

## شبیه‌سازی و کنترل مود لغزشی - تطبیقی ربات تعادلی دوچرخ با معادلات دینامیکی بهبود یافته

امیرحسین شامخی<sup>۱\*</sup>, آزاده شریعتی<sup>۲</sup>, علی غفاری<sup>۳</sup>, سینا امیدفر<sup>۴</sup>

۱- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999, shamekhi@kntu.ac.ir

**چکیده**

در این مقاله، کنترل ربات تعادلی دوچرخ بر اساس مدل بهبود یافته ربات ارائه شده است. مسئله ربات تعادلی دوچرخ به دلیل وجود قیود غیر هولونومیک، کمبود عملگر و ناپایداری ذاتی مسائلهای جالب و چالش برانگیز در علم دینامیک و کنترل است. در پژوهشی که پیش از این توسط نویسندهای مقاله صورت گرفته، معادلات دینامیکی بهبود یافته ربات دوچرخ محاسبه و اعتبارسنجی شده است که تفاوت آن با مدل‌های پیشین وجود یک ترم غیرخطی است. نشان داده شده که اگر ربات در مسیر غیر مستقیم حرکت کند، وجود این ترم غیرخطی در طراحی کنترل تأثیر بسزایی دارد. در این مقاله از کنترلهای مود لغزشی - تطبیقی بر مبنای دینامیک صفر استفاده شده است. این کنترل به گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدن ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد، در حالی که خطای شتاب و موقعیت رو به جلو را صفر می‌کند و سرعت دورانی مطلوب را نیز برای ربات فراهم می‌سازد. در ادامه، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باریالت و قضیه مجموعه‌های ناوردای لاسل اثبات شده، که سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فرآگیر پایدار است. نتایج شبیه‌سازی‌ها کارآمدی کنترل ارائه شده را نشان می‌دهد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دربافت: 23 اسفند 1393

پذیرش: 07 اردیبهشت 1394

ارائه در سایت: 28 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

ربات تعادلی دوچرخ

معادلات دینامیکی بهبود یافته

کنترل مود لغزشی - تطبیقی

تئوری پایداری لیاپانوف

قضیه مجموعه‌های ناوردای

## Simulation and control system design for a two-wheeled self-balancing robot via adaptive sliding-mode technique using modified dynamical model

Amir Hosein Shamekhi\*, Azadeh Shariati, Ali Ghaffari, Sina Omidfar

Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran  
\* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, shamekhi@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 14 March 2015

Accepted 27 April 2015

Available Online 18 May 2015

**Keywords:**

Two-Wheeled Self-Balancing Robot  
Modified Dynamical Model  
Adaptive-Sliding Mode Controller  
Lyapunov Theorem  
Invariant Set Theorem

### ABSTRACT

The problem of two-wheeled self-balancing robot is an interesting and challenging problem in control and dynamic systems. This complexity is due to the inherent instability, nonholonomic constraints, and under-actuated mechanism. Dynamical model of two-wheeled self-balancing robot can be presented by a set of highly coupled nonlinear differential equations. Authors, previously, developed the modified dynamical equations of the robot. The governed equations have some differences with the commonly used equations. The main difference is due to the existence of a nonlinear coupling term which had been neglected before. In this paper an adaptive sliding mode controller based on the zero dynamics theory was used. The controller objective is to drive the two-wheeled self-balancing robot to the desired path as well as to make the robot stable. By some simulations the behavior of the robot with the proposed controller is discussed. It is shown that if the nonlinear coupling term is ignored in designing the controller, the controller cannot compensate its effect. Using Lyapunov theorem and the invariant set theorem, it is proved that the errors are globally asymptotically stable.

است. برخی از ربات‌های چرخدار عملی عبارتند از JOE [1], B<sub>2</sub> [2] و محصول

تجاری سگوی [3]. چنین سیستم‌هایی مانورپذیری بالایی دارند و می‌توانند به مکان‌هایی بروند که تنها عابرین پیاده می‌توانند در آنجا تردد کنند. معادلات دینامیکی ربات‌های تعادلی دوچرخ به دلیل توانایی حرکت چرخ‌ها بر روی صفحه افقی و ناپایداری ذاتی بدن سیار وابسته و غیرخطی است. گریسر

### 1- مقدمه

در سال‌های اخیر، مطالعه بر روی ربات‌های تعادلی دوچرخ بسیار گسترش یافته و تحقیقات بسیاری بر روی طراحی، دینامیک و کنترل آنها انجام شده است. مسئله ربات تعادلی دوچرخ به دلیل وجود قیود غیرهولونومیک، کمبود عملگر و ناپایداری ذاتی، مسائلهای چالش برانگیز در علم دینامیک و کنترل

Please cite this article using:

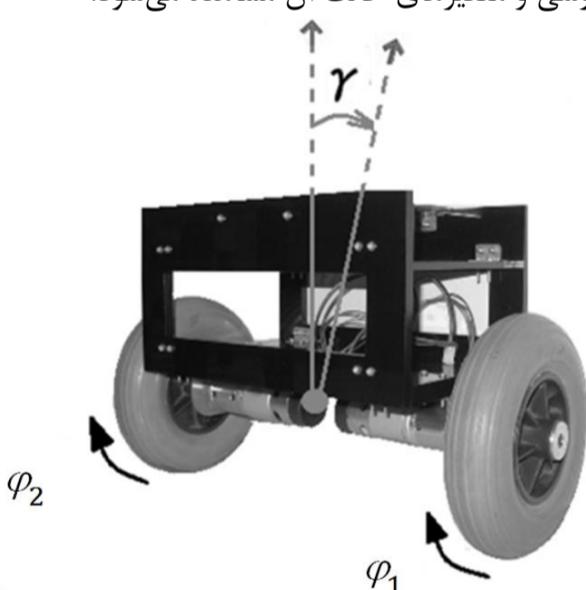
A. H. Shamekhi, A. Shariati, A. Ghaffari, S. Omidfar, Simulation and control system design for a two-wheeled self-balancing robot via adaptive sliding-mode technique using modified dynamical model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 53-60, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

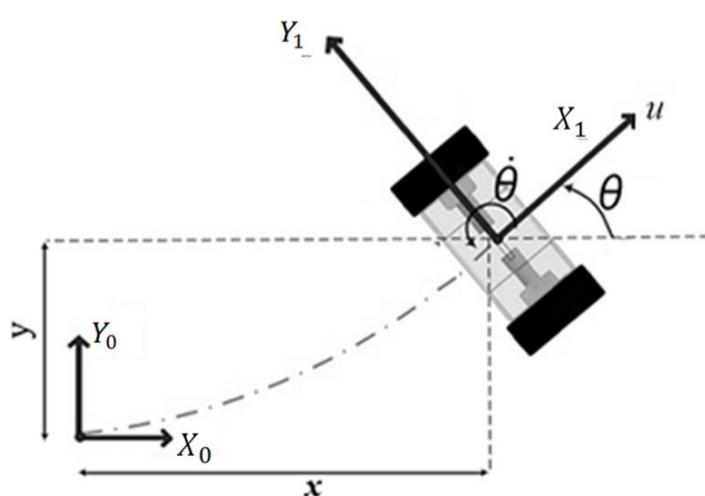
استفاده از مدل دینامیکی [1] به کنترل مود لغزشی - تطبیقی ربات دوچرخ پرداختند. در مقاله حاضر با الهام از کنترلر یو و در راستای پژوهش [16,17]، با اعمال یک کنترلر مود لغزشی - تطبیقی نشان داده خواهد شد که اگر ترم بهبودیافته در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، تأثیر بسزایی در رفتار سیستم مدار بسته خواهد داشت. کنترلر حاضر به گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدنه ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و کنترل دورانی مطلوب را نیز برای ربات برآورده سازد. در ادامه با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باربالت و قضیه مجموعه‌های ناوردا لاسال، اثبات خواهد شد که سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فراگیر پایدار می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی‌ها کارآمدی کنترلر ارائه شده را نشان می‌دهند. مقاله حاضر دارای سرفصل‌های اصلی زیر است: بخش اول مقاله به مقدمه‌ای راجع به ربات‌های تعادلی دوچرخ اختصاص داشت. در بخش دوم توصیف اجمالی از سیستم آورده شده است و در بخش سوم به طراحی کنترلر پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی‌ها در بخش چهارم و در نهایت جمع‌بندی نتایج در بخش پنجم مقاله انجام خواهد شد.

## 2- توصیف سیستم

ربات تعادلی دوچرخی که در این مقاله بررسی می‌شود، یک بدنه است که بر روی یک محور نصب شده و شامل دو چرخ می‌باشد. عملگرهای ربات دو موتور DC هستند که به چرخها متصل هستند. این سیستم سه درجه آزادی دارد. دو درجه آزادی به حرکت ربات در صفحه اختصاص داشته و درجه آزادی سوم زاویه انحراف بدنه از حالت عمود می‌باشد که مانند یک پاندول معکوس عمل می‌کند. در شکل‌های 1 و 2 ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترل دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و متغیرهای حالت آن مشاهده می‌شود.



شکل 1 نمایش ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترل دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



شکل 2 نمای بالای ربات تعادلی دوچرخ ساخته شده در قطب رباتیک و کنترل دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی به همراه نمایش متغیرهای حالت

و همکاران به مدل سازی دینامیکی سیستم به روش نیوتن اویلر پرداخته‌اند و برای طراحی کنترلر معادلات بدست آمده را حول نقطه کاری خطی کرده‌اند [1]. سلمو و آنجل معادلات دینامیکی ربات را با در نظر گرفتن زوایای پیچ و دوران به عنوان متغیرهای حالت بدست آورده‌اند [4]. گوهر و همکاران با استفاده از روش لاغرانژ معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ را محاسبه و درجات آزادی اضافی را نسبت به کار محققان پیشین به سیستم اضافه کردند [5]. تحقیقات بسیاری نیز بر روی مسئله کنترل و پایداری این دسته از ربات‌ها صورت گرفته است. جونگ و همکارانش ربات آی‌پنتر را از روش پسخوراند متغیرهای حالت کنترل کردند [6]. همچنین ژو از روش LQR برای کنترل ربات دوچرخ استفاده کرده است [7]. کانگ برای کنترل ربات تعادلی، یک کنترلر مود لغزشی مرتبه کامل ارائه داده است. وی معادلات دینامیکی را بعد از خطی‌سازی به فرم فضای حالت برد و یک کنترلر مقاوم برای پایدارسازی و حذف اغتشاشات طراحی کرد [8]. لین یک روش تطبیقی مقاوم برای کنترل زاویه انحراف ربات از وضعیت تعادل ارائه داد. در پژوهش وی معادلات دینامیکی بعد از ساده‌سازی در دو قسمت مجزا از هم نوشته شده و برای هر قسمت کنترلر مقاوم تطبیقی طراحی شده است و پارامترهای قوانین کنترلی براساس تئوری پایداری لیاپانوف به دست آمده است [9]. سو [10] یک ساختار کنترلی هوشمند برای کنترل ربات تعادلی خود ارائه داد. در الگوریتم کنترلی پیشنهادی وی از یک استنتاجگر فازی به عنوان کنترلر اصلی و از یک شبکه عصبی به عنوان کنترلر کمکی استفاده شده است. رن و همکاران [11] از کنترلی که ترکیبی از یک کنترلر تناسبی-انتگرالی-مشتقی و یک شبکه عصبی است برای کنترل ربات خود استفاده کرده‌اند. در کنترلر ارائه شده ضرایب به وسیله یک شبکه عصبی تنظیم می‌شود. مذاخر، شامخی و غفاری [12] با استفاده از روش انتگرال توسعه‌یافته، تابع لیاپانوف مناسب را برای ربات دوچرخ بدست آورده و سپس کنترلری بر مبنای تئوری لیاپانوف طراحی کردند. از آنجا که سیگنال کنترلی حاصل دارای عباراتی ناپیوسته بود، لذا شرایط حل فیلیپاف برای بررسی وجود، یکتایی و هموار بودن رفتار سیستم در هنگام برخورد با صفحات ناپیوستگی مورد تحلیل قرار گرفت و پایداری مجانبی سیستم کنترلی با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف و قضیه مجموعه‌های ناوردا اثبات شد. لاریمی و موسویان [13,14] برای کنترل و حفظ تعادل ربات، یک مکانیزم جدید پایدارسازی برای ربات دوچرخ ارائه کردند. در مکانیزم ارائه شده، از یک چرخ عکس‌العملی استفاده شده است، به این صورت که برای حفظ تعادل از عکس‌العمل ناشی از اعمال گشتاور موتور به این چرخ استفاده می‌شود. کیم ۱ و همکاران معادلات دینامیکی ربات سه درجه آزادی را به روش کین ۲ بدست آورده‌اند [15].

غفاری، شریعتی و شامخی معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ را یکبار دیگر بدست آورده و آن را معادلات بهبودیافته نامیدند. از آنجا که معادلات کیم مرجع اصلی پژوهشگران برای اهداف کنترلی می‌باشد، نویسنده‌گان معادلات خود را با معادلات کیم مقایسه نموده و نشان دادند که در معادلات بهبودیافته ترمی وجود دارد که در معادلات کیم و سایر محققان نیامده است. وجود این ترم غیرخطی و وابسته که ترم بهبودیافته نامیده شده، و همچنین صحت معادلات دینامیکی، با بدست آوردن معادلات با دو روش کین و لاغرانژ نشان داده شده است. همچنین با ثابت ماندن تابع انرژی درغیاب نیروهای غیرپایستار برای مدل بهبودیافته، یک بار دیگر صحت معادلات و شبیه‌سازی‌ها اثبات شده است [16,17]. یو و همکاران [18] با

1- Kim

2- Kane's approach

جدول ۱ پارامترهای ربات

	خصوصیت	واحد	مقدار	تعريف
گشتاور اعمالی به چرخ چپ و راست توسط موتورها	$(\text{kgm}^2/\text{s}^2)\tau_1, \tau_2$			
سرعت خطی رو به جلوی ربات	(m/s)	$u$		
جابجایی ربات در راستای سرعت $u$	(m)	$\xi$		
زاویه بدن حول $Z_1$ نسبت به محور $X_0$	(rad)	$\theta$		
زاویه انحراف بدن از حالت قائم	(rad)	$\gamma$		
زاویای دوران چرخها	(rad)	$\varphi_1, \varphi_2$		
موقعیت ربات در صفحه افقی	(m)	$X, Y$		
جرم بدن ۳/۹۹	(kg)	$m_{ch}$		
جرم چرخها ۱/۰۶۴	(kg)	$m_w$		
ممان اینرسی بدن نسبت به محور $Y_{3_{ch}}$ ۰/۰۴۳	(kg.m²)	$I_{yy_{ch}}$		
ممان اینرسی بدن نسبت به محور $X_{3_{ch}}$ ۰/۰۶۸	(kg.m²)	$I_{xx_{ch}}$		
ممان اینرسی بدن نسبت به محور $Z_{3_{ch}}$ ۰/۰۴۴	(kg.m²)	$I_{zz_{ch}}$		
ممان اینرسی چرخها نسبت به محور $I_{1w}$ ۰/۰۰۹	(kg.m²)	$I_{1w}$		
ممان اینرسی چرخها نسبت به محور $I_{2w}$ ۰/۰۴۳	(kg.m²)	$I_{2w}$		
شتاب جانب مرکز ۹/۸۱	(m²/s)	$g$		
شعاع چرخها ۰/۱	(m)	$r_w$		
نصف فاصله دو چرخ ۰/۲	(m)	$l$		
فاصله بین نقطه میانی خط متصل کننده دو چرخ و مرکز جرم بدن ۰/۲۵	(m)	$h$		

زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} \Psi_u &= -\frac{C_u A_\gamma}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & \Lambda_u &= \frac{B_u C_\gamma - A_\gamma C_u}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & X_u &= \frac{A_\gamma/r_w + B_u}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, \\ \Phi_u &= \frac{B_u D_\gamma}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & \Psi_\gamma &= \frac{B_\gamma C_u}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & \Lambda_\gamma &= \frac{-C_\gamma A_u + B_u C_u}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, \\ \Phi_\gamma &= -\frac{A_u D_\gamma}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & X_\gamma &= \frac{-\frac{B_\gamma}{r_w} A_u}{A_u A_\gamma - B_u B_\gamma}, & \Lambda_\theta &= \frac{B_\theta}{A_\theta}, \\ X_\theta &= \frac{D_\theta}{A_\theta}, & \Psi_\theta &= \frac{C_\theta}{A_\theta}, \end{aligned} \quad (2-2)$$

و  $D_\theta$ ,  $C_\theta$ ,  $B_\theta$ ,  $A_\theta$ ,  $D_\gamma$ ,  $C_\gamma$ ,  $B_\gamma$ ,  $A_\gamma$ ,  $C_u$ ,  $B_u$ ,  $A_u$  و  $D_u$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} A_u &= 3m_w + m_{ch}, & B_u &= h m_{ch} \cos x_1, \\ C_u &= -h m_{ch} \sin x_1, & A_\gamma &= I_{yy_{ch}} + m_{ch} h^2, \\ B_\gamma &= h m_{ch} \cos x_1, & C_\gamma &= \frac{1}{2} [I_{xx_{ch}} + m_{ch} h^2 - I_{zz_{ch}}] \sin 2x_1, \\ D_\gamma &= -h m_{ch} \sin x_1, & A_\theta &= [2(m_w l^2 + I_{2w}) + I_{xx_{ch}} \sin^2 x_1 \\ &&&+ m_{ch} h^2 \sin^2 x_1 \\ &&&+ I_{zz_{ch}} \cos^2 x_1 \\ &&&+ m_w l^2] \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$B_\theta = -m_{ch} h \sin x_1, \quad C_\theta = -(m_{ch} h^2 + I_{xx_{ch}} - I_{zz_{ch}}) \sin(2x_1)$$

$$D_\theta = \frac{1}{r_w},$$

با تعريف  $T_v = T_1 + T_2$  و  $T_1 - T_2 = T_w$  سیستم به دو زیرسیستم تبدیل می‌شود: زیرسیستم طولی و زیرسیستم دورانی. زیرسیستم طولی شامل دو معادله اول از معادلات دینامیکی سیستم است و زیرسیستم دورانی شامل سومین معادله از معادلات دینامیکی ربات تعادلی است. زیرسیستم طولی با ورودی کنترلی  $T_v$  به عنوان ورودی کنترلی و دو درجه آزادی با کمبود عملگر مواجه می‌باشد، درحالی که زیرسیستم دورانی با ورودی کنترلی  $T_w$  و یک درجه آزادی دارای عملگر میزان کافی است. بنابراین زیرسیستم طولی با معادله (3) و زیرسیستم دورانی با معادله (4) نمایش داده می‌شوند.

متغیرهای حالت اولیه سیستم بصورت  $[x, y, \theta, \gamma, \varphi_1, \varphi_2]^T$  تعریف می‌شود که در آن  $x$  و  $y$  موقعیت سیستم ( نقطه میانی بین دو چرخ ) در صفحه افقی،  $\theta$  زاویه انحراف بدن از محور  $x$ ,  $\gamma$  انحراف بدن از وضعیت تعادل ( که از محور  $z$  اندازه‌گیری می‌شود ) و متغیرهای  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  به ترتیب زوایای دوران چرخ اول و دوم می‌باشند. پارامترهای بدن دارای زینوپس 'ch' و پارامترهای چرخ دارای زینوپس 'W' می‌باشند. حرکت ربات دوچرخ با یک مجموعه از معادلات دیفرانسیلی رسته دو بیان می‌شود. فرض‌های زیر برای مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته می‌شوند:

- بدن سیستم حول صفحات  $X_1 Z_1$  و  $Y_1 Z_1$  متقابن در نظر گرفته شده است.
- از لغزش چرخ‌ها صرف‌نظر شده است.

در مراجع [17,16] معادلات دینامیکی بهبود یافته ربات تعادلی دوچرخ توسط نویسنده به دو روش کین و لاگرانژ بدست آمده است. معادلات دینامیکی بدست آمده، با فرض‌های مشابه، از هر دو روش کاملاً یکسان است. یکسانی معادلات بدست آمده با هر دو روش کین و لاگرانژ، صحت آنها را اثبات می‌کند. معادلات بهبود یافته با در نظر گرفتن اصطکاک لغزشی بین چرخها و زمین و اصطکاک لغزشی داخلی به صورت روابط (1) می‌باشند:

$$(3m_w + m_{ch})\ddot{u} + h m_{ch}(\dot{\gamma}\cos\gamma - \dot{\gamma}^2\sin\gamma - \dot{\theta}^2\sin\gamma) = \frac{1}{r_w}(\tau_1 + \tau_2)$$

$$\begin{aligned} &[2(m_w l^2 + I_{2w}) + I_{xx_{ch}} \sin^2\gamma + m_{ch} h^2 \sin^2\gamma \\ &+ I_{zz_{ch}} \cos^2\gamma + m_w l^2]\dot{\theta} \\ &+ (m_{ch} h^2 + I_{xx_{ch}} \\ &- I_{zz_{ch}}) \sin 2\gamma \dot{\theta} \dot{\gamma} \\ &+ m_{ch} h \sin\gamma \dot{\theta} u \\ &= -\frac{l}{r_w} \tau_1 + \frac{l}{r_w} \tau_2 \\ &(I_{yy_{ch}} + m_{ch} h^2)\ddot{\gamma} + m_{ch} h \cos\gamma \dot{u} \\ &+ \frac{1}{2}[I_{xx_{ch}} + m_{ch} h^2 \\ &- I_{zz_{ch}}] \sin 2\gamma \dot{\theta}^2 - m_{ch} g h \sin\gamma \\ &= -\tau_1 - \tau_2 \end{aligned} \quad (1)$$

با مقایسه معادلات بهبود یافته با معادلات کیم [15] که مرجع اصلی معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ در بسیاری از منابع می‌باشد، مشخص می‌شود که مهمترین اختلاف مدل بهبود یافته و مدل‌های مرسوم، ترم غیرخطی ووابسته  $m_{ch} h \dot{\theta} u \sin\gamma$  است. در بخش بعدی اهمیت این ترم در طراحی کنترلر نشان داده خواهد شد. مقادیر عددی پارامترهای ربات و تعريف آنها در جدول ۱ آمده است.

### 3- طراحی کنترلر

هدف از طراحی کنترلر، بدست آوردن قوانین کنترلی است که بدن ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و سرعت زاویه دورانی سیستم را نیز کنترل نماید، در این مقاله، به دلیل مسئله کمبود عملگر کنترل سرعت روبه جلو با پروفیلی مشخص مدنظر نمی‌باشد. برای طراحی کنترلر، با انتخاب متغیرهای حالت به صورت  $\dot{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [\gamma \ \xi \ \theta \ \gamma \ u \ \dot{\theta}]$  معادلات دینامیکی ربات تعادلی دوچرخ یعنی معادلات (1) را می‌توان به شکل روابط (2) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \Lambda_\gamma x_6^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma(T_1 + T_2) + \Phi_\gamma g \\ \dot{x}_5 &= \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u(T_1 + T_2) + \Phi_u g \\ \dot{x}_6 &= \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta(T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (1-2)$$

که در آن  $\dot{x} = [\gamma \ \xi \ \theta \ \gamma \ u \ \dot{\theta}]^T$  و  $\Psi_\theta = \Lambda_\theta \cdot \Phi_\gamma \cdot X_\gamma \cdot \Psi_\gamma \cdot \Lambda_\gamma \cdot \Phi_u \cdot X_u \cdot \Psi_u \cdot \Lambda_u$  به صورت

$\alpha_i$  تعریف می‌شود که به دلیل تغییرات آرام پارامترهای مکانیکی در طی زمان می‌توان فرض کرد  $\hat{\alpha}_i = \ddot{\alpha}_i$ . بنابراین کنترلر بصورت رابطه (11) بدست می‌آید:

$$T_v = -\hat{\alpha}_1 x_6^2 - \hat{\alpha}_2 x_4^2 - \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 (x_5^* - c_1 \dot{e}_2) - k_1 \operatorname{sgn}(\delta_1) - k_2 \delta_1 \quad (11)$$

و قوانین پارامترهای تطبیقی به صورت روابط (15-12) خواهند بود:

$$\hat{\alpha}_1 = \lambda_{11} \delta_1 (x_6^* + e_6)^2 \quad (12)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \lambda_{12} \delta_1 (x_4^* + e_4)^2 \quad (13)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \lambda_{13} \delta_1 \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}_4 = -\lambda_{14} \delta_1 (x_5^* - c_1 e_5) \quad (15)$$

که در آنها  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$  و  $\lambda_{14}$  پارامترهای طراحی و مثبت هستند.

### 3-2- کنترل دینامیک صفر

متغیرهای موقعیت طولی و زاویه انحراف شاسی را باید تنها با یک ورودی  $T_v$  کنترل کرد. برای حل مسئله کمبود عملگر، می‌توان زیرسیستم دینامیک صفر را با قرار دادن خطای موقعیت طولی یعنی  $x_2^* = x_2$  برابر با صفر و سپس با قرار دادن  $0 = \dot{e}_5$  بدست آورد. از معادله (6) به صورت رابطه (16) بدست می‌آید:

$$T_v = -\frac{\Lambda_u}{X_u} x_6^2 - \frac{\Psi_u}{X_u} x_4^2 - \frac{\Phi_u}{X_u} g + \frac{x_5^*}{X_u} \quad (16)$$

با قرار دادن  $T_v$  در  $\dot{e}_4$  و استفاده از  $\dot{e}_4 + \dot{x}_4^* = \dot{x}_4^*$  زیرسیستم دینامیک صفر به صورت (17) بدست می‌آید:

$$\dot{x}_4 = \left( \Lambda_\gamma - \frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u} \right) x_6^2 - \frac{C_u}{A_\gamma} g + \frac{X_\gamma \dot{x}_5^*}{X_u} \quad (17)$$

هدف کنترلی از طراحی کنترلر دینامیک صفر پیدا کردن  $\dot{x}_5^*$  مناسب به عنوان ورودی برای کنترلر طولی یعنی  $T_v$  است. سطح لغزش برای زیرسیستم دینامیک صفر به صورت رابطه (18) تعریف می‌شود:

$$\delta_2 = \dot{e}_1 + c_2 e_1 \quad (18)$$

که در آن  $c_2$  ثابت و مثبت است. سپس می‌توان از سطح لغزش نسبت به زمان مشتق گرفت:

$$\dot{\delta}_2 = \ddot{e}_1 + c_2 \dot{e}_1 = \left( \Lambda_\gamma - \frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u} \right) x_6^2 - \frac{C_u}{A_\gamma} g + \frac{X_\gamma \dot{x}_5^*}{X_u} - \dot{x}_4^* + c_2 \dot{e}_1 \quad (19)$$

با اعمال قانون نمایی یعنی  $\dot{x}_5^* = -k_3 \operatorname{sgn}(\delta_2) - k_4 \delta_2$  کنترلر را می‌توان به صورت رابطه (20) طراحی کرد:

$$\dot{x}_5^* = \frac{X_u}{X_\gamma} \left[ \left( \frac{X_\gamma \Lambda_u}{X_u} - \Lambda_\gamma \right) x_6^2 + \frac{C_u}{A_\gamma} g + \dot{x}_4^* - c_2 \dot{e}_1 - k_3 \operatorname{sgn}(\delta_2) - k_4 \delta_2 \right] \quad (20)$$

که در آن  $k_3$  و  $k_4$  ثوابت طراحی و مثبت هستند. مشابه حالت قبل مقادیر واقعی پارامترهای مکانیکی در دسترس نیستند و باید پارامترهای جدید  $\beta_1 = \Lambda_u - \Lambda_\gamma X_u/X_\gamma$  و  $\beta_2 = (C_u/A_\gamma)(X_u/X_\gamma)g$  را  $\beta_3 = X_u/X_\gamma$  و  $\beta_4 = \dot{x}_5^*/c_2$  تعیین کرد که  $\hat{\beta}_i$  تخمینی از  $\beta_i$  است، همچنین خطای تخمین به صورت  $\tilde{\beta}_i = \beta_i - \hat{\beta}_i$  تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن تغییرات آرام پارامترهای مکانیکی می‌توان فرض کرد  $\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i$ . در این شرایط  $\dot{\delta}_2$  برابر می‌شود با:

$$\dot{\delta}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_3} x_6^2 - \frac{\beta_2}{\beta_3} + \frac{\dot{x}_5^*}{\beta_3} - \dot{x}_4^* + c_2 \dot{e}_1 \quad (21)$$

سپس کنترلر تطبیقی برای زیرسیستم صفر را می‌توان از رابطه (22) بدست آورد:

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u T_v + \Phi_u g \\ \dot{x}_4 = \Lambda_\gamma x_6^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma T_v + \Phi_\gamma g \end{cases} \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta T_w \quad (4)$$

زاویه انحراف  $x_1$  با گشتاور  $T_v$  و زاویه دورانی  $x_3$  با گشتاور  $T_w$  کنترل می‌شود.

در حالی که سرعت روبه‌جلوی  $x_5$  را نمی‌توان به طور مستقیم کنترل کرد، زاویه انحراف بدن می‌شود: کنترلر زیرسیستم دورانی و کنترلر زیرسیستم طولی.

برای طراحی کنترلر، خطاهای به صورت رابطه (5) تعریف می‌شوند:

$$e_1 = x_1 - x_1^*, \quad e_2 = x_2 - x_2^*, \quad e_3 = x_3 - x_3^* \quad (5)$$

$$e_4 = x_4 - x_4^*, \quad e_5 = x_5 - x_5^*, \quad e_6 = x_6 - x_6^* \quad (5)$$

که در آن  $x^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ x_4^* \ x_5^* \ x_6^*]$  مقادیر مطلوب متغیرهای حالت هستند. برای حصول به هدف کنترلی معادلات دیفرانسیلی خطای زیرسیستم طولی به صورت رابطه (6) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{e}_2 = e_5 \\ \dot{e}_5 = \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u T_v + \Phi_u g - \dot{x}_5^* \\ \dot{e}_1 = e_4 \\ \dot{e}_4 = \Lambda_\gamma x_6^2 + \Psi_\gamma x_4^2 + X_\gamma T_v + \Phi_\gamma g - \dot{x}_4^* \end{cases} \quad (6)$$

به طور مشابه معادله خطای زیرسیستم دورانی به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_6 \\ \dot{e}_6 = \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta T_w \end{cases} \quad (7)$$

در این بخش روش‌های مود لغزشی - تطبیقی برای استخراج کنترلر استفاده شده است. هدف کنترلی، کنترل ربات تعادلی دوچرخ روی مسیر دلخواه و پایدارسازی آن است. برای کنترل ربات از سه کنترل کننده مستقل از هم استفاده شده است. کنترل کننده مود لغزشی نسبت به اغتشاشات ناخواسته مقاوم است و خاصیت تطبیقی آن باعث می‌شود که نسبت به تغییر پارامترهای مکانیکی مقاوم باشد.

### 3-1- طراحی کنترلر حرکت طولی

در کنترل طولی، هدف کنترلی، کنترل زاویه انحراف بدن بوسیله گشتاور  $T_v$  می‌باشد. حرکت طولی سیستم با انحراف بدن از وضعیت تعادل کوپل می‌باشد. برای اعمال کنترلر مود لغزشی، سطح لغزشی را به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود:

$$\delta_1 = \dot{e}_2 + c_1 e_1 \quad (8)$$

که در آن  $c_1$  ثابت و مثبت است. مشتق سطح لغزشی نسبت به زمان را می‌توان به صورت رابطه (9) بدست آورد:

$$\dot{\delta}_1 = \ddot{e}_2 + c_1 \dot{e}_2 = \Lambda_u x_6^2 + \Psi_u x_4^2 + X_u T_v + \Phi_u g - \dot{x}_5^* + c_1 \dot{e}_2 \quad (9)$$

با اعمال قانون روش نمایی 1، یعنی  $\dot{x}_5^* = -k_1 \operatorname{sgn}(\delta_1) - k_2 \delta_1$  برای رسیدن به سطح لغزش، کنترلر را می‌توان به صورت (10) طراحی کرد:

$$T_v = -\frac{\Lambda_u}{X_u} x_6^2 - \frac{\Psi_u}{X_u} x_4^2 - \frac{\Phi_u}{X_u} g + \frac{1}{X_u} (\dot{x}_5^* - c_1 \dot{e}_2) - k_1 \operatorname{sgn}(\delta_1) - k_2 \delta_1 \quad (10)$$

در رابطه (10)،  $k_1$  و  $k_2$  ثوابت طراحی و مثبت هستند. باید توجه کرد که پارامترهای مکانیکی که در کنترلر وجود دارند، کاربرد کنترلر را محدود می‌کنند به همین دلیل پارامترهای تطبیقی  $\alpha_2 = \Psi_u/X_u$ ،  $\alpha_1 = \Lambda_u/X_u$  و  $\alpha_3 = \Phi_u/X_u$  معرفی می‌شود که  $\hat{\alpha}_i$  تخمینی از  $\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i$  است. از آن گذشته، خطای تخمین به صورت  $\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i$  است. از 1-Exponential approach law

$$V_2 = \frac{1}{2} \beta_3 s_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{21}} \tilde{\beta}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{22}} \tilde{\beta}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{23}} \tilde{\beta}_3^2 \quad (36)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \kappa_3 s_3^2 + \frac{1}{2\lambda_{31}} \tilde{\kappa}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{32}} \tilde{\kappa}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{33}} \tilde{\kappa}_3^2 \quad (37)$$

واضح است که  $V$  مثبت معین است.

از طرفی با تعریف  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  و  $\alpha_4$  تابع  $s_1$  به صورت (38)، با تعریف  $\beta_1, \beta_2$  و  $\beta_3$  تابع  $s_2$  به صورت (39) و با تعریف  $\kappa_1, \kappa_2$  و  $\kappa_3$  تابع  $s_3$  به صورت (40) بدست می‌آید:

$$\dot{s}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_4} x_6^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} x_4^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} g + \frac{1}{\alpha_4} T_v - \dot{x}_5^* + c_1 \dot{e}_2 \quad (38)$$

$$\dot{s}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_3} x_6^2 - \frac{\beta_2}{\beta_3} + \frac{\dot{x}_5^*}{\beta_3} - \dot{x}_4^* + c_2 \dot{e}_1 \quad (39)$$

$$\dot{s}_3 = \frac{\kappa_1}{\kappa_3} x_5 x_6 + \frac{\kappa_2}{\kappa_3} x_4 x_6 + \frac{1}{\kappa_3} T_w - \dot{x}_6^* + c_3 \dot{e}_3 \quad (40)$$

با مشتق‌گیری  $V$  نسبت به زمان رابطه (41) بدست می‌آید:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (41)$$

که در آن  $\dot{V}_1$  با در نظر گرفتن تقریب  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}$  برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \alpha_4 s_1 \dot{s}_1 + \frac{1}{\lambda_{11}} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\dot{\alpha}}_1 + \frac{1}{\lambda_{12}} \tilde{\alpha}_2 \tilde{\dot{\alpha}}_2 + \frac{1}{\lambda_{13}} \tilde{\alpha}_3 \tilde{\dot{\alpha}}_3 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{14}} \tilde{\alpha}_4 \tilde{\dot{\alpha}}_4 \end{aligned} \quad (42)$$

و با جایگذاری (12) و (38) در (42)، رابطه (43) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_1 = -k_1 |s_1| - k_2 s_1^2 \quad (43)$$

به طور مشابه با در نظر گرفتن تقریب‌های  $\tilde{\beta} = \tilde{\kappa}$  و  $\tilde{\dot{\alpha}} = \tilde{\dot{\kappa}}$  و  $\dot{V}_2$  و  $\dot{V}_3$  برابر می‌شوند با:

$$\dot{V}_2 = -k_3 |s_2| - k_4 s_2^2 \quad (44)$$

$$\dot{V}_3 = -k_5 |s_3| - k_6 s_3^2 \quad (45)$$

و بنابراین  $\dot{V}$  برابر می‌شود با:

$$\dot{V} = -k_1 |s_1| - k_2 s_1^2 - k_3 |s_2| - k_4 s_2^2 - k_5 |s_3| - k_6 s_3^2 \quad (46)$$

از آنجا که  $\dot{V}$  منفی نیمه معین است، برای ادامه روند اثبات، لم 1 به صورت زیر ارائه می‌شود.

لم 1: نقطه تعادل صفر برای سیستم (6)، (7) و (17) با کنترل مود لغزشی تطبیقی (11)، (22) و (29) و قوانین تطبیقی (15-12)، (25-23) و (30) در نظر گرفته می‌شوند. مشتق تابع  $(t) \dot{V}$  به سمت صفر میل می‌کند، یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$$

اثبات: با در نظر گرفتن انتگرال  $(t) \dot{V}$  رابطه (47) بدست می‌آید:

$$I = \int_0^\infty -\dot{V}(t) dt = V(0) - V(\infty) \quad (47)$$

با توجه به اینکه  $\dot{V}$  منفی نیمه معین است، لذا  $V(t)$  در طی زمان تابعی کاهشی است و از آنجا که  $V(t)$  تابعی مثبت است، در نتیجه  $V(\infty)$  محدود است ( $V(0) \geq V(\infty)$ ).

یک شرط کافی برای اینکه تابعی به صورت یکنواخت پیوسته باشد، این است که مشتق آن محدود باشد. (وابطه 48.49)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 \frac{s_1}{|s_1|} - 2k_2 s_1 \dot{s}_1 - k_3 \frac{s_2}{|s_2|} - 2k_4 \dot{s}_2 s_2 \\ &\quad - k_5 \frac{s_3}{|s_3|} - 2k_6 \dot{s}_3 s_3 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq k_1 + k_3 + k_5 + 2k_2 k_1 s_1 \operatorname{sgn}(s_1) + 2k_2 k_2 s_1^2 \\ &\quad + 2k_4 k_3 s_2 \operatorname{sgn}(s_2) + 2k_4 k_4 s_2^2 \\ &\quad + 2k_6 k_5 s_3 \operatorname{sgn}(s_3) + 2k_6 k_6 s_3^2 \end{aligned} \quad (49)$$

با در نظر گرفتن انتگرال  $(t) \dot{s}_k$  رابطه (50) بدست می‌آید:

$$\dot{x}_5^* = \hat{\beta}_1 x_6^2 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 (\dot{x}_4^* - c_2 \dot{e}_1) - k_3 \operatorname{sgn}(s_2) - k_4 s_2 \quad (22)$$

و قوانین تطبیقی به صورت روابط (25-23) تعریف می‌شوند:

$$\dot{\beta}_1 = -\lambda_{21} s_2 x_6^2 \quad (23)$$

$$\dot{\beta}_2 = -\lambda_{22} s_2 \quad (24)$$

$$\dot{\beta}_3 = -\lambda_{23} s_2 (\dot{x}_4^* - c_2 e_4) \quad (25)$$

که در آن  $\lambda_{21}$ ،  $\lambda_{22}$  و  $\lambda_{23}$  پارامترهای طراحی و مثبت هستند.

### 3-3- طراحی کنترلر حرکت دورانی

در این بخش هدف طراحی کنترلری است که به ربات دوچرخ اجازه دهد تا مسیر دلخواه را دنبال کند. در زیرسیستم دورانی زاویه دورانی  $x_3$  به طور مستقیم توسط گشتاور  $T_w$  کنترل می‌شود. سطح لغزش برای کنترل دورانی به صورت روابط (26-27) تعریف می‌شود:

$$\dot{s}_3 = \dot{e}_3 + c_3 e_3 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \ddot{e}_3 + c_3 \dot{e}_3 = \Lambda_\theta x_5 x_6 + \Psi_\theta x_4 x_6 + X_\theta T_w - \dot{x}_6^* \\ &\quad + c_3 \dot{e}_3 \end{aligned} \quad (27)$$

با اعمال قانون نمایی یعنی  $\dot{s}_3 = -k_5 \operatorname{sgn}(s_3) - k_6 s_3$  کنترلر را می‌توان به صورت رابطه (28) طراحی کرد:

$$\begin{aligned} T_w &= -\frac{\Lambda_\theta}{X_\theta} x_5 x_6 - \frac{\Psi_\theta}{X_\theta} x_4 x_6 + \frac{1}{X_\theta} \dot{x}_6^* - \frac{c_3}{X_\theta} \dot{e}_3 \\ &\quad - \frac{k_5}{X_\theta} \operatorname{sgn}(s_3) - \frac{k_6}{X_\theta} s_3 \end{aligned} \quad (28)$$

که  $k_5$  و  $k_6$  پارامترهای طراحی و مثبت هستند. باید توجه داشت که پارامترهای مکانیکی موجود در (28) را به صورت دقیق نمی‌توان بدست آورد و در عمل ممکن است کنترلر پاسخ مناسبی ندهد. بنابراین پارامترهای تطبیقی به صورت:  $\Lambda_\theta = \Psi_\theta / X_\theta$ ،  $K_1 = \Lambda_\theta / X_\theta$  و  $K_2 = \Psi_\theta / X_\theta$  تعریف می‌شوند که  $\hat{\kappa}_i$  تخمینی از  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) است. از آن گذشته، خطای تخمین به صورت  $\hat{\kappa}_i - \kappa_i = \tilde{\kappa}_i$  تعریف می‌شود که به دلیل تغییرات آرام پارامترهای مکانیکی در طی زمان می‌توان فرض کرد  $\hat{\kappa}_i = \tilde{\kappa}_i$ . بنابراین می‌توان کنترلر تطبیقی را بصورت رابطه (29) نوشت:

$$T_w = -\hat{\kappa}_1 x_5 x_6 - \hat{\kappa}_2 x_4 x_6 + \hat{\kappa}_3 \dot{x}_6^* - c_3 \hat{\kappa}_3 \dot{e}_3 - k_5 \operatorname{sgn}(s_3) - k_6 s_3 \quad (29)$$

و قوانین تطبیقی به صورت روابط (32-30) خواهند بود:

$$\dot{\hat{\kappa}}_1 = \lambda_{31} s_3 (x_6^* + e_6) (x_5^* + e_5) \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_2 = \lambda_{32} s_3 (x_4^* + e_4) (x_6^* + e_6) \quad (31)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_3 = -\lambda_{33} s_3 (\dot{x}_6^* - c_3 e_6) \quad (32)$$

که در آنها  $\lambda_{31}$ ،  $\lambda_{32}$  و  $\lambda_{33}$  پارامترهای طراحی و مثبت هستند. با توجه به تحلیلهای بالا قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه 1: سیستم (6)، (7) و (17) را با کنترلر مود لغزشی - تطبیقی (11)، (22) و (29) و قوانین تطبیقی (12)، (25-23) و (30) در نظر گرفته می‌شود. خطاهای به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کند، یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_i| = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (33)$$

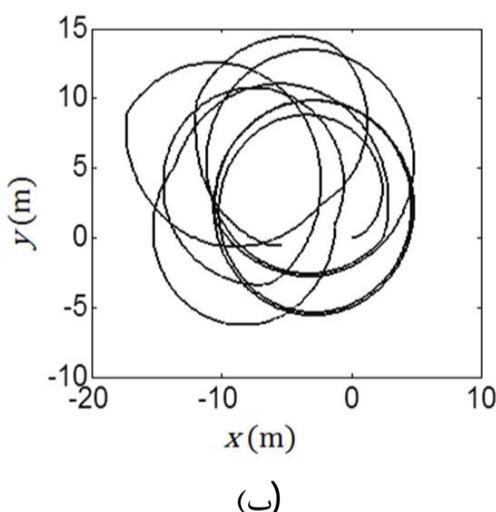
اثبات: تابع کاندیدای لیپاپونوف کل سیستم برابر با  $V$  تعریف می‌شود (رابطه 34):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (34)$$

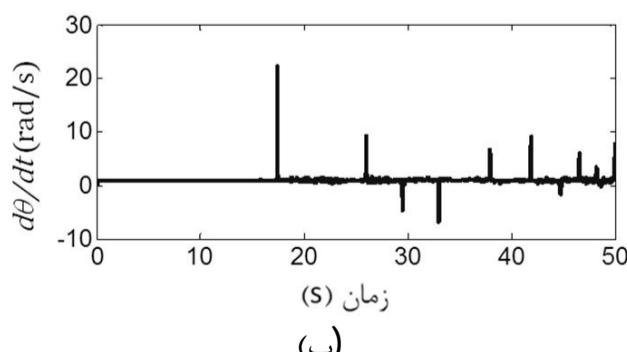
که در آن می‌توان روابط (37-35) را نوشت:

$$V_1 = \frac{1}{2} \alpha_4 s_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{11}} \tilde{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2\lambda_{12}} \tilde{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2\lambda_{13}} \tilde{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2\lambda_{14}} \tilde{\alpha}_4^2 \quad (35)$$

$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 5$  ،  $c_1 = c_2 = c_3 = 0.4$  و  $m_{ch}h\dot{\theta} u \sin\gamma'$  در نظر گرفته می‌شوند. برای مطالعه اثر ترم  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 10$  دو شبیه‌سازی انجام شده است. در شبیه‌سازی اول کنترل طراحی شده بر مبنای مدل بهبود یافته به مدل بهبود یافته اعمال گردید (شکل‌های 3-الف تا 9-الف) و در شبیه‌سازی دوم کنترل‌ی بر مبنای مدل مرسوم بر مدل بهبود یافته اعمال شده است (شکل‌های 3-ب تا 9-ب). کنترلر دوم دقیقاً مشابه کنترل اول است با این تفاوت که  $T_w$  در کنترلر مربوط به مدل مرسوم دارای ترم  $\kappa_1 \dot{\theta} u'$  نمی‌باشد. مسیر حرکت ربات در صفحه  $x-y$  در شکل 3 آمده و در شکل 4 سرعت زاویه‌ای دوران بدن در صفحه افق نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که کنترلر مود لغزشی به خوبی توانسته سرعت زاویه‌ای بدن را به  $1 \text{ rad/s}$  برساند که این امر باعث می‌شود سیستم در صفحه افق مسیر دایروی را بپیماید. در شکل 5 سرعت خطی بدن آورده شده است. شکل‌های 6 و 7 به ترتیب نمایش دهنده زاویه و سرعت زاویه‌ای انحراف بدن از وضعیت تعادل می‌باشند و به خوبی به سمت صفر میل می‌کنند. گشتاور خروجی موتور سمت راست در شکل 8 و گشتاور خروجی موتور سمت چپ در شکل 9 نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که اگر کنترلری بر مبنای مدل بهبود یافته طراحی شود و به مدل و ربات دایره مطلوب را دنبال می‌کند (شکل‌های 3-الف تا 4-الف). اما اگر ترم  $m_{ch}h\dot{\theta} u \sin\gamma'$  در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، زاویه انحراف ربات پایدار می‌ماند و به مقدار مطلوب می‌رسد (شکل 6-ب)، اما سیستم نمی‌تواند مسیر مطلوب را در صفحه  $x-y$  دنبال کند (شکل‌های 3-ب تا 4-ب). همچنین گشتاورهای خروجی موتورها، در حالت (ب) در لحظاتی، به صورت نامطلوبی، بیش از حالت (الف) می‌باشند. همان‌طور که نشان داده شد، وجود ترم  $m_{ch}h\dot{\theta} u \sin\gamma'$  بر روی مسیر حرکت سیستم تأثیر بسزایی دارد و اگر این ترم در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، کنترلر عملکرد مناسبی نخواهد داشت.



شکل 3 تعقیب مسیر ربات در صفحه افقی  $y-x$  (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم



شکل 4 سرعت زاویه‌ای بدن در صفحه الف) برای مدل بهبود یافته و کنترلر بهبود یافته ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلری بر مبنای مدل مرسوم

$$I_k = \int_0^\infty -\dot{s}_k(t) dt = s_k(0) - s_k(\infty) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (50)$$

با توجه به اینکه  $(k = 1, 2, 3)$   $s_k(t)$  منفی هستند، لذا  $(k = 1, 2, 3)$  در طی زمان توابعی کاهشی هستند و در نتیجه  $(k = 1, 2, 3)$   $s_k(\infty)$  محدود هستند و همواره روابط زیر برقرارند:

$$s_k(0) \geq s_k(t) \quad t \geq 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

بنابراین می‌توان رابطه (51) را نوشت:

$$\ddot{V} \leq k_1 + k_3 + k_5 + 2k_2k_1|s_1(0)| + 2k_2k_2s_1(0)^2 + 2k_4k_3|s_2(0)| + 2k_4k_4s_2^2 + 2k_6k_5|s_3(0)| + 2k_6k_6s_3(0)^2 \quad (51)$$

مشاهده می‌شود که  $\ddot{V}$  محدود است و بنابراین  $\ddot{V}$  به صورت یکنواخت پیوسته است. بنابراین شرایط لم برابالت مهیا است و داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \quad (52)$$

بنابراین اثبات لم کامل شد. با توجه به قضیه لاسال و درستی فرض‌های زیر:

$$\dot{V} \leq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$$

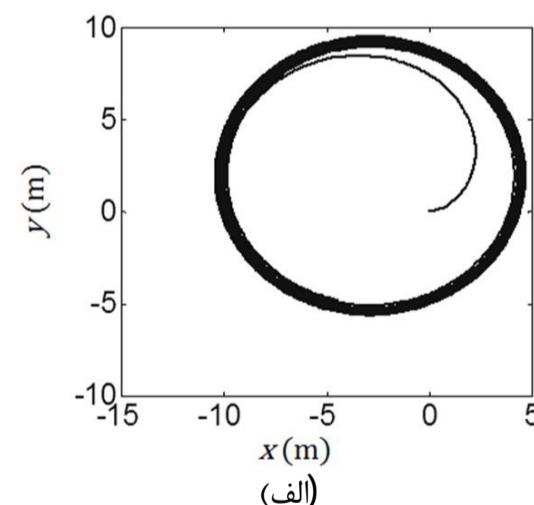
تمام حل‌ها به صورت مجانبی فراگیر پایدار هستند، یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_i| = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (53)$$

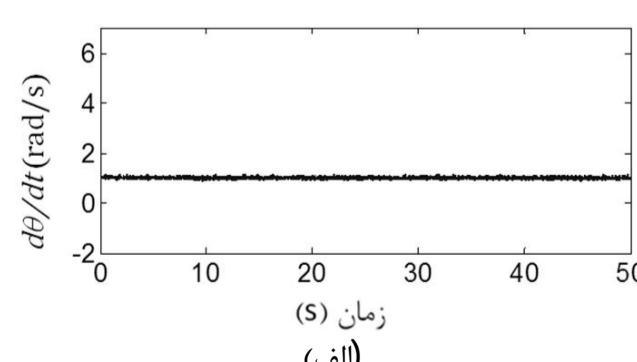
و در نتیجه قضیه 1 اثبات می‌شود

#### 4- نتایج شبیه‌سازی

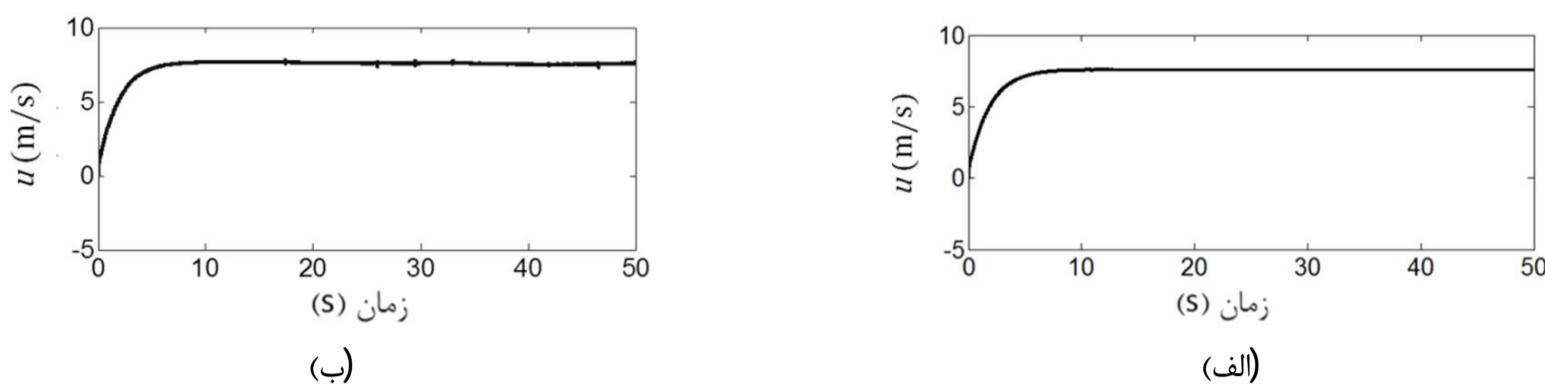
برای اعتبارسنجی قوانین کنترلی ارائه شده، شبیه‌سازی‌هایی در این بخش ارائه شده است. در این شبیه‌سازی‌ها شرایط اولیه برابر با  $x_0 = 0 \text{ m}$ ،  $\dot{x}_0 = 0 \text{ rad/s}$ ،  $\gamma_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ،  $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}$ ،  $\theta_0 = 0 \text{ rad}$ ،  $y_0 = 0 \text{ m}$ ،  $\dot{y}_0 = 0 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است. مقدار مطلوب زاویه انحراف بدن و سرعت زاویه‌ای انحراف بدن از وضعیت تعادل برابر با صفر یعنی  $\gamma_d = 0 \text{ rad}$  و  $\dot{\gamma}_d = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  و مقدار مطلوب سرعت زاویه‌ای دورانی برابر با  $\theta_d = 1 \text{ rad/s}$  در نظر گرفته شده است. برای حصول به هدف کنترلی ضرایب کنترلی به صورت  $k_6 = 0.2$ ،  $k_5 = 0.5$ ،  $k_4 = 5$ ،  $k_3 = 3$ ،  $k_2 = 0.2$ ،  $k_1 = 0.4$



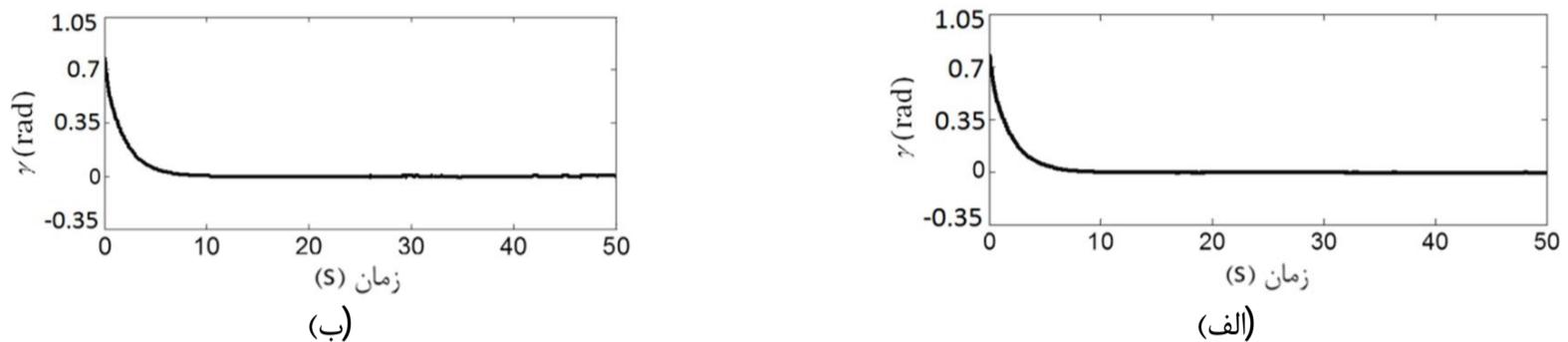
(الف)



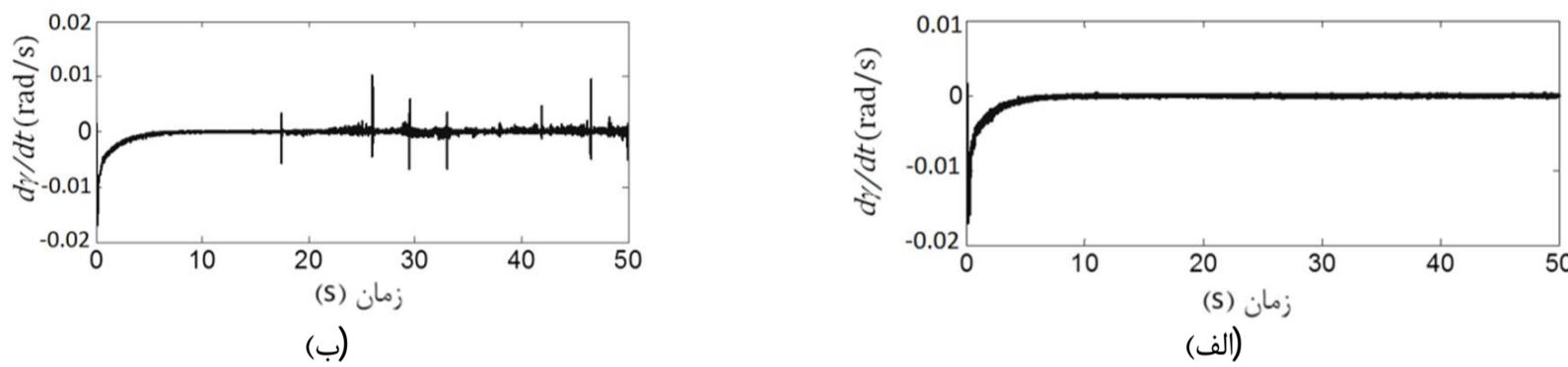
(الف)



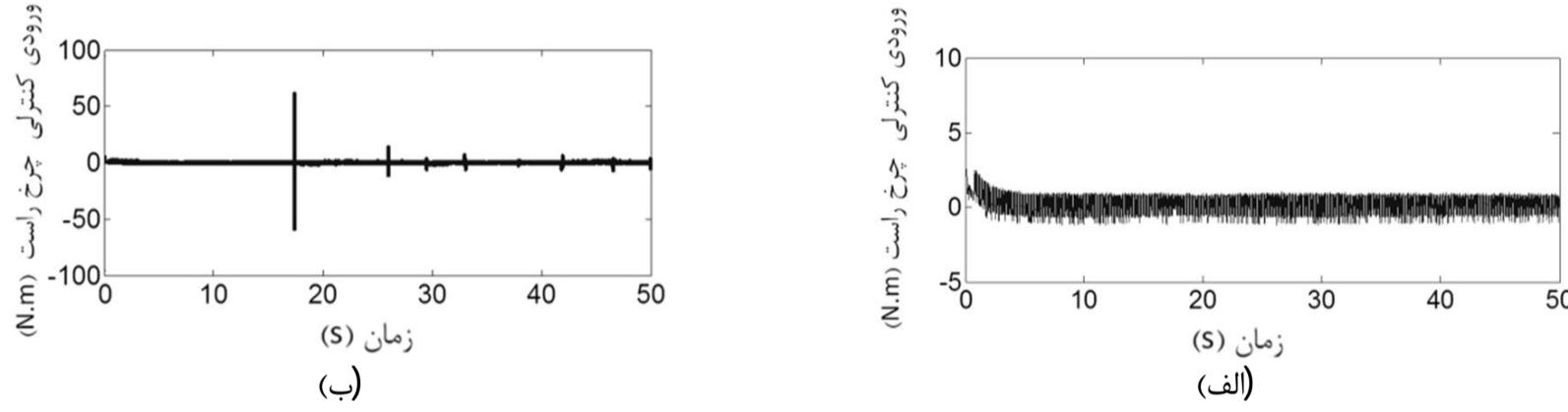
شکل ۵ سرعت طولی بدنه (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترل بهبود یافته (ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلی بر مبنای مدل مرسوم



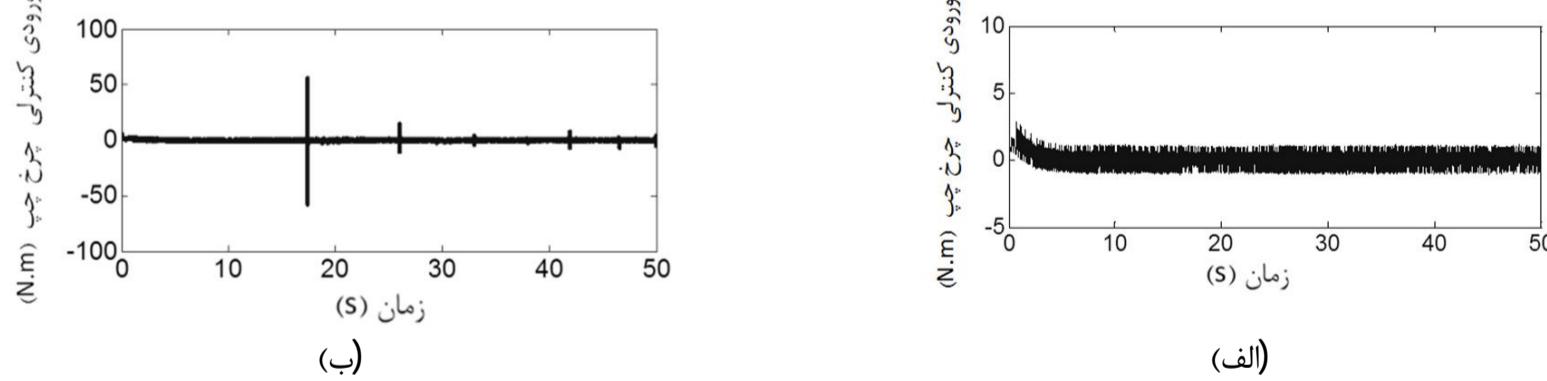
شکل ۶ زاویه انحراف بدنه از حالت عمود (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترل بهبود یافته (ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلی بر مبنای مدل مرسوم



شکل ۷ سرعت زاویه‌ای انحراف بدنه از حالت عمود (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترل بهبود یافته (ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلی بر مبنای مدل مرسوم



شکل ۸ ورودی کنترلی جرخ سمت راست (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترل بهبود یافته (ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلی بر مبنای مدل مرسوم



شکل ۹ ورودی کنترلی چرخ سمت چپ (الف) برای مدل بهبود یافته و کنترل بهبود یافته (ب) برای مدل بهبود یافته و کنترلی بر مبنای مدل مرسوم

آمده و اعتبارسنجی شده است. معادلات دینامیکی بدست آمده، دارای اختلافاتی نسبت به معادلات پیشین می‌باشد. عمدترين اختلاف وجود يك ترم غيرخطي است که محققان در گذشته آن را نادیده گرفته‌اند. در اين مقاله نشان داده شده است که اگر ترم غيرخطي در طراحی کنترلر در نظر گرفته شود، تأثير بسزایی در رفتار سیستم مدار بسته خواهد داشت. کنترل مود لغزشی - تطبیقی به گونه‌ای طراحی شده است که می‌تواند بدن ربات را در وضعیت تعادل نگاه دارد و کنترل دورانی مطلوب را نیز برای ربات براورده

## 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کنترل مود لغزشی-تطبیقی ربات تعادلی دوچرخ با استفاده از معادلات دینامیکی بهبود یافته و بر مبنای دینامیک صفر پرداخته شده است. ربات تعادلی دوچرخ را می‌توان با یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته نمایش داد. در پژوهشی که پیش از این توسط نویسنده مقاله انجام شده است، معادلات دینامیکی بهبود یافته ربات دوچرخ بدست

- [8] M. T. Kang, H. D. Vo, Control system design for a mobile inverted pendulum via sliding mode technique, *Proceedings of International Conference on Mechatronics*, Kumamoto Japan, 2007.
- [9] S.C. Lin, C.C. Tsai, H.C. Huang, Adaptive robust self-balancing and steering of a two wheeled human transportation Vehicle, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 62, No. 1, pp.103-123, 2011.
- [10] K.H. Su, Y.Y. Chen, S.F. Su, Design of neural-fuzzy-based controller for two autonomously driven wheeled robot, *Neurocomputing*, Vol. 73, No. 13, pp. 2478-2488, 2010.
- [11] T. Ren, T. Che, Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller, *Control Engineering Practice*, Vol. 16, No. 3, pp. 365–375, 2008
- [12] A. Maddahi, A. H. Shamekhi, A. Ghaffari, A Lyapunov controller for self-balancing two-wheeled vehicles, *Robotica*, Vol. 33, No. 1, 225-239, 2015.
- [13] S. R. Larimi, S. A. Moosavian, Dynamic balancing of an under-actuated differential two wheeled manipulator by a reaction wheel, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 79-92, 2013. (In Persian)
- [14] S. R. Larimi, P. Zarafshan, S. A. Moosavian, "A new stabilization algorithm for a two-wheeled mobile robot aided by reaction wheel, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 137, No. 1, ,011009, 2015.
- [15] Y. Kim, S. H. Kim, Y. K. Kwak, Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot, *J. Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 44, No. 1, pp. 25–46, 2005.
- [16] A. Shariati, A. Ghaffari, A. H. Shamekhi, Paths of two-wheeled self-balancing vehicles in the horizontal plane, *Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*, pp. 456-461. IEEE, 2014.
- [17] A. Shariati, A. Ghaffari, A. H. Shamekhi, Dynamical modeling of a two-wheeled self-balancing vehicle using Lagrangian approach, *22th International Conference on Mechanical Engineering, ISME 2013*, Tehran, 2013. (in Persian)
- [18] M. Yue, X. Wei, Z. Li, Adaptive sliding-mode control for two-wheeled inverted pendulum vehicle based on zero-dynamics theory, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 76, No. 1, 459-471, 2014.

سازد. در این مقاله، کنترل سرعت روبه جلو با پروفیلی مشخص مدنظر نیست و این مسئله در پژوهش‌های آتی مورد توجه قرار خواهد گرفت. پایداری سیستم مدار بسته به صورت مجانبی فراگیر، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، لم باریالت و قضیه مجموعه‌های ناوردا لاسال اثبات شده است. نتایج شبیه‌سازی کارآمدی کنترلر ارائه شده را نشان می‌دهند. همچنین نشان داده شد وجود ترم ' $m_{ch}h\dot{\theta} u \sin\gamma'$ ' بر روی مسیر حرکت سیستم تأثیر بسزایی دارد و اگر این ترم در طراحی کنترلر در نظر گرفته نشود، کنترلر عملکرد مناسبی نخواهد داشت.

## 6- مراجع

- [1] F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, A. Rufer, JOE: A mobile, inverted pendulum, *IEEE Trans. Ind. Electron*, Vol. 49, No. 1, pp. 107–114, 2002.
- [2] L. Vermeiren, A. Dequidt, T. M. Guerra, H. Rago-Tirmant, M. Parent, Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination: Anurban transportation system, *Control Engineering Practice*, Vol. 19, No. 7, pp. 744–756, 2011.
- [3] Segway Inc., Reference manual, Segway personal transporter (PT), Segway Inc, Bedford, NH, 2006.
- [4] A. Salerno, J. Angeles, On the nonlinear controllability of a quasi holonomic mobile robot, Taiwan: *Proc. IEEE ICRA*, pp. 3379–3384, 2003.
- [5] K. Goher, S. Ahmad, O. M. Tokhi, A new configuration of two wheeled vehicles: towards a more workspace and motion flexibility, *4th system conference*, San Diego, CA, 2010.
- [6] S. Jeong, T. Takahashi, Wheeled inverted pendulum type assistant robot: inverted mobile, standing, and sitting motions. *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, CA, 2007.
- [7] Ch. Xu, M. Li, The system design and LQR control of a two-wheels self-balancing mobile robot, *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2011 International Conference on*, pp. 2786-2789. IEEE, 2011.