحلیل کردند. براساس تئوری برشی مرتبه اول، هانگ و همکاران [11] یک حل دقیق برای معادلات ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای همگن در حالتی که شرایط مرزی آزاد برقرار باشد ارائه کردند. با استفاده از روش انرژی، رهایی و همکاران [12] کمناش ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند. با استفاده از تئوری کلاسیک ورق و روش لوی<sup>7</sup>، رادساوولچچ و درازیچ [13] حل دقیق معادلات کمناش ورق مستطیلی پله‌ای که دو مرز تحت نیروی فشاری گیردار و دو مرز دیگر آزاد باشد محاسبه کردند. جبارزاده و همکاران [14] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول به تحلیل کمناش حرارتی ورق‌های دایره‌ای ضخامت متغیر پرداختند. در مطالعه انجام‌شده توسط ایشان تغییرات ضخامت به‌صورت پیوسته در نظر گرفته شده و همچنین خواص ورق در راستای عرضی به گونه‌ای تغییر می‌کند که سطح میانی از جنس فلز خالص و سطوح آزاد از جنس سرامیک خالص باشد. حسینی‌هاشمی و همکاران [15] ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای و حلقوی را براساس تئوری برشی مرتبه اول و با استفاده از یک حل دقیق مطالعه کردند. در مطالعاتی که توسط دووان و وانگ [16] و دووان و همکاران [17] انجام شد به ترتیب ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی و دایره‌ای نازک همگن با استفاده از تئوری کلاسیک بررسی شد.

به طور نسبی تحلیل‌هایی که بر ورق‌های پله‌ای انجام شده بسیار محدود بوده و همچنین بیشتر مطالعات انجام‌شده بر ورق‌های پله‌ای، دارای محدودیت‌های تحلیل مختلفی است که می‌توان به مواردی از جمله متقارن‌بودن ورق در راستای عرضی، تعداد ناپیوستگی محدود (عمدتاً یک ناپیوستگی)، بارگذاری‌های معین و یا شرایط مرزی خاص اشاره کرد. طبق اطلاعات نویسنده، تاکنون مطالعه‌ای بر خمش دینامیکی ورق‌های پله‌ای صورت نگرفته است. این مقاله به بررسی خمش دینامیکی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی هدفمند با تغییرات پله‌ای ضخامت تحت بارهای دینامیکی در حالت کلی می‌پردازد. بدین منظور از تئوری برشی مرتبه اول و یک روش نیمه تحلیلی استفاده شده است. جهت دست‌یابی به معادلات حاکم بر ورق‌های پله‌ای، ابتدا معادلات حاکم بر هر یک از قسمت‌ها نوشته شده و پس از حل معادلات، شرایط پیوستگی جابه‌جایی و تنش به همراه شرایط مرزی مربوط به قسمت‌های داخلی و خارجی ورق اعمال شده است. از روش سری توانی<sup>8</sup> جهت حل مجموعه معادلات دیفرانسیل نسبت به پارامتر هندسی استفاده شده و همچنین از روش رانج-کوتای مرتبه چهارم<sup>9</sup> جهت حل وابستگی زمانی معادلات بهره گرفته شده است. در روند ارائه‌شده جهت تحلیل، محدودیتی برای تعداد ناپیوستگی‌ها، نوع بارگذاری دینامیکی و شرایط مرزی وجود نداشته و همچنین ورق‌های نامتقارن عرضی نیز قابل تحلیل است. براساس این تحلیل محدودیت اعمال نیروی یکنواخت بر تمام سطح ورق وجود نداشته و بر قسمت‌های مختلف می‌تواند نیروهای دینامیکی دلخواه اعمال شود.

## 2- مدل‌سازی دینامیکی ورق دایره‌ای<sup>10</sup> و حلقوی<sup>11</sup> پله‌ای

در این قسمت روابط حاکم بر ورق دایره‌ای و یا حلقوی پله‌ای که مطابق شکل 1 از قسمت‌های مختلفی (1 تا  $m$ ) تشکیل شده‌اند ارائه گردیده است. جهت تحلیل این ورق‌ها، ابتدا معادلات حاکم برای هر یک از قسمت‌های آن براساس تئوری برشی مرتبه اول<sup>12</sup> [19,18] نوشته شده و سپس شرایط

مستطیلی نازک مستقر بر بستر الاستیک را تحلیل کردند. در مطالعه مورد نظر نیروی عرضی به‌صورت یکنواخت بر سطح ورق توزیع شده و چهار حالت دینامیکی که در ادامه ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفته است. الف) نیروی پله‌ای نامحدود که در آن یک نیرو به‌صورت پله در ابتدا اعمال شده و همواره ثابت باقی می‌ماند. ب) بارگذاری نوسانی که به‌صورت سینوسی از صفر آغاز شده و در مدت محدودی اعمال می‌شود. ج) بارگذاری  $N$  شکل که در آن یک نیروی ثابت که در ابتدا وجود دارد به‌صورت خطی کاهش می‌یابد تا به همان مقدار در جهت مخالف برسد و سپس به‌صورت پله‌ای به صفر می‌رسد. د) بارگذاری مثلثی که در آن یک نیروی ثابت که در ابتدا وجود دارد به‌صورت خطی کاهش می‌یابد تا به مقدار صفر برسد. پنگ و همکاران [3] حالت دینامیکی ورق دایره‌ای متقارن را بررسی کردند. در این مطالعه از تئوری کلاسیک ورق و کرنش‌های غیر خطی استفاده شده است. ایشان ابتدا با استفاده از تئوری اغتشاشات<sup>1</sup> معادله غیرخطی را به مجموعه‌ای از معادلات خطی تبدیل کردند و سپس معادلات خطی را تحلیل کردند. رضایی‌مژدهی و همکاران [4] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته سبعمدی و روش بدون مش پتروف-گلرکین<sup>2</sup> پرداختند. در تحلیل دینامیکی انجام شده، ورق تحت نیروی نوسانی به‌صورت سینوسی بررسی شد. یوسچ و آلبوکورک [5] با استفاده از روش المان مرزی<sup>3</sup> به حل عددی معادلات دینامیکی حاکم بر ورق‌های دایره‌ای و مربعی همگن تحت بارگذاری با توزیع یکنواخت پرداختند. بارگذاری‌های دینامیکی در سه حالت بررسی شد. الف) بارگذاری پالس، ب) افزایش نیرو با زمان از صفر تا مقداری مشخص، سپس نیرو کاهش یافته تا به همان مقدار با جهت مخالف برسد در نهایت دوباره نیرو افزایش یافته تا به صفر برسد و حذف گردد. قابل ذکر است که در این حالت نیرو همواره به‌صورت خطی با زمان تغییر می‌کند. ج) بارگذاری نوسانی، همچنین در مطالعه دیگری که توسط ایشان با استفاده از همان روش صورت گرفت [6]، معادلات دینامیکی حاکم بر ورق و پوسته کم<sup>4</sup> عمق همگن حل شد که در این مطالعه علاوه بر بارگذاری‌های بیان‌شده در حالات ب و ج، دو نوع بارگذاری دیگر نیز بررسی شده است. بارگذاری پله‌ای و بارگذاری به گونه‌ای که نیرو با زمان به‌صورت خطی از صفر تا مقداری مشخص افزایش یافته، سپس نیرو کاهش می‌یابد تا به صفر برسد. این حالت بارگذاری دوباره تکرار شده و سپس حذف می‌شود. گل‌مکانی و محرابیان [7] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و معادلات تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن، خمش غیر خطی ورق‌های حلقوی کامپوزیتی را بررسی کردند. هانگ و همکاران [8] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مستقر بر بستر الاستیک غیریکنواخت را مطالعه کردند و با استفاده از تابع گرین<sup>5</sup> به معادله مشخصه ارتعاش آزاد دست یافتند. ساتر و همکاران [9] با استفاده از روش بدون مش<sup>6</sup> خمش دینامیکی ورق‌های هدفمند تحت بارهای عرضی که به‌صورت یکنواخت روی سطح توزیع شده مورد بررسی قرار دادند. خمش ورق تحت نیروهای عرضی پله‌ای و پالس (اعمال نیرو در یک بازه زمانی کوتاه) در مطالعه انجام شده مورد تحلیل قرار گرفت.

در رابطه با مطالعاتی که بر ورق‌ها با تغییرات پله‌ای ضخامت انجام شده، بیشتر تحقیقات مربوط به تحلیل‌های مقادیر ویژه خصوصاً تحلیل ارتعاش آزاد است. وو و همکاران [10] ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای پله‌ای را با استفاده تئوری

<sup>7</sup> Meshless Method

<sup>8</sup> Power series method

<sup>9</sup> Fourth-order Runge-Kutta

<sup>10</sup> Circular

<sup>11</sup> Annular

<sup>12</sup> First order Shear Deformation Theory (FSDT)

<sup>1</sup> Perturbation technique

<sup>2</sup> Meshless local Petrov-Galerkin method

<sup>3</sup> Boundary element method

<sup>4</sup> shallow shells

<sup>5</sup> Green function

<sup>6</sup> Meshless Method

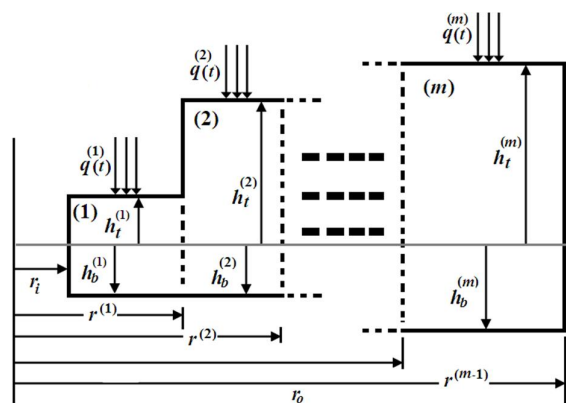


Fig. 1 Model of a stepped circular/annular plate

شکل 1 مدلی از ورق دایره‌ای یا حلقوی پله‌ای

ورق شماره 1  $(r_i)$  و شعاع خارجی ورق‌های حلقوی و دایره‌ای کامل (شعاع خارجی ورق شماره  $m$   $(r_o)$ ) به صورت روابط (4-6) قابل بیان است.

الف) شرط مرزی برای تکیه‌گاه گیردار

$$\begin{aligned} u_0^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= 0, \\ \psi_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= 0, \\ w_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ب) شرط مرزی برای تکیه‌گاه ساده

$$\begin{aligned} u_0^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= 0, \\ M_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= B^{(1,m)} \left( u_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} u_0^{(1,m)} \right) + \\ &D^{(1,m)} \left( \psi_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} \psi_r^{(1,m)} \right) = 0, \\ w_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ج) شرط مرزی برای تکیه‌گاه آزاد

$$\begin{aligned} N_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= A^{(1,m)} \left( u_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} u_0^{(1,m)} \right) + \\ &B^{(1,m)} \left( \psi_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} \psi_r^{(1,m)} \right) = 0, \\ M_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= B^{(1,m)} \left( u_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} u_0^{(1,m)} \right) + \\ &D^{(1,m)} \left( \psi_{0,r}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} \psi_r^{(1,m)} \right) = 0, \\ Q_r^{(1,m)}|_{r=r_i, r_o} &= \kappa \bar{A}^{(1,m)} (\psi_r^{(1,m)} + w_{,r}^{(1,m)}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

برای ورق دایره‌ای کامل شرایط طبیعی در مرکز ورق به صورت رابطه (7) است که باید با شرط تکیه‌گاهی در لبه خارجی اعمال شود.

$$\begin{aligned} u_0^{(1)}|_{r=0} &= 0, \\ \psi_r^{(1)}|_{r=0} &= 0, \\ w_r^{(1)}|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

برای حالتی که ورق از قسمت‌های مختلفی با ضخامت، خواص و یا بارگذاری متفاوتی تشکیل شده باشد شرایط پیوستگی توابع جابه‌جایی و منتجه‌های تنش در محل تماس باید برقرار گردد به صورت رابطه (8) است.

$$\begin{aligned} u_0^{(i)}|_{r=r_i} &= u_0^{(i+1)}|_{r=r_i'}, \\ \psi_r^{(i)}|_{r=r_i} &= \psi_r^{(i+1)}|_{r=r_i'}, \\ w_r^{(i)}|_{r=r_i} &= w_r^{(i+1)}|_{r=r_i'} \end{aligned}$$

تکیه‌گاهی به همراه شرایط پیوستگی در محل تماس قسمت‌های مختلف اعمال می‌شود. برای ورق حلقوی شرایط تکیه‌گاهی برای مرزهای داخلی و خارجی باید برقرار گردد و برای ورق دایره‌ای کامل شرایط تکیه‌گاهی برای مرز خارجی و شرایط تقارن در مرکز ورق اعمال می‌شود.

شعاع داخلی ورق است که برای ورق دایره‌ای کامل مقدار آن صفر خواهد بود.  $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$  شعاع محل وجود ناپیوستگی‌هایی است که می‌تواند ناشی از تغییرات ناگهانی جنس، ضخامت و یا بارگذاری باشد. همچنین شعاع خارجی ورق است.

ورق مورد بررسی به صورت هدفمند در نظر گرفته شده است که خواص هر قسمت آن طبق رابطه (1) در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} E^{(i)} &= (E_m^{(i)} - E_c^{(i)}) V_f^{(i)}(z) + E_c^{(i)}, \\ \rho^{(i)} &= (\rho_m^{(i)} - \rho_c^{(i)}) V_f^{(i)}(z) + \rho_c^{(i)}, \\ V_f^{(i)} &= \left( \frac{z}{h^{(i)}} + \frac{1}{2} \right)^{q^{(i)}} \end{aligned} \quad (1)$$

$E^{(i)}$  و  $\rho^{(i)}$  مدول یانگ و چگالی هر قسمت از ورق است که در سطح رویین فلز  $(E_m^{(i)}, \rho_m^{(i)})$  و در سطح زیرین سرامیک  $(E_c^{(i)}, \rho_c^{(i)})$  حاصل خواهد شد.  $V_f^{(i)}$  نیز نسبت حجمی فلز است.

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در حالت متقارن محوری، معادلات حاکم برای هر یک از قسمت‌ها را می‌توان به صورت سه معادله دیفرانسیل مرتبه دو به صورت رابطه (2) بیان کرد.

$$\begin{aligned} A^{(i)} \left( u_{0,rr}^{(i)} + \frac{u_{0,r}^{(i)}}{r} - \frac{u_0^{(i)}}{r^2} \right) + \\ B^{(i)} \left( \psi_{r,rr}^{(i)} + \frac{\psi_{r,r}^{(i)}}{r} - \frac{\psi_r^{(i)}}{r^2} \right) &= I_0^{(i)} \ddot{u}_0^{(i)} + I_1^{(i)} \ddot{\psi}_r^{(i)} \\ B^{(i)} \left( u_{0,rr}^{(i)} + \frac{u_{0,r}^{(i)}}{r} - \frac{u_0^{(i)}}{r^2} \right) + \\ D^{(i)} \left( \psi_{r,rr}^{(i)} + \frac{\psi_{r,r}^{(i)}}{r} - \frac{\psi_r^{(i)}}{r^2} \right) \\ - \kappa^2 \bar{A}^{(i)} (\psi_r^{(i)} + w_{,r}^{(i)}) &= I_1^{(i)} \ddot{u}_0^{(i)} + I_2^{(i)} \ddot{\psi}_r^{(i)} \\ \kappa \bar{A}^{(i)} (\psi_{r,r}^{(i)} + w_{,rr}^{(i)}) + \kappa \bar{A}^{(i)} \frac{1}{r} (\psi_r^{(i)} + w_{,r}^{(i)}) &= \\ q^{(i)}(t) + I_0^{(i)} \ddot{w}^{(i)} \end{aligned} \quad (2)$$

بالا نویس  $i$  بیانگر هر یک از قسمت‌های ورق است که از 1 تا  $m$  تغییر می‌کند.  $\kappa$  ضریب تصحیح برش در تئوری برشی مرتبه اول است که مقدار آن 5/6 در نظر گرفته شده است.  $u^{(i)}$  و  $w^{(i)}$  جابه‌جایی‌های شعاعی و عرضی هر قسمت از ورق بوده و همچنین  $u_0^{(i)}$  جابه‌جایی شعاعی لایه میانی و  $\psi_r^{(i)}$  چرخش محور عمود بر صفحه برای هر قسمت است.  $I_0^{(i)}$ ،  $I_1^{(i)}$  و  $I_2^{(i)}$  اینرسی‌های جرمی مرتبه‌های مختلف در هر قسمت است.

مقادیر  $A^{(i)}$ ،  $B^{(i)}$ ،  $D^{(i)}$  و  $\bar{A}^{(i)}$  در مجموعه روابط (2) به صورت رابطه (3) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \\ D^{(i)} \end{Bmatrix} &= \int_{h_b^{(i)}}^{h_t^{(i)}} \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \\ \bar{A}^{(i)} &= \int_{h_b^{(i)}}^{h_t^{(i)}} \frac{E^{(i)}}{2(1 + \nu^{(i)})} dz \end{aligned} \quad (3)$$

شرایط تکیه‌گاهی مختلف در شعاع داخلی ورق حلقوی (شعاع داخلی

با جای‌گذاری روابط (9) و (10) در مجموعه روابط (2) و اعمال برخی ساده‌سازی، معادلات حاکم را می‌توان به صورت ضرایبی از توان‌های مختلف  $(r - r_0)$  به صورت رابطه (11) استخراج کرد.

$$\sum_{l=0}^L \left\{ A^{(i)} \left[ (1+2)(l+1)U_{l+2,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^{l+1} \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+1} (l-n+1)U_{l-n+1,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^l (n+1) \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+2} U_{l-n,j}^{(i)} \right] + B^{(i)} \left[ (1+2)(l+1)\phi_{l+2,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^{l+1} \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+1} (l-n+1)\phi_{l-n+1,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^l (n+1) \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+2} \phi_{l-n,j}^{(i)} \right] - I_0^{(i)} \tilde{U}_{l,j}^{(i)} - I_1^{(i)} \tilde{\phi}_{l,j}^{(i)} \right\} (r-r_0)^l = 0$$

$$\sum_{l=0}^L \left\{ B^{(t)} \left[ (l+1)(l+2)U_{l+2,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^{l+1} \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+1} (l-n+1)U_{l-n+1,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^l (n+1) \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+2} U_{l-n,j}^{(i)} \right] + D^{(t)} \left[ (l+1)(l+2)\phi_{l+2,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^{l+1} \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+1} (l-n+1)\phi_{l-n+1,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^l (n+1) \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+2} \phi_{l-n,j}^{(i)} \right] - k\bar{A}^{(i)} [\phi_{l,j}^{(i)} + (l+1)W_{l+1,j}^{(i)}] - I_1^{(i)} \tilde{U}_{l,j}^{(i)} - I_2^{(i)} \tilde{\phi}_{l,j}^{(i)} \right\} (r-r_0)^l = 0$$

$$\sum_{l=0}^L \left\{ k\bar{A}^{(i)} \left[ (l+1)\phi_{l+1,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^l \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{i+1} \phi_{l-n,j}^{(i)} + (l+1)(l+2)W_{l+2,j}^{(i)} - \sum_{n=0}^{l+1} \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{i+1} (l-n+1)W_{l-n+1,j}^{(i)} \right] + P_l^{(i)} f^{(i)}(j \Delta t) - I_0^{(i)} \tilde{W}_{l,j}^{(i)} \right\} (r-r_0)^l = 0 \quad (11)$$

$L$  تعداد جمله‌های سری توانی است و به نحوی تعیین می‌شود تا پاسخ‌ها با دقت مورد نظر همگرا گردد. جهت برقراری معادلات حاکم که به صورت مجموعه روابط (11) بیان شده است، ضرایب توان‌های مختلف  $(r - r_0)$  در هر یک از روابط باید در زمان‌های مختلف صفر شود. با جای‌گذاری مؤلفه‌های جابه‌جایی براساس سری بیان شده توسط رابطه (9) در شرایط مرزی (روابط (6-4))، شرایط مرزی در هر لحظه براساس سری، به صورت رابطه (12)، استخراج خواهند شد. الف) شرط مرزی برای تکیه‌گاه گیردار

$$N_r^{(i)}|_{r=r_i} = N_r^{(i+1)}|_{r=r_i},$$

$$M_r^{(i)}|_{r=r_i} = M_r^{(i+1)}|_{r=r_i},$$

$$Q_r^{(i)}|_{r=r_i} = Q_r^{(i+1)}|_{r=r_i} \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (8)$$

### 3- حل معادلات دینامیکی ورق دایره‌ای و حلقوی دارای ناپوستگی

با توجه به این‌که در تحلیل دینامیکی، توابع جابه‌جایی به متغیرهای مکانی و زمانی وابسته است جهت حل معادلات حاکم از ترکیب روش‌های سری توانی (سری تیلور) و رانج- کوتای مرتبه دوم برای دستیابی به مؤلفه‌های جابه‌جایی براساس مکان و زمان استفاده شده است. در این مطالعه مؤلفه‌های جابه‌جایی، سرعت و شتاب به صورت رابطه (9) در نظر گرفته شده‌اند (سری تیلور حول شعاع خارجی).

$$\begin{cases} u_0^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} U_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l, \\ \psi_r^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \\ w^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} W_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \\ \begin{cases} \dot{u}_0^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{U}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l, \\ \dot{\psi}_r^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \\ \dot{w}^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{W}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{u}_0^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\tilde{U}}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l, \\ \ddot{\psi}_r^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\phi}}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \\ \ddot{w}^{(i)}(r, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\tilde{W}}_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

در روابط بالا  $r_0$  شعاع خارجی و  $l$  شمارنده مربوط به ضرایب سری هندسی سری است. در حالت دینامیکی که سری توانی در هر لحظه تغییر می‌کند از شمارنده  $z$  برای بیان توابع جابه‌جایی در لحظات مختلف استفاده شده است. در واقع  $z$  بیانگر شمارنده گام‌های زمانی است  $(t = j \Delta t)$ . همچنین جهت حل معادلات حاکم، از بسط نیروی خارجی  $q^{(i)}$  و مقادیر  $1/r$  و  $1/r^2$  حول شعاع خارجی به صورت رابطه (10) مورد استفاده قرار گرفته است.

$$q^{(i)} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{(i)} (r-r_0)^l f^{(i)}(t)$$

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+1} (r-r_0)^n$$

$$\frac{1}{r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{1}{r_0}\right)^{n+2} (r-r_0)^n \quad (10)$$

$f(t)$  تابع تغییرات نیرو نسبت به زمان است که می‌تواند به صورت  $f(j \Delta t)$  بیان شود.

شرایط طبیعی در مرکز ورق دایره‌ای کامل نیز براساس سری بیان شده در رابطه (9) در هر لحظه به‌صورت رابطه (18) قابل بیان است.

$$\sum_{l=0}^{L+2} U_{l,j}^{(1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=0} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} \phi_{l,j}^{(1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=0} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} (l+1)W_{l+1,j}^{(1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=0} = 0$$

(18)

روابط پیوستگی نیز براساس سری‌ها به‌صورت روابط (19) قابل نوشتن است.

$$\sum_{l=0}^{L+2} U_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} = \sum_{l=0}^{L+2} U_{l,j}^{(i+1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}},$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} \phi_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} = \sum_{l=0}^{L+2} \phi_{l,j}^{(i+1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}},$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} W_{l,j}^{(i)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} = \sum_{l=0}^{L+2} W_{l,j}^{(i+1)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}}$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ A^{(i)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} U_{l,j}^{(i)} \right) + B^{(i)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} \phi_{l,j}^{(i)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} =$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ A^{(i+1)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(i+1)} + \frac{v^{(i+1)}}{r} U_{l,j}^{(i+1)} \right) + B^{(i+1)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(i+1)} + \frac{v^{(i+1)}}{r} \phi_{l,j}^{(i+1)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}}$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ B^{(i)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} U_{l,j}^{(i)} \right) + D^{(i)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} \phi_{l,j}^{(i)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} =$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ B^{(i+1)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(i+1)} + \frac{v^{(i+1)}}{r} U_{l,j}^{(i+1)} \right) + D^{(i+1)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(i+1)} + \frac{v^{(i+1)}}{r} \phi_{l,j}^{(i+1)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}}$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \bar{A}^{(i)} (\phi_{l,j}^{(i)} + (l+1)W_{l+1,j}^{(i)}) (r-r_0)^l \Big|_{r=r_0^{(i)}} =$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} \bar{A}^{(i+1)} (\phi_{l,j}^{(i+1)} + (l+1)W_{l+1,j}^{(i+1)}) (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i^{(i+1)}} \quad (19)$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} U_{l,j}^{(1,m)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} \phi_{l,j}^{(1,m)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{L+2} W_{l,j}^{(1,m)} (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0$$

(12)

(ب) شرط مرزی برای تکیه‌گاه ساده

شرایط مرزی مربوط به جابه‌جایی شعاعی و عرضی ( $w^{(i)}$  و  $u^{(i)}$ ) مشابه رابطه (12) بوده و شرط دوم (صفر بودن گشتاور خمشی در مرز) به‌صورت رابطه (13) تغییر خواهد یافت.

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ B^{(1,m)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} U_{l,j}^{(1,m)} \right) + D^{(1,m)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} \phi_{l,j}^{(1,m)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0,$$

(13)

(ج) شرط مرزی برای تکیه‌گاه آزاد

در این حالت باید شرط صفر بودن گشتاور خمشی در مرز که توسط رابطه (13) بیان شد همراه شرایط صفر بودن نیروی محوری و نیروی برشی عرضی به‌صورت روابط (14) برقرار گردد.

$$\sum_{l=0}^{L+1} \left[ A^{(1,m)} \left( (l+1)U_{l+1,j}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} U_{l,j}^{(1,m)} \right) + B^{(1,m)} \left( (l+1)\phi_{l+1,j}^{(1,m)} + \frac{v^{(m)}}{r} \phi_{l,j}^{(1,m)} \right) \right] (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{L+1} (\phi_{l,j}^{(1,m)} + (l+1)W_{l+1,j}^{(1,m)}) (r-r_0)^l \Big|_{r=r_i,r_0} = 0$$

(14)

شرایط مرزی در شعاع خارجی ( $r=r_0$ ) به‌صورتی ساده که در ادامه ارائه شده به‌صورت روابط (15-17) قابل بیان است.

(الف) مرز گیردار

$$U_{0,j}^{(m)} = 0,$$

$$\phi_{0,j}^{(m)} = 0,$$

$$w_{0,j}^{(m)} = 0$$

(15)

(ب) مرز ساده

$$U_{0,j}^{(m)} = 0,$$

$$B^{(m)} \left( U_{1,j}^{(m)} + \frac{v^{(m)}}{r_0} U_{0,j}^{(m)} \right) + D^{(m)} \left( \phi_{1,j}^{(m)} + \frac{v^{(m)}}{r_0} \phi_{0,j}^{(m)} \right) = 0,$$

$$w_{0,j}^{(m)} = 0$$

(16)

(ج) مرز آزاد

$$U_{1,j}^{(m)} + \frac{v^{(m)}}{r_0} U_{0,j}^{(m)} = 0,$$

$$\phi_{1,j}^{(m)} + \frac{v^{(m)}}{r_0} \phi_{0,j}^{(m)} = 0,$$

$$\phi_{0,j}^{(m)} + W_{1,j}^{(m)} = 0$$

(17)

ضریب یانگ و چگالی برای فلز آلومینیوم و سرامیک آلومینا به صورت رابطه (23) است.

$$\begin{aligned} E_m &= 70GPa, & \rho_m &= 2700kg/m^3, \\ E_c &= 380GPa, & \rho_c &= 3800kg/m^3 \end{aligned} \quad (23)$$

ضریب پواسون نیز 0.3 لحاظ شده است.

ابتدا خمش دینامیکی ورق دایره‌ای و سپس ورق حلقوی مورد بررسی قرار گرفته و خمش دینامیکی این ورق‌ها در شعاع‌های مختلف رسم شده است. با توجه به این‌که طبق اطلاعات نویسنده تاکنون نتایجی برای تحلیل دینامیکی ورق دایره‌ای و حلقوی پله‌ای ارائه نشده است جهت بررسی دقت و صحت نتایج حاصله، این نتایج با نتایج حاصل از حل اجزای محدود که توسط نرم‌افزار آباکوس استخراج گردیده، مقایسه شده است. در شکل 2 نمونه‌ای از مش‌بندی ورق حلقوی با تغییرات پله‌ای ضخامت نشان داده شده است.

در روش اجزای محدود از روش الاستیسیته سه‌بعدی در حالت متقارن محوری استفاده شده است. جهت یافتن نتایج دقیق‌تر از المان‌های مرتبه دوم 8 گرهی (CAX8R) استفاده شد. ابتدا همگرایی مربوط به تعداد المان‌ها برای شکل‌های هندسی مختلف بررسی شد. برای اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش اجزای محدود برای حالات مختلف، تعداد المان‌ها بیشتر از تعداد لازم برای همگرایی پاسخ در نظر گرفته شده است. بدین منظور برای تحلیل ورق دایره‌ای با ضخامت یکسان 2000 المان، ورق دایره‌ای با تغییرات ضخامت 4800 المان و برای ورق حلقوی 5800 المان لحاظ شده است. جهت تحلیل دینامیکی در نرم‌افزار آباکوس نیز از روش دینامیکی ضمنی<sup>1</sup> استفاده شده است. اگرچه با گام زمانی 1E-4 نیز پاسخ‌های دینامیکی همگرا شده است با این وجود جهت اطمینان از دست‌یابی به پاسخ‌های صحیح در حالات مختلف، گام زمانی به صورت ثابت با مقدار 1E-5 در نظر گرفته شده است.

جهت مدل‌سازی ورق هدفمند در نرم‌افزار آباکوس از روش قسمت‌بندی استفاده شده است. بدین صورت که ورق توسط خطوط افقی با فواصل مساوی به قسمت‌های مختلفی تقسیم شده و سپس به هر قسمت خواص مجزایی اعمال شده است تا سطح روئین از جنس آلومینیوم بوده و به تدریج به آلومینا در سطح زیرین برسد. با افزایش تعداد قسمت‌ها، ورق هدفمند به صورت دقیق‌تر مدل‌سازی خواهد شد. برای یافتن تعداد تقسیمات مورد نیاز، یک بررسی همگرایی انجام و مشاهده شد که با تقسیم ورق به 30 قسمت مجزا و اعمال خواص هر قسمت، پاسخ‌ها همگرا شده و افزایش تعداد قسمت‌ها تأثیری بر پاسخ‌ها نخواهد داشت.

جهت مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی و اجزای محدود، خیز دینامیکی لایه میانی در شعاع‌های مختلف توسط هر دو روش استخراج و با یکدیگر مقایسه شده است.

#### 4-1- خمش دینامیکی ورق دایره‌ای

در این قسمت نتایج مربوط به خمش دینامیکی ورق دایره‌ای گیردار تحت

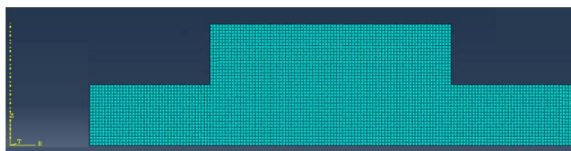


Fig. 2 Discretization of the annular plates in ABAQUS software

شکل 2 مش‌بندی ورق حلقوی در نرم‌افزار آباکوس

از سوی دیگر در روش رانج-کوتا، مؤلفه‌های شتاب و سرعت در یک گام زمانی به صورت رابطه (20) با مؤلفه‌های شتاب، سرعت و جابه‌جایی در گام زمانی پیشین ارتباط دارند (گام زمانی است):

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{l,j+1} &= \frac{4}{\Delta t^2} \left[ X_{l,j+1} - X_{l,j} - \Delta t \dot{X}_{l,j} - \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{X}_{l,j} \right] \\ \dot{X}_{l,j+1} &= \dot{X}_{l,j} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_{l,j} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_{l,j+1} \end{aligned} \quad (20)$$

شرایط اولیه ورق برای حالتی که ورق ساکن است به صورت روابط (22,21) است.

$$\begin{cases} u_0^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow U_{l,0}^{(i)} = 0 \\ \psi_r^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow \phi_{l,0}^{(i)} = 0 \\ w^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow W_{l,0}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_0^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow \tilde{U}_{l,0}^{(i)} = 0 \\ \tilde{\psi}_r^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow \tilde{\phi}_{l,0}^{(i)} = 0 \\ \tilde{w}^{(i)}(r,0) = 0 \rightarrow \tilde{W}_{l,0}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

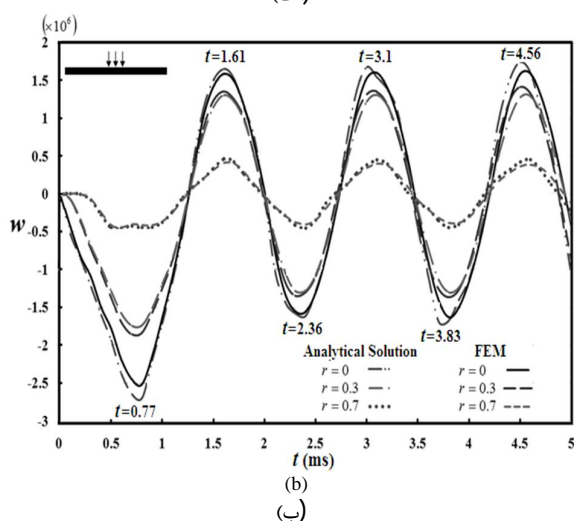
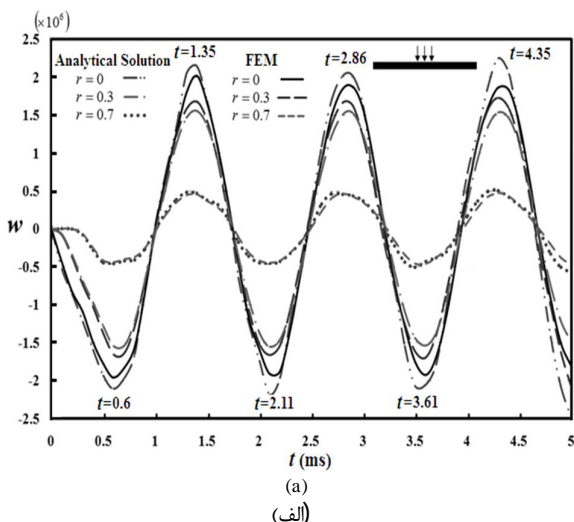
برای یافتن مؤلفه‌های جابه‌جایی هر یک از قسمت‌های ورق در هر لحظه باید ضرایب  $U_{l,j}^{(i)}$ ,  $\phi_{l,j}^{(i)}$  و  $W_{l,j}^{(i)}$  تعیین شود. روند یافتن این ضرایب به صورت زیر است.

- ابتدا با اعمال شرایط اولیه ورق در رابطه (11)، ضرایب مؤلفه‌های شتاب در لحظه  $t=0$  یعنی ضرایب  $\tilde{U}_{l,0}^{(i)}$ ,  $\tilde{\phi}_{l,0}^{(i)}$  و  $\tilde{W}_{l,0}^{(i)}$  محاسبه خواهند گردید. ( $l=0,1,2,\dots,L$ )
- با حل مجموعه معادلات (11) برای  $z=1$  و استفاده از روابط (20) و (21)، ضرایب مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی در لحظه اول  $U_{l,1}^{(i)}$ ,  $\phi_{l,1}^{(i)}$  و  $W_{l,1}^{(i)}$  براساس  $U_{0,1}^{(i)}$ ,  $\phi_{1,1}^{(i)}$  و  $W_{1,1}^{(i)}$  (مجهول  $6m$ ) بیان خواهند گردید.
- با اعمال شرط تکیه‌گاهی در مرز خارجی (3 رابطه)، شرایط پیوستگی در محل تماس قسمت‌های مختلف ( $6(m-1)$  رابطه) و شرط تکیه‌گاهی در مرز داخلی ورق حلقوی و با شرایط تقارن در مرکز ورق دایره‌ای (3 رابطه)،  $6m$  رابطه حاصل خواهد شد که با استفاده از آن‌ها مجهولات بیان شده در گام پیشین تعیین خواهند شد.
- با تکرار مراحل 2 و 3 برای گام‌های زمانی مختلف، توابع جابه‌جایی در لحظات مختلف به دست خواهند آمد.

#### 4- ا ارائه نتایج

این قسمت به ارائه و بررسی خیز ورق‌های دایره‌ای و حلقوی تحت نیروهای دینامیکی مختلف می‌پردازد. ورق‌های دارای ناپیوستگی‌های مختلف از جمله ناپیوستگی خواص، ضخامت و بارگذاری با توجه به استفاده از روند تحلیل بیان شده در قسمت‌های پیشین قابل بررسی است. ورق با تغییرات پله‌ای ضخامت به گونه‌ای که ورق در راستای عرضی نامتقارن باشد نیز مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این‌که در یک مقاله نمی‌توان به بررسی تمام موارد پرداخت، در این مقاله نتایج برای ورق هدفمند آلومینیوم-آلومینا ارائه شده است که سطح روئین از جنس آلومینیوم بوده و به صورت خطی به آلومینا در سطح زیرین ( $g^{(i)} = 1$ ) می‌رسد.

<sup>1</sup> Dynamic implicit



**Fig. 4** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate subjected to pulse load with time duration (a) 0.5 ms and (b) 1 ms at the center of the plate

شکل 4 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند با شرایط تکیه‌گاهی گیردار تحت بارگذاری پالس با بازه زمانی (الف) 0.5 و (ب) 1 میلی‌ثانیه در مرکز ورق

کاهش یافته تا به صفر برسد. ورق تحت بارگذاری پله همواره از صفر تا یک مقدار بیشینه نوسان می‌کند و جهت خیز تغییر نمی‌کند.

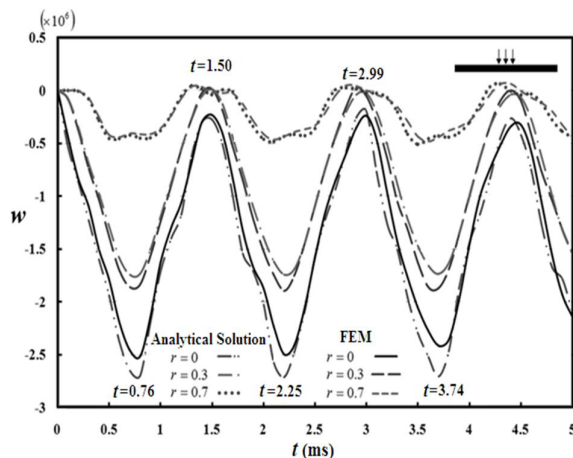
در بارگذاری پالس نیز خیز ورق نوسانی است، اما دامنه نوسان در زمان اعمال نیرو و پس از حذف آن متفاوت است. دامنه نوسان پس از حذف بار خیز ورق در لحظه حذف نیرو بستگی دارد، همچنین پس از حذف بار مخالف نوسان می‌کند.

زمان تقریبی مربوط به خیزهای بیشینه و کمینه براساس میلی‌ثانیه در شکل‌های 3 و 4 نشان داده شده است. براساس شکل 3 فرکانس نوسان براساس سیکل اول 4187 هرتز و با در نظر گرفتن باقی سیکل‌ها 4215 هرتز است. با توجه به مطالعات انجام‌شده بر فرکانس طبیعی ورق دایره‌ای هدفمند [21,20] نخستین فرکانس طبیعی این ورق دایره‌ای برابر با  $\omega_1 = 4351.92$  هرتز است؛ بنابراین فرکانس غالب بر نوسان تقریباً همان فرکانس اول ورق است. براساس شکل 4 نیز فرکانس طبیعی اول ورق، فرکانس غالب

بارگذاری‌های دینامیکی متنوع ارائه شده است. در شکل‌های 3-6 خمش دینامیکی ورق دایره‌ای با ضخامت ثابت 0.2 نشان داده شده است که در ناحیه‌ای به قطر 0.1 نیروهای دینامیکی متنوعی اعمال شده‌اند. این نحوه بارگذاری جهت بررسی ضربه در مرکز ورق نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در تحلیل‌های مربوط به سازه‌ها تحت نیروی متمرکز، هرچند نیروها در محدوده بسیار کوچک اعمال شوند، اما جهت یافتن پاسخ‌های مناسب‌تر به‌ویژه در قسمت‌های تحت بارگذاری، مناسب‌تر است تا این نیرو به‌طور گسترده در محدوده مشخص مورد بررسی قرار گیرد. برای نمونه در حالتی که نیروی متمرکز در نظر گرفته شود نیروی برشی عرضی در محل بارگذاری نامحدود خواهد بود که نتیجه مناسبی نیست؛ بنابراین استفاده از نیروی گسترده در ناحیه معین مناسب‌تر بوده به حالت واقعی نزدیک‌تر است. در این قسمت ورق‌های دایره‌ای تحت 3 نوع بارگذاری دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است:

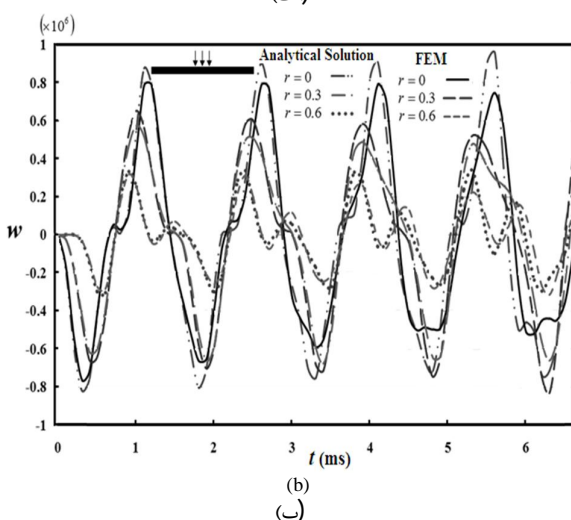
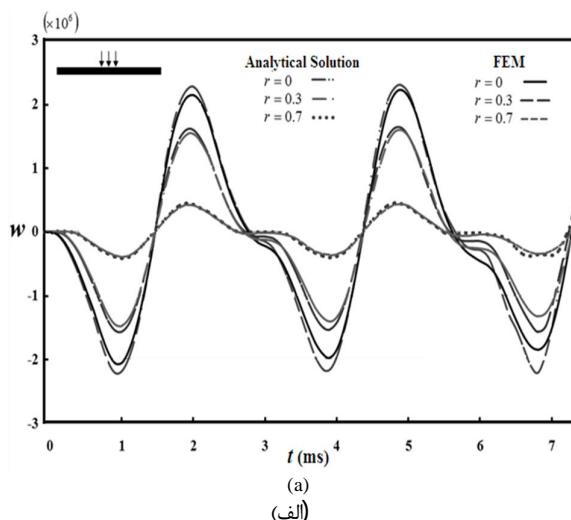
- 1- بارگذاری پله  $q(t)=H(t)$ : نیرویی ثابت در تمام زمان‌ها به ورق اعمال می‌شود.
  - 2- بارگذاری پالس پله‌ای  $q(t)=H(t)-H(t-t_0)$ : در این نوع بارگذاری، نیرویی پله‌ای تنها برای مدت کوتاهی (طی مدت  $t_0$ ) به ورق اعمال می‌گردد.
  - 3- بارگذاری نوسانی  $q(t)=\sin(\omega t)$ : بارگذاری به‌صورت سینوسی و با فرکانس‌های مختلف به ورق اعمال می‌شود.
- $H(t-t_0)$  تابع پله که مقدار آن در زمان  $t < t_0$  صفر بوده و در  $t > t_0$  یک است.

در شکل‌های 3-6، تغییرات زمانی خیز ورق در مرکز و شعاع‌های 0.3 و 0.7 ارائه شده است. شکل 3 مربوط به خمش دینامیکی ورق تحت بارگذاری پله با مقدار IMPa است. در شکل 4 خیز ورق تحت بارگذاری‌های پالس پله‌ای (بارگذاری پله‌ای در یک مدت زمان کوتاه) ارائه شده که با یکنواخت IMPa در ناحیه مرکزی به ترتیب در مدت زمان 0.5 و 1 میلی‌ثانیه اعمال شده است. مشاهده می‌شود که بارگذاری پله موجب حرکت نوسانی ورق با دوره زمانی ثابت شده و دامنه نوسان نقاط مختلف متفاوت است. به گونه‌ای که دامنه نوسان در مرکز ورق بیشینه بوده و با نزدیک شدن به مرز خارجی



**Fig. 3** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate subjected to stepped load at the center of the plate

شکل 3 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند با شرایط تکیه‌گاهی گیردار تحت بارگذاری پله در مرکز ورق



**Fig. 6** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate subjected to sinusoidal load (a)  $\sin(0.5 \omega_1 t) 1E6$  and (b)  $\sin(2 \omega_1 t) 1E6$  at the center of the plate

شکل 6 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند با شرایط تکیه‌گاهی گیردار تحت بارگذاری سینوسی (الف)  $\sin(0.5 \omega_1 t) 1E6$  و (ب)  $\sin(2 \omega_1 t) 1E6$  در مرکز ورق

مناسبی برخوردار است.

#### 2-4- خمش دینامیکی ورق حلقوی

در این قسمت ورق حلقوی تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. شعاع داخلی ورق 0.2 لحاظ شده است. ورق دارای دو ناپوستگی ضخامت در شعاع‌های 0.3 و 0.7 است، به گونه‌ای که در این محدوده (شعاع 0.3 تا 0.7) دارای ضخامت 0.2 بوده و در خارج از این محدوده دارای ضخامت 0.1 است. بارگذاری اعمالی نیز تنها بر ناحیه با ضخامت 0.2 اعمال شده و به صورت پالس مثلثی در نظر گرفته شده است. بارگذاری دینامیکی اعمالی به صورت خطی با زمان تغییر کرده و در مدت 20 میلی‌ثانیه به 1 مگاپاسکال می‌رسد، سپس دوباره به صورت خطی کاهش یافته و در مدت 40 میلی‌ثانیه به صفر رسیده و حذف می‌شود. توابع بارگذاری پیش از 20 میلی‌ثانیه به صورت  $q(t) = (t/0.002) 1E6$  و در بازه زمانی 20 تا

بر نوسان است.

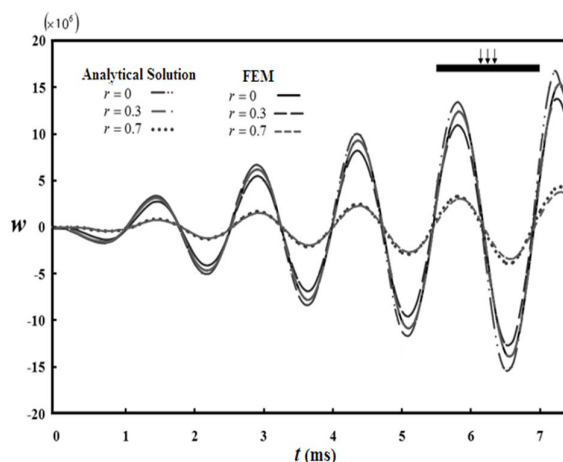
در شکل‌های 5 و 6، خمش دینامیکی ورق تحت بارگذاری نوسانی  $q(t) = \sin(\omega_1 t) 1E6$  در ناحیه مرکزی ورق و با فرکانس‌های مختلف ارائه شده است. در شکل 5، فرکانس بارگذاری برابر با اولین فرکانس طبیعی یعنی  $\omega_1 = 4351.92$  در نظر گرفته شده است و همان طوری که مشاهده می‌شود خمش ورق با گذشت زمان افزایش می‌یابد که همان پدیده تشدید است. در شکل 5 خمش ورق تحت بارگذاری‌های نوسانی با نصف و دو برابر اولین فرکانس طبیعی آورده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود در یک بازه زمانی مشخص، تعداد نوسان‌ها با افزایش فرکانس نیروی اعمالی افزایش می‌یابد.

خمش ورق دایره‌ای با تغییرات ناپوستگی ضخامت به گونه‌ای که دارای سه ناحیه با ضخامت‌های مختلف بوده و همچنین در راستای عرضی نامتقارن باشد در شکل‌های 7 و 8 نمایش داده شده است. ضخامت ورق مورد بررسی در این شکل‌ها به این صورت است که در نواحی مرکزی، ورق دارای بیشترین ضخامت بوده و با نزدیک شدن به مرز خارجی مقدار آن کاهش می‌یابد. در واقع ضخامت ورق در ناحیه داخلی به شعاع 0.3 دارای مقدار 0.2، در ناحیه بین شعاع 0.3 و 0.6 دارای مقدار 0.15 و در شعاع‌های بزرگ‌تر از 0.6 (تا شعاع 1) مقدار آن 0.1 است.

بارگذاری ورق مورد بررسی در شکل‌های 7 و 8 نیز به صورت ترکیبی از بارگذاری پله و نوسانی به صورت  $q(t) = [1 + \sin(\omega_1 t)] E6$  است. در شکل 7 این نیرو در ناحیه داخلی ورق با شعاع 0.3 (بیشترین ضخامت) اعمال شده است.

در شکل 8، نیروی ترکیبی نوسانی و پله‌ای در بازه‌های زمانی 20 میلی‌ثانیه بر نواحی مختلف قرار می‌گیرد. این نیرو ابتدا به مدت 20 میلی‌ثانیه بر ناحیه اول با ضخامت 0.2 اعمال شده، در بازه زمانی 20-40 میلی‌ثانیه به ناحیه بعدی با ضخامت 0.15 منتقل شده، سپس در بازه زمانی 40-60 میلی‌ثانیه به ناحیه بعدی با ضخامت 0.1 منتقل شده و سپس مجدداً به ناحیه اول اعمال شده و این روند ادامه می‌یابد.

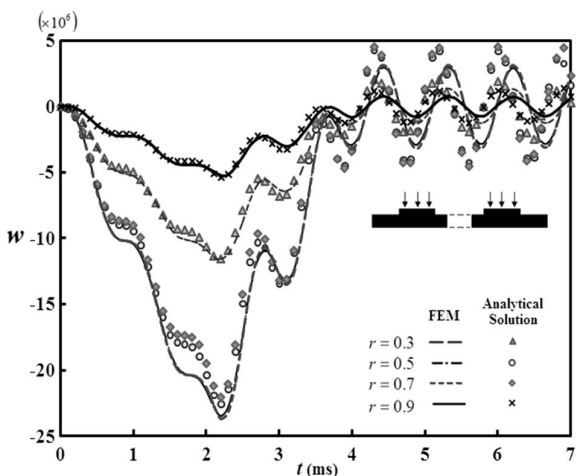
با مقایسه نتایج ارائه شده با حل الاستیسیته سه‌بعدی استخراج شده توسط نرم‌افزار آباکوس، مشاهده می‌شود که روند تحلیل از دقت بسیار



**Fig. 5** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate subjected to sinusoidal load  $\sin(\omega_1 t) 1E6$  at the center of the plate

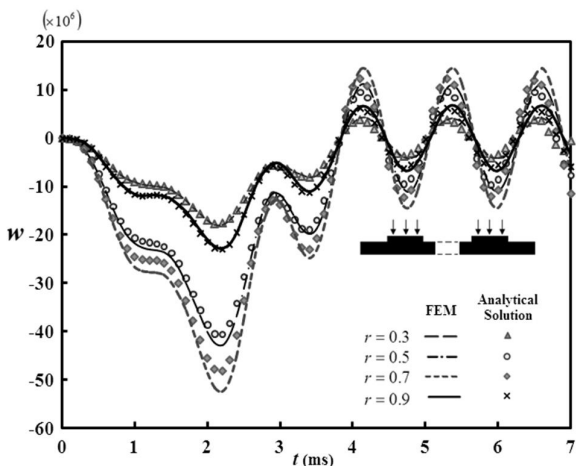
شکل 5 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند با شرایط تکیه‌گاهی گیردار تحت بارگذاری سینوسی  $\sin(\omega_1 t) 1E6$  در مرکز ورق





**Fig. 9** Time variations of the deflection of the clamped-clamped FG annular plate with asymmetric stepped thickness variations subjected to triangular pulse load

شکل 9 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند گیردار- گیردار با تغییرات پله‌ای نامتقارن ضخامت تحت بارگذاری پالس مثلثی



**Fig. 10** Time variations of the deflection of the clamped- simply supported FG annular plate with asymmetric stepped thickness variations subjected to triangular pulse load

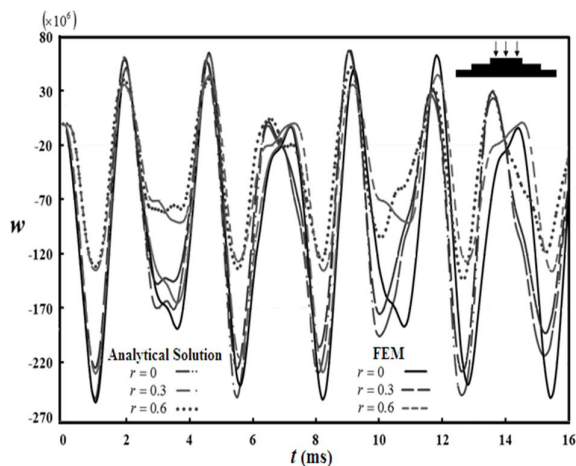
شکل 10 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند گیردار- ساده با تغییرات پله‌ای نامتقارن ضخامت تحت بارگذاری پالس مثلثی

است که تکیه‌گاه خارجی گیردار باشد. همان‌گونه که مشخص است پس از حذف نیرو، ورق با دامنه ثابت حول وضعیت تعادل خود نوسان می‌کند.

خمش دینامیکی ورق حلقوی با تکیه‌گاه داخلی آزاد و تکیه‌گاه خارجی گیردار برای دو حالت نامتقارن عرضی و متقارن به ترتیب در شکل‌های 11 و 12 نشان داده شده است. با مقایسه شکل‌های 11 و 12 مشخص است که در حالت یکسان جرم، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی، خمش ورق نامتقارن عرضی نسبت به ورق متقارن کمتر است. با توجه این‌که در حالت اول (حالت نامتقارن عرضی) فاصله ذرات نسبت به تار خنثی بیشتر از حالت دوم (حالت متقارن) است ورق در مقابل خمش استحکام بیشتری داشته و خمش کمتری ایجاد خواهد شد.

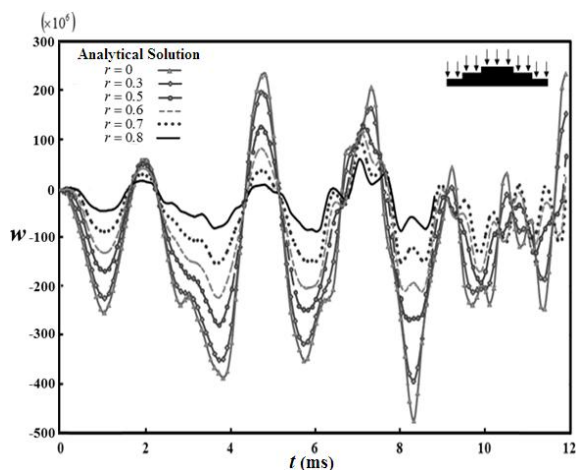
##### 5- نتیجه‌گیری

با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی مبتنی بر روش سری‌های توانی و رانج-



**Fig. 7** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate with stepped thickness variations subjected to stepped and harmonic dynamic load  $q(t) = [1 + \sin(\omega_1 t)]1E6$  at the center of the plate

شکل 7 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند گیردار با تغییرات پله‌ای ضخامت تحت بارگذاری دینامیکی ترکیبی نوسانی و پله‌ای  $q(t) = [1 + \sin(\omega_1 t)]1E6$  در مرکز ورق



**Fig. 8** Time variations of the deflection of the clamped FG circular plate with stepped thickness variations subjected to dynamic stepped and harmonic dynamic load  $q(t) = [1 + \sin(\omega_1 t)]1E6$  at the various parts of the plate

شکل 8 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند گیردار با تغییرات پله‌ای ضخامت تحت بارگذاری دینامیکی ترکیبی نوسانی و پله‌ای  $q(t) = [1 + \sin(\omega_1 t)]1E6$  در قسمت‌های مختلف ورق

40 میلی‌ثانیه به صورت  $q(t) = [1 - (t - 0.002)/0.001]1E6$  است.

شکل‌های 9-11 مربوط به خمش ورق نامتقارن عرضی است، حالتی که سطح زیرین ورق مسطح بوده و ناپیوستگی در سطح رویین ورق وجود دارد. در شکل 12 ورق در حالت متقارن عرضی (تقارن هندسی نسبت به لایه میانی) بررسی شده است.

خمش دینامیکی مقاطع مختلف ورق حلقوی با تکیه‌گاه داخلی گیردار و تکیه‌گاه خارجی گیردار و ساده به ترتیب در شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است.

روند تغییرات خمش در شکل‌های 10 و 11 به نسبت مشابه بوده، ولی مقدار خمش ورق در حالتی که تکیه‌گاه خارجی ساده باشد بیشتر از حالتی

پاسخ‌های حاصل از حل الاستیسیته سه‌بعدی به‌دست‌آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه و مشاهده شد که روند تحلیل از دقت بسیار مناسبی برخوردار است.

### 6- مراجع

- [1] Ch. N. Chen, Dynamic response of shear-deformable axisymmetric orthotropic circular plate structures solved by the DQEM and EDQ based time integration schemes, *Composite Structures*, Vol. 64, No. 3-4, pp. 339-348, 2004.
- [2] O. Civalek, Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, No. 3, pp. 606-624, 2007.
- [3] J. S. Peng, Y. Q. Yuan, J. Yang, S. Kitipornchai, A semi-analytic approach for the nonlinear dynamic response of circular plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 12, pp. 4303-4313, 2009.
- [4] A. Rezaei Mojdehi, A. Darvizeh, A. Basti, H. Rajabi, Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, No. 11, pp. 1168-1180, 2011.
- [5] J. Useche, E. L. Albuquerque, Transient dynamic analysis of shear deformable shallow shells using the boundary element method, *Engineering Structures*, Vol. 87, No. 1, pp. 1-7, 2015.
- [6] J. Useche, E. L. Albuquerque, Dynamic analysis of shear deformable plates using the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 627-632, 2012.
- [7] M. E. Golmakani, M. Mehrabian, Elastic large deflection analysis of ring-stiffened annular laminated plates by using of dynamic relaxation method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 109-123, 2014. (in Persian فارسی)
- [8] M. Huang, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, Free vibration analysis of stepped rectangular plates resting on non-homogeneous elastic foundations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 50, No. 1, pp. 180-187, 2015.
- [9] L. Sator, V. Sladek, J. Sladek, D. L. Young, Elastodynamics of FGM plates by mesh-free method, *Composite Structures*, Vol. 140, No. 1, pp. 309-322, 2016.
- [10] T. Y. Wu, Y. Y. Wang, G. R. Liu, Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule, *Computer Methods Applied Mechanic Engineering*, Vol. 191, No. 46, pp. 5365-5380, 2002.
- [11] L. T. T. Hang, C. M. Wang, T. Y. Wu, Exact vibration results for stepped circular plates with free edges, *Mechanical Sciences*, Vol. 47, No. 8, pp. 1224-1248, 2005.
- [12] A. R. Rahai, M. M. Alinia, S. Kazemi, Buckling analysis of stepped plates using modified buckling mode shapes, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 484-493, 2008.
- [13] V. Radosavljevic, M. Drazic, Exact solution for buckling of FCFC stepped rectangular plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3841-3849, 2010.
- [14] M. Jabbarzadeh, J. Eskandari Jam, M. Khosravi, The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 59-73, 2012. (in Persian فارسی)
- [15] S. Hosseini-Hashemi, M. Derakhshani, M. Fadaee, An accurate mathematical study on the free vibration of stepped thickness circular/annular Mindlin functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 6, pp. 4147-4164, 2013.
- [16] G. Duan, X. Wang, Vibration analysis of stepped rectangular plates by the discrete singular convolution algorithm, *Mechanical Sciences*, Vol. 82, No. 1, pp. 100-109, 2014.
- [17] G. Duan, X. Wang, C. Jin, Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 85, No. 1, pp. 25-33, 2014.
- [18] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic Plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 1, pp. 69-76, 1945.
- [19] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 1031-1036, 1951.
- [20] M. M. Alipour, M. Shariyat, A Power series solution for free vibration of variable thickness mindlin circular plates with two-directional material heterogeneity and elastic foundations, *Solid Mechanics*, Vol. 3, No. 2, pp. 183-197, 2011.
- [21] M. M. Alipour, M. Shariyat, M. Shaban, A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations, *Mechanics and Materials in Design*, Vol. 6, No. 1, pp. 293-304, 2010.

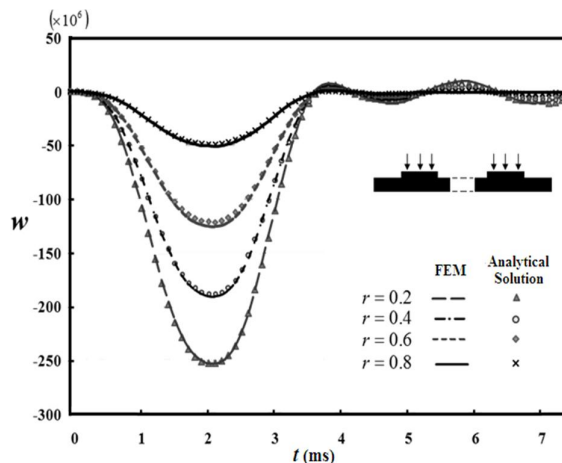


Fig. 11 Time variations of the deflection of the free-clamped FG annular plate with asymmetric stepped thickness variations subjected to triangular pulse load

شکل 11 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند آزاد-گیردار با تغییرات پله‌ای نامتقارن ضخامت تحت بارگذاری پالس مثلثی

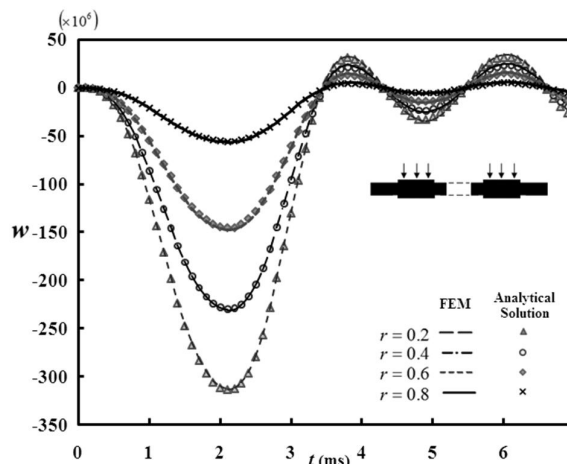


Fig. 12 Time variations of the deflection of the free-clamped FG annular plate with symmetric stepped thickness variations subjected to triangular pulse load

شکل 12 تغییرات زمانی خمش ورق دایره‌ای هدفمند آزاد-گیردار با تغییرات پله‌ای متقارن ضخامت تحت بارگذاری پالس مثلثی

کوتای مرتبه چهارم، رفتار دینامیکی ورق‌های پله‌ای دایره‌ای و حلقوی مورد بررسی قرار گرفت. براساس تحلیل ارائه شده می‌توان ورق‌های پله‌ای بدون محدودیت در تعداد ناپیوستگی مورد مطالعه قرار گیرد. ورق‌ها در حالت نامتقارن عرضی نیز بسادگی قابل تحلیل است. در قسمت ارائه نتایج، بارگذاری‌های دینامیکی متنوع اعمال شده بر قسمت‌های مختلف ورق مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که در حالت بارگذاری پله، رفتار ورق به‌صورت نوسانی بوده و فرکانس غالب بر نوسان همان فرکانس طبیعی اول است، همچنین ورق‌ها با شکل‌های هندسی و شرایط مرزی مختلف نیز تحلیل شد. جهت بررسی صحت و دقت نتایج حاصل از حل ارائه شده، این نتایج با