مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1396، دوره 17، شماره 11، ص‌ص 269-276

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی سطح مقطع میله‌های توخالی تحت پیچش با استفاده از روش جواب‌های اساسی

عبدالرحمان حقیقی[1]، محمدرحیم همتیان[2*]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

* شیراز، صندوق پستی 7193616548، mhemat@shirazu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 مرداد 1396

پذیرش: 26 مهر 1396

ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:

روش جواب‌های اساسی

پیچش

عضو توخالی

روش دوقیدی

روش لونبرگ-مارکوارت

چکیده

روش جواب‌های اساسی، یک روش مرزی بدون شبکه است که برای حل مسائل با مرز نامشخص یا متحرک بسیار مناسب است. در این تحقیق، روش جواب‌های اساسی در زمینه مسائل بهینه‌سازی شکل هندسی مقاطع تحت پیچش به کار گرفته شده است. هدف این پژوهش، یافتن شعاع‌های بهینه گوشه‌ی مقاطع توخالی تحت پیچش، برای به حداقل رساندن حداکثر تنش برشی است. در ابتدا، نشان داده می‌شود که برای مقدار بهینه شعاع گوشه، می‌بایست حداکثر تنش برشی در مرز خارجی با حداکثر تنش برشی در گوشه‌های داخلی برابر باشد. با توجه به این واقعیت، یک تابع هدف مناسب تعریف شده است و سپس با استفاده از روش لونبرگ-مارکوارت، که یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان است، تابع هدف به حداقل می‌رسد. نحوه چیدمان نقاط متمرکز و چشمه، تأثیر بسیار مهمی بر دقت جواب در روش جواب‌های اساسی دارد. در اینجا، برای تعیین مناسب محل نقاط چشمه و متمرکز از یک روش دوقیدی استفاده می شود. به منظور ارزیابی دقت کد توسعه یافته برای تحلیل پیچشی اعضای توخالی با استفاده از روش جواب‌های اساسی، یک مثال با دامنه بیضی توخالی ارائه شده است. نتایج عددی حاصل با نتایج حاصل از جواب دقیق مسأله مقایسه شده است که انطباق بسیار خوبی را نشان می‌دهد. مقادیر بهینه شعاع انحنای گوشه برای عضوهای با مقاطع مربع، مستطیل و ذوزنقه در ضخامت‌های مختلف به دست آمده است و سپس با توجه به نتایج به دست آمده، فرمولی برای تعیین شعاع‌های بهینه گوشه‌های داخلی مقاطع مستطیل توخالی استخراج شده است.

Optimization of the cross-section of hollow bars under torsion using the method of fundamental solutions

Abdalrahman Haghighi[1], Mohammad Rahim Hematiyan[2*]

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

* P.O.B. 7193616548 Shiraz, Iran, mhemat@shirazu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 13 August 2017

Accepted 18 October 2017

Available Online 18 November 2017

Keywords:

Method of fundamental solutions

Torsion

Hollow member

Two-constraint method

Levenberg-Marquardt method

ABSTRACT

The method of fundamental solutions is a boundary-type mesh-free method, which is very suitable for problems with unknown or moving boundaries. In this paper, the method of fundamental solutions is employed for shape optimization in torsion problems. The objective of this work has been to find optimum corners radii of hollow cross-sections under torsion for minimizing the maximum stress. First, it is shown that for the optimum value of the corner radius, the maximum shearing stress on the outer boundary should be equal to the shearing stress at internal corner. Considering this fact, a suitable objective function is defined and then it is minimized using the Levenberg-Marquardt method, which is a gradient-based optimization method. The configuration of collocation and source points has a very important effect on the accuracy of the solution in the method of fundamental solutions. Here, a two-constraint method is used for proper configuration of source and collocation points. To verify the accuracy of the developed code for torsion analysis of hollow members using the method of fundamental solutions, an example with a hollow elliptical domain is presented. The obtained numerical results are compared with the results of exact solution, which show a very good agreement. The optimum values of corners radii for members with square, rectangle and trapezoid cross-sections and different thicknesses have been successfully found. Then, using the obtained results, a formula for the optimum value of the radius of internal corners of hollow rectangle cross sections is constructed.

1- مقدمه

از دیرباز بهینه‌سازی مقاطع استاندارد (قوطی، نبشی، ناودانی و پروفیل‌های استاندارد)، به منظور رسیدن به رفتار سازه‌ای مناسب و کاهش ماده مصرفی بسیار حائز اهمیت بوده است و از روش المان محدود، المان مرزی و چند روش تحلیلی، برای این منظور استفاده شده است و همچنین امروزه با توجه به گسترش روش‌های تولید، رویکرد صنایع به اختصاصی‌سازی بیش از پیش شده است و لذا برای بهینه‌سازی مقاطع اختصاصی روشی سریع و ساده مورد نیاز می‌باشد تا طراحان به راحتی هنگام طراحی سازه‌ها به کار گیرند.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Haghighi, M. R. Hematiyan, Optimization of the cross-section of hollow bars under torsion using the method of fundamental solutions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 269-276, 2018 (in Persian)

مسأله پیچش به دلیل کاربرد بسیاری که در سازه‌ها و مکانیزم‌های انتقال گشتاور و ساختارهای هوایی و غیره دارد، از اهمیت بالایی برخوردار است. پیش‌بینی رفتار سازه‌ها تحت بارهای پیچشی همواره مورد توجه محققان بوده است و تحلیل عددی و تجربی آنها با شیوه‌های مختلف انجام شده است [1].

بهینه‌سازی‌هایی که تاکنون در مسائل پیچش انجام شده است، عبارت است از بهینه‌سازی شرط مرزی، بهینه‌سازی ضخامت شافت‌ها، بهینه‌سازی توزیع نیرو و بهینه‌سازی سطح مقطع بیرونی و درونی شافت‌ها. بهینه‌سازی سطح مقطع تحت پیچش پیچیده‌تر از دیگر مسائل است زیرا در هر مرحله از مراحل تکرار فرایند بهینه‌سازی، باید مسأله تحلیل پیچش از ابتدا حل شود.

بهینه کردن شکل هندسی از مسائل مهم در بهینه‌سازی سازه‌ها می‌باشد. از آنجا که بسیاری از اجزاء و سازه‌های مهندسی، مانند تیرها، شفت‌ها و بال هواپیما، تحت بارهای پیچشی قرار می‌گیرند، تجزیه و تحلیل سازه تحت پیچش به منظور بهینه‌سازی شکل هندسی، برای مدت طولانی مورد توجه محققان بوده است. برای اولین بار اشکال همبند ساده مورد تحلیل قرار گرفت و در سال 1956 اثبات شد که بهترین شکل همبند ساده تحت پیچش دایره است [2]. در سال 1988 روشی عددی برای بهینه‌کردن اشکال توپر به وسیله مینیمم کردن تمرکز تنش ارائه گردید [3].

بهینه‌کردن شکل هندسی میله‌های توخالی، تحت پیچش نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در سال 1980 روشی برای بهینه کردن مرز درونی و بیرونی اشکال توخالی به منظور دست‌یابی به بیشترین مقاومت پیچشی با مساحت سطح ثابت، ارائه شد. براساس این روش ابتدا تابع مرز تعیین می‌شود و سپس به وسیله بهینه‌کردن چند پارامتر از تابع مرز شکل بهینه می‌گردد [4].

در سال 1992 روشی برای بهینه‌کردن میله‌های منشوری به منظور دستیابی به بیشترین مقاومت پیچشی و کمترین جرم ارائه شد [5]. در سال 2000 چند شکل همبند دوگانه تحت پیچش مورد ارزیابی قرار گرفت و شکل هندسی آن‌ها بهینه شد که هدف بهینه‌سازی، افزایش مقاومت پیچشی با ثابت نگه‌داشتن سطح مقطع بود [6]. در سال 2001 روشی جدید برای بهینه‌کردن مقاطع همبند چندگانه با مینیمم کردن تنش برشی در مساحت سطح ثابت، ارائه شد [7].

یکی از موضوعاتی که در بهینه کردن شکل هندسی اهمیت دارد گرد کردن گوشه‌ها می‌باشد. در سال 2013 روشی تحلیلی برای بهینه کردن گوشه‌های چندضلعی‌های منتظم به منظور افزایش مقاومت پیچشی و کاهش سطح مقطع ارائه گردید [8].

روش‌هایی که برای بهینه کردن شکل هندسی تاکنون مورد استفاده قرار گرفته عبارتند از:

- کمینه کردن تنش‌برشی بیشینه با استفاده از روش المان محدود [7,6,4]؛
- کمینه کردن انتگرال تنش‌برشی روی مرز با استفاده از تقریب زدن تنش برشی با توابع مرز و سپس کمینه کردن توابع مرزی؛
- کمینه کردن تمرکز تنش با استفاده از روش المان مرزی [3]؛
- کمینه کردن تنش در گوشه با استفاده از روش تحلیلی ریتز [8].

در زمینه مسائل کاربردی و صنعتی نیز فعالیت‌های زیادی به منظور بهینه‌سازی مقاطع تحت پیچش انجام شده است، به عنوان مثال در سال 2017 با بهینه‌سازی موضعی، یک مقطع با دو جنس متفاوت، تحت پیچش، بهینه گردید [9]. همچنین در سال‌های اخیر در چند پژوهش به بهینه‌سازی پارامترهای هندسی مقاطع کامپوزیتی تحت پیچش پرداخته شده است [12-10].

امروزه با توجه به روش‌های ساخت قوطی و پروفیل‌های فلزی و همچنین کاربردهای چندگانه آن ابتدا شکل کلی مقطع هندسی را تعیین و سپس به بهینه کردن برخی از پارامترهای هندسی پرداخته می‌شود. اندازه انحنای گوشه‌های مقاطع، تأثیر به سزایی در میزان مقاومت پیچشی سازه دارد و همچنین با توجه به اینکه قوطی‌های فولادی با فرایند خم‌کاری و شکل‌دهی تولید می‌شوند، انتخاب شعاع بهینه خم موجب افزایش استحکام سازه می‌گردد. در این تحقیق، شیوه‌ای جدید بر اساس روش جواب‌های اساسی برای بهینه‌سازی پارامترهای هندسی مقاطع توخالی تحت پیچش ارائه می‌شود. با توجه به تحقیقات گذشته ملاحظه می‌شود که این نوع مسأله بهینه‌سازی و رهیافت حل آن جدید بوده و نتیجه آن از کاربرد فراوانی در طراحی قطعات و سازه‌های مکانیکی برخوردار است. هدف این پژوهش، یافتن شعاع‌های بهینه گوشه‌ی سطح مقطع میله‌هایی با مقطع مربع توخالی، مستطیل توخالی و مقطع ذوزنقه توخالی در ضخامت‌های مختلف تحت پیچش، با روش جواب‌های اساسی[1] است و همچنین نشان داده می‌شود که این روش راه‌حلی مناسب و ساده برای بهینه‌سازی مقاطع می‌باشد.

2- معرفی روش حل جواب‌های اساسی

روش جواب‌های اساسی یک روش عددی برای حل مسائل مختلف مهندسی و علمی است که در آن‌ها معادلات حاکمه بصورت معادلات دیفرانسیلی بیان می‌شوند. از آنجا که این روش از جواب‌های اساسی برای حل مسأله استفاده می‌کند، شبیه روش المان مرزی است ولی از جهاتی نیز با این روش متفاوت است. روش جواب‌های اساسی روشی تجمیعی[2] است به این معنی که برای حل مسأله به شرایط مرزی در تعداد محدودی از نقاط روی مرز نیاز می‌باشد و از جواب‌های اساسی برای حل مسائل استفاده می‌شود و در نتیجه تنها مرز مورد بررسی قرار می‌گیرد و این از مزایای این روش و روش المان مرزی می‌باشد، در صورتی که در روش المان محدود، روش تفاضل متناهی و بسیاری از روش‌های بدون المان، کل دامنه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش جواب‌های اساسی برخلاف روش المان مرزی نیازی به انتگرال‌گیری روی مرز نیست و در نتیجه مشکلات انتگرال‌گیری تکین [13] که روش المان مرزی را پیچیده می‌کند، در این روش وجود ندارد.

ایده روش جواب‌های اساسی در سال 1964 توسط کوپرادزِ و الکسایدزِ طرح گردید [14]. تکنیک‌های محاسباتی و حل عددی این روش نیز در سال 1977 توسط مِیسِن و جانسِن مطرح شد [15] و به تدریج به وسیله‌ی مقالاتی که توسط مِیسِن، جانسِن و گریم فِیرووِتر در زمینه مسائل کاربردی ارائه گردید [19-16]، روش جواب‌های اساسی به ابزاری مناسب برای حل مسائل فیزیک و مهندسی تبدیل شد.

اساس روش حل جواب‌های اساسی بدین صورت است که برای مدل کردن مسأله با معادله حاکمه و شرایط مرزی مشخص، در ابتدا، می‌بایست جواب اساسی معادله حاکمه با صرف‌نظر از شرایط مرزی مسأله را بدست آورد. جواب اساسی در واقع جوابی است که معادله دیفرانسیل را ارضا می‌کند و نظیر یک مسأله با دامنه بیکران و یک بار متمرکز (چشمه[3]) می‌باشد. جواب اساسی برای عملگر لاپلاس دوبعدی به صورت رابطه (1) است:

[1] Method of fundamental solutions
[2] Collocation method
[3] Source

$$\hat{\phi}' = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (1)$$

که در آن r فاصله از چشمه می‌باشد.

پس از تعیین جواب اساسی، مطابق شکل 1 روی مرز فیزیکی تعدادی نقطه متمرکز[1] در نظر گرفته شده است و شرط مرزی روی هر نقطه تعیین می‌شود و پس از آن یک مرز مجازی اطراف مرز اصلی فرض شده و بر روی آن، نقاط چشمه[2] قرار داده شده است.

به ازای هر نقطه چشمه یک جواب به صورت معادله (1) وجود دارد و با توجه به خطی بودن معادله لاپلاس مجموع جواب‌ها و ضریبی از جواب‌ها نیز در معادله صدق می‌کند و به این ترتیب معادله دیفرانسیل به ازای مجموع ضرایب دلخواه از جواب‌های اساسی به صورت دقیق ارضاء می‌شود. ضریب هر جواب به گونه‌ای تعیین می‌شود که شرایط مرزی ارضا گردد. در نتیجه یک دستگاه معادلات بدست می‌آید که مجهولات آن ضرایب جواب‌های اساسی می‌باشد. تعداد مجهولات برابر با تعداد نقاط چشمه است و تعداد معادلات همان تعداد نقاط متمرکز است که جواب بر روی آن‌ها مشخص است.

در صورتی که تعداد نقاط چشمه و متمرکز برابر باشد برای حل دستگاه معادلات می‌بایست معکوس ماتریس ضرایب را در ماتریس جواب ضرب کرد، تا ضریب هر چشمه (ضریب هر جواب اساسی) تعیین گردد. جواب هر نقطه درون مرز برابر است با مجموع جواب‌های اساسی در آن نقطه به ازای هر چشمه ضربدر ضریب هر چشمه.

دقت و همگرایی روش جواب‌های اساسی شدیداً تحت تأثیر مکان قرارگیری نقاط متمرکز و نقاط چشمه است. در این پژوهش از نحوه چیدمان نقاطی که در سال 2017 توسط همتیان و همکاران [20] ارائه شد، استفاده می‌شود، که بر اساس آن، چیدمان نقاط با رعایت دوقید هندسی انجام می‌شود. قید اول، این اطمینان را حاصل می‌نماید که جواب مسأله بین دو نقطه متمرکز متوالی روی مرز، نوسانی نباشد. قید دوم نیز شرایط عمومی سیستم معادلات را بهبود می‌بخشد. به عبارت دیگر قید دوم عدد شرط سیستم معادلات روش جواب‌های اساسی را کاهش می‌دهد.

به طور خلاصه مراحل حل در این روش به صورت زیر است:

گام اول) قرار دادن نقاط متمرکز به صورت مناسب روی مرز هندسی؛

گام دوم) چیدن نقاط چشمه در اطراف مرز و در مکان مناسب؛

گام سوم) تعیین معادله جبری برای هر نقطه متمرکز به ازای هر چشمه (محاسبه ماتریس ضرایب)؛

گام چهارم) حل دستگاه معادلات و بدست آوردن شدت هر چشمه؛

گام پنجم) محاسبه جواب در نقاط دلخواه درون یا روی مرز.

از مهم‌ترین مزیت‌های روش حل جواب‌های اساسی نسبت به روش‌های دیگر سرعت بالای رسیدن به جواب و حجم محاسبات کم است، به همین دلیل استفاده از این روش در مسائل بهینه‌سازی که نیاز به چندین بار حل دارد، مفید است. یکی از مراحل حل زمان‌بر در روش‌های عددی، شبکه‌بندی است که در مسائل بهینه‌سازی هندسی زمان قابل توجهی از حل مسأله به شبکه‌بندی اختصاص می‌یابد. در روش جواب‌های اساسی نیازی به شبکه‌بندی نیست، ولی می‌بایست نقاط متمرکز و چشمه، روی مرز و اطراف مرز بصورت مناسب چیده شوند. در این روش اگر قسمتی از هندسه مسأله تغییر کوچکی کند، مکان نقاط متمرکز و چشمه مربوط به همان ناحیه و نزدیک آن تغییر می‌کند و در چیدمان نقاط دیگر تغییری ایجاد نمی‌شود، این ویژگی در کنار سرعت بالای روش جواب‌های اساسی موجب برتری این روش در حل مسائل بهینه‌سازی می‌گردد.

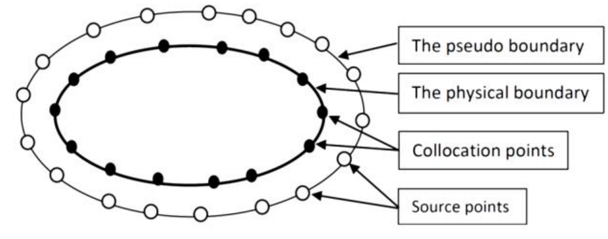

Fig. 1 Basic concepts of the method of fundamental solutions

شکل 1 مفاهیم اولیه روش جواب‌های اساسی

[1] Collocation point
[2] Source points

3- فرمول‌بندی روش جواب‌های اساسی برای معادله لاپلاس

معادله لاپلاس با دامنه Ω و شرایط مرزی تعریف شده بر روی مرز Γ در حالت کلی به صورت روابط (3,2) بیان می‌شود:

$$\nabla^2\phi' = 0 \ \rightarrow \ \Omega \qquad (2)$$

$$f_1\phi' + f_2\frac{\partial\phi'}{\partial n} = f_3 \rightarrow \Gamma \qquad (3)$$

که در آن f_1، f_2 و f_3 توابعی هستند که بر روی مرز معلوم می‌باشند. ∇^2 عملگر لاپلاس، n بردار عمود بر مرز و به سمت بیرون و ϕ' متغیر میدانی در روش حل جواب‌های اساسی است.

در روش جواب‌های اساسی، جواب به صورت مجموع جواب‌های اساسی تخمین زده می‌شود که در رابطه (4) آمده است:

$$\phi'(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i\hat{\phi}'(X,\xi_i) \qquad (4)$$

در رابطه (4) a_i و ξ_i به ترتیب مکان و شدت چشمه iام روی مرز مجازی Γ'، N تعداد نقاط چشمه و X مکان یک نقطه از دامنه است. ثابت‌های a_i در واقع مجهولات مسأله هستند که باید مشخص شوند. جواب اساسی برای معادله لاپلاس دو بعدی به صورت رابطه (5) بیان می‌شود [21]:

$$\hat{\phi}'(X,\xi_i) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) \qquad (5)$$

که در آن r فاصله بین نقطه X و ξ_i است.

با جایگذاری رابطه (4) در رابطه (3) رابطه (6) بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i f_1(C_j)\hat{\phi}'(C_j,\xi_i) + f_2(C_j)\frac{\partial\hat{\phi}'(C_j,\xi_i)}{\partial n} = f_3(C_j)$$
$$j = 1,2,\ldots,M \qquad (6)$$

در رابطه (6)، $C_1, C_2, \ldots, C_M$ نقاط متمرکز هستند. برای پیدا کردن مجهول a_i، تعداد معادلات که برابر با تعداد نقاط متمرکز است باید بیشتر یا مساوی تعداد مجهولات یا تعداد نقاط چشمه $(N \le M)$ باشد. رابطه (6) یک دستگاه M معادله خطی و N مجهول است که در حالت کلی می‌توان آن را به صورت رابطه (7) نوشت:

$$[B][X] = [F] \qquad (7)$$

که در آن $[B]$ یک ماتریس M در N است و مؤلفه‌های بردارهای $[X]$ و $[F]$ به صورت روابط (9,8) بیان می‌شوند:

$$B_{ij} = f_1(C_i)\hat{\phi}'(C_i,\xi_j) + f_2(C_i)\frac{\partial\hat{\phi}'(C_i,\xi_j)}{\partial n} \qquad (8)$$

$$X_i = a_i \ , \ F_i = f_3(C_i) \qquad (9)$$

زمانی که $N = M$ باشد، دستگاه معادلات به صورت رابطه (10) حل می‌شود:

$$[X] = [B]^{-1}[F] \qquad (10)$$

و اگر $N < M$ دستگاه به صورت رابطه (11) حل می‌شود [22]:

$$[X] = \left([B]^{T}[B]\right)^{-1}[B]^{T}[F] \qquad (11)$$

با محاسبه ضرایب نقاط چشمه، جواب هر نقطه درون مرز با استفاده از معادله (4) قابل محاسبه است.

4- فرمول‌بندی روش جواب‌های اساسی برای معادلات پیچش مقاطع توخالی

با استفاده از روابط کرنش جابه‌جایی[1]، قانون هوک[2] و رابطه سازگاری[3] معادله کلی حاکم بر پیچش میله‌های منشوری به صورت رابطه (12) بدست می‌آید:

$$\nabla^2\phi=-2\mu\alpha \;\rightarrow\; \Omega \tag{12}$$

معادله (12) یک معادله‌ی پواسون[4] است که در آن ϕ تابع تنش پرانتل[5]، μ مدول برشی[6]، α زاویه پیچش بر واحد طول[7] و Ω دامنه مسأله است.
شرط مرزی مسأله پیچش برای مقاطع توخالی و روابط تنش برشی، بر حسب تابع تنش پرانتل ϕ به صورت روابط (13-15) بیان می‌شود:

$$\phi=0 \;\rightarrow \Gamma_{\text{out}} \quad , \quad \phi=\phi_1 \;\rightarrow \Gamma_{\text{in}} \tag{13}$$

$$\oint \tau \,\mathrm{d}s = 2\mu\alpha A_{\Gamma_{in}} \;\rightarrow \Gamma_{\text{in}} \tag{14}$$

$$T=2\iint_{\Omega}\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\phi_1 A_{\Gamma_{\text{in}}} \tag{15}$$

که در آن Γ_{out} مرز خارجی، Γ_{in} مرز داخلی، $A_{\Gamma_{\text{in}}}$ مساحت داخل مقطع و R مساحت سطح مقطع است و ϕ_1 ثابتی است که باید تعیین شود و τ به صورت رابطه (16) بیان می‌گردد:

$$\tau=-\frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{16}$$

که در آن n راستای عمود بر کانتور ϕ ثابت و به سمت بیرون می‌باشد.
برای حل مسأله فوق براساس مرجع [23] مسأله اصلی به دو زیر مسأله با دو مجهول ψ و $\hat{\psi}$ تقسیم می‌شود، که در مسأله اول فرض می‌شود که مقدار تابع ψ روی مرز داخلی و خارجی صفر باشد و در مسأله دوم فرض می‌شود که مقدار تابع $\hat{\psi}$ روی مرز خارجی صفر و روی مرز داخلی برابر یک باشد. معادله حاکمه و شرایط مرزی دو مسأله به صورت روابط (18,17) بیان می‌شود:

$$\nabla^2\psi=-2\mu\alpha \;\rightarrow\; \Omega \quad , \quad \psi=0 \;\rightarrow \Gamma_{\text{out}} \quad , \quad \psi=0 \;\rightarrow \Gamma_{\text{in}} \tag{17}$$

$$\nabla^2\hat{\psi}=0 \;\rightarrow\; \Omega \quad , \quad \hat{\psi}=0 \;\rightarrow \Gamma_{\text{out}} \quad , \quad \hat{\psi}=1 \;\rightarrow \Gamma_{\text{in}} \tag{18}$$

مسأله اول به کمک روش جواب‌های اساسی و با تبدیل مسأله پواسون به لاپلاس حل شده و مسأله دوم نیز با روش جواب‌های اساسی حل می‌شود و در نهایت جواب مسأله به صورت رابطه (19) بیان می‌شود:

$$\phi=\psi+\phi_1\hat{\psi} \tag{19}$$

مقدار ϕ_1 به صورت رابطه (20) محاسبه می‌شود [18]:

$$\phi_1=\frac{2\mu\alpha A_{\Gamma_{\text{in}}}+\int_{\Gamma_{\text{in}}}\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma}{-\int_{\Gamma_{\text{in}}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma} \tag{20}$$

که در معادله (20)، n راستای عمود بر مرز داخلی و به سمت بیرون می‌باشد.
با محاسبه مقدار ϕ تنش برشی نیز از رابطه (16) محاسبه می‌گردد.

5- روش بهینه‌سازی هندسه مقاطع توخالی تحت پیچش

هدف اصلی این پژوهش بهینه‌سازی شکل هندسی مقطع توخالی میله‌های تحت پیچش می‌باشد. میزان تنش برشی در گوشه‌های داخلی میله‌های توخالی بسیار زیاد است و همچنین میزان تنش برشی در گوشه‌های خارجی بسیار کم است و در واقع گوشه‌های خارجی سهم ناچیزی از تنش برشی را تحمل می‌کنند. اگر گوشه‌ها انحنادار شوند، هم مقدار تنش برشی در گوشه‌های داخلی کم می‌شود و هم گوشه‌های خارجی که سهم ناچیزی از تنش برشی را تحمل می‌کردند، حذف می‌شوند. لذا هدف این پژوهش یافتن شعاع بهینه اشکال منشوری توخالی تحت پیچش می‌باشد. بیشترین تنش برشی پس ازگوشه‌های داخلی بر روی اضلاع خارجی اتفاق می‌افتد لذا شعاع بهینه مربوط به شرایطی است که حداکثر تنش برشی در گوشه داخلی با حداکثر تنش برشی روی اضلاع خارجی برابر شود.

برای واضح‌تر شدن مسأله، به عنوان مثال، مطابق شکل 2 که مستطیلی به طول 2 سانتی‌متر و عرض 1 سانتی‌متر و ضخامت 0.1 سانتی‌متر می‌باشد، مقدار قدرمطلق بیشینه تنش برشی روی انحنا داخلی و ضلع خارجی بر حسب شعاع انحنا در شکل 3 آمده است (با در نظر گرفتن $\mu\alpha = 1$).

مطابق شکل 3 هنگامی که گوشه داخلی تیز باشد (شعاع انحنا گوشه کم باشد)، مقدار تنش برشی در گوشه بسیار زیاد است و با افزایش شعاع انحنا مقدار تنش برشی در گوشه کاهش می‌یابد. بر روی ضلع خارجی نیز با افزایش شعاع انحنا مقدار بیشینه تنش برشی تغییرات ناچیزی دارد و با شیب ملایمی افزایش می‌یابد. مقدار تنش برشی بیشینه برای شعاع‌های انحنای کمتر از 0.186 سانتی‌متر روی گوشه داخلی اتفاق می‌افتد و برای شعاع‌های انحنای بیش از 0.186 سانتی‌متر روی مرز خارجی قرار دارد. لذا کم‌ترین مقدار تنش برشی هنگامی است که بیشینه تنش برشی روی مرز خارجی با بیشینه تنش برشی در گوشه داخلی برابر باشد که در این مثال به ازای شعاع انحنای 0.186 سانتی‌متر می‌باشد.

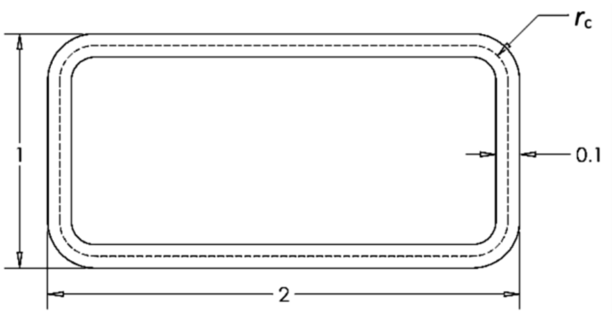

Fig. 2 A hollow rectangular section with rounded corners

شکل 2 شکل مستطیل توخالی انحنادار به همراه شعاع انحنا

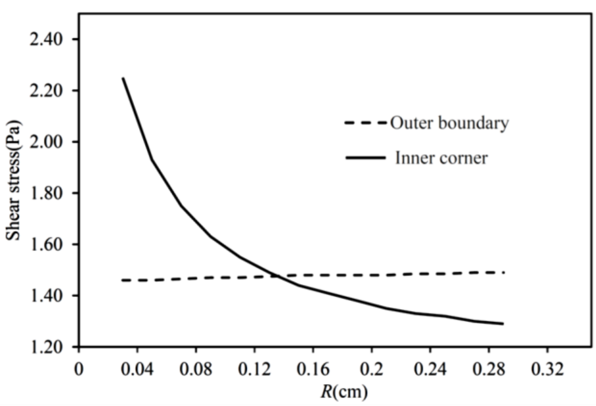

Fig. 3 The variation of the maximum shearing stress at outer boundary and inner corner with respect to corner radius

شکل 3 نمودار تغییرات تنش برشی بیشینه در مرز خارجی و در گوشه داخلی نسبت به شعاع گوشه

[1] Strain-displacement relations
[2] Hooke’s law
[3] Compatibility equation
[4] Poisson equation
[5] Prandtl stress function
[6] Shear modulus
[7] Angle of twist per unit length

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.50.0]

5-1- تعیین تابع هدف و متغیر طراحی

متغیر اصلی بهینه‌سازی مقدار شعاع انحنا در خط میانی در گوشه‌های سطح مقطع میله تحت پیچش است. در شکل 2 خط میانی با خط‌چین نشان داده شده است. به طور کلی به تعداد گوشه‌ها در سطح مقطع، متغیر طراحی وجود دارد و متقارن بودن شکل هندسی موجب کاهش متغیرهای طراحی می‌گردد. به عنوان مثال مقطع مستطیل توخالی به علت تقارن تنها یک متغیر طراحی دارد. محدوده تغییرات هر شعاع انحنا از صفر تا نصف طول ضلع کوچک‌تر متصل به انحنا می‌باشد.

تابع هدف مجموع قدرمطلق تفاضل حداکثر تنش برشی در هر گوشه‌ی داخلی با حداکثر تنش برشی در هر ضلع خارجی است که می‌بایست بهینه گردد. در حالتی کلی تابع هدف به صورت رابطه (21) تعریف می‌گردد که در آن ne بیانگر تعداد اضلاع است.

$$f=\sum_{i=1}^{ne}|(\tau_{\text{in}})_{\max}-(\tau_{\text{out}})_{\max}|_i \qquad (21)$$

5-2- الگوریتم بهینه‌سازی

در این پژوهش از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت[1] به منظور بهینه‌سازی شعاع های انحنا استفاده می‌شود. الگوریتم لونبرگ-مارکوارت روشی است برای یافتن کمینه یک تابع غیر خطی چند متغیره که به عنوان یک روش استاندارد برای حل مسأله کمینه مربعات برای توابع غیرخطی مطرح شده است [24].

این الگوریتم در سال 1944 توسط کِنث لونبرگ مطرح گردید و در سال 1963 توسط دونالد مارکوارت با دو تکنیک متفاوت توسعه داده شد. الگوریتم لونبرگ-مارکوارت (LMA) بین الگوریتم گاوس-نیوتون[2] (GNA) و روش نزول گرادیانی[3] درونیابی می‌کند [25]. در الگوریتم لونبرگ-مارکوارت مورد استفاده در این پژوهش، بردار جواب در هر مرحله با رابطه (22) اصلاح می-گردد.

$$[\beta]_{k+1}=[\beta]_k-([J][\beta]_k^{\mathrm{T}}[J][\beta]_k+\lambda[I])[J][\beta]_k^{\mathrm{T}}f\big([\beta]_k\big) \qquad (22)$$

در معادله (22)، $[\beta]$ بردار جواب است که شامل متغیرهای طراحی می‌شود، $[\beta]_{k+1}$ بردار جواب در مرحله $k+1$ام و $[\beta]_k$ بردار جواب در مرحله kام است. $f([\beta]_k)$ تابع هدف در مرحله kام و $[J]$ ژاکوبین تابع f به ازای $[\beta]_k$ است. $[I]$ ماتریس همانی و λ یک عدد مثبت است که ضریب میرایی[4] نامیده می‌شود. در این پژوهش الگوریتم لونبرگ-مارکوارت مستقیماً با دستور بهینه‌سازی[5] در نرم‌افزار متلب مورد استفاده قرار گرفته شده است.

6- نتایج

در این قسمت به بهینه‌سازی شعاع انحنا در گوشه مقاطع توخالی مربع، مستطیل و ذوزنقه تحت پیچش پرداخته می‌شود. هدف در این مسائل محاسبه شعاع و یا شعاع‌های بهینه گوشه‌های مقاطع است به گونه‌ای که تنش بیشینه حداقل شود.

در ابتدا به منظور ارزیابی دقت و همگرایی روش جواب‌های اساسی برای مقاطع توخالیِ تحت پیچش به حل مسأله سطح مقطع بیضی توخالی در بارگذاری پیچش پرداخته شده است، با توجه به وجود جواب تحلیلی برای این مسأله می‌توان ارزیابی دقیقی از روش حل جواب‌های اساسی و چیدمان نقاط به روش دوقیدی به دست آورد و همچنین در ادامه به حل مسائلی که مقدار تجربی آن‌ها وجود دارد پرداخته شده و مقایسه‌ای بین روش جواب‌های اساسی با روش‌های دیگر انجام شده است.

6-1- ارزیابی کد تدوین شده برای تحلیل مسأله پیچش توسط روش جواب‌های اساسی

در این قسمت یک سطح مقطع بیضی توخالی با قطر بزرگ بیرونی 4 و درونی 2 و قطر کوچک بیرونی 2 و درونی 1، مطابق شکل 4، تحت پیچش بررسی شده است. تابع تنش با توجه به معادله (23) محاسبه می‌شود [26].

$$\phi(x,y)=-\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2\mu\alpha}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \qquad (23)$$

و مقدار تنش‌های برشی به صورت روابط (24) است.

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (24)$$

در معادله (23)، a نصف قطر بزرگ خارجی و b نصف قطر کوچک خارجی می‌باشد و $\mu\alpha$ را برابر 2 در نظر گرفته می‌شود.

پس مقادیر تنش برشی برای مسأله فوق به صورت روابط (25) می‌شود.

$$\tau_{xz}=-3.2y \quad , \quad \tau_{yz}=0.8x \quad , \quad \tau=3.2\left(y^2+\frac{x^2}{16}\right)^{\mathbf{1/2}} \qquad (25)$$

این مسأله با روش جواب‌های اساسی و با رعایت دستورالعمل دوقیدی برای چیدمان نقاط چشمه و نقاط متمرکز حل گردیده است که چیدمان نقاط در شکل 5 و خطای نسبی جواب برای تعداد مختلف نقاط چشمه در جدول 1 آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطای نسبی جواب برای همه‌ی حالت‌ها بسیار اندک است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با روش جواب‌های اساسی و دستورالعمل چیدمان نقاط توسط روش دو قیدی و تنها با 122 نقطه جواب مناسبی بدست می‌آید و همچنین با افزایش نقاط چشمه مقدار جواب به جواب دقیق همگرا

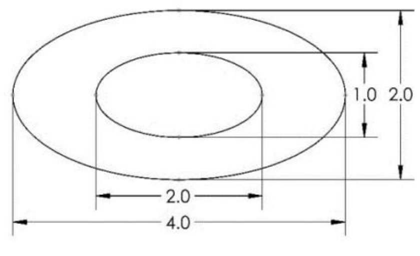

Fig. 4 A hollow elliptical cross-section

شکل 4 یک سطح مقطع بیضی شکل توخالی

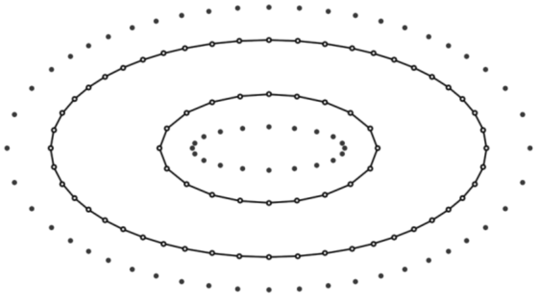

Fig. 5 The configuration of source and collocation points for the hollow ellipse

شکل 5 چیدمان نقاط چشمه و متمرکز برای بیضی توخالی

[1] Levenberg-Marquardt
[2] Gauss-Newton
[3] Gradient descent
[4] Damping factor
[5] Optim set

جدول 1 خطای نسبی جواب برای سطح مقطع بیضی توخالی تحت پیچش

Table 1 The relative error of the solution for the hollow elliptical cross-section under torsion

عدد شرط ماتریس ضرایب	بیش‌ترین خطای نسبی تنش برشی	بیش‌ترین خطای نسبی متغیر ϕ	تعداد نقاط چشمه
2.40×10^{3}	1.50×10^{-1}	1.06×10^{-2}	48
3.20×10^{3}	1.60×10^{-2}	1.00×10^{-3}	70
5.30×10^{3}	9.06×10^{-3}	2.40×10^{-4}	122
9.30×10^{3}	6.07×10^{-3}	7.60×10^{-5}	222

می‌شود. لذا روش جواب‌های اساسی در صورت رعایت دستورالعمل دوقیدی در چیدمان نقاط چشمه و متمرکز روشی مطمئن برای حل مقاطع توخالی تحت پیچش است.

به منظور ارزیابی دقیق‌تر نتایج، مقدار زاویه پیچش در نقطه تسلیم برای چندین مستطیل توخالی با مقدار تجربی و عددی آن مقایسه می‌گردد. در مرجع 1 رفتار چندین قوطی با ابعاد و جنس‌های مختلف، تحت پیچش به صورت تجربی و همچنین با روش المان محدود[1] و تئوری مقاطع جدار ضخیم[2] مورد بررسی قرار گرفته شده است. در جدول 2 مقادیر تجربی و عددی زاویه پیچش در نقطه تسلیم برای چندین مقطع بر اساس مرجع 1 آمده است که مقدار تجربی زاویه پیچش در زمان تسلیم با $_{Ex}\theta$ و مقدار محاسبه شده با روش المان محدود و تئوری مقاطع جدار ضخیم به ترتیب با $_{FE}\theta$ و با $_{TWT}\theta$ نشان داده شده است و همچنین مقدار زاویه پیچش در زمان تسلیم به روش جواب‌های اساس نیز برای همان مقاطع ($_{MFS}\theta$) در ستون آخر آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر بدست آمده به روش جواب‌های اساسی نسبت به دو روش دیگر به مقدار اندازه‌گیری شده نزدیک‌تر می‌باشد و در نتیجه برای این مسائل روش جواب‌های اساسی مناسب است.

6-2- بهینه‌سازی سطح مقطع مربع توخالی تحت پیچش

اولین سطح مقطع توخالی که در اینجا به بهینه‌سازی آن پرداخته می‌شود، یک مربع توخالی طبق شکل 6 است که تحت پیچش قرار می‌گیرد. در این مثال هدف یافتن شعاع بهینه خط میانی در گوشه‌ها در ضخامت‌های مختلف است. شعاع بهینه مقداری است که به ازای آن بیشینه تنش برشی در گوشه داخلی با بیشینه تنش برشی در اضلاع خارجی برابر می‌شود. در این شرایط تنش بیشینه ایجاد شده در کل مقطع حداقل می‌شود. در این مثال برای بهینه‌سازی از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت و از روش جواب‌های اساسی برای یافتن تنش برشی در سطح مقطع استفاده شده است.

پارامترهای مورد استفاده در الگوریتم لونبرگ-مارکوارت برای این مثال طبق جدول 3 در کد الگوریتم وارد شده‌اند. مقدار بدست آمده برای شعاع بهینه مقطع در ضخامت‌های مختلف در جدول 4 ارائه شده است. همان‌طور

جدول 2 مقادیر تجربی و عددی زاویه پیچش در نقطه تسلیم برای چندین مقطع براساس مرجع 1

Table 2 Experimental and numerical values of the angle of twisting at the yield point for several hollow rectangles based on reference 1

ابعاد مقطع $a \times b \times t \times r_c$ (mm)	جنس گرید فولاد	زاویه پیچش در نقطه تسلیم (°/m) $_{Ex}\theta$	$_{FE}\theta$	$_{TWT}\theta$	$_{MFS}\theta$
197.5 × 99.5 × 7.79 × 8.85	S275J2H	1.6	2.1	2.14	1.62
149 × 149 × 6.09 × 8	S275J2H	1.35	1.8	1.83	1.40
199 × 100 × 7.93 × 8.75	S335J2H	1.8	2.25	2.26	1.70
149.5 × 149.5 × 5.79 × 8	S335J2H	1.9	2.2	2.20	1.71

[1] Finite element
[2] Thick wall theory

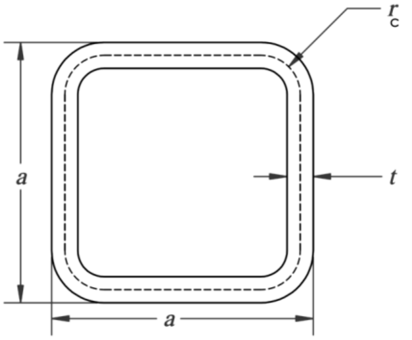

Fig. 6 Hollow square cross section

شکل 6 سطح مقطع مربع توخالی

جدول 3 پارامترهای مورد استفاده در الگوریتم لونبرگ-مارکوارت

Table 3 Parameters used in Levenberg-Marquardt algorithm

مقدار	عنوان پارامتر در متلب	عنوان پارامتر
10^{-6}	X tolerance	دقت متغیر طراحی
10^{-6}	Function tolerance	دقت تابع هدف
0.01	Initial Damping	مقدار اولیه ضریب میرایی

جدول 4 شعاع بهینه گوشه بر حسب ضخامت برای مربع توخالی تحت پیچش

Table 4 The optimal corner radius with respect to thickness for the hollow square under torsion

نسبت شعاع بهینه به a (r_c/a)	نسبت ضخامت سطح مقطع به a (t/a)
0.133	0.02
0.136	0.04
0.139	0.06
0.141	0.08
0.143	0.10
0.144	0.12
0.145	0.14
0.146	0.16
0.147	0.18
0.148	0.20
0.151	0.22
0.153	0.24
0.156	0.26
0.159	0.28

که ملاحظه می‌شود با افزایش ضخامت اندازه شعاع بهینه گوشه نیز افزایش پیدا می‌کند.

6-3- بهینه‌سازی سطح مقطع مستطیل توخالی تحت پیچش

دومین سطح مقطع توخالی که در اینجا به بهینه‌سازی آن پرداخته می‌شود، یک مستطیل توخالی طبق شکل 7 است که تحت پیچش قرار می‌گیرد. در این مثال هدف یافتن شعاع بهینه خط میانی در گوشه‌ها در ضخامت‌های مختلف است. مانند مثال قبل از الگوریتم بهینه‌سازی لونبرگ-مارکوارت استفاده شده است و از روش جواب‌های اساسی برای یافتن تنش برشی در سطح مقطع استفاده شده است.

همان‌طور که قبلاً نشان داده شد (مطابق شکل 3) برای این مقطع با ضخامت $t = 0.1a$ ، زمانی که شعاع انحنا کوچک باشد و برابر $t = 0.05a$ باشد، مقدار تنش برشی 1.5 برابر زمانی است که شعاع گوشه برابر با مقدار بهینه آن یعنی $t = 0.186a$ باشد و به عبارت دیگر با بهینه‌سازی شعاع انحنا، مقاومت برشی مقطع را می‌توان تا یک و نیم برابر افزایش داد.

مقدار شعاع بهینه مقطع در ضخامت‌های مختلف در جدول 5 ارائه شده

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.50.0]

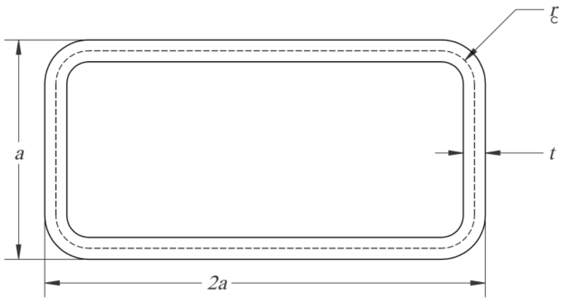

Fig. 7 Hollow rectangle cross section

شکل 7 سطح مقطع مستطیل توخالی

جدول 5 شعاع بهینه گوشه‌های مستطیل توخالی تحت پیچش بر حسب ضخامت‌های مختلف

Table 5 The optimal corner radius with respect to thickness for the hollow rectangle under torsion

نسبت شعاع بهینه به a (r_c/a)	نسبت ضخامت سطح مقطع به a (t/a)
0.178	0.02
0.179	0.04
0.181	0.06
0.184	0.08
0.186	0.10
0.187	0.12
0.188	0.14
0.188	0.16
0.188	0.18
0.189	0.20
0.189	0.22
0.189	0.24
0.190	0.26
0.191	0.28
0.192	0.30

است. پارامترهای مورد استفاده در الگوریتم بهینه‌سازی برای این مثال طبق جدول 3 در کد الگوریتم وارد شده‌اند.

4-6- استخراج رابطه‌ای برای تعیین شعاع بهینه مقاطع مستطیل شکل توخالی تحت پیچش

با توجه به مقادیر ارائه شده در جداول 4 و 5 و با استفاده از برازش منحنی، فرمول (26) برای یافتن شعاع بهینه مقاطع مستطیل شکل توخالی استخراج شده است.

$$\frac{r_{\text{optimum}}}{a} = 0.045\left(\frac{b}{a} - 1\right) + 0.07\frac{t}{a} + 0.135$$
$$1 \le \frac{b}{a} \le 2 \qquad (26)$$

در رابطه فوق b طول ضلع بزرگ مستطیل و a طول ضلع کوچک آن و t ضخامت مقطع و r_{optimum} مقدارشعاع بهینه است. این رابطه برای مقاطع مستطیل توخالی که نسبت طول به عرض آن‌ها حداکثر 2 می‌باشد قابل استفاده است. بیش‌ترین خطای فرمول (26) برای نتایج جدول 4 و 5 برابر 3.5 درصد است. به منظور ارزیابی فرمول پیشنهادی به بهینه‌سازی 20 مقطع قوطی استاندارد پرداخته و نتایج حاصل با نتایج حاصل از معادله (26) مقایسه شده است. مقدار شعاع بهینه مقاطع با استفاده از روش جواب‌های اساسی و الگوریتم بهینه‌سازی لونبرگ-مارکوارت، مشابه مثال‌های قبل تعیین شده است و مشاهده شده است که مقدار شعاع بهینه با مقدار محاسبه شده از فرمول (26) بسیار نزدیک است و بیش‌ترین خطای فرمول (26) برای مقاطع کم‌تر از 3 درصد می‌باشد، لذا با استفاده از فرمول (26) می‌توان شعاع بهینه مقاطع مستطیل شکل توخالی تحت پیچش را با دقت مناسب تعیین نمود.

5-6- بهینه‌سازی سطح مقطع ذوزنقه توخالی تحت پیچش

سطح مقطع توخالی دیگری که در اینجا به بهینه‌سازی آن پرداخته می‌شود، یک ذوزنقه متساوی الساقین توخالی مطابق شکل 8 است که تحت پیچش قرار می‌گیرد. در این مثال دو متغیر برای بهینه‌سازی وجود دارد که شامل شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده بزرگ و شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده کوچک می‌شود. مقدار شعاع‌های بهینه در ضخامت‌های مختلف محاسبه شده است. همانند مثال‌های قبل به منظور یافتن شعاع‌های بهینه از الگوریتم بهینه‌سازی لونبرگ-مارکوارت استفاده شده است و از روش جواب‌های اساسی برای یافتن تنش برشی در سطح مقطع استفاده شده است. مقدار شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده بزرگ و گوشه‌های متصل به قاعده کوچک در ضخامت‌های مختلف در جدول 6 ارائه شده است. پارامترهای مورد استفاده در این الگوریتم برای این مثال طبق جدول 3 در کد الگوریتم وارد شدند.

در جدول 7 به بررسی تغییرات تنش برشی مقاطع جدول 2 با بهینه‌سازی شعاع انحنا پرداخته شده است. مقدار شعاع انحنا بهینه از معادله (26) محاسبه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار تنش برشی در انحناهای داخلی بیش از اضلاع خارجی می‌باشد و با بهینه‌سازی شعاع انحنا، مقدار تنش برشی بیشینه بیش از 20 درصد کاهش می‌یابد و همچنین تنش برشی بیشینه روی اضلاع خارجی مقدار کمی (حدود یک درصد) افزایش می‌یابد.

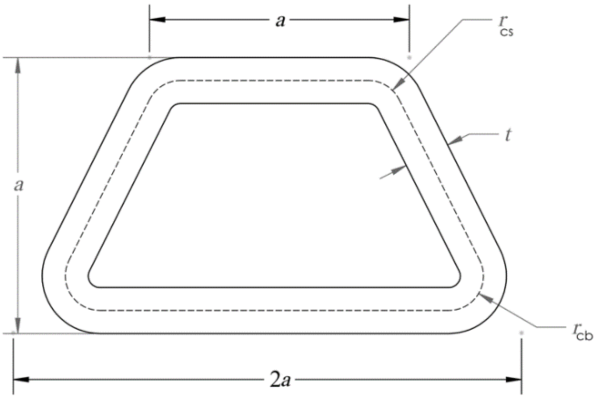

Fig. 8 Hollow trapezoidal section

شکل 8 سطح مقطع ذوزنقه توخالی

جدول 6 شعاع بهینه گوشه‌های ذوزنقه توخالی تحت پیچش بر حسب ضخامت‌های مختلف

Table 6 The optimum corner radii with respect to thickness for the hollow trapezoidal section under torsion

نسبت شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده بزرگ به a (r_{cb}/a)	نسبت شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده کوچک به a (r_{cs}/a)	نسبت ضخامت سطح مقطع به a (t/a)
0.156	0.155	0.02
0.158	0.158	0.04
0.161	0.160	0.06
0.164	0.160	0.08
0.167	0.159	0.10
0.170	0.157	0.12
0.174	0.155	0.14
0.174	0.153	0.16
0.177	0.151	0.18
0.179	0.149	0.20
0.180	0.150	0.22
0.182	0.150	0.24

جدول 7 مقایسه تنش برشی بیشینه مقاطع جدول 2 با تنش برشی بیشینه همان مقاطع با شعاع انحنا بهینه

Table 7 Comparison of the maximum shear stresses of the sections of table 2 with the maximum shear stresses of the sections with optimum curvature radius

ابعاد مقطع $a \times b \times t$ (mm)	شعاع انحنا گوشه r_c (mm)	نسبت تنش برشی بیشینه در θ_{MFS} به تنش تسلیم	
		در انحناهای داخلی	در اضلاع خارجی
197.5 × 99.5 × 7.79	8.85	1	0.76
	18.9	0.77	0.77
149 × 149 × 6.09	8	1	0.77
	20.6	0.78	0.78
199 × 100 × 7.93	8.75	1	0.755
	18.5	0.76	0.76
149.5 × 149.5 × 5.79	8	1	0.78
	20.6	0.79	0.79

همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقاطع مربع و مستطیل توخالی با افزایش ضخامت، شعاع بهینه تغییرات نسبتاً کمی دارد و به صورت تقریباً خطی افزایش می‌یابد و مطابق شکل 3 در صورتی که شعاع انحنا بیش از شعاع بهینه باشد، مقدار تنش برشی ماکزیمم افزایش کمی دارد و در عوض در حالتی که شعاع انحنا کمتر از شعاع بهینه باشد، مقدار تغییرات تنش برشی زیاد است و با توجه به نتایج جدول 4 و جدول 5 عدد 0.2 را می‌توان به عنوان شاخص برای شعاع انحنا مقاطع مستطیلی عنوان کرد و به عبارت دیگر برای مقاطع مستطیل توخالی تحت پیچش بهتر است که شعاع انحنا برابر 0.2 طول ضلع کوچک‌تر مقطع مستطیل شکل باشد

شعاع بهینه مقطع ذوزنقه‌ای شکل هم تغییرات کمی دارد و مقدار شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده بزرگ بیش از شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده کوچک می‌باشد و برای ذوزنقه مورد بررسی نیز، مطابق جدول 6 عدد 0.16 برای شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده کوچک و عدد 0.18 برای شعاع بهینه گوشه‌های متصل به قاعده بزرگ مناسب می‌باشد.

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بهینه‌سازی مقاطع مربع، مستطیل و ذوزنقه توخالی تحت پیچش پرداخته شد. مقدار شعاع بهینه گوشه مقاطع به گونه‌ای تعیین شد که مقدار بیشینه تنش برشی در گوشه‌های داخلی با مقدار بیشینه تنش برشی روی اضلاع خارجی برابر باشد. به منظور محاسبه تنش برشی، از روش جواب‌های اساسی و چیدمان نقاط متمرکز و چشمه با رعایت اصول دوقیدی، استفاده گردید. مقدار شعاع بهینه برای مربع توخالی و مستطیل توخالی با ضخامت‌های مختلف تحت پیچش محاسبه شد و همچنین رابطه‌ای برای تعیین شعاع بهینه گوشه‌های مقاطع مستطیل توخالی استخراج گردید. به منظور ارزیابی نتایج، مقدار زاویه پیچش در نقطه تسلیم برای چندین مقطع محاسبه شد و با مقادیر اندازه‌گیری شده و مقادیر محاسبه شده با روش المان محدود و تئوری مقاطع جدار ضخیم مقایسه گردید و نشان داده شد که روش جواب‌های اساسی برای این منظور روش مناسبی می‌باشد. در این پژوهش کارایی روش جواب‌های اساسی برای مسائل بهینه‌سازی نشان داده شد، لذا در پژوهش‌های آتی از این روش می‌توان در بهینه‌سازی مسائل مختلفی استفاده کرد.

8- مراجع

[1] D. Ridley-Ellis, J. Owen, G. Davies, Torsional behaviour of rectangular hollow sections, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 59, No. 5, pp. 641-663, 2003.
[2] A. J.C. B. de Saint, Venant, Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, Mem, *Savants Etrang*, Vol. 14, pp. 233-560, 1856.
[3] V. Kobelev, Numerical method for shape optimization using BEM, *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 5, pp. 1223-1227, 1989.
[4] K. Dems, Multiparameter shape optimization of elastic bars in torsion, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 1517-1539, 1980.
[5] U. Schramm, W. D. Pilkey, Structural shape optimization for the torsion problem using direct integration and B-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 107, No. 1-2, pp. 251-268, 1993.
[6] G. Mejak, Optimization of cross - section of hollow prismatic bars in torsion, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 16, No. 10, pp. 687-695, 2000.
[7] Q. Li, G. P. Steven, O. M. Querin, Y. Xie, Stress based optimization of torsional shafts using an evolutionary procedure, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 32, pp. 5661-5677, 2001.
[8] C. Wang, Optimization of torsion bars with rounded polygonal cross section, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 139, No. 5, pp. 629-634, 2013.
[9] L. Cavallina, Locally optimal configurations for the two-phase torsion problem in the ball, *arXiv preprint arXiv:1701.07939*, 2017.
[10] T. A. Dutra, S. F. M. de Almeida, Composite plate stiffness multicriteria optimization using lamination parameters, *Composite Structures*, Vol. 133, pp. 166-177, 2015.
[11] S. Samiezadeh, P. T. Avval, Z. Fawaz, H. Bougherara, On optimization of a composite bone plate using the selective stress shielding approach, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 42, pp. 138-153, 2015.
[12] X. Li, G. Li, C. H. Wang, M. You, Minimum-weight sandwich structure optimum design subjected to torsional loading, *Applied Composite Materials*, Vol. 19, No. 2, pp. 117-126, 2012.
[13] M. Hematiyan, A. Khosravifard, T. Bui, Efficient evaluation of weakly/strongly singular domain integrals in the BEM using a singular nodal integration method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, No. 4, pp. 691-698, 2013.
[14] V. Kupradze, M. A. Aleksidze, The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 4, pp. 82-126, 1964.
[15] R. Mathon, R. L. Johnston, The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 14, No. 4, pp. 638-650, 1977.
[16] G. Fairweather, A. Karageorghis, The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1-2, pp. 69, 1998.
[17] B. T. Johansson, D. Lesnic, T. Reeve, A method of fundamental solutions for two-dimensional heat conduction, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 88, No. 8, pp. 1697-1713, 2011.
[18] A. Karageorghis, D. Lesnic, L. Marin, A survey of applications of the MFS to inverse problems, *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 19, No. 3, pp. 309-336, 2011.
[19] W. Chen, J. Lin, C. Chen, The method of fundamental solutions for solving exterior axisymmetric Helmholtz problems with high wave-number, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 477-493, 2013.
[20] M. R. Hematiyan, A. Haghighi, A. Khosravifard, A two-constraint method for appropriate determination of the configuration of source and collocation points in the method of fundamental solutions for 2D Laplace equation, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, in press.
[21] Y. S. Smyrlis, A. Karageorghis, Efficient implementation of the MFS: The three scenarios, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 227, No. 1, pp. 83-92, 2009.
[22] A. Kaw, *Introduction to Matrix Algebra*, Autarkaw.com, 2008, ISBN: 978-0-615-25126-4.
[23] A. Doostfatemeh, M. R. Hematiyan, S. Arghavan, Closed-form approximate formulas for torsional analysis of hollow tubes with straight and circular edges, *Journal of Mechanics*, Vol. 25, No. 4, pp. 401-409, 2009.
[24] H. Mittelmann, The least squares problem, *World Wide Web Site] http://plato.asu.edu/topics/problems/nlolsq. html*, 2004.
[25] N. Khan, D. Gaurav, T. Kandl, Performance evaluation of Levenberg-Marquardt technique in error reduction for diabetes condition classification, *Procedia Computer Science*, Vol. 18, pp. 2629-2637, 2013.
[26] M. H. Sadd, *Elasticity: theory, applications, and numerics*, Second Edition, pp. 237-240, Academic Press, 2009.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.50.0]