



خطای ماشینکاری ناشی از برگشت فنری قطعه کار در فرایند تراشکاری معمولی و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک

*^۱ حمید سلیمانی مهر، ^۲ محمد جواد ناطق

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

nategh@modares.ac.ir، *تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۵-۱۴۳

چکیده- برگشت فنری قطعه کار باعث ایجاد خطای ماشینکاری می‌شود. در این مقاله برگشت فنری قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک و تراشکاری معمولی مدل شده است. نشان داده می‌شود که قطعه کار در برابر ارتعاشات فرکانس بالا واکنشی شبیه به استاتیک از خود نشان می‌دهد. این در حالی است که هم از نظر تئوری و هم از نظر تجربی، مقدار برگشت فنری آن نسبت به تراشکاری معمولی کمتر است و بنابراین خطای ناشی از آن نیز کمتر خواهد بود. روشی نیز برای به دست آوردن خطای ناشی از صلب در نظر گرفتن مجموعه اسپیندل در روابط تحلیلی پیشنهاد شد و از آن در تصحیح نتایج استفاده گردید.

کلیدواژگان: برگشت فنری، تراشکاری به همراه ارتعاشات آلتراسونیک، تراشکاری معمولی، خطای قطری.

Machining error due to spring-back of work-piece in conventional and ultrasonic vibration assisted turning

H. Soleimanimehr¹, M. J. Nategah^{2*}

1- Ph.D. Student, Mech. Eng. Dep., Tarbiat Modares Univ.

2- Assoc. Prof, Mech. Eng. Dep., Tarbiat Modares Univ.

*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, nategh@modares.ac.ir

Abstract- The spring-back of a work-piece during machining operation causes dimensional error of the work-piece. In the present study, the spring-back of work-piece in ultrasonic-vibration assisted turning and conventional turning has been modeled. It is illustrated that the reaction of the work-piece in high frequency vibration cutting is similar to a static behavior, whereas the spring-back in this process is theoretically and experimentally smaller than the conventional cutting leading to smaller error. A method has also been proposed to obtain the errors caused by rigid assumption of the spindle assembly used for correction of the results.

Keywords: Ultrasonic Vibration Assisted Turning, Conventional Cutting, Diametrical Error, Spring Back

خمشی پیشنهاد نمودند [۱۵ و ۱۶]. توپال^۵ و همکارش یک مدل تجربی از خطای قطری به دست آورده‌اند [۱۷]. بناردوس^۶ و همکارانش از طریق تئوری دوم کاستیگلیانو و شبکه عصبی خطای قطری را تحلیل نمودند [۹]. جیانلیانگ^۷ و همکارش اثر تکیه‌گاه را بررسی نمودند و نشان دادند که هرچقدر تکیه‌گاه نزدیک‌تر به منطقه برش باشد خطا کمتر است [۱۸]. همانطور که مشخص است در تمامی کارهایی که قبلاً انجام شده از روش‌های مقاومت مصالحی و یا آماری استفاده شده است.

تاکنون تئوری‌های ارتعاشات در ماشینکاری معمولی برای بررسی لرزه و اختلالات و اثرات آن بر قطعه کار در فرایندهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند، مانند تراشکاری [۱۹ و ۲۰]، فرایند بورینگ [۲۱]، سوراخکاری [۲۲]، فرزکاری [۲۳]، میکروفرزکاری [۲۴ و ۲۵] (با استفاده از المان محدود در نرم‌افزار انسیس^۸ و بررسی مجموعه اسپیندل [۲۶-۲۸]).

در این مقاله بررسی خطای ماشینکاری در قطعه کار، ناشی از الاستیسیته آن بر اثر نیروهای برشی و شعاعی ماشینکاری در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک از طریق تئوری‌های ارتعاشات مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اینکه از نظر تجربی مقدار تغییرشکل قطعه کار قبل بررسی باشد فرض شده است که قطعه کار تنها به سه نظام متصل است. البته مدل ارتعاشی این مجموعه بدلیل پیچیدگی شکل مودش کمتر در تحقیقات قبلی مورد بررسی قرار گرفته است.

در قسمت تحلیل برای رسیدن به بهترین حالت مقایسه با نتایج تجربی، از نیروهای ماشینکاری به دست آمده از آزمایش تراشکاری معمولی هم در مدل تراشکاری معمولی و هم در مدل تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک استفاده شد.

۲- تحلیل حرکت قطعه کار بر اثر نیروی ماشینکاری

در این قسمت تغییرشکل قطعه کار برای دو فرایند تراشکاری معمولی و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک بر اثر نیروهای ماشینکاری به دست می‌آید.

۱- مقدمه

هدف هر فرایند تولیدی، تولید قطعات با کیفیت بالا و هزینه کمتر است. بی‌دقیقی در تولید قطعات، ضررها بی‌راز نظر اقتصادی و رقابت صنعتی به همراه خواهد داشت. از طرفی با ظهور مواد ترد و سخت در صنایع مهمی مانند هوافضا نیاز به ایجاد فرایندهای نوین بیشتر شده است. بنابراین فرایندهایی مانند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک ظهور یافته‌اند. این فرایند از اعمال ارتعاش آلتراسونیک به سر ابزار تراشکاری معمولی ایجاد می‌شود و کاهش نیروهای ماشینکاری، افزایش صافی سطح و دقت ابعادی را به همراه دارد [۶-۱].

یکی از مهمترین عواملی که روی خطای قطعه کار اثر می‌گذارد، الاستیسیته قطعه کار و ابزار بر اثر نیروهای ماشینکاری است. این عامل کمتر مورد بررسی قرار گرفته است زیرا اندازه‌گیری آن نیازمند بکارگیری شیوه‌های جدید اندازه‌گیری و بنابراین هزینه زیاد است [۷-۱۰]. در تحلیل الاستیک و خطای قطری قطعه کار در تراشکاری معمولی فعالیت‌های مختلفی انجام شده است. به طور نمونه کیانگ^۱ از روش تفاضل متناهی برای تحلیل قطعه کار چندقطری استفاده نموده است [۱۱]. ملوک^۲ و همکارش با استفاده از المان محدود تغییر شکل قطعه کار نازک را بر اثر نیروهای ماشینکاری و گیره‌بندی بررسی نمودند [۱۲]. میر^۳ و همکارانش ابتدا از طریق المان محدود خطای قطری را تحلیل کردند و همچنین از طریق روش استاتیکی، تحلیلی برای قطعه کار چندقطری انجام دادند [۱۳]، سپس با استفاده از روش المان محدود خطای قطری یک قطعه کار یک سر گیردار را تحلیل نمودند. البته در این کار تغییرشکل برشی را نیز در نظر گرفتند [۱۴]. مدل نیرو مسأله مهمی در ایجاد مدل مناسبی برای خطای قطری است. کارینو^۴ و همکارانش در ابتداء مدل نیرویی مناسبی را که آرماگو پیشنهاد داده بود، بررسی کردند و سپس یک مدل تغییرشکل قطعه کار با در نظر گرفتن تنش‌های برشی و

5. Topal
6. Benardos
7. Jianliang
8. ANSYS

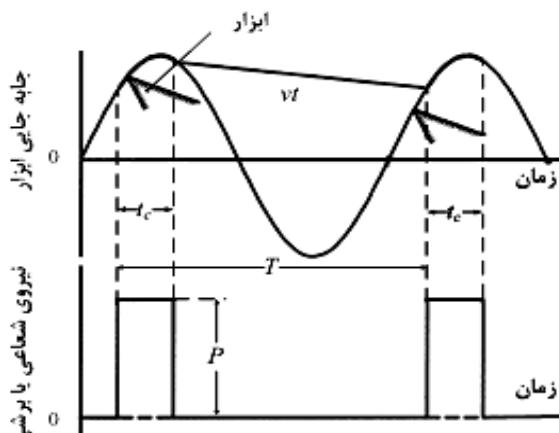
1. Qiang
2. Malluck
3. Mayer
4. Carrino

می‌شود. از آنجایی که مقدار نیرو و شکل آن نقش مهمی را در تغییرشکل قطعه کار دارد در ابتدا نیروی ارتعاشی به‌اجمال بررسی می‌شود.

۱-۲-۲- نیروی ارتعاشی

چندین رابطه نیرویی در جهت برشی با روش آماری [۳] در کارهای قبلی به دست آمده‌اند همچنین از روش شبکه عصبی [۶] برای برآورد نیرو استفاده شده است. این روابط، بر پایه متوسط نیرو بودند. ولی در اینجا برای تحلیل تغییرشکل قطعه کار باید نیروی ارتعاشی مدل‌سازی شود و در روابط تغییرشکل قطعه کار قرار داده شوند.

شکل ۲ رابطه حرکت ابزار با نیروی برشی و شعاعی را در تراشکاری ارتعاشی نشان می‌دهد [۳۰]. در این شکل v سرعت برشی، t_c زمان تراش، T زمان تنابوب ارتعاش و P حداکثر نیروی برش شعاعی یا برشی است.



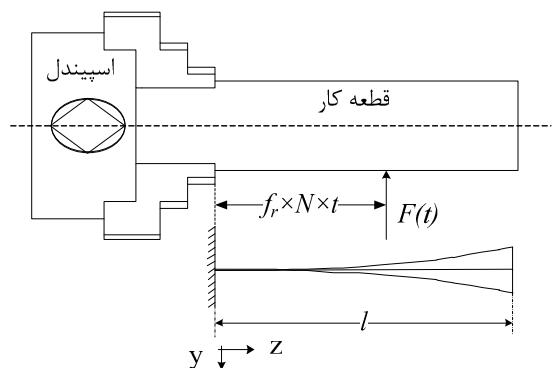
شکل ۲ رابطه حرکت ابزار با نیروی برشی (v سرعت برشی و t_c زمان است) [۳۰]

نیروی تراشکاری (شعاعی یا برشی) به کمک ارتعاشات می‌تواند از طریق به دست آوردن سری فوریه منحنی نیروی ارتعاشی شکل ۲ به صورت زیر بیان گردد [۳۱].

$$F(t) = \frac{t_c}{T} P + \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I}{n} \sin(n \frac{t_c}{T} \pi) \cos(n \omega t) \quad (2)$$

۲-۱- تحلیل الاستیک قطعه کار در تراشکاری معمولی

در این قسمت حداقل شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود یعنی قطعه کار تنها به یک سه نظام بسته شده و از مرغک استفاده نشده و شرایط اولیه صفر است. شکل ۱ تراشکاری یک قطعه کار یک سر گیردار را نشان می‌دهد. در این شکل f_r پیش روی بر حسب $t, rev / min$, $N, mm / rev$ سرعت دورانی قطعه کار بر حسب $F(t)$ نیروی ماشینکاری وارد بر قطعه کار و l طول قطعه کار بیرون از سه نظام است. در تراشکاری ارتعاشی نیرو به زمان وابسته است ولی در تراشکاری معمولی فرض می‌شود نیرو با زمان تغییر نمی‌کند بنابراین در شکل ۱، $F(t) = F$ است.



شکل ۱ اعمال نیروی برش (ارتعاشی و معمولی) بر قطعه کار

با در نظر گرفتن محور به صورت تیر یک سر گیردار تغییرشکل قطعه کار در تراشکاری معمولی قابل استخراج است. و برای قطعه کاری با شکل ۱، به صورت زیر است [۲۹].

$$w(t) = \frac{F(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \quad (1)$$

در این رابطه، w تغییرشکل قطعه کار بر اثر نیروی ماشینکاری، E مدول الاستیسیته و I ممان اینرسی قطعه کار می‌باشد.

۲-۲- تحلیل الاستیک قطعه کار در تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک

برای به دست آوردن تغییرشکل قطعه کار در هر نقطه از آن و در هر زمان در این قسمت از تئوری‌های ارتعاشات تیرها استفاده

فرکانس‌های طبیعی قطعه کار نیز از پیوست الف و با استفاده از جدول ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5)$$

جرم بر واحد طول است. فرض می‌شود نیروی ابزار روی $f_r N$ قطعه کار به صورت بار متمرکز متحرک است که با سرعت v روی قطعه کار حرکت می‌کند. بنابراین با توجه به پیوست الف و رابطه ۲، رابطه تغییر شکل الاستیک قطعه کار تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک بر نیرو نسبت به زمان و مکان به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} w(z,t) = & \frac{P}{\rho} \\ & \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l} \right) \times (\cos \beta_i z \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z) \times \frac{1}{m_i \omega_i} \right. \\ & \times \int_0^t \left(\left(\frac{\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l} \right) \times (\cos \beta_i f_r N \tau \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i f_r N \tau) + (\sin \beta_i f_r N \tau - \sinh \beta_i f_r N \tau) \right) \\ & \times \left(\frac{t_c}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n \frac{t_c}{T} \pi) \cos(n \omega \tau) \right) \\ & \times \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{ii} = & \int_0^l m \left(\frac{\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l} \right) \times (\cos \beta_i z \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z)^2 dz \end{aligned} \quad (6)$$

۳- آزمایش تجربی

به منظور بررسی تجربی برگشت فنری قطعه کار در تراشکاری معمولی و ارتعاشی، وسایل آزمایشی به صورت شکل ۳ فراهم شد.

ω سرعت زاویه‌ای ابزار است. در رابطه نیروی ارتعاشی نسبت t_c/T با تنظیم سرعت برشی کنترل می‌شود. می‌توان ملاحظه نمود که نیروی برشی بر شکاری ارتعاشی با کاهش سرعت برشی، کمتر می‌شود. این موضوع نشانگر آن است که t_c/T کوچکتر شده است. پارامتر T باید با توجه به شرایط ماشینکاری تعیین شود. اگر $2\pi af > v$ باشد رابطه میان سرعت برشی (v ، فرکانس (f)، دامنه ارتعاش (a) و زمان‌ها به صورت زیر خواهد بود [۳۰ و ۳۲].

$$\frac{af}{v} = \frac{1-t_c/T}{2 \sin \pi(t_c/T) \cos \left[\cos^{-1} \left(-\frac{v}{2\pi af} \right) - \pi t_c/T \right]} \quad (3)$$

برای به دست آوردن t_c/T ، این رابطه باید به صورت عددی حل شود. در این مقاله برنامه‌ای برای حل آن نوشته شده است.

۲-۲-۲- تغییر شکل الاستیک قطعه کار بر اثر نیروی‌های برشی فرض می‌شود تغییر عمق برش اثری بر ممان اینرسی قطعه کار ندارد بنابراین مطابق پیوست الف رابطه فرکانسی قطعه کار شکل ۱ به صورت زیر خواهد شد.

$$\cos \beta_i l \cosh \beta_i l = -1 \quad (4)$$

ریشه‌های این رابطه مودهای در گیر در محاسبات را مشخص می‌کند. برای به دست آوردن ریشه‌های این رابطه در این مقاله از نرم افزار متلب استفاده شده است. ریشه اول آن به صورت جدول زیر خواهد بود.

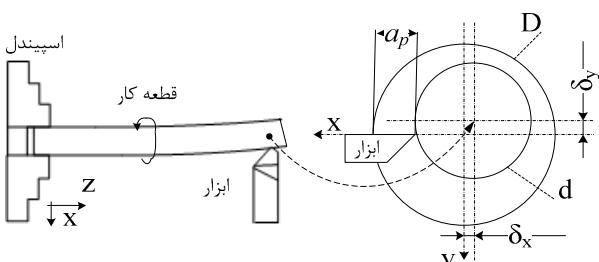
جدول ۱ $\beta_i l$ ده مود ارتعاشی اول قطعه کار

$\beta_1 l$	۱/۸۷۵۱۰۴۰۶۸۷۱۱۹۶
$\beta_2 l$	۴/۶۹۴۰۹۱۱۳۲۹۷۴۱۸
$\beta_3 l$	۷/۸۵۴۷۵۷۴۳۸۲۳۷۶۰
$\beta_4 l$	۱۰/۹۹۵۵۴۰۷۳۴۸۷۵۶
$\beta_5 l$	۱۴/۱۳۷۱۶۸۳۹۱۰۴۶۸
$\beta_6 l$	۱۷/۲۷۸۷۵۹۵۳۲۰۸۸۲
$\beta_7 l$	۲۰/۴۲۰۳۵۲۲۵۱۰۴۱۳
$\beta_8 l$	۲۳/۵۶۱۹۴۴۹۰۱۸۰۶۴
$\beta_9 l$	۲۶/۷۰۳۵۳۷۵۵۵۵۱۸۳
$\beta_{10} l$	۲۹/۸۴۵۱۳۰۲۰۹۱۰۲۸
...	...

میلی‌متر، پیش روی (mm/rev) ۱/۱، سرعت اسپیندل ۳۰۰ دور بر دقیقه در نظر گرفته شد. به کمک میکرومتر دقیقی، اندازه‌گیری قطر قطعه کار انجام شد. هر اندازه‌گیری سه بار تکرار و مقدار میانگین آنها ثبت شد. سه اندازه در فاصله زاویه‌ای ۱۲۰ درجه اندازه‌گیری شدند. طول قطعه کار ۶۰۰ میلی‌متر بود که ۵۰۰ میلی‌متر آن از اسپیندل بیرون گذاشته شد (شکل ۱). قطر اولیه قطعه کار در آزمایش UAT، ۳۰/۳۶ میلی‌متر و در آزمایش CT، ۳۰/۱۶ میلی‌متر بود. در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک، فرکانس ارتعاش (f) ۲۰ کیلوهرتز و دامنه ارتعاش (a) ۸ میکرون تنظیم شد.

با بررسی نیروهای ماشینکاری در مقاطع مختلف قطعه کار ماشینکاری شده، دیده شد که جهت نیروی برشی تا نزدیکی فاصله ۱۷۰ میلی‌متری از اسپیندل، خلاف جهت مورد انتظار است و از نظر تجربی این معنی را می‌دهد که قطعه کار ابزار را به سمت خود کشیده است. از طرفی در این قسمت‌ها اندازه‌گیری قطر به دلیل صافی سطح نامناسب، با مشکل مواجه است. این پدیده‌ها می‌توانند ناشی از چتر و خطاهای دیگر باشد. از طرفی نقاط اندازه‌گیری و مورد بررسی روی قطعه کار برای دو حالت تراشکاری معمولی و به کمک آلتراسونیک می‌باشد در یک مکان (از نظر فاصله تا تکیه‌گاه) باشند تا بتوان آنها را با یکدیگر مقایسه نمود. بنابراین ۱۳ مقطع با فاصله ۱۰ میلی‌متر از یکدیگر در طول قطعه کار (از فاصله ۱۷۰ میلی‌متر تا ۲۹۰ میلی‌متری اسپیندل) در نظر گرفته شد.

شکل ۵ برگشت‌فرنی قطعه کار را بر اثر نیروی ماشینکاری نشان می‌دهد. در این شکل δ_y و δ_x به ترتیب تغییرشکل قطعه کار در جهت برشی و شعاعی هستند. D قطر اولیه قطعه کار و a_p عمق نامی برش است.



شکل ۵ برگشت‌فرنی قطعه کار در فرایند تراشکاری



شکل ۳ تجهیزات آزمایشگاهی

ارتعاش از طریق یک ژنراتور و یک ترانسدیوسر ایجاد شد و به ابزار اعمال گردید. و از طراحی هورن و ابزار گیر کارهای قبلی [۴] استفاده شد (شکل ۴).



شکل ۴ مجموعه ابزار گیر سیستم ارتعاشی

برای اندازه‌گیری نیرو از دینامومتر شرکت کیستلر و برای تراشیدن قطعه کار استوانه‌ای از جنس AL7075-T6 (جدول ۲) از تراش CNC مدل TME40 استفاده گردید.

جدول ۲ خواص قطعه کار آلومینیمی ۷۰/۷۵ [۳۳]

ضریب پوآسون	وزن (kg/m³)	مدول الاستیسیته (Pa)
۰.۳۱۲۴۴	۲۸۲۳	۷/۴۴۲۶×۱۰¹۱

از ابزار Sandvik VBMT 160404 با زاویه آزاد ۵ درجه، زاویه براده ۴ درجه و شعاع لبه ابزار ۰/۰۳ میلی‌متر (که با میکروسکوپ اندازه‌گیری شد) استفاده شد. عمق برش یک

$$a'_p(z) = \frac{2a_p - \Delta D(z)}{2} \quad (10)$$

با جای گذاری تغییر شکل های الاستیک (رابطه ۱) در دو جهت شعاعی و برشی در رابطه ۹ رابطه تحلیلی-هندسی خطای قطری در تراشکاری معمولی به صورت زیر خواهد شد.

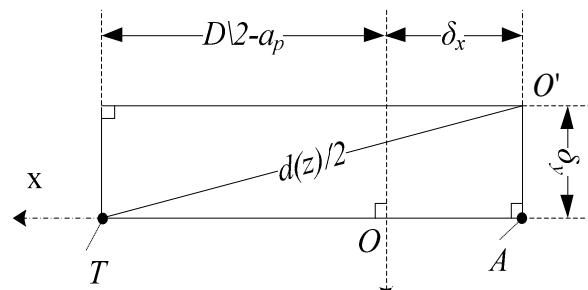
$$\begin{aligned} \Delta D(z) = 2 & \left\{ \left[\frac{D}{2} - a_p + \frac{F_x(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \right]^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{F_y(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \right)^2 \right\}^{0.5} - D + 2a_p \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه F_y نیروی برش در جهت سرعت برشی و F_x نیروی برش در جهت شعاع می باشد.تابع زیر رادیکال یک تابع چندجمله ای درجه شش خواهد بود که با اعمال رادیکال به صورت یک تابع درجه سه در خواهد آمد.

در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک همان گونه که بیان شد، هر کدام از مودهای طبیعی، سهمی در مقدار تغییر شکل قطعه کار ایفا می کنند. ولی مهمترین و اصلی ترین مود در تراشکاری ارتعاشی مود اصلی است که انرژی بیشتری دارد و معمولاً شکل آن مشابه منحنی تغییر شکل استاتیک قطعه کار می باشد [۳۴] و در اکثر روش های تقریب فرکانس طبیعی مثل ریلی به عنوان شکل اول مدنظر قرار می گیرد. بنابراین می توان بیان نمود که تابع خطای قطری در تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک مشابه مطالبی که در تراشکاری معمولی بیان شد با تقریب بسیار خوبی از نظر تحلیلی به صورت یک تابع درجه سه خواهد بود.

شکل های ۷ و ۸، به ترتیب نتایج خطای قطری به دست آمده از آزمایش را نسبت به فاصله از اسپیندل، در دو فرایند CT و UAT نشان می دهد. در این شکل ها، یک تابع چندجمله ای درجه سه بر نتایج آزمایش برآشش شده است.

در صورتی که بر منطقه برش در شکل ۵ تمرکز شود شکل ۶ به دست خواهد آمد.



شکل ۶ شکل هندسی منطقه برش

که T نقطه ای است که ابزار عمل برش را انجام می دهد. O' به ترتیب مرکز قطعه کار قبل و بعد از تغییر شکل آن است. از قضیه فیثاغورس رابطه زیر به دست می آید.

$$TO'^2 = AT^2 + AO'^2 \quad (7)$$

بنابراین قطر واقعی قطعه کار پس از ماشینکاری به صورت زیر خواهد شد.

$$d(z) = 2 \times TO' = 2 \sqrt{\left[\frac{D}{2} - a_p + \delta_x(z) \right]^2 + \delta_y^2(z)} \quad (8)$$

خطای قطری از اختلاف قطر واقعی قطعه کار و قطر نامی به دست می آید.

$$\begin{aligned} \Delta D(z) &= d(z) - (D - 2a_p) = \\ & 2 \sqrt{\left[\frac{D}{2} - a_p + \delta_x(z) \right]^2 + \delta_y^2(z)} - D + 2a_p \end{aligned} \quad (9)$$

عمق واقعی ماشینکاری ($a'_p(z)$) نیز از اختلاف عمق نامی و خطای قطری با رابطه زیر به دست می آید.

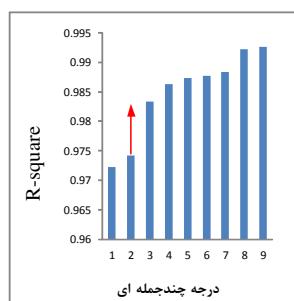
به صورت رابطه ۱۲ و برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک به صورت رابطه ۱۳ خواهد بود.

$$\Delta D = 7 \times 10^{-9} \times z^3 + 1 \times 10^{-6} \times z^2 + 0.0009 \times z + 0.1775 \quad (12)$$

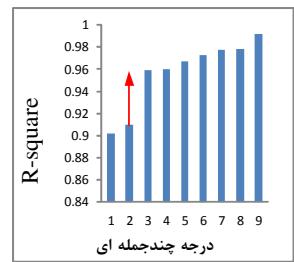
$$\Delta D = 7 \times 10^{-10} \times z^3 + 3 \times 10^{-6} \times z^2 + 0.0007 \times z + 0.1005 \quad (13)$$

با توجه به نتایج حاصل از تحلیل، به نظر رسید کهتابع خطای قطری به صورت یک تابع چند جمله‌ای درجه سه باشد برای بررسی بیشتر این مطلب با استفاده از نرم‌افزار متلب توابع چند جمله‌ای تا مرتبه نه بر نقاط به دست آمده از آزمایش برآششند و پارامتر R-squared برای هر منحنی به دست آمد [۳۵].

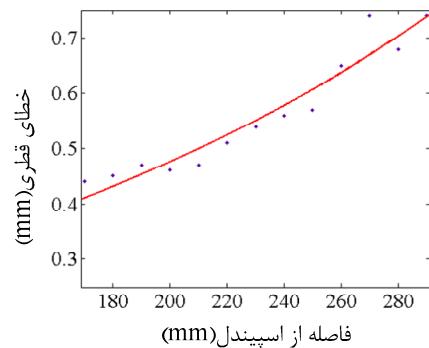
شکل‌های ۹ و ۱۰ این پارامتر را نسبت به درجه تابع چند جمله‌ای به ترتیب برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک و تراشکاری معمولی نشان می‌دهند.



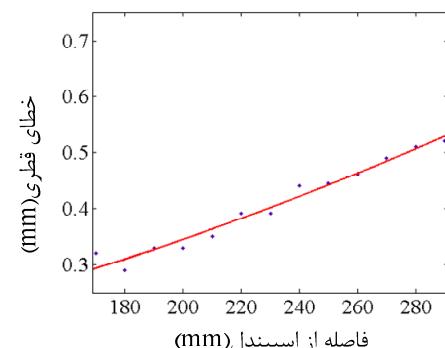
شکل ۹ مقدار R-squared فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک نسبت به درجه تابع چندجمله‌ای



شکل ۱۰ مقدار R-squared فرایند تراشکاری معمولی نسبت به درجه تابع چندجمله‌ای



شکل ۷ نتایج تجربی خطای قطری نسبت به فاصله از اسپیندل در فرایند CT



شکل ۸ نتایج تجربی خطای قطری نسبت به فاصله از اسپیندل در فرایند UAT

همانطور که از شکل‌ها مشخص است با نزدیک شدن به اسپیندل خطای قطری در هر دو فرایند کاهش می‌یابد و همچنین ارتعاشات آلتراسونیک موجب کاهش خطای قطری شده است.

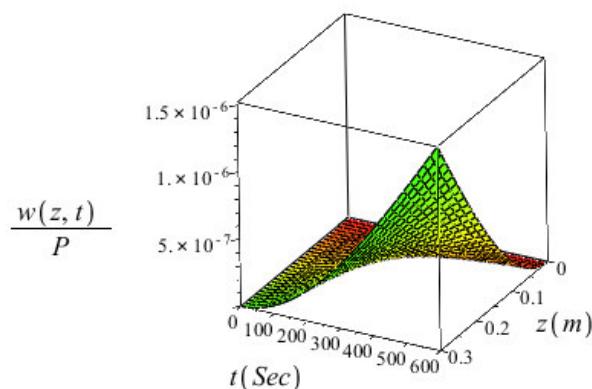
در برآش نمودن تابع چند نکته فیزیکی را باید در نظر گرفت: اول اینکه مشتق اول منحنی برآش شده تا نقطه صفر (در مکان اسپیندل) علامتش تغییر نکند، زیرا روند تغییر شکل قطعه کار از سطح آزادش تا اسپیندل از نظر فیزیکی تغییر نخواهد کرد. دوم اینکه مشتق دوم تابع به دست آمده در طول منحنی تغییر علامت ندهد زیرا باز از نظر فیزیکی، نقطه عطفی در تغییر شکل قطعه کار ایزوتروپیکی که یک بار متمرکز بر آن قرار دارد وجود ندارد. تابع درجه سه حاصل از برآش کردن نتایج تجربی به کمک نرم‌افزار متلب برای تراشکاری معمولی

همچنین با افزایش شماره مودها، تاثیر آنها بر جواب مسئله کم خواهد شد. پارامتر $\beta_f l = 20k\text{Hz} f$ برای فرکانس ارتعاش ابزار یعنی 20kHz و شرایط آزمایش انجام شده (مدول الاستیستیه و ممان اینرسی قطعه کار و جرم بر واحد طول) برابر $\beta_f l = 28.55$ خواهد شد (رونده محاسبات در پیوست ب آمده است).

مود دهم جدول ۱ از مقدار $\beta_f l = 28.55$ بیشتر است و بنابراین همین ده مود جدول ۱ در انجام تحلیل مدنظر قرار می‌گیرد.

با حل عددی رابطه ۳ با استفاده از روش نیوتون و به کمک نرم افزار متلب، مقدار t_c/T برای شرایط آزمایش انجام شده (دامنه ۸ میکرون و فرکانس $f = 20\text{kHz}$)، برابر با $455594326476624/455594326476624$ خواهد شد.

برنامه‌ای در نرم افزار میپل^۱ نوشته شد و رابطه تغییرشکل قطعه کار بر حداکثر نیرو نسبت به زمان و مکان برای فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک (رابطه ۶) به صورت شکل ۱۱ رسم گردید.



شکل ۱۱ رابطه تغییرشکل قطعه کار بر نیروی برش حداکثر ($w(z,t)/P$) نسبت به زمان و مکان

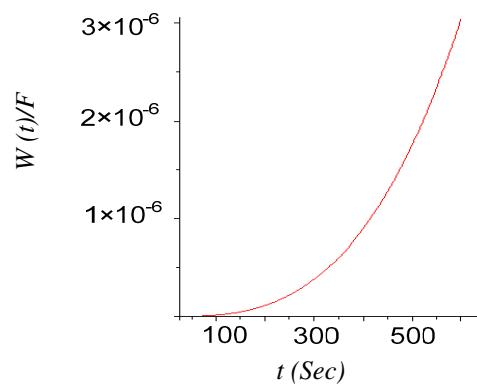
همچنین رابطه تغییرشکل قطعه کار بر نیروی برشکاری نسبت به زمان برای فرایند تراشکاری معمولی (رابطه ۱) به صورت شکل ۱۲ رسم شد.

همان‌گونه که از نمودارها مشخص است می‌توان بیان داشت که با بیشتر شدن درجه تابع چندجمله‌ای، منحنی بهتری به دست می‌آید که البته قابل پیش‌بینی نیز بود. از منحنی‌ها این نکته را نیز می‌توان یافت که از تابع درجه ۳ به بعد تغییرات نسبتاً کمی در پارامترهای حاضر اتفاق می‌افتد در صورتیکه از تابع درجه ۲ به ۳ یک تغییر ناگهانی اتفاق افتاده است. بنابراین با توجه به اینکه خطاهای زیادی هم در آزمایش‌های تجربی و هم در فرمول‌های تحلیلی (به دلیل اعمال فرض‌های زیاد) وجود دارد بنابراین به نظر می‌رسد که تابع درجه سه حاصل از نتایج تجربی قابل مقایسه‌تر از بقیه توابع با نتایج تحلیلی خواهد بود.

از طریق برونویابی روابط ۱۲ و ۱۳، مقدار خطای قطعه کار در مکان اسپیندل به دست می‌آید و این مقادیر، برای تراشکاری معمولی (رابطه ۱۲)، $1775/100$ و برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک (رابطه ۱۳)، $100.5/100.5$ میلی‌متر می‌باشد. این مقادیر برای جبران خطا در قطعات دیگر و خطای ناشی از صلب در نظر گرفتن مجموعه ابزار، ماشین و اسپیندل در تحلیل مناسب خواهند بود.

۴- مقایسه تحلیل برگشت فنری قطعه کار در دو فرایند *UAT* و *CT*

تغییرشکل قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک از طریق رابطه ۶ و با توجه به شکل و جنس قطعه کار، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به دست می‌آید. آخرین فرکانس طبیعی قطعه کار که در روابط مدنظر قرار می‌گیرد، باید بزرگ‌تر از فرکانس ارتعاش ابزار باشد. این امر به این دلیل است که اگر فرکانس ارتعاش ابزار بزرگ‌تر از تمامی فرکانس‌های مودهای طبیعی تحلیل باشد دیگر نمی‌شود انتظار داشت که مود ارتعاشی قطعه کار با فرکانسی معادل فرکانس ارتعاش ابزار تحریک شود و روابط تحلیلی، خطای زیادی خواهد داشت. از طرفی اگر تعداد مودهای زیادی در نظر گرفته شود، روابط محاسباتی چندین برابر می‌شود که آن موقع دیگر نمی‌توان با کامپیوترهای نیمه قوی نیز مسئله حل نمود.



شکل ۱۲ رابطه تغییرشکل قطعه کار بر نیروی برشکاری ($W(t)/F$) نسبت به زمان

نیروهایی که از آزمایش تجربی در همان مقطع قطعه کار به دست آمده، باشد.

- همچنین از آنجایی که هدف این مقاله بررسی تفاوت ماهیت ارتعاشی بودن ابزار و غیرارتعاشی بودن آن است بایستی مقدار حداکثر نیرو در دو حالت تراشکاری معمولی و به کمک آلتراسونیک یکسان باشد.

بنابراین می‌توان اینگونه برداشت نمود که برای اینکه هر دو نکته ارضا شود باید به جای P و F در رابطه تغییرشکل الاستیک تراشکاری با آلتراسونیک (رابطه ۶) و تراشکاری معمولی (رابطه ۱)، نیروهای به دست آمده از آزمایش تراشکاری معمولی را گذاشت. از آنجایی که این نیروها در هر مقطعی از قطعه کار متفاوتند بنابراین تغییرشکل‌های الاستیک در ۱۳ مقطع آزمایش تجربی با در نظر گرفتن نیروهای هر مقطع به دست آمد.

اگر F_{CExp} نیروی برش تراشکاری معمولی در جهت سرعت برشی به دست آمده از آزمایش و F_{RExp} نیروی شعاعی تراشکاری معمولی به دست آمده از آزمایش باشد، با استفاده از روابط ۱۴ تغییرشکل‌های الاستیک قطعه کار در دو حالت تراشکاری معمولی و به همراه آلتراسونیک و در دو جهت شعاعی و برشی به دست می‌آیند. $W(z)/F$ و $W(z,t)/P$ به ترتیب از روابط ۱ و ۶ در هر مقطعی از قطعه کار به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\delta_{xCT} &= \left(\frac{W(z)}{F}\right) \times F_{RExp} \\ \delta_{yCT} &= \left(\frac{W(z)}{F}\right) \times F_{CExp} \\ \delta_{xUAT} &= \left(\frac{W(z,t)}{P}\right) \times F_{RExp} \\ \delta_{yUAT} &= \left(\frac{W(z,t)}{P}\right) \times F_{CExp}\end{aligned}\quad (14)$$

خطای قطری با جایگذاری تغییرشکل‌های الاستیک قطعه کار در دو جهت شعاعی و برشی (رابطه ۱۴) در رابطه ۹ به دست می‌آید و نتایج آن در جدول ۳ نشان داده شده است.

از آنجایی که نیروی ماکزیمم تراشکاری با آلتراسونیک (P) تقریباً برابر نیروی تراشکاری معمولی (F) است بنابراین با مقایسه شکل‌های ۱۱ و ۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تغییرشکل الاستیک قطعه کار (W) در تراشکاری معمولی تقریباً دو برابر تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک می‌باشد ولی روند تغییر دو منحنی تقریباً مانند یکدیگر است.

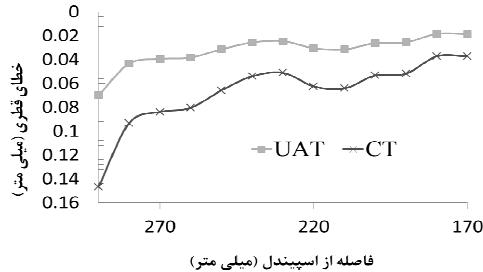
۵- مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی

برای مقایسه نتایج حاصل از آزمایش تجربی و تحلیل در این مقاله از خطای قطری استفاده شده است.

۱- به دست آوردن خطای قطری از روابط تحلیلی و مقایسه دوفرایند *UAT* و *CT*

خطای قطری در تحلیل با به دست آوردن تغییرشکل الاستیک قطعه کار در جهت‌های برشی و شعاعی به دست می‌آید. برای به دست آوردن برگشت‌فرنگی قطعه کار نیاز به اعمال نیروی برش در روابط است در اینجا دو نکته را بایستی در نظر گرفت:

- برای اینکه امکان مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی باشد باید مقدار نیروی اعمالی به قطعه در روابط تحلیلی همانند



شکل ۱۳ خطای قطری بدست آمده از تحلیل نسبت به فاصله از اسپیندل

همان‌گونه که از شکل مشخص است از نظر تحلیلی نیز خطای قطری تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک کمتر از تراشکاری معمولی است.

۴-۵ مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی با درنظر گرفتن خطای قطری
برای مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی از دو پارامتر قطرنهایی قطعه‌کار (رابطه ۸) و عمق واقعی برش (رابطه ۱۰) استفاده می‌شود. جدول ۴ مقدار درصد خطای حل تحلیلی را نسبت به تجربی با در نظر گرفتن قطرنهایی قطعه‌کار ($d(z)$) نشان می‌دهد. جدول ۵ این مقدار را با در نظر گرفتن عمق واقعی برش ($a'_p(z)$) نشان می‌دهد.

جدول ۳ خطاهای قطری حاصل از تحلیل

Z(m)	ΔDUAT(mm)	ΔDCT(mm)
۰/۲۹	۰/۰۷۰۰۴۳۶	۰/۱۴۶۷۸۸
۰/۲۸	۰/۰۴۳۳۲۸۳۲	۰/۰۹۳۲۳۱
۰/۲۷	۰/۰۳۹۳۷۶۸۸	۰/۰۸۳۸۷۷
۰/۲۶	۰/۰۳۸۳۰۸۲۶	۰/۰۸۰۴۱۸
۰/۲۵	۰/۰۳۱۳۰۴۰۲	۰/۰۶۵۷۶۸
۰/۲۴	۰/۰۲۵۶۲۹۵۲	۰/۰۵۳۹۹۴
۰/۲۳	۰/۰۲۴۵۴۸۵۲	۰/۰۵۱۰۳۳
۰/۲۲	۰/۰۳۰۳۸۱۹۴	۰/۰۶۲۴۱۳
۰/۲۱	۰/۰۳۱۳۵۳۸۶	۰/۰۶۴۰۹۳
۰/۲	۰/۰۲۶۱۰۶۷۶	۰/۰۵۳۲۷۱
۰/۱۹	۰/۰۲۵۴۸۰۹۲	۰/۰۵۱۷۴
۰/۱۸	۰/۰۱۸۳۴۹۹	۰/۰۳۷۲۲۶
۰/۱۷	۰/۰۱۸۴۸۵۱۸	۰/۰۳۷۲۶۳

مقادیر بدست آمده از برونویابی توابع برآذش شده منحنی تجربی خطای قطری (تراشکاری معمولی، ۰/۱۷۷۵ و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک، ۰/۱۰۰۵ میلی‌متر) به مقادیر بدست آمده از تحلیل اضافه شدند تا جبران خطاهای ناشی از فرض صلب گرفتن ابزار و اسپیندل شود. نتایج حاصل برای دو فرایند UAT و CT، نسبت به فاصله از اسپیندل در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

جدول ۴ مقایسه حل تحلیلی و تجربی با در نظر گرفتن قطرنهایی قطعه‌کار

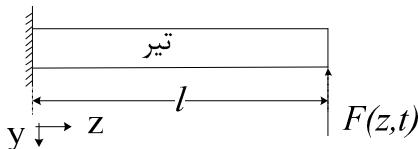
فاصله از اسپیندل	تحلیل		آزمایش تجربی		درصد خطا	
	$d(z)UAT(mm)$	$d(z)CT(mm)$	$d(z)UAT(mm)$	$d(z)CT(mm)$	UAT	CT
۰/۲۹	۲۸/۵۳۰۵۴۳۶	۲۸/۴۸۴۲۸۸۲۴	۲۸/۸۸	۲۸/۹	۱/۲۱۰۰۴۹۰۸۶	۱/۴۲۸۴۴۸۹۹۷
۰/۲۸	۲۸/۰۳۸۲۸۳۲	۲۸/۴۳۰۷۳۱۱	۲۸/۸۷	۲۸/۸۴	۱/۲۶۸۳۴۶۸۵۷	۱/۴۱۹۱۰۱۵۹۵
۰/۲۷	۲۸/۴۹۹۸۷۶۸۸	۲۸/۴۲۱۳۷۷۴۴	۲۸/۸۵	۲۸/۹	۱/۲۱۳۵۹۸۳۳۶	۱/۶۵۶۱۳۳۴۲۶
۰/۲۶	۲۸/۴۹۸۸۰۸۲۶	۲۸/۴۱۷۹۱۷۸	۲۸/۸۲	۲۸/۸۱	۱/۱۱۴۴۷۵۱۵۶	۱/۳۶۰۹۲۳۹۸۵
۰/۲۵	۲۸/۴۹۱۸۰۴۰۲	۲۸/۴۰۳۲۶۸۴۴	۲۸/۸۰۵	۲۸/۷۳	۱/۰۸۷۲۹۷۷۷۵	۱/۱۳۷۲۴۸۷۳
۰/۲۴	۲۸/۴۸۶۱۲۹۵۲	۲۸/۳۹۱۴۹۴۱۶	۲۸/۸	۲۸/۷۲	۱/۰۸۹۸۲۸۰۵۶	۱/۱۳۳۸۲۲۵۶۳
۰/۲۳	۲۸/۴۸۵۰۴۸۵۲	۲۸/۳۸۸۵۳۳۳	۲۸/۷۵	۲۸/۷	۰/۹۲۱۵۷۰۳۶۵	۱/۰۸۵۲۴۹۸۲۶
۰/۲۲	۲۸/۴۹۰۸۸۱۹۴	۲۸/۳۹۹۹۱۲۶۶	۲۸/۷۵	۲۸/۶۷	۰/۹۱۲۸۰۲۰۹	۰/۹۴۲۰۰۵۵۹۸
۰/۲۱	۲۸/۴۹۱۸۵۳۸۶	۲۸/۴۰۱۵۹۳۴۸	۲۸/۷۱	۲۸/۶۳	۰/۷۵۹۸۲۸۳۳۲	۰/۷۹۷۷۸۷۳۵۶
۰/۲	۲۸/۴۸۶۰۶۷۶	۲۸/۳۹۰۷۷۰۵۴	۲۸/۶۹	۲۸/۶۲	۰/۷۰۸۹۳۴۲۶۳	۰/۸۰۰۹۴۱۵۰۹
۰/۱۹	۲۸/۴۸۵۹۸۰۹۲	۲۸/۳۸۹۲۳۹۵۶	۲۸/۶۹	۲۸/۶۳	۰/۷۱۱۱۱۰۶۵	۰/۸۴۰۹۳۷۶۱۸
۰/۱۸	۲۸/۴۷۸۸۸۴۹۹	۲۸/۳۷۴۷۶۴۸	۲۸/۶۵	۲۸/۶۱	۰/۵۹۷۳۸۲۵۴۸	۰/۸۲۲۳۴۷۱۵۱
۰/۱۷	۲۸/۴۷۸۹۸۵۱۸	۲۸/۳۷۴۷۶۳۲۸	۲۸/۶۸	۲۸/۶	۰/۷۰۰۸۸۸۴۹۴	۰/۷۸۷۵۴۰۹۷۹

جدول ۵ مقایسه حل تحلیلی و تجربی با در نظر گرفتن عمق واقعی برش

فاصله از اسپیندل	تحلیل		آزمایش تجربی		درصد خطا	
Z(m)	$a'_p(z)_{UAT} (mm)$	$a'_p(z)_{CT} (mm)$	$a'_p(z)_{UAT} (mm)$	$a'_p(z)_{CT} (mm)$	UAT	CT
.۰/۲۹	.۰/۹۱۴۷۲۸۲	.۰/۸۳۷۸۵۵۸۸	.۰/۷۴	.۰/۶۳	۱۹/۱۰۱۶۵۲۲۷	۲۴/۸۰۸۰۷۰۸۱
.۰/۲۸	.۰/۹۲۸۰۸۵۸۴	.۰/۸۶۴۶۳۴۴۵	.۰/۷۴۵	.۰/۶۶	۱۹/۷۲۷۲۵۲۸۲	۲۳/۶۶۷۱۶۳۶۲
.۰/۲۷	.۰/۹۳۰۰۶۱۵۶	.۰/۸۶۹۳۱۱۲۸	.۰/۷۵۵	.۰/۶۳	۱۸/۸۲۴۵۷۷۷۲	۲۷/۵۲۸۸۳۶۳۹
.۰/۲۶	.۰/۹۳۰۵۹۵۸۷	.۰/۸۷۱۰۴۱۱	.۰/۷۷	.۰/۶۷۵	۱۷/۲۵۷۳۱۶	۲۲/۵۰۵۲۶۹۶
.۰/۲۵	.۰/۹۳۴۰۹۷۹۹	.۰/۸۷۸۴۶۵۷۸	.۰/۷۷۷۵	.۰/۷۱۵	۱۶/۷۶۴۶۲۱۲۴	۱۸/۵۹۸۸۳۲۴۸
.۰/۲۴	.۰/۹۳۶۹۳۵۲۴	.۰/۸۸۴۲۵۲۹۲	.۰/۷۸	.۰/۷۲	۱۶/۷۴۹۸۴۹۲۲	۱۸/۵۷۳۳۲۵
.۰/۲۳	.۰/۹۳۷۴۷۵۷۴	.۰/۸۸۵۷۳۳۳۵	.۰/۸۰۵	.۰/۷۳	۱۴/۱۳۱۱۱۱۲۸	۱۷/۵۸۲۴۱۹۱۳
.۰/۲۲	.۰/۹۳۴۵۵۹۰۳	.۰/۸۸۰۰۴۳۶۷	.۰/۸۰۵	.۰/۷۴۵	۱۳/۸۶۳۱۱۸۹۵	۱۵/۳۴۵۱۱۰۹
.۰/۲۱	.۰/۹۳۴۰۷۳۰۷	.۰/۸۷۹۲۰۳۲۶	.۰/۸۲۵	.۰/۷۶۵	۱۱/۶۷۷۱۴۵۳۴	۱۲/۹۸۹۴۰۳۶۱
.۰/۲	.۰/۹۳۶۸۹۶۶۸۲	.۰/۸۸۴۶۱۴۷۳	.۰/۸۳۵	.۰/۷۷	۱۰/۸۵۶۹۴۳۲	۱۲/۹۵۶۴۵۷۳۳
.۰/۱۹	.۰/۹۳۷۰۰۹۵۴	.۰/۸۸۵۳۸۰۲۲	.۰/۸۳۵	.۰/۷۶۵	۱۰/۸۸۶۷۱۳۰۶	۱۳/۵۹۶۴۴۳۳۴
.۰/۱۸	.۰/۹۴۰۵۷۵۰۵	.۰/۸۹۲۶۳۶۷۶	.۰/۸۵۵	.۰/۷۷۵	۹/۰۹۸۱۶۲۸۷۴	۱۳/۱۷۸۵۶۹۹۷
.۰/۱۷	.۰/۹۴۰۵۰۷۴۱	.۰/۸۹۲۶۱۸۳۶	.۰/۸۴	.۰/۷۸	۱۰/۶۸۶۵۰۹۱	۱۲/۶۱۶۶۳۰۴۷

-۸- پیوست

۱-۸- پیوست الف: به دست آوردن رابطه ارتعاشی تیر یکسر گیردار [۳۷, ۳۶, ۳۴]
در این قسمت ارتعاشات تیر یکسر گیردار نشان داده شده در شکل الف-۱ بررسی می‌شود.



شکل الف-۱- تغییرشکل عرضی تیری بر اثر نیروی خارجی $F(z,t)$

برای به دست آوردن تغییرشکل عرضی تیر در هر نقطه از آن و در هر زمان در این قسمت از روش هامیلتون استفاده می‌شود. در این روش، یک المان از قطعه کار جدا می‌شود و تغییرشکل در آن بررسی می‌گردد و سپس در کل طول قطعه کار از آن انتگرال گرفته می‌شود و یا تعمیم داده می‌شود. برای اینکه از پیچیدگی مسئله در به دست آوردن رابطه حرکت تیر کاهش داده شود موارد زیر فرض می‌شود: یک بعد (جهت محوری) به روشنی بزرگتر از دوتای دیگر است، ماده الاستیک خطی (هوک) است، از اثر پوآسون چشم پوشی می‌شود، سطح مقطع متقارن است بنابراین محورهای خنثی و مرکزی منطبق برهم هستند، صفحات عمود به محور خنثی بعد از تغییرشکل عمود

همان‌گونه که از جداول مشخص است اختلاف نتایج تحلیل و تجربی کم است و تقریباً می‌توان بیان نمود که با نزدیک شدن به اسپیندل این خطا کمتر نیز می‌شود و این نشانگر این مطلب است که این حل تحلیلی برای بررسی برگشت‌فنری مناسب است.

۶- نتیجه‌گیری

تحلیل ارتعاشی قطعه کار یک سر گیردار که به دلیل شکل مود پیچیده آن تاکنون کمتر مورد بررسی قرار گرفته بود، برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک انجام شد و مدل برگشت‌فنری قطعه کار در این فرایند به دست آمد. روش ارائه شد تا از خطای قطری برای صحت سنجی و مقایسه نتایج تحلیل و آزمایش استفاده شود. نشان داده شد که ارتعاشات فرکانس بالای قطعه کار هم از نظر تئوری و هم تجربی موجب کاهش برگشت‌فنری در قطعه کار ماشینکاری شده می‌شود. همچنین نشان داده شد که تغییرشکل الاستیک قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک یک روند استاتیکی دارد. روش جدیدی برای بررسی خطاهای روش تحلیلی بر اثر صلب فرض نمودن مجموعه ماشین، ابزار و اسپیندل و اعمال آنها در نتایج تحلیل معرفی شد.

۷- تقدیر و تشکر

از آقای مهندس صابر عزیزی، آقای مهندس بابک غلامزاده و آقای مهندس مرتضی شنکایی برای کمک‌های شایان در روابط تحلیلی و آزمایش‌های تجربی کمال قدردانی را دارم.

نمود که هنگامی این شرایط برقرار است که دو طرف رابطه برابر یک مقدار ثابت λ باشد. از طرفی این ثابت باید منفی ($-\omega^2 - \lambda = 0$) باشد. بنابراین تابع دو متغیره w به صورت زیر تبدیل به دو رابطه یک متغیره می‌شود.

$$1) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \omega^2 q = 0$$

$$2) \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \beta^4 \phi = 0, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (\text{الف-}5)$$

که رابطه دومی، رابطه شکل مود و ω فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه است. β نیز علامتی است که برای سادگی در روند محاسبات آورده شده است. شرایط مرزی برای تیر یکسر گیردار نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$1) \phi(z) \Big|_{z=0} = 0 \quad \frac{d\phi(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

$$2) \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} \Big|_{z=l} = 0 \quad \frac{d^3 \phi(z)}{dz^3} \Big|_{z=l} = 0 \quad (\text{الف-}6)$$

فرض می‌شود جواب معادله دوم رابطه الف-۵ که همان شکل مود است به صورت $\phi(z) = ce^{Sz}$ باشد (c و S ثابتاند). این جواب در معادله دوم گذاشته می‌شود.

بنابراین معادله شکل مود با اعمال دو شرط مرزی رابطه الف-۱ در فرمول الف-۶ به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \phi_i(z) &= \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} (\cos \beta_i z - \cosh \beta_i z) \\ &\quad + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z) \end{aligned} \quad (\text{الف-}7)$$

با اعمال دو شرط مرزی دیگر یک دستگاه معادلات بوجود می‌آید. و از این دستگاه، رابطه فرکانسی به صورت زیر خواهد شد.

$$\cos \beta_i l \cosh \beta_i l = -1 \quad (\text{الف-}8)$$

که پارامتر β برای فرکانس i ام به صورت زیر است.

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{الف-}9)$$

باقي می‌ماند، زاویه گردش کوچک است بنابراین فرض زاویه کوچک را می‌توان استفاده نمود. درنهایت معادله حرکت از حداقل نمودن انگرال زمانی تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به دست می‌آید و برای تیزی که تحت نیروی خارجی $F(z,t)$ قرار دارد به صورت رابطه الف-۱ است. (به دلیل پیچیدگی مسئله از اثر نیروی برشی و اینرسی گردشی المان (اثر دینامیک المان) صرفنظر شده است) در این رابطه m جرم بر واحد طول است. w جابه‌جایی عرضی هر نقطه از تیر، E مدول الاستیسیته و $I(z)$ ممان اینرسی تیز است:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = F(z,t) \quad (\text{الف-}1)$$

برای به دست آوردن تغییر شکل تیر ابتدا باید شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی به دست آیند. بدليل اینکه نیروی خارجی در شکل مود و فرکانس طبیعی نقشی ندارد، اثر نیروی خارجی حذف می‌شود. همچنین برای سادگی ممان اینرسی ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین رابطه الف-۱ به صورت زیر خواهد شد.

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\text{الف-}2)$$

برای حل رابطه الف-۲ از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است، در این روش تابع دو متغیره w را به صورت ضرب دو تابع یک متغیره به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$w(z,t) = \phi(z)q(t) \quad (\text{الف-}3)$$

با جایگذاری رابطه الف-۳ در رابطه الف-۲ عملیات ریاضی زیر انجام می‌شود.

$$-\frac{\frac{\partial^2(q(t))}{\partial t^2}}{q(t)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2(\phi(z))}{\partial z^2} \right]}{\phi(z)} \frac{EI}{m} \quad (\text{الف-}4)$$

از آنجایی که هر کدام از دو طرف رابطه الف-۴ بر حسب یک متغیر مستقل (یعنی زمان یا مکان) است، می‌توان بیان

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_0^l m \phi_i^2(z) dz, \quad k_{ii} = \int_0^l \phi_i(z) L(\phi_i(z)) dz \\ m_{ii} \ddot{q}_i(t) + k_{ii} q_i(t) &= \int_0^l F(z, t) \phi_i(z) dz = Q_i(t) \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۵})$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تحلیل مودال معادله را به n معادله غیرکوپل تبدیل نمود که مانند سیستم یک درجه آزادی قابل حل است.

اگر نیروی حرک ارتعاشی $F(t)$ به صورت متمرکز بر تیر اعمال شود و مکانش روی تیر با زمان عوض شود اثر نیرو تنها باید در موقعیت نیرو (به طور مثال $\psi(t)$) باشد و در بقیه جاهای تیر باید صفر شود برای اعمال این شرایط در روابط، نیرو به صورت زیر در روابط ظاهر می‌شود.

$$f(z, t) = F(t) \delta(z - \psi(t)) \quad (\text{الف-۱۶})$$

که δ تابع دلتای دیراک است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \delta(z - \psi(t)) = 0 & z \neq \psi(t) \\ \delta(z - \psi(t)) = 1 & z = \psi(t) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - \psi(t)) \phi(z) dx = \phi(\psi(t)) \quad (\text{الف-۱۷})$$

رابطه ارتعاشات اجباری غیر میرای تیر از روابط الف-۱۵، الف-۱۶ و الف-۱۷ به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \\ \int_0^L F(t) \delta(z - \psi(t)) \phi_i(z) dx &= F(t) \phi_i(\psi(t)) \\ \Rightarrow m_{ii} \ddot{q}_i(t) + k_{ii} q_i(t) &= F(t) \phi_i(\psi(t)) \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۸})$$

از روش انتگرال کانولوشن، پاسخ خصوصی رابطه الف-۱۸ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q_i(t) = \frac{1}{m_{ii} \omega_i} \int_0^t F(\tau) \phi_i(\psi(\tau)) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (\text{الف-۱۹})$$

به دلیل صفر بودن شرایط اولیه، پاسخ عمومی نیز صفر می‌شود و بنابراین از رابطه بالا و رابطه الف-۷ رابطه الف-۲۰ به دست می‌آید.

برای تحلیل تغییرشکل عرضی تیر بر اثر نیروهای ماشینکاری (w) رابطه الف-۱، باید حل شود. رابطه الف-۱ به صورت رابطه الف-۱۰ قابل نوشت است.

$$M(\ddot{w}) + L(w) = F(z, t) \quad (\text{الف-۱۰})$$

M و L عملگرهایی هستند که به صورت روابط الف-۱۱ تعریف می‌شوند [۳۵]:

$$\begin{aligned} M &= b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial z} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots \\ L &= a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial z} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۱})$$

بنابراین M و L به طور خصوصی برای رابطه الف-۱ به صورت روابط الف-۱۲ می‌باشند.

$$\begin{aligned} M &= b_0 = m \\ L &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \quad a_4 = EI \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۲})$$

به دلیل اینکه سیستم دارای بی‌نهایت درجه آزادی است که باید با هم حل شوند از تحلیل مودال استفاده می‌شود. جواب ارتعاشات اجباری با توجه به تحلیل مودال به صورت زیر خواهد شد:

$$w(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) q_j(t) \quad (\text{الف-۱۳})$$

که $\phi_j(z)$ شکل مود و $q_j(t)$ مختصات عمومی سیستم است. پاسخ فوق در معادله دیفرانسیل الف-۱۰ قرار داده می‌شود. سپس $\phi_i(z)$ در طرفین رابطه ضرب می‌شود و بر روی کل محیط انتگرال گرفته می‌شود که در نتیجه رابطه الف-۴ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{q}_j(t) \int_0^l \phi_i(z) M(\phi_j(z)) dz + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \\ \times \int_0^l \phi_i(z) L(\phi_j(z)) dz = \int_0^l F(z, t) \phi_i(z) dz \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۴})$$

با توجه به مبحث تعامد مودها، در صورتیکه $j = i$ باشد انتگرال‌های رابطه الف-۱۴، صفر نمی‌شود بنابراین از روابط الف-۱۲ و الف-۱۴، روابط الف-۱۵ به دست می‌آید.

۹- مراجع

- [1] H. Soleimanimehr, M. J. Nategh , S. Amini, modeling of surface Roughness in Vibration-cutting by artificial neural networks, International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering Vol. 4, 2010, pp. 155-160.
- [2] S Amini, M J Nategh, and H Soleimanimehr, Application of design of experiments for modeling surface roughness in ultrasonic vibration turning, Proc. IMechE, Part B: J. Engineering Manufacture, Vol. 233, 2009, pp. 641-652.
- [3] M. J. Nategh, S. Amini, H. Soleimanimehr, modeling the Force, surface roughness and cutting temperature in ultrasonic vibration-assisted turning of al7075, Advanced Materials Research Vols. 83-86, 2010, pp 315-325.
- [4] S. Amini, H. Soleimanimehr, M.J. Nategh, A. Abudollah and M.H. Sadeghi, FEM Analysis of Ultrasonic-Vibration-Assisted Turning and the Vibratory Tool, Journal of Materials Processing Technology, Vol. 201, 2008, pp 43-47.
- [5] S. Amini, M.J. Nategh, H. Soleimanimehr, "Finite element analysis of ultrasonic cutting in one direction", (Ultrasonic symposium), England, UIA2007.
- [6] H. Soleimanimehr, M. J. Nategh and S. Amini, prediction of machining force and surface roughness in ultrasonic vibration-assisted turning using neural networks, Advanced Materials Research Vols. 83-86, 2010, pp 326-334.
- [7] R. Ramesh, M.A. Mannan, A.N. Poo, Error compensation in machine tools - a review Part I: geometric, cutting-force induced and fixture dependent Errors, International Journal of Machine Tools & Manufacture Vol. 40, 2000, pp 1235-1256.
- [8] Jingxia Yuan, Jun Ni, The real-time error compensation CNC machining systems, Mechatronics 8, 1998, pp 359-380.
- [9] P.G. Benardos, S. Mosialos, G.-C. Vosniakos, Prediction of workpiece elastic deflections under cutting forces in turning,

$$q_i(t) = \frac{F(\tau)}{m_{ii}\omega_i} \times \int_0^t \left(\frac{(\cos \beta l + \cosh \beta l)}{(\sin \beta l - \sinh \beta l)} \right. \\ \times (\cos \beta \psi(\tau) - \cosh \beta \psi(\tau)) + (\sin \beta \psi(\tau) \\ - \sinh \beta \psi(\tau)) \times \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (۲۰)$$

نیز از روابط الف-۷ و الف-۱۵ به صورت زیر خواهد شد.

$$m_{ii} = \int_0^l m \left(\frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} \right) \times (\cos \beta_i z \\ - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z)^2 dz \quad (۲۱)$$

تغییر شکل عرضی تیر (w) با جای گذاری $\phi_j(z)$ (رابطه الف-۷) و $q_i(t)$ (رابطه الف-۱۳) در دست می آید.

۸- پیوست ب: به دست آوردن $\beta_f l$

$\beta_f l$ حدی معرف تعداد مودهایی است که باید در روابط تحلیلی در نظر گرفته شوند. از آنجایی که فرکانس نیروی تحریک باید جزو فرکانس هایی که در روابط تحلیلی می آیند باشد و همچنین از آنجا که افزایش تعداد فرکانس یا مودهای طبیعی که در روابط در نظر گرفته می شوند، حجم محاسبات را شدیدا افزایش می دهند بنابراین در این مقاله با توجه به جنس و شکل و فرکانس تحریک نیرو (۲۰ کیلوهertz) مقداری برای $\beta_f l$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\beta L = \sqrt{\omega^4 \frac{m}{EI} L} \\ = \sqrt{\omega^4 \frac{2823 \times \pi \times 15^2 \times 10^{-6}}{(7.4426 \times 10^{10}) \times (\pi \times 30^4 / 64 \times 10^{-12})}} \times 0.5 \\ = \sqrt{\omega^4 \frac{2823 \times 15^2}{(7.4426 \times 10^4) \times (30^4 / 64)}} \times 0.5 \\ = \sqrt{\omega^4 \frac{63.5175}{9.41954063 \times 10^4}} \times 0.5 \\ = 8.05723299 \times 10^{-2} \times \sqrt{\omega} \\ \beta_f L = 8.05723299 \times 10^{-2} \times \sqrt{20000 \times 2 \times \pi} = 28.55 \quad (۱-۱)$$

- [18] Guo Jianliang, Han Rongdi, "A united model of diametral error in slender bar turning with a follower rest", International Journal of Machine Tools & Manufacture 46, 2006, pp1002–1012.
- [19] C.K. Chen, Y.M. Tsao, A stability analysis of turning a tailstock supported flexible workpiece, International Journal of Machine Tools & Manufacture 46, 2006, pp18–25.
- [20] J. Srinivas, K.RamaKotaiah, A study of bifurcation behavior in oblique turning operation, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49, 2009, pp 1042–1047.
- [21] B. Moetakef-Imani, N.Z.Yussefian, Dynamic simulation of boring process, International Journal of Machine Tools & Manufacture 49, 2009, pp1096–1103.
- [22] Khagendra Gupta, O. Burak Ozdoganlar, Shiv G. Kapoor, Richard E. DeVor, Modeling and Prediction of Hole Profile in Drilling, Part 1: Modeling Drill Dynamics in the Presence of Drill Alignment Errors, journal of manufacturing science and engineering, Vol. 125, pp. 6-13, 2003.
- [23] Jifang Tian, Stanley G. Hutton, Chatter Instability in Milling Systems with Flexible Rotating Spindles-A New Theoretical Approach, Journal of Manufacturing Science and Engineering, , Vol. 123, 2001.
- [24] Sinan Filiz O. Burak Ozdoganlar, Micro end mill Dynamics Including the Actual Fluted Geometry and Setup Errors-Part II: Model Validation and Application, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 130, 2008, pp. 031120-1-13.
- [25] Sinan Filiz O. Burak Ozdoganlar, Micro end mill Dynamics Including the Actual Fluted Geometry and Setup Errors-Part I: Model Development and Numerical Solution,, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 130, 2008, pp. 031119-1-10.
- [26] Yuzhong Cao, Yusuf Altintas, A General Method for the Modeling of Spindle-Bearing Systems, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, 2004, pp. 1089-1104.
- [27] Vincent Gagnol, Belhassen C. Bouzgarrou, Pascal Ray, Christian Barra, Stability-Based Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 22, 2006, pp505–514.
- [10] Anand Raghu, Shreyes N. Melkote, Modeling of Workpiece Location Error Due to Fixture Geometric Error and Fixture-Workpiece Compliance, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 127, 2005, pp. 75-83.
- [11] Liu Zhan Qiang, "Finite difference calculations of the deformations of multi-diameter workpieces during turning", Journal of Materials Processing Technology 98, 2000, pp 310-316.
- [12] John A. Malluck, Shreyes N. Melkote, Modeling of Deformation of Ring Shaped Workpieces Due to Chucking and Cutting Forces, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 126, 2004, pp. 141-147.
- [13] J.R. René Mayer, Anh-Vũ Phan, Guy Cloutier, Prediction of diameter errors in bar turning: a computationally effective model, Applied Mathematical Modelling 24, 2000, pp 943±956.
- [14] A.-V. Phan, L. Baron, J.R.R. Mayer, G. Cloutier, Finite element and experimental studies of diametral errors in cantilever bar turning, Applied Mathematical Modelling 27, 2003, pp221–232.
- [15] L. Carrino, G. Giorleo, W. Polini, U. Prisco, Dimensional errors in longitudinal turning based on the unified generalized mechanics of cutting approach. Part I: Three-dimensional theory, International Journal of Machine Tools & Manufacture 42, 2002, pp 1509–1515.
- [16] L. Carrino, G. Giorleo, W. Polini, U. Prisco, Dimensional errors in longitudinal turning based on the unified generalized mechanics of cutting approach. Part II: Machining process analysis and dimensional error estimate, International Journal of Machine Tools & Manufacture 42, 2002, pp 1517–1525.
- [17] Eyüp Sabri Topal , Can Coğun, A cutting force induced error elimination method for turning operations, Journal of Materials Processing Technology 170, 2005, pp 192–203.

- [32] Chandra Nath, M. Rahman, Effect of machining parameters in ultrasonic vibration cutting, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48, 2008, pp965–974.
- [33] Abbas Pak, Analysis, Design and Manufacture of a High-Power Load-Independent Ultrasonic Transducer, Ph.D thesis, Tarbiat Modares University, July 2008
- [34] S. Rao, vibration of continuous systems, John Wiley & Sons, 2007.
- [35] Matlab R2010b help
- [36] Leonard Meirovitch, fundamentals of vibrations, McGraw-Hill, 2001.
- [37] L.Meirovitch, “Analytical methods in vibrations”, Macmillan company, 1967.
- Spindle Design Optimization, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 129, 2007, pp. 407-415.
- [28] Hongqi Li, Yung C. Shin, Integrated Dynamic Thermo-Mechanical Modeling of High Speed Spindles, Part 2: Solution Procedure and Validations, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 126, 2004, pp. 159-168.
- [29] J. E. Shigley, Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill, 1986.
- [30] M. Xiao, S. Karube, T. Soutome, K. Sato, Analysis of chatter suppression in vibration cutting, International Journal of Machine Tools & Manufacture 42, 2002, pp 1677–1685.
- [31] Chunxiang Maa, E. Shamoto, T. Moriwaki, Yonghong Zhang, Lijiang Wang, Suppression of burrs in turning with ultrasonic elliptical vibration cutting, International Journal of Machine Tools & Manufacture 45 (2005) 1295–1300