

# خطای ماشینکاری ناشی از برگشت فنری قطعه کار در فرایند تراشکاری معمولی و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک

حمید سلیمانی مهر<sup>۱</sup>، محمد جواد ناطق<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، nategh@modares.ac.ir

**چکیده-** برگشت فنری قطعه کار باعث ایجاد خطا در قطعه کار تراشکاری می شود. در این مقاله برگشت فنری قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک و تراشکاری معمولی مدل شده است. نشان داده می شود که قطعه کار در برابر ارتعاشات فرکانس بالا واکنشی شبیه به استاتیک از خود نشان می دهد. این در حالی است که هم از نظر تئوری و هم از نظر تجربی، مقدار برگشت فنری آن نسبت به تراشکاری معمولی کمتر است و بنابراین خطای ناشی از آن نیز کمتر خواهد بود. روشی نیز برای به دست آوردن خطای ناشی از صلب در نظر گرفتن مجموعه اسپیندل در روابط تحلیلی پیشنهاد شد و از آن در تصحیح نتایج استفاده گردید.

**کلیدواژگان:** برگشت فنری، تراشکاری به همراه ارتعاشات آلتراسونیک، تراشکاری معمولی، خطای قطری.

## Machining error due to spring-back of work-piece in conventional and ultrasonic vibration assisted turning

H. Soleimanimehr<sup>1</sup>, M. J. Nategh<sup>2\*</sup>

1- Ph.D. Student, Mech. Eng. Dep., Tarbiat Modares Univ.

2- Assoc. Prof, Mech. Eng. Dep., Tarbiat Modares Univ.

\*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, nategh@modares.ac.ir

**Abstract-** The spring-back of a work-piece during machining operation causes dimensional error of the work-piece. In the present study, the spring-back of work-piece in ultrasonic-vibration assisted turning and conventional turning has been modeled. It is illustrated that the reaction of the work-piece in high frequency vibration cutting is similar to a static behavior, whereas the spring-back in this process is theoretically and experimentally smaller than the conventional cutting leading to smaller error. A method has also been proposed to obtain the errors caused by rigid assumption of the spindle assembly used for correction of the results.

**Keywords:** Ultrasonic Vibration Assisted Turning, Conventional Cutting, Diametrical Error, Spring Back

## ۱- مقدمه

هدف هر فرایند تولیدی، تولید قطعات با کیفیت بالا و هزینه کمتر است. بی‌دقتی در تولید قطعات، ضررهایی را از نظر اقتصادی و رقابت صنعتی به همراه خواهد داشت. از طرفی با ظهور مواد ترد و سخت در صنایع مهمی مانند هوافضا نیاز به ایجاد فرایندهای نوین بیشتر شده است. بنابراین فرایندهایی مانند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک ظهور یافته‌اند. این فرایند از اعمال ارتعاش آلتراسونیک به سر ابزار تراشکاری معمولی ایجاد می‌شود و کاهش نیروهای ماشینکاری، افزایش صافی سطح و دقت ابعادی را به همراه دارد [۶-۱].

یکی از مهمترین عواملی که روی خطای قطعه کار اثر می‌گذارد، الاستیسیته قطعه کار و ابزار بر اثر نیروهای ماشینکاری است. این عامل کمتر مورد بررسی قرار گرفته است زیرا اندازه‌گیری آن نیازمند بکارگیری شیوه‌های جدید اندازه‌گیری و بنابراین هزینه زیاد است [۷-۱۰]. در تحلیل الاستیک و خطای قطری قطعه کار در تراشکاری معمولی فعالیت‌های مختلفی انجام شده است. به‌طور نمونه کیانگ<sup>۱</sup> از روش تفاضل متناهی برای تحلیل قطعه کار چندقطری استفاده نموده است [۱۱]. ملوک<sup>۲</sup> و همکارش با استفاده از المان محدود تغییر شکل قطعه کار نازک را بر اثر نیروهای ماشینکاری و گیره‌بندی بررسی نمودند [۱۲]. میر<sup>۳</sup> و همکارانش ابتدا از طریق المان محدود خطای قطری را تحلیل کردند و همچنین از طریق روش استاتیکی، تحلیلی برای قطعه کار چندقطری انجام دادند [۱۳]، سپس با استفاده از روش المان محدود خطای قطری یک قطعه کار یک سر گیردار را تحلیل نمودند. البته در این کار تغییر شکل برشی را نیز در نظر گرفتند [۱۴]. مدل نیرو مسئله مهمی در ایجاد مدل مناسبی برای خطای قطری است. کارینو<sup>۴</sup> و همکارانش در ابتدا مدل نیرویی مناسبی را که آرمارگو پیشنهاد داده بود، بررسی کردند و سپس یک مدل تغییر شکل قطعه کار با در نظر گرفتن تنش‌های برشی و

خمشی پیشنهاد نمودند [۱۵ و ۱۶]. توپال<sup>۵</sup> و همکارش یک مدل تجربی از خطای قطری به‌دست آوردند [۱۷]. بناردوس<sup>۶</sup> و همکارانش از طریق تئوری دوم کاستیگلیانو و شبکه عصبی خطای قطری را تحلیل نمودند [۹]. جیانلیانگ<sup>۷</sup> و همکارش اثر تکیه‌گاه را بررسی نمودند و نشان دادند که هرچقدر تکیه‌گاه نزدیک‌تر به منطقه برش باشد خطا کمتر است [۱۸]. همانطور که مشخص است در تمامی کارهایی که قبلاً انجام شده از روش‌های مقاومت مصالحی و یا آماری استفاده شده است.

تاکنون تئوری‌های ارتعاشات در ماشینکاری معمولی برای بررسی لرزه و اختلالات و اثرات آن بر قطعه کار در فرایندهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند، مانند تراشکاری [۱۹ و ۲۰] فرایند بورینگ [۲۱]، سوراخکاری [۲۲]، فرزکاری [۲۳]، میکروفرزکاری [۲۴ و ۲۵] (با استفاده از المان محدود در نرم‌افزار انسیس<sup>۸</sup>) و بررسی مجموعه اسپیندل [۲۶-۲۸].

در این مقاله بررسی خطای ماشینکاری در قطعه کار، ناشی از الاستیسیته آن بر اثر نیروهای برشی و شعاعی ماشینکاری در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک از طریق تئوری‌های ارتعاشات مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اینکه از نظر تجربی مقدار تغییر شکل قطعه کار قابل بررسی باشد فرض شده است که قطعه کار تنها به سه نظام متصل است. البته مدل ارتعاشی این مجموعه بدلیل پیچیدگی شکل مودش کمتر در تحقیقات قبلی مورد بررسی قرار گرفته است.

در قسمت تحلیل برای رسیدن به بهترین حالت مقایسه با نتایج تجربی، از نیروهای ماشینکاری به دست آمده از آزمایش تراشکاری معمولی هم در مدل تراشکاری معمولی و هم در مدل تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک استفاده شد.

## ۲- تحلیل حرکت قطعه کار بر اثر نیروی ماشینکاری

در این قسمت تغییر شکل قطعه کار برای دو فرایند تراشکاری معمولی و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک بر اثر نیروهای ماشینکاری به‌دست می‌آید.

5. Topal  
6. Benardos  
7. Jianliang  
8. ANSYS

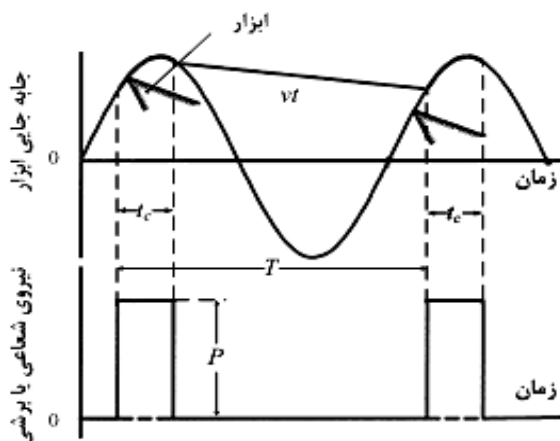
1. Qiang  
2. Malluck  
3. Mayer  
4. Carrino

می‌شود. از آنجایی که مقدار نیرو و شکل آن نقش مهمی را در تغییر شکل قطعه کار دارد در ابتدا نیروی ارتعاشی به اجمال بررسی می‌شود.

### ۱-۲-۲- نیروی ارتعاشی

چندین رابطه نیرویی در جهت برشی با روش آماری [۳] در کارهای قبلی به دست آمده‌اند همچنین از روش شبکه عصبی [۶] برای برآورد نیرو استفاده شده است. این روابط بر پایه متوسط نیرو بودند. ولی در اینجا برای تحلیل تغییر شکل قطعه کار باید نیروی ارتعاشی مدل سازی شود و در روابط تغییر شکل قطعه کار قرار داده شوند.

شکل ۲ رابطه حرکت ابزار با نیروی برشی و شعاعی را در تراشکاری ارتعاشی نشان می‌دهد [۳۰]. در این شکل  $v$  سرعت برشی،  $t_c$  زمان تراش،  $T$  زمان تناوب ارتعاش و  $P$  حداکثر نیروی برش شعاعی یا برشی است.



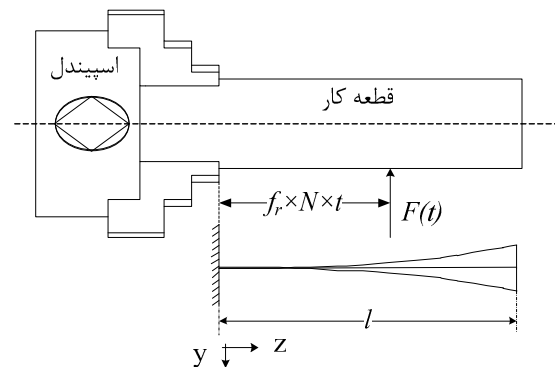
شکل ۲ رابطه حرکت ابزار با نیروی برشی ( $v$  سرعت برشی و  $t$  زمان است) [۳۰]

نیروی تراشکاری (شعاعی یا برشی) به کمک ارتعاشات می‌تواند از طریق به دست آوردن سری فوریه منحنی نیروی ارتعاشی شکل ۲ به صورت زیر بیان گردد [۳۱].

$$F(t) = \frac{t_c}{T} P + \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n \frac{t_c}{T} \pi) \cdot \cos(n \omega t) \quad (2)$$

### ۱-۲- تحلیل الاستیک قطعه کار در تراشکاری معمولی

در این قسمت حداقل شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود یعنی قطعه کار تنها به یک سه نظام بسته شده و از مرگ استفاده نشده و شرایط اولیه صفر است. شکل ۱ تراشکاری یک قطعه کار یک سر گیردار را نشان می‌دهد. در این شکل  $f_r$  پیشروی برحسب  $mm/rev$ ،  $N$  سرعت دورانی قطعه کار برحسب  $rev/min$ ،  $t$  زمان برحسب دقیقه،  $F(t)$  نیروی ماشینکاری وارد بر قطعه کار و  $l$  طول قطعه کار بیرون از سه نظام است. در تراشکاری ارتعاشی نیرو به زمان وابسته است ولی در تراشکاری معمولی فرض می‌شود نیرو با زمان تغییر نمی‌کند بنابراین در شکل ۱،  $F(t) = F$  است.



شکل ۱ اعمال نیروی برش (ارتعاشی و معمولی) بر قطعه کار

با در نظر گرفتن محور به صورت تیر یک سر گیردار تغییر شکل قطعه کار در تراشکاری معمولی قابل استخراج است. و برای قطعه کاری با شکل ۱، به صورت زیر است [۲۹].

$$w(t) = \frac{F(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \quad (1)$$

در این رابطه،  $w$  تغییر شکل قطعه کار بر اثر نیروی ماشینکاری،  $E$  مدول الاستیسیته و  $I$  ممان اینرسی قطعه کار می‌باشد.

### ۲-۲- تحلیل الاستیک قطعه کار در تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک

برای به دست آوردن تغییر شکل قطعه کار در هر نقطه از آن و در هر زمان در این قسمت از تئوری‌های ارتعاشات تیرها استفاده

فرکانس‌های طبیعی قطعه کار نیز از پیوست الف و با استفاده از جدول ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5)$$

$m$  جرم بر واحد طول است. فرض می‌شود نیروی ابزار روی قطعه کار به صورت بار متمرکز متحرک است که با سرعت  $f_r N$  روی قطعه کار حرکت می‌کند. بنابراین با توجه به پیوست الف و رابطه ۲، رابطه تغییر شکل الاستیک قطعه کار تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک بر نیرو نسبت به زمان و مکان به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{w(z, t)}{P} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} \times (\cos \beta_i z \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z) \right) \times \frac{1}{m_{ii} \omega_i} \\ & \times \int_0^t \left( \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} \times (\cos \beta_i f_r N \tau \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i f_r N \tau) + (\sin \beta_i f_r N \tau - \sinh \beta_i f_r N \tau) \right) \\ & \times \left( \frac{t_c}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n \frac{t_c}{T} \pi) \cdot \cos(n \omega \tau) \right) \\ & \times \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \\ & , \\ m_{ii} = & \int_0^l m \left( \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} \times (\cos \beta_i z \right. \\ & \left. - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z) \right)^2 dz \quad (6) \end{aligned}$$

### ۳- آزمایش تجربی

به منظور بررسی تجربی برگشت فنی قطعه کار در تراشکاری معمولی و ارتعاشی، وسایل آزمایشی به صورت شکل ۳ فراهم شد.

$\omega$  سرعت زاویه‌ای ابزار است. در رابطه نیروی ارتعاشی نسبت  $t_c/T$  با تنظیم سرعت برشی کنترل می‌شود. می‌توان ملاحظه نمود که نیروی برشی برشکاری ارتعاشی با کاهش سرعت برشی، کمتر می‌شود. این موضوع نشانگر آن است که  $t_c/T$  کوچکتر شده است. پارامتر  $t_c/T$  باید با توجه به شرایط ماشینکاری تعیین شود. اگر  $v > 2\pi f$  باشد رابطه میان سرعت برشی ( $v$ )، فرکانس ( $f$ )، دامنه ارتعاش ( $a$ ) و زمان‌ها به صورت زیر خواهد بود [۳۰ و ۳۲].

$$\frac{af}{v} = \frac{1 - t_c/T}{2 \sin \pi(t_c/T) \cos \left[ \cos^{-1} \left( -\frac{v}{2\pi f} \right) - \pi t_c/T \right]} \quad (3)$$

برای به دست آوردن  $t_c/T$ ، این رابطه باید به صورت عددی حل شود. در این مقاله برنامه‌ای برای حل آن نوشته شده است.

### ۲-۲-۲- تغییر شکل الاستیک قطعه کار بر اثر نیروی‌های برشی

فرض می‌شود تغییر عمق برش اثری بر ممان اینرسی قطعه کار ندارد بنابراین مطابق پیوست الف رابطه فرکانسی قطعه کار شکل ۱ به صورت زیر خواهد شد.

$$\cos \beta_i l \cosh \beta_i l = -1 \quad (4)$$

ریشه‌های این رابطه مودهای درگیر در محاسبات را مشخص می‌کند. برای به دست آوردن ریشه‌های این رابطه در این مقاله از نرم افزار متلب استفاده شده است. ۱۰ ریشه اول آن به صورت جدول زیر خواهد بود.

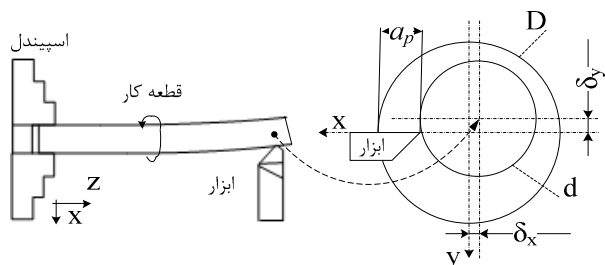
جدول ۱  $\beta_i l$  ده مود ارتعاشی اول قطعه کار

$\beta_1 l$	۱/۸۷۵۱۰۴۰۶۸۷۱۱۹۶
$\beta_2 l$	۴/۶۹۴۰۹۱۱۳۲۹۷۴۱۸
$\beta_3 l$	۷/۸۵۴۷۵۷۴۳۸۲۳۷۶۰
$\beta_4 l$	۱۰/۹۹۵۵۴۰۷۳۴۸۷۵۶
$\beta_5 l$	۱۴/۱۳۷۱۶۸۳۹۱۰۴۶۸
$\beta_6 l$	۱۷/۲۷۸۷۵۹۵۳۲۰۸۸۲
$\beta_7 l$	۲۰/۴۲۰۳۵۲۲۵۱۰۴۱۳
$\beta_8 l$	۲۳/۵۶۱۹۴۴۹۰۱۸۰۶۴
$\beta_9 l$	۲۶/۷۰۳۳۷۵۵۵۵۱۸۳
$\beta_{10} l$	۲۹/۸۴۵۱۳۰۲۰۹۱۰۲۸
...	...

میلی متر، پیشروی ( $mm/rev$ ) ۰/۱، سرعت اسپیندل ۳۰۰ دور بر دقیقه در نظر گرفته شد. به کمک میکرومتر دقیقی، اندازه گیری قطر قطعه کار انجام شد. هر اندازه گیری سه بار تکرار و مقدار میانگین آنها ثبت شد. سه اندازه در فاصله زاویه ای ۱۲۰ درجه اندازه گیری شدند. طول قطعه کار ۶۰۰ میلی متر بود که ۵۰۰ میلی متر آن از اسپیندل بیرون گذاشته شد (شکل ۱). قطر اولیه قطعه کار در آزمایش UAT، ۳۰/۳۶ میلی متر و در آزمایش CT، ۳۰/۱۶ میلی متر بود. در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک، فرکانس ارتعاش ( $f$ ) ۲۰ کیلوهرتز و دامنه ارتعاش ( $a$ ) ۸ میکرون تنظیم شد.

با بررسی نیروهای ماشینکاری در مقاطع مختلف قطعه کار ماشینکاری شده، دیده شد که جهت نیروی برشی تا نزدیکی فاصله ۱۷۰ میلی متری از اسپیندل، خلاف جهت مورد انتظار است و از نظر تجربی این معنی را می دهد که قطعه کار ابزار را به سمت خود کشیده است. از طرفی در این قسمت ها اندازه گیری قطر به دلیل صافی سطح نامناسب، با مشکل مواجه است. این پدیده ها می تواند ناشی از چتر و خطاهای دیگر باشد. از طرفی نقاط اندازه گیری و مورد بررسی روی قطعه کار برای دو حالت تراشکاری معمولی و به کمک آلتراسونیک می بایست در یک مکان (از نظر فاصله تا تکیه گاه) باشند تا بتوان آنها را با یکدیگر مقایسه نمود. بنابراین ۱۳ مقطع با فاصله ۱۰ میلی متر از یکدیگر در طول قطعه کار (از فاصله ۱۷۰ میلی متر تا ۲۹۰ میلی متری اسپیندل) در نظر گرفته شد.

شکل ۵ برگشت فنی قطعه کار را بر اثر نیروی ماشینکاری نشان می دهد. در این شکل  $\delta_x$  و  $\delta_y$  به ترتیب تغییر شکل قطعه کار در جهت برشی و شعاعی هستند.  $D$  قطر اولیه قطعه کار و  $a_p$  عمق نامی برش است.



شکل ۵ برگشت فنی قطعه کار در فرایند تراشکاری



شکل ۳ تجهیزات آزمایشگاهی

ارتعاش از طریق یک ژنراتور و یک ترانسدیوسر ایجاد شد و به ابزار اعمال گردید. و از طراحی هورن و ابزار گیر کارهای قبلی [۴] استفاده شد (شکل ۴).



شکل ۴ مجموعه ابزار گیر سیستم ارتعاشی

برای اندازه گیری نیرو از دینامومتر شرکت کیستلر و برای تراشیدن قطعه کار استوانه ای از جنس AL7075-T6 (جدول ۲) از تراش CNC مدل TME40 استفاده گردید.

جدول ۲ خواص قطعه کار آلومینیومی ۷۰۷۵ [۳۳]

ضریب پواسون	دانسیته ( $kg/m^3$ )	مدول الاستیسیته ( $Pa$ )
۰/۳۱۲۴۴	۲۸۲۳	$7.14 \times 10^{10}$

از ابزار Sandvik VBMT 160404 با زاویه آزاد ۵ درجه، زاویه براده ۴ درجه و شعاع لبه ابزار ۰/۰۳ میلی متر (که با میکروسکوپ اندازه گیری شد) استفاده شد. عمق برش یک

$$a'_p(z) = \frac{2a_p - \Delta D(z)}{2} \quad (10)$$

با جای گذاری تغییرشکل های الاستیک (رابطه ۱) در دو جهت شعاعی و برشی در رابطه ۹ رابطه تحلیلی-هندسی خطای قطری در تراشکاری معمولی به صورت زیر خواهد شد.

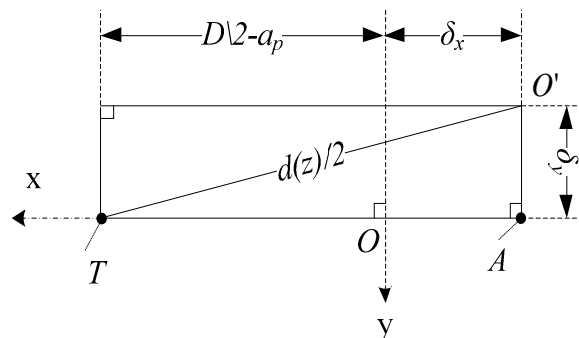
$$\Delta D(z) = 2 \left\{ \left[ \frac{D}{2} - a_p + \frac{F_x(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \right]^2 + \left( \frac{F_y(f_r \times N \times t)^3}{3EI} \right)^2 \right\}^{0.5} - D + 2a_p \quad (11)$$

که در این رابطه  $F_y$  نیروی برش در جهت سرعت برشی و  $F_x$  نیروی برش در جهت شعاع می باشد. تابع زیر رادیکال یک تابع چندجمله ای درجه شش خواهد بود که با اعمال رادیکال به صورت یک تابع درجه سه در خواهد آمد.

در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک همان گونه که بیان شد، هر کدام از مودهای طبیعی، سهمی در مقدار تغییرشکل قطعه کار ایفا می کنند. ولی مهمترین و اصلی ترین مود در تراشکاری ارتعاشی مود اصلی است که انرژی بیشتری دارد و معمولاً شکل آن مشابه منحنی تغییرشکل استاتیک قطعه کار می باشد [۳۴] و در اکثر روش های تقریب فرکانس طبیعی مثل ریلی به عنوان شکل مود اول مدنظر قرار می گیرد. بنابراین می توان بیان نمود که تابع خطای قطری در تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک مشابه مطالبی که در تراشکاری معمولی بیان شد با تقریب بسیار خوبی از نظر تحلیلی به صورت یک تابع درجه سه خواهد بود.

شکل های ۷ و ۸، به ترتیب نتایج خطای قطری به دست آمده از آزمایش را نسبت به فاصله از اسپیندل، در دو فرایند CT و UAT نشان می دهد. در این شکل ها، یک تابع چندجمله ای درجه سه بر نتایج آزمایش برازش شده است.

در صورتی که بر منطقه برش در شکل ۵ تمرکز شود شکل ۶ به دست خواهد آمد.



شکل ۶ شکل هندسی منطقه برش

که  $T$  نقطه ای است که ابزار عمل برش را انجام می دهد.  $O$  و  $O'$  به ترتیب مرکز قطعه کار قبل و بعد از تغییرشکل آن است. از قضیه فیثاغورس رابطه زیر به دست می آید.

$$TO'^2 = AT^2 + AO'^2 \quad (7)$$

بنابراین قطر واقعی قطعه کار پس از ماشینکاری به صورت زیر خواهد شد.

$$d(z) = 2 \times TO' = 2 \sqrt{\left[ \frac{D}{2} - a_p + \delta_x(z) \right]^2 + \delta_y^2(z)} \quad (8)$$

خطای قطری از اختلاف قطر واقعی قطعه کار و قطر نامی به دست می آید.

$$\Delta D(z) = d(z) - (D - 2a_p) = 2 \sqrt{\left[ \frac{D}{2} - a_p + \delta_x(z) \right]^2 + \delta_y^2(z)} - D + 2a_p \quad (9)$$

عمق واقعی ماشینکاری ( $a'_p(z)$ ) نیز از اختلاف عمق نامی و خطای قطری با رابطه زیر به دست می آید.

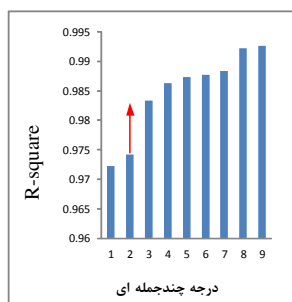
به صورت رابطه ۱۲ و برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک به صورت رابطه ۱۳ خواهد بود.

$$\Delta D = 7 \times 10^{-09} \times z^3 + 1 \times 10^{-06} \times z^2 + 0.0009 \times z + 0.1775 \quad (12)$$

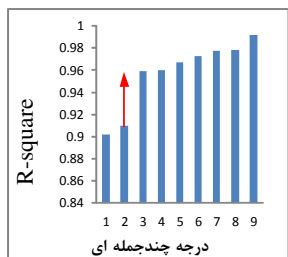
$$\Delta D = 7 \times 10^{-10} \times z^3 + 3 \times 10^{-06} \times z^2 + 0.0007 \times z + 0.1005 \quad (13)$$

با توجه به نتایج حاصل از تحلیل، به نظر رسید که تابع خطای قطری به صورت یک تابع چند جمله‌ای درجه سه باشد برای بررسی بیشتر این مطلب با استفاده از نرم افزار متلب توابع چند جمله‌ای تا مرتبه نه بر نقاط به دست آمده از آزمایش برازش شدند و پارامتر R-square برای هر منحنی به دست آمد [۳۵].

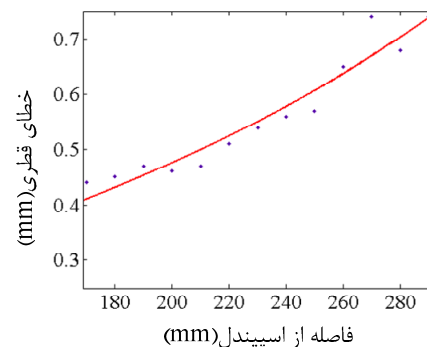
شکل‌های ۹ و ۱۰ این پارامتر را نسبت به درجه تابع چند جمله‌ای به ترتیب برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک و تراشکاری معمولی نشان می‌دهند.



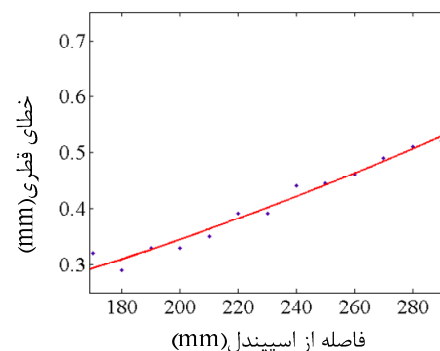
شکل ۹ مقدار  $R$ -square فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک نسبت به درجه تابع چندجمله‌ای



شکل ۱۰ مقدار  $R$ -square فرایند تراشکاری معمولی نسبت به درجه تابع چندجمله‌ای



شکل ۷ نتایج تجربی خطای قطری نسبت به فاصله از اسپیندل در فرایند CT



شکل ۸ نتایج تجربی خطای قطری نسبت به فاصله از اسپیندل در فرایند UAT

همانطور که از شکل‌ها مشخص است با نزدیک شدن به اسپیندل خطای قطری در هر دو فرایند کاهش می‌یابد و همچنین ارتعاشات آلتراسونیک موجب کاهش خطای قطری شده است.

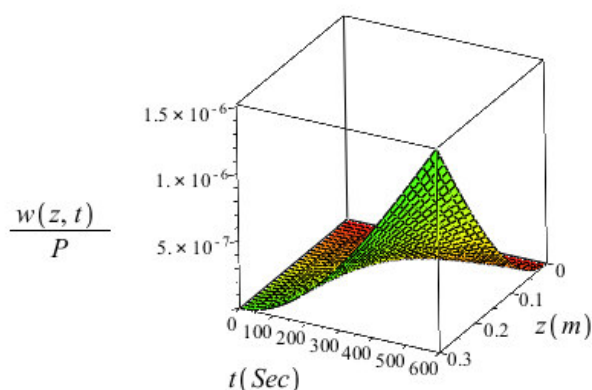
در برازش نمودن تابع چند نکته فیزیکی را باید در نظر گرفت: اول اینکه مشتق اول منحنی برازش شده تا نقطه صفر (در مکان اسپیندل) علامتش تغییر نکند، زیرا روند تغییر شکل قطعه کار از سطح آزادش تا اسپیندل از نظر فیزیکی تغییر نخواهد کرد. دوم اینکه مشتق دوم تابع به دست آمده در طول منحنی تغییر علامت ندهد زیرا باز از نظر فیزیکی، نقطه عطفی در تغییر شکل قطعه کار ایزوتروپیک که یک بار متمرکز بر آن قرار دارد وجود ندارد. تابع درجه سه حاصل از برازش کردن نتایج تجربی به کمک نرم افزار متلب برای تراشکاری معمولی

همچنین با افزایش شماره مودها، تاثیر آنها بر جواب مسأله کم خواهد شد. پارامتر  $\beta_f l$  برای فرکانس ارتعاش ابزار یعنی ۲۰ کیلوهرتز ( $f = 20\text{kHz}$ ) و شرایط آزمایش انجام شده (مدول الاستیسیته و ممان اینرسی قطعه کار و جرم بر واحد طول) برابر  $\beta_f l = 28.55$  خواهد شد (روند محاسبات در پیوست ب آمده است).

مود دهم جدول ۱ از مقدار  $\beta_f l = 28.55$  بیشتر است و بنابراین همین ده مود جدول ۱ در انجام تحلیل مدنظر قرار می گیرد.

با حل عددی رابطه ۳ با استفاده از روش نیوتن و به کمک نرم افزار متلب، مقدار  $t_c/T$  برای شرایط آزمایش انجام شده (دامنه ۸ میکرون و فرکانس  $f = 20\text{kHz}$ )، برابر با  $0.455594326476624$  خواهد شد.

برنامه ای در نرم افزار میپل<sup>۱</sup> نوشته شد و رابطه تغییر شکل قطعه کار بر حداکثر نیرو نسبت به زمان و مکان برای فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک (رابطه ۶) به صورت شکل ۱۱ رسم گردید.



شکل ۱۱ رابطه تغییر شکل قطعه کار بر نیروی برش حداکثر  $(w(z, t)/P)$  نسبت به زمان و مکان

همچنین رابطه تغییر شکل قطعه کار بر نیروی برشکاری نسبت به زمان برای فرایند تراشکاری معمولی (رابطه ۱) به صورت شکل ۱۲ رسم شد.

همان گونه که از نمودارها مشخص است می توان بیان داشت که با بیشتر شدن درجه تابع چندجمله ای، منحنی بهتری به دست می آید که البته قابل پیش بینی نیز بود. از منحنی ها این نکته را نیز می توان یافت که از تابع درجه ۳ به بعد تغییرات نسبتاً کمی در پارامترهای حاضر اتفاق می افتد در صورتیکه از تابع درجه ۲ به ۳ یک تغییر ناگهانی اتفاق افتاده است. بنابراین با توجه به اینکه خطاهای زیادی هم در آزمایش های تجربی و هم در فرمول های تحلیلی (به دلیل اعمال فرض های زیاد) وجود دارد بنابراین به نظر می رسد که تابع درجه سه حاصل از نتایج تجربی قابل مقایسه تر از بقیه توابع با نتایج تحلیلی خواهد بود.

از طریق برونیابی روابط ۱۲ و ۱۳، مقدار خطای قطری در مکان اسپیندل به دست می آید و این مقادیر، برای تراشکاری معمولی (رابطه ۱۲)،  $0.11775$  و برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک (رابطه ۱۳)،  $0.1005$  میلی متر می باشد. این مقادیر برای جبران خطا در قطعات دیگر و خطای ناشی از صلب در نظر گرفتن مجموعه ابزار، ماشین و اسپیندل در تحلیل مناسب خواهند بود.

## ۴-مقایسه تحلیل برگشت فنی قطعه کار در دو فرایند $UAT$ و $CT$

تغییر شکل قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک از طریق رابطه ۶ و با توجه به شکل و جنس قطعه کار، فرکانس های طبیعی و شکل مودها به دست می آید. آخرین فرکانس طبیعی قطعه کار که در روابط مدنظر قرار می گیرد، باید بزرگ تر از فرکانس ارتعاش ابزار باشد. این امر به این دلیل است که اگر فرکانس ارتعاش ابزار بزرگتر از تمامی فرکانس های مودهای طبیعی تحلیل باشد دیگر نمی شود انتظار داشت که مود ارتعاشی قطعه کار با فرکانسی معادل فرکانس ارتعاش ابزار تحریک شود و روابط تحلیلی، خطای زیادی خواهد داشت. از طرفی اگر تعداد مودهای زیادی در نظر گرفته شود، روابط محاسباتی چندین برابر می شود که آن موقع دیگر نمی توان با کامپیوترهای نیمه قوی نیز مسأله حل نمود.



نیروهایی که از آزمایش تجربی در همان مقطع قطعه کار به دست آمده، باشد.

• همچنین از آنجایی که هدف این مقاله بررسی تفاوت ماهیت ارتعاشی بودن ابزار و غیرارتعاشی بودن آن است بایستی مقدار حداکثر نیرو در دو حالت تراشکاری معمولی و به کمک آلتراسونیک یکسان باشد.

بنابراین می توان اینگونه برداشت نمود که برای اینکه هر دو نکته ارضا شود باید به جای  $P$  و  $F$  در رابطه تغییر شکل الاستیک تراشکاری با آلتراسونیک (رابطه ۶) و تراشکاری معمولی (رابطه ۱)، نیروهای به دست آمده از آزمایش تراشکاری معمولی را گذاشت. از آنجایی که این نیروها در هر مقطعی از قطعه کار متفاوتند بنابراین تغییر شکل های الاستیک در ۱۳ مقطع آزمایش تجربی با در نظر گرفتن نیروهای هر مقطع به دست آمد.

اگر  $F_{CExp}$  نیروی برش تراشکاری معمولی در جهت سرعت برشی به دست آمده از آزمایش و  $F_{RExp}$  نیروی شعاعی تراشکاری معمولی به دست آمده از آزمایش باشد، با استفاده از روابط ۱۴ تغییر شکل های الاستیک قطعه کار در دو حالت تراشکاری معمولی و به همراه آلتراسونیک و در دو جهت شعاعی و برشی به دست می آیند.  $w(z)/F$  و  $w(z,t)/P$  به ترتیب از روابط ۱ و ۶ در هر مقطعی از قطعه کار به دست می آیند.

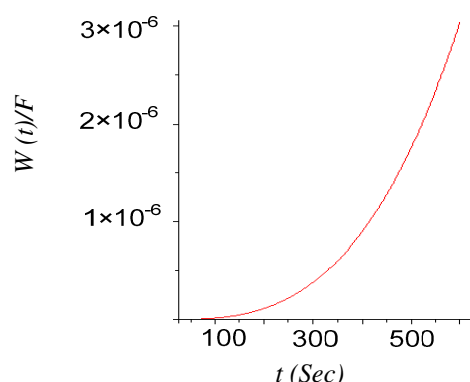
$$\delta_{xCT} = \left(\frac{w(z)}{F}\right) \times F_{RExp}$$

$$\delta_{yCT} = \left(\frac{w(z)}{F}\right) \times F_{CExp}$$

$$\delta_{xUAT} = \left(\frac{w(z,t)}{P}\right) \times F_{RExp}$$

$$\delta_{yUAT} = \left(\frac{w(z,t)}{P}\right) \times F_{CExp} \quad (14)$$

خطای قطری با جایگذاری تغییر شکل های الاستیک قطعه کار در دو جهت شعاعی و برشی (روابط ۱۴) در رابطه ۹ به دست می آید و نتایج آن در جدول ۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۲ رابطه تغییر شکل قطعه کار بر نیروی برشکاری ( $w(t)/F$ ) نسبت به زمان

از آنجایی که نیروی ماکزیمم تراشکاری با آلتراسونیک ( $P$ ) تقریباً برابر نیروی تراشکاری معمولی ( $F$ ) است بنابراین با مقایسه شکل های ۱۱ و ۱۲ می توان نتیجه گرفت که مقدار تغییر شکل الاستیک قطعه کار ( $w$ ) در تراشکاری معمولی تقریباً دو برابر تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک می باشد ولی روند تغییر دو منحنی تقریباً مانند یکدیگر است.

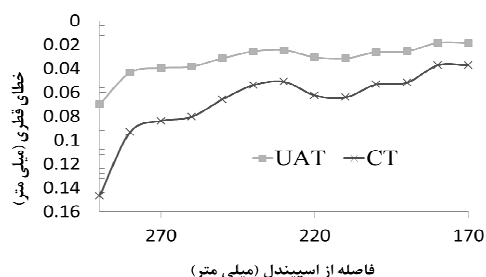
## ۵- مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی

برای مقایسه نتایج حاصل از آزمایش تجربی و تحلیل در این مقاله از خطای قطری استفاده شده است.

### ۵-۱- به دست آوردن خطای قطری از روابط تحلیلی و مقایسه دوفراپند $CT$ و $UAT$

خطای قطری در تحلیل با به دست آوردن تغییر شکل الاستیک قطعه کار در جهت های برشی و شعاعی به دست می آید. برای به دست آوردن برگشت فتری قطعه کار نیاز به اعمال نیروی برش در روابط است در این جا دو نکته را بایستی در نظر گرفت:

• برای اینکه امکان مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی باشد باید مقدار نیروی اعمالی به قطعه در روابط تحلیلی همانند



شکل ۱۳ خطای قطری به دست آمده از تحلیل نسبت به فاصله از اسپیندل

همان گونه که از شکل مشخص است از نظر تحلیلی نیز خطای قطری تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک کمتر از تراشکاری معمولی است.

## ۵-۲- مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی با در نظر گرفتن

### خطای قطری

برای مقایسه نتایج تجربی و تحلیلی از دو پارامتر قطر نهایی قطعه کار (رابطه ۸) و عمق واقعی برش (رابطه ۱۰) استفاده می شود. جدول ۴ مقدار درصد خطای حل تحلیلی را نسبت به تجربی با در نظر گرفتن قطر نهایی قطعه کار ( $d(z)$ ) نشان می دهد. جدول ۵ این مقدار را با در نظر گرفتن عمق واقعی برش ( $d'_p(z)$ ) نشان می دهد.

جدول ۴ مقایسه حل تحلیلی و تجربی با در نظر گرفتن قطر نهایی قطعه کار

فاصله از اسپیندل	تحلیل		آزمایش تجربی		درصد خطا	
	$d(z)UAT(mm)$	$d(z)CT(mm)$	$d(z)UAT(mm)$	$d(z)CT(mm)$	UAT	CT
۰/۲۹	۲۸/۵۳۰۵۴۳۶	۲۸/۴۸۴۲۸۸۲۴	۲۸/۸۸	۲۸/۹	۱/۲۱۰۰۲۹۰۸۶	۱/۴۳۸۴۴۸۹۹۷
۰/۲۸	۲۸/۵۰۳۸۲۸۳۲	۲۸/۴۳۰۷۳۱۱	۲۸/۸۷	۲۸/۸۴	۱/۲۶۸۳۴۶۶۵۷	۱/۴۱۹۱۰۱۵۹۵
۰/۲۷	۲۸/۴۹۹۸۷۶۸۸	۲۸/۴۲۱۳۷۷۴۴	۲۸/۸۵	۲۸/۹	۱/۲۱۳۵۹۸۳۳۶	۱/۶۵۶۱۳۳۴۲۶
۰/۲۶	۲۸/۴۹۸۸۰۸۲۶	۲۸/۴۱۷۹۱۷۸	۲۸/۸۲	۲۸/۸۱	۱/۱۱۴۷۵۱۵۶	۱/۳۶۰۹۲۳۹۸۵
۰/۲۵	۲۸/۴۹۱۸۰۴۰۲	۲۸/۴۰۳۲۶۸۴۴	۲۸/۸۰۵	۲۸/۷۳	۱/۰۸۷۲۹۷۲۷۵	۱/۱۳۷۲۴۸۷۳
۰/۲۴	۲۸/۴۸۶۱۲۹۵۲	۲۸/۳۹۱۴۹۴۱۶	۲۸/۸	۲۸/۷۲	۱/۰۸۹۸۲۸۰۵۶	۱/۱۴۳۸۲۵۶۳
۰/۲۳	۲۸/۴۸۵۰۴۸۵۲	۲۸/۳۸۸۵۳۳۳	۲۸/۷۵	۲۸/۷	۰/۹۲۱۵۷۰۳۶۵	۱/۰۸۵۲۴۹۸۲۶
۰/۲۲	۲۸/۴۹۰۸۸۱۹۴	۲۸/۳۹۹۹۱۲۶۶	۲۸/۷۵	۲۸/۶۷	۰/۹۰۱۲۸۰۲۰۹	۰/۹۴۲۰۵۵۵۹۸
۰/۲۱	۲۸/۴۹۱۸۵۳۸۶	۲۸/۴۰۱۵۹۳۴۸	۲۸/۷۱	۲۸/۶۳	۰/۷۵۹۸۲۶۳۲۲	۰/۷۹۷۷۸۷۳۵۶
۰/۲	۲۸/۴۸۶۰۶۷۶	۲۸/۳۹۰۷۷۰۵۴	۲۸/۶۹	۲۸/۶۲	۰/۷۰۸۹۳۴۲۶۳	۰/۸۰۰۹۴۱۵۰۹
۰/۱۹	۲۸/۴۸۵۹۸۰۹۲	۲۸/۳۸۹۲۳۹۵۶	۲۸/۶۹	۲۸/۶۳	۰/۷۱۱۱۱۵۶۵	۰/۸۴۰۹۳۷۶۱۸
۰/۱۸	۲۸/۴۷۸۸۴۹۹	۲۸/۳۷۴۷۲۶۴۸	۲۸/۶۵	۲۸/۶۱	۰/۵۹۷۳۸۲۵۴۸	۰/۸۲۲۳۴۷۱۵۱
۰/۱۷	۲۸/۴۷۸۹۸۵۱۸	۲۸/۳۷۴۷۶۳۲۸	۲۸/۶۸	۲۸/۶	۰/۷۰۰۸۸۸۴۹۴	۰/۷۸۷۵۴۰۹۷۹

جدول ۳ خطاهای قطری حاصل از تحلیل

Z(m)	$\Delta DUAT(mm)$	$\Delta DCT(mm)$
۰/۲۹	۰/۰۷۰۰۴۳۶	۰/۱۴۶۷۸۸
۰/۲۸	۰/۰۴۳۲۸۳۲	۰/۰۹۳۲۳۱
۰/۲۷	۰/۰۳۹۳۷۶۸۸	۰/۰۸۳۸۷۷
۰/۲۶	۰/۰۳۸۳۰۸۲۶	۰/۰۸۰۴۱۸
۰/۲۵	۰/۰۳۱۳۰۴۰۲	۰/۰۶۵۷۶۸
۰/۲۴	۰/۰۲۵۶۲۹۵۲	۰/۰۵۳۹۹۴
۰/۲۳	۰/۰۲۴۵۴۸۵۲	۰/۰۵۱۰۳۳
۰/۲۲	۰/۰۳۰۳۸۱۹۴	۰/۰۶۲۴۱۳
۰/۲۱	۰/۰۳۱۳۵۳۸۶	۰/۰۶۴۰۹۳
۰/۲	۰/۰۲۶۱۰۶۷۶	۰/۰۵۳۲۷۱
۰/۱۹	۰/۰۲۵۴۸۰۹۲	۰/۰۵۱۷۴
۰/۱۸	۰/۰۱۸۳۴۹۹	۰/۰۳۷۲۲۶
۰/۱۷	۰/۰۱۸۴۸۵۱۸	۰/۰۳۷۲۶۳

مقادیر به دست آمده از برونمایی توابع برآزش شده منحنی تجربی خطای قطری (تراشکاری معمولی، ۰/۱۷۷۵ و تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک، ۰/۱۰۰۵ میلی متر) به مقادیر به دست آمده از تحلیل اضافه شدند تا جبران خطاهای ناشی از فرض صلب گرفتن ابزار و اسپیندل شود. نتایج حاصل برای دو فرایند UAT و CT، نسبت به فاصله از اسپیندل در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

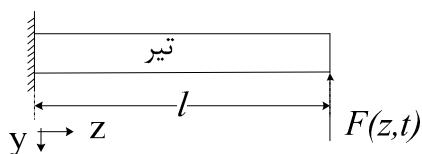
جدول ۵ مقایسه حل تحلیلی و تجربی با در نظر گرفتن عمق واقعی برش

فاصله از اسپیندل Z(m)	تحلیل		آزمایش تجربی		درصد خطا	
	$a'_p(z)_{UAT}(mm)$	$a'_p(z)_{CT}(mm)$	$a'_p(z)_{UAT}(mm)$	$a'_p(z)_{CT}(mm)$	UAT	CT
۰/۲۹	۰/۹۱۴۷۲۸۲	۰/۸۳۷۸۵۵۸۸	۰/۷۴	۰/۶۳	۱۹/۱۰۱۶۵۲۲۷	۲۴/۸۰۸۰۷۰۸۱
۰/۲۸	۰/۹۲۸۰۸۵۸۴	۰/۸۶۴۶۳۴۴۵	۰/۷۴۵	۰/۶۶	۱۹/۷۲۷۲۵۲۸۲	۲۳/۶۶۷۱۶۳۶۲
۰/۲۷	۰/۹۳۰۰۶۱۵۶	۰/۸۶۹۳۱۱۲۸	۰/۷۵۵	۰/۶۳	۱۸/۸۲۵۷۷۷۲	۲۷/۵۲۸۸۳۶۳۹
۰/۲۶	۰/۹۳۰۵۹۵۸۷	۰/۸۷۱۰۴۱۱	۰/۷۷	۰/۶۷۵	۱۷/۲۵۷۳۱۶	۲۲/۵۰۶۵۲۶۹۶
۰/۲۵	۰/۹۳۴۰۹۷۹۹	۰/۸۷۸۳۶۵۷۸	۰/۷۷۷۵	۰/۷۱۵	۱۶/۷۶۴۶۲۱۲۴	۱۸/۵۹۸۸۳۲۴۸
۰/۲۴	۰/۹۳۶۹۳۵۲۴	۰/۸۸۴۲۵۲۹۲	۰/۷۸	۰/۷۲	۱۶/۷۴۹۸۴۹۲۲	۱۸/۵۷۵۳۳۲۵
۰/۲۳	۰/۹۳۷۴۷۵۷۴	۰/۸۸۵۷۳۳۳۵	۰/۸۰۵	۰/۷۳	۱۴/۱۳۱۱۱۱۲۸	۱۷/۵۸۲۴۱۹۱۳
۰/۲۲	۰/۹۳۴۵۵۹۰۳	۰/۸۸۰۰۴۳۶۷	۰/۸۰۵	۰/۷۴۵	۱۳/۸۶۳۱۱۸۹۵	۱۵/۳۴۵۱۱۰۰۹
۰/۲۱	۰/۹۳۴۰۷۳۰۷	۰/۸۷۹۲۰۳۲۶	۰/۸۲۵	۰/۷۶۵	۱۱/۶۷۷۱۴۵۳۴	۱۲/۹۸۹۴۰۳۶۱
۰/۲	۰/۹۳۶۶۹۶۶۲	۰/۸۸۴۶۱۴۷۳	۰/۸۳۵	۰/۷۷	۱۰/۸۵۶۹۴۳۲	۱۲/۹۵۶۴۵۷۳۳
۰/۱۹	۰/۹۳۷۰۰۹۵۴	۰/۸۸۵۳۸۰۲۲	۰/۸۳۵	۰/۷۶۵	۱۰/۸۸۶۷۱۳۰۶	۱۳/۵۹۶۴۳۳۴
۰/۱۸	۰/۹۴۰۵۷۵۰۵	۰/۸۹۲۶۳۶۷۶	۰/۸۵۵	۰/۷۷۵	۹/۰۹۸۱۶۲۸۷۴	۱۳/۱۷۸۵۶۹۹۷
۰/۱۷	۰/۹۴۰۵۰۷۴۱	۰/۸۹۲۶۱۸۳۶	۰/۸۴	۰/۷۸	۱۰/۶۸۸۶۵۰۹۱	۱۲/۶۱۶۶۳۰۴۷

## ۸- پیوست

## ۸-۱- پیوست الف: به دست آوردن رابطه ارتعاشی تیر یک سر گیردار [۳۷، ۳۶، ۳۴]

در این قسمت ارتعاشات تیر یک سر گیردار نشان داده شده در شکل الف-۱ بررسی می شود.

شکل الف-۱ تغییر شکل عرضی تیر بر اثر نیروی خارجی  $F(z, t)$ 

برای به دست آوردن تغییر شکل عرضی تیر در هر نقطه از آن و در هر زمان در این قسمت از روش هامیلتون استفاده می شود. در این روش، یک المان از قطعه کار جدا می شود و تغییر شکل در آن بررسی می گردد و سپس در کل طول قطعه کار از آن انتگرال گرفته می شود و یا تعمیم داده می شود. برای اینکه از پیچیدگی مسأله در به دست آوردن رابطه حرکت تیر کاهش داده شود موارد زیر فرض می شود: یک بعد (جهت محوری) به روشنی بزرگتر از دوتای دیگر است، ماده الاستیک خطی (هوک) است، از اثر پواسون چشم پوشی می شود، سطح مقطع متقارن است بنابراین محورهای خنثی و مرکزی منطبق بر هم هستند، صفحات عمود به محور خنثی بعد از تغییر شکل عمود

همان گونه که از جداول مشخص است اختلاف نتایج تحلیل و تجربی کم است و تقریباً می توان بیان نمود که با نزدیک شدن به اسپیندل این خطا کمتر نیز می شود و این نشانگر این مطلب است که این حل تحلیلی برای بررسی برگشت فتری مناسب است.

## ۶- نتیجه گیری

تحلیل ارتعاشی قطعه کار یک سر گیردار که به دلیل شکل مود پیچیده آن تاکنون کمتر مورد بررسی قرار گرفته بود، برای تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک انجام شد و مدل برگشت فتری قطعه کار در این فرایند به دست آمد. روشی ارائه شد تا از خطای قطری برای صحت سنجی و مقایسه نتایج تحلیل و آزمایش استفاده شود. نشان داده شد که ارتعاشات فرکانس بالای قطعه کار هم از نظر تئوری و هم تجربی موجب کاهش برگشت فتری در قطعه کار ماشینکاری شده می شود. همچنین نشان داده شد که تغییر شکل الاستیک قطعه کار در فرایند تراشکاری به کمک ارتعاشات آلتراسونیک یک روند استاتیکی دارد. روش جدیدی برای بررسی خطاهای روش تحلیلی بر اثر صلب فرض نمودن مجموعه ماشین، ابزار و اسپیندل و اعمال آنها در نتایج تحلیل معرفی شد.

## ۷- تقدیر و تشکر

از آقای مهندس صابر عزیزی، آقای مهندس بابک غلامزاده و آقای مهندس مرتضی شنکایی برای کمک های شایان در روابط تحلیلی و آزمایش های تجربی کمال قدردانی را دارم.

نمود که هنگامی این شرایط برقرار است که دو طرف رابطه برابر یک مقدار ثابت  $\lambda$  باشد. از طرفی این ثابت باید منفی ( $-\lambda = -\omega^2$ ) باشد. بنابراین تابع دو متغیره  $w$  به صورت زیر تبدیل به دو رابطه یک متغیره می شود.

$$\begin{aligned} ۱) \quad & \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \omega^2 q = 0 \\ ۲) \quad & \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \beta^4 \phi = 0, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (\text{الف-۵}) \end{aligned}$$

که رابطه دومی، رابطه شکل مود و  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه است.  $\beta$  نیز علامتی است که برای سادگی در روند محاسبات آورده شده است. شرایط مرزی برای تیر یک سر گیردار نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} ۱) \quad & \phi(z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\phi(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0 \\ ۲) \quad & \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{d^3 \phi(z)}{dz^3} \Big|_{z=l} = 0 \quad (\text{الف-۶}) \end{aligned}$$

فرض می شود جواب معادله دوم رابطه الف-۵ که همان شکل مود است به صورت  $\phi(z) = ce^{S_z}$  باشد ( $c$  و  $S$  ثابت اند). این جواب در معادله دوم گذاشته می شود.

بنابراین معادله شکل مود با اعمال دو شرط مرزی رابطه الف-۱ در فرمول الف-۶ به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \phi_i(z) = & \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} (\cos \beta_i z - \cosh \beta_i z) \\ & + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z) \quad (\text{الف-۷}) \end{aligned}$$

با اعمال دو شرط مرزی دیگر یک دستگاه معادلات بوجود می آید. و از این دستگاه، رابطه فرکانسی به صورت زیر خواهد شد.

$$\cos \beta_i l \cosh \beta_i l = -1 \quad (\text{الف-۸})$$

که پارامتر  $\beta$  برای فرکانس  $i$  ام به صورت زیر است.

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{الف-۹})$$

باقی می ماند، زاویه گردش کوچک است بنابراین فرض زاویه کوچک را می توان استفاده نمود.

در نهایت معادله حرکت از حداقل نمودن انتگرال زمانی تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به دست می آید و برای تیری که تحت نیروی خارجی  $F(z, t)$  قرار دارد به صورت رابطه الف-۱ است. (به دلیل پیچیدگی مسأله از اثر نیروی برشی و اینرسی گردشی المان (اثر دینامیک المان) صرف نظر شده است) در این رابطه  $m$  جرم بر واحد طول است.  $w$  جابه جایی عرضی هر نقطه از تیر،  $E$  مدول الاستیسیته و  $I(z)$  ممان اینرسی تیر است:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = F(z, t) \quad (\text{الف-۱})$$

برای به دست آوردن تغییر شکل تیر ابتدا باید شکل مودها و فرکانس های طبیعی به دست آیند. بدلیل اینکه نیروی خارجی در شکل مود و فرکانس طبیعی نقشی ندارد، اثر نیروی خارجی حذف می شود. همچنین برای سادگی ممان اینرسی ثابت در نظر گرفته می شود. بنابراین رابطه الف-۱ به صورت زیر خواهد شد.

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\text{الف-۲})$$

برای حل رابطه الف-۲ از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است، در این روش تابع دو متغیره  $w$  را به صورت ضرب دو تابع یک متغیره به صورت زیر می توان نوشت.

$$w(z, t) = \phi(z) q(t) \quad (\text{الف-۳})$$

با جایگذاری رابطه الف-۳ در رابطه الف-۲ عملیات ریاضی زیر انجام می شود.

$$-\frac{\partial^2 (q(t))}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \frac{\partial^2 (\phi(z))}{\partial z^2} \right] \frac{EI}{m} \quad (\text{الف-۴})$$

از آنجایی که هر کدام از دو طرف رابطه الف-۴ بر حسب یک متغیر مستقل (یعنی زمان یا مکان) است، می توان بیان

$$m_{ii} = \int_0^l m \phi_i^2(z) dz, \quad k_{ii} = \int_0^l \phi_i(z) L(\phi_i(z)) dz$$

$$m_{ii} \ddot{q}_i(t) + k_{ii} q_i(t) = \int_0^l F(z, t) \phi_i(z) dz = Q_i(t) \quad (\text{الف-۱۵})$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تحلیل مودال معادله را به  $n$  معادله غیر کوپل تبدیل نمود که مانند سیستم یک درجه آزادی قابل حل است.

اگر نیروی محرک ارتعاشی  $F(t)$  به صورت متمرکز بر تیر اعمال شود و مکانش روی تیر با زمان عوض شود اثر نیرو تنها باید در موقعیت نیرو (به‌طور مثال  $\psi(t)$ ) باشد و در بقیه جاهای تیر باید صفر شود برای اعمال این شرایط در روابط، نیرو به صورت زیر در روابط ظاهر می‌شود.

$$f(z, t) = F(t) \delta(z - \psi(t)) \quad (\text{الف-۱۶})$$

که  $\delta$  تابع دلتای دیراک است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \delta(z - \psi(t)) = 0 & z \neq \psi(t) \\ \delta(z - \psi(t)) = 1 & z = \psi(t) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - \psi(t)) \phi(z) dx = \phi(\psi(t)) \quad (\text{الف-۱۷})$$

رابطه ارتعاشات اجباری غیر میرای تیر از روابط الف-۱۵، الف-۱۶ و الف-۱۷ به صورت زیر می‌باشد.

$$Q_i(z) = \int_0^L F(t) \delta(z - \psi(t)) \phi_i(z) dx = F(t) \phi_i(\psi(t))$$

$$\Rightarrow m_{ii} \ddot{q}_i(t) + k_{ii} q_i(t) = F(t) \phi_i(\psi(t)) \quad (\text{الف-۱۸})$$

از روش انتگرال کانولوشن، پاسخ خصوصی رابطه الف-۱۸ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q_i(t) = \frac{1}{m_{ii} \omega_i} \int_0^t F(\tau) \phi_i(\psi(t)) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (\text{الف-۱۹})$$

به دلیل صفر بودن شرایط اولیه، پاسخ عمومی نیز صفر می‌شود و بنابراین از رابطه بالا و رابطه الف-۷ رابطه الف-۲۰ به دست می‌آید.

برای تحلیل تغییر شکل عرضی تیر بر اثر نیروهای ماشینکاری ( $w$ ) رابطه الف-۱، باید حل شود. رابطه الف-۱ به صورت رابطه الف-۱۰ قابل نوشتن است.

$$M(\ddot{w}) + L(w) = F(z, t) \quad (\text{الف-۱۰})$$

$M$  و  $L$  عملگرهایی هستند که به صورت روابط الف-۱۱ تعریف می‌شوند [۳۵]:

$$M = b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial z} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots$$

$$L = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial z} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots \quad (\text{الف-۱۱})$$

بنابراین  $M$  و  $L$  به‌طور خصوصی برای رابطه الف-۱ به صورت روابط الف-۱۲ می‌باشند.

$$M = b_0 = m$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \quad a_4 = EI \quad (\text{الف-۱۲})$$

به دلیل اینکه سیستم دارای بی‌نهایت درجه آزادی است که باید با هم حل شوند از تحلیل مودال استفاده می‌شود. جواب ارتعاشات اجباری با توجه به تحلیل مودال به صورت زیر خواهد شد:

$$w(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) q_j(t) \quad (\text{الف-۱۳})$$

که  $\phi_j(z)$  شکل مود و  $q_j(t)$  مختصات عمومی سیستم است. پاسخ فوق در معادله دیفرانسیل الف-۱۰ قرار داده می‌شود. سپس  $\phi_i(z)$  در طرفین رابطه ضرب می‌شود و بر روی کل محیط انتگرال گرفته می‌شود که در نتیجه رابطه الف-۴ به دست می‌آید.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{q}_j(t) \int_0^l \phi_i(z) M(\phi_j(z)) dz + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \times \int_0^l \phi_i(z) L(\phi_j(z)) dz = \int_0^l F(z, t) \phi_i(z) dz \quad (\text{الف-۱۴})$$

با توجه به بحث تعامد مودها، در صورتیکه  $i = j$  باشد انتگرال‌های رابطه الف-۱۴، صفر نمی‌شود بنابراین از روابط الف-۱۲ و الف-۱۴، روابط الف-۱۵ به دست می‌آید.

## ۹- مراجع

- [1] H. Soleimanimehr, M. J. Nategh, S. Amini, modeling of surface Roughness in Vibration-cutting by artificial neural networks, International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering Vol. 4, 2010, pp. 155-160.
- [2] S Amini, M J Nategh, and H Soleimanimehr, Application of design of experiments for modeling surface roughness in ultrasonic vibration turning, Proc. IMechE, Part B: J. Engineering Manufacture, Vol. 233, 2009, pp. 641-652.
- [3] M. J. Nategh, S. Amini, H. Soleimanimehr, modeling the Force, surface roughness and cutting temperature in ultrasonic vibration-assisted turning of al7075, Advanced Materials Research Vols. 83-86, 2010, pp 315-325.
- [4] S. Amini, H. Soleimanimehr, M.J. Nategh, A. Abudollah and M.H. Sadeghi, FEM Analysis of Ultrasonic-Vibration-Assisted Turning and the Vibratory Tool, Journal of Materials Processing Technology, Vol. 201, 2008, pp 43-47.
- [5] S. Amini, M.J. Nategh, H. Soleimanimehr, "Finite element analysis of ultrasonic cutting in one direction", (Ultrasonic symposium), England, UIA2007.
- [6] H. Soleimanimehr, M. J. Nategh and S. Amini, prediction of machining force and surface roughness in ultrasonic vibration-assisted turning using neural networks, Advanced Materials Research Vols. 83-86, 2010, pp 326-334.
- [7] R. Ramesh, M.A. Mannan, A.N. Poo, Error compensation in machine tools - a review Part I: geometric, cutting-force induced and fixture dependent Errors, International Journal of Machine Tools & Manufacture Vol. 40, 2000, pp 1235-1256.
- [8] Jingxia Yuan, Jun Ni, The real-time error compensation CNC machining systems, Mechatronics 8, 1998, pp 359-380.
- [9] P.G. Benardos, S. Mosialos, G.-C. Vosniakos, Prediction of workpiece elastic deflections under cutting forces in turning,

$$q_i(t) = \frac{F(\tau)}{m_{ii}\omega_i} \times \int_0^t \left( \frac{(\cos \beta l + \cosh \beta l)}{(\sin \beta l - \sinh \beta l)} \right) \times (\cos \beta \psi(\tau) - \cosh \beta \psi(\tau)) + (\sin \beta \psi(\tau) - \sinh \beta \psi(\tau)) \times \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (\text{الف-۲۰})$$

$m_{ii}$  نیز از روابط الف-۷ و الف-۱۵ به صورت زیر خواهد شد.

$$m_{ii} = \int_0^l m \left( \frac{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)}{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)} \right) \times (\cos \beta_i z - \cosh \beta_i z) + (\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z)^2 dz \quad (\text{الف-۲۱})$$

تغییر شکل عرضی تیر ( $w$ ) با جای گذاری  $\phi_j(z)$  (رابطه الف-۷) و  $q_i(t)$  (رابطه الف-۲۰) در رابطه الف-۱۳ به دست می آید.

۸-۲- پیوست ب: به دست آوردن  $\beta_f l$ 

$\beta_f l$  حدی معرف تعداد مودهایی است که باید در روابط تحلیلی در نظر گرفته شوند. از آنجایی که فرکانس نیروی تحریک باید جزو فرکانس هایی که در روابط تحلیلی می آیند باشد و همچنین از آنجا که افزایش تعداد فرکانس یا موده های طبیعی که در روابط در نظر گرفته می شوند، حجم محاسبات را شدیداً افزایش می دهند بنابراین در این مقاله با توجه به جنس و شکل و فرکانس تحریک نیرو (۲۰ کیلوهرتز) مقداری برای  $\beta_f l$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \beta L &= \sqrt{\omega^4 \frac{m}{EI}} L \\ &= \sqrt{\omega^4 \frac{2823 \times \pi \times 15^2 \times 10^{-6}}{(7.4426 \times 10^{10}) \times (\pi \times 30^4 / 64 \times 10^{-12})}} \times 0.5 \\ &= \sqrt{\omega^4 \frac{2823 \times 15^2}{(7.4426 \times 10^4) \times (30^4 / 64)}} \times 0.5 \\ &= \sqrt{\omega^4 \frac{63.5175}{9.41954063 \times 10^4}} \times 0.5 \\ &= 8.05723299 \times 10^{-2} \times \sqrt{\omega} \\ \beta_f L &= 8.05723299 \times 10^{-2} \times \sqrt{20000 \times 2 \times \pi} = 28.55 \end{aligned} \quad (\text{ب-۱})$$

- [18] Guo Jianliang, Han Rongdi, "A united model of diametral error in slender bar turning with a follower rest", *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 46, 2006, pp1002-1012.
- [19] C.K. Chen, Y.M. Tsao, A stability analysis of turning a tailstock supported flexible work-piece, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 46, 2006, pp18-25.
- [20] J. Srinivas, K.RamaKotaiah, A study of bifurcation behavior in oblique turning operation, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 49, 2009, pp 1042-1047.
- [21] B. Moetakef-Imani, N.Z.Yussefian, Dynamic simulation of boring process, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 49, 2009, pp1096-1103.
- [22] Khagendra Gupta, O. Burak Ozdoganlar, Shiv G. Kapoor, Richard E. DeVor, Modeling and Prediction of Hole Profile in Drilling, Part 1: Modeling Drill Dynamics in the Presence of Drill Alignment Errors, *Journal of manufacturing science and engineering*, Vol. 125, pp. 6-13, 2003.
- [23] Jifang Tian, Stanley G. Hutton, Chatter Instability in Milling Systems with Flexible Rotating Spindles-A New Theoretical Approach, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 123, 2001.
- [24] Sinan Filiz O. Burak Ozdoganlar, Micro end mill Dynamics Including the Actual Fluted Geometry and Setup Errors-Part II: Model Validation and Application, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 130, 2008, pp. 031120-1-13.
- [25] Sinan Filiz O. Burak Ozdoganlar, Micro end mill Dynamics Including the Actual Fluted Geometry and Setup Errors-Part I: Model Development and Numerical Solution,, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 130, 2008, pp. 031119-1-10.
- [26] Yuzhong Cao, Yusuf Altintas, A General Method for the Modeling of Spindle-Bearing Systems, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, 2004, pp. 1089-1104.
- [27] Vincent Gagnol, Belhassen C. Bouzgarrou, Pascal Ray, Christian Barra, Stability-Based Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 22, 2006, pp505-514.
- [10] Anand Raghu, Shreyes N. Melkote, Modeling of Workpiece Location Error Due to Fixture Geometric Error and Fixture-Workpiece Compliance, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 127, 2005, pp. 75-83.
- [11] Liu Zhan Qiang, "Finite difference calculations of the deformations of multi-diameter workpieces during turning", *Journal of Materials Processing Technology* 98, 2000, pp 310-316.
- [12] John A. Malluck, Shreyes N. Melkote, Modeling of Deformation of Ring Shaped Workpieces Due to Chucking and Cutting Forces, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 141-147.
- [13] J.R. René Mayer, Anh-Vũ Phan, Guy Cloutier, Prediction of diameter errors in bar turning: a computationally effective model, *Applied Mathematical Modelling* 24, 2000, pp 943-956.
- [14] A.-V. Phan, L. Baron, J.R.R. Mayer, G. Cloutier, Finite element and experimental studies of diametral errors in cantilever bar turning, *Applied Mathematical Modelling* 27, 2003, pp221-232.
- [15] L. Carrino, G. Giorleo, W. Polini, U. Prisco, Dimensional errors in longitudinal turning based on the unified generalized mechanics of cutting approach. Part I: Three-dimensional theory, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 42, 2002, pp 1509-1515.
- [16] L. Carrino, G. Giorleo, W. Polini, U. Prisco, Dimensional errors in longitudinal turning based on the unified generalized mechanics of cutting approach. Part II: Machining process analysis and dimensional error estimate, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 42, 2002, pp 1517-1525.
- [17] Eyüp Sabri Topal , Can Çoğun, A cutting force induced error elimination method for turning operations, *Journal of Materials Processing Technology* 170, 2005, pp 192-203.

- [32] Chandra Nath, M. Rahman, Effect of machining parameters in ultrasonic vibration cutting, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 48, 2008, pp965–974.
- [33] Abbas Pak, Analysis, Design and Manufacture of a High-Power Load-Independent Ultrasonic Transducer, Ph.D thesis, Tarbiat Modares University, July 2008
- [34] S. Rao, vibration of continuous systems, John Wiley & Sons, 2007.
- [35] Matlab R2010b help
- [36] Leonard Meirovitch, fundamentals of vibrations, McGraw-Hill, 2001.
- [37] L.Meirovitch, “Analytical methods in vibrations”, Macmillan company, 1967.
- Spindle Design Optimization, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 129, 2007, pp. 407-415.
- [28] Hongqi Li, Yung C. Shin, Integrated Dynamic Thermo-Mechanical Modeling of High Speed Spindles, Part 2: Solution Procedure and Validations, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 159-168.
- [29] J. E. Shigley, Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill, 1986.
- [30] M. Xiao, S. Karube, T. Soutome, K. Sato, Analysis of chatter suppression in vibration cutting, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 42, 2002, pp 1677–1685.
- [31] Chunxiang Maa, E. Shamoto, T. Moriwaki, Yonghong Zhang, Lijiang Wang, Suppression of burrs in turning with ultrasonic elliptical vibration cutting, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 45 (2005) 1295–1300