



بررسی پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای در حضور اثر ژيروسکوپی و بهینه‌سازی پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید

موسی رضائی^{1*}، رضا فتحی²، آرش محمد علیزاده فرد³

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
2- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
3- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
* تبریز، صندوق پستی 51665-315، m_rezaee@tabrizu.ac.ir

چکیده

نیروهای مضر ایجاد شده در اثر نابالانسی باعث ارتعاشات ناخواسته، سر و صدا و کاهش عمر سیستم می‌شوند. یکی از روش‌های جدید و کارآمد مورد استفاده برای رفع نابالانسی در سیستم‌های دوار استفاده از بالانسر دینامیکی اتوماتیک ساچمه‌ای است. بالانسر ساچمه‌ای نوعی از بالانسرهاست که عملیات بالانس روتور را بدون نیاز به سیستم کنترل انجام می‌دهد. با توجه به اینکه این نوع بالانسر عمدتاً در سیستم‌هایی به کار می‌رود که نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر می‌کند و ممکن است در طول یک روز چند بار سیستم روشن و خاموش شود بنابراین کاهش زمان مورد نیاز برای بالانس سیستم در هر بار راه‌اندازی آن اهمیت پیدا می‌کند. در عمل به دلایل مختلفی از جمله عدم نصب روتور در وسط شفت، اثر ژيروسکوپی در سیستم دوار ایجاد می‌شود. تاکنون تحقیقی در زمینه تعیین محدوده بهینه پارامترهای سیستم از جمله ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها در عملکرد سیستم در حضور اثر ژيروسکوپی انجام نشده است. بدین منظور، در این مقاله تاثیر پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر در حضور اثر ژيروسکوپی بر پایداری سیستم مورد مطالعه قرار گرفته و در ادامه با استفاده از الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید، مقدار بهینه این پارامترها بر اساس کمیته‌سازی زمان بالانس و صفر شدن زوایای اولبر تعیین شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 27 فروردین 1393
پذیرش: 31 خرداد 1393
ارائه در سایت: 23 مهر 1393
کلید واژگان:
بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای
پایداری
زوایای اولبر
اثر ژيروسکوپی
الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید

Investigating the stability of automatic ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the Nelder-Mead simplex algorithm

Mousa Rezaee*, Reza Fathi, Arash Mohammad Alizadeh Fard

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
* P.O. B. 51665-315 Tabriz, Iran, m_rezaee@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 April 2014
Accepted 21 June 2014
Available Online 15 October 2014

Keywords:
Automatic Ball-Balancer
Stability
Euler Angles
Gyroscopic Effect
The Nelder-Mead Simplex Algorithm

ABSTRACT

The forces due to the unbalance in a system cause undesired vibration and noise, and reduce the system life. One of the new and efficient methods used to reduce the unbalance is the use of automatic dynamic ball balancer. The automatic dynamic ball balancer is a typical passive balancer which does not require control systems to balance the rotor. Because these devices are used in the systems which have variable unbalance according to the operating conditions and the system may be switched on and off several times a day, reducing the balancing time becomes a necessary task. In practice, the gyroscopic effect is created for several reasons, e.g. when the rotor is located offset from the shaft midspan. Previous studies have not determined the optimum values of the damping ratio and mass of balls of the automatic dynamic ball balancer under the gyroscopic effect. In this study, the effect of damping ratio and the mass of balls of the automatic dynamic ball balancer on the stability and balancing of the system under the gyroscopic effect have been investigated and, using the Nelder-Mead simplex algorithm, the optimum values of these parameters to minimize the time of balancing and converging the Euler angles to zero are obtained.

1- مقدمه

تلاش می‌شود تا توزیع جرم به گونه‌ای باشد که در یاتاقان‌ها نیروهای ناشی از نامیزانی به حداقل برسد [1]. اگر نابالانسی مشخص و ثابت باشد با یک بار بالانس کردن مشکل حل می‌شود ولی در حالتی که نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند دیگر با یک بار بالانس کردن نمی‌توان ارتعاشات را کاهش داد. در چنین شرایطی، استفاده از اتوبالانسر ساچمه‌ای دینامیکی که زیرمجموعه

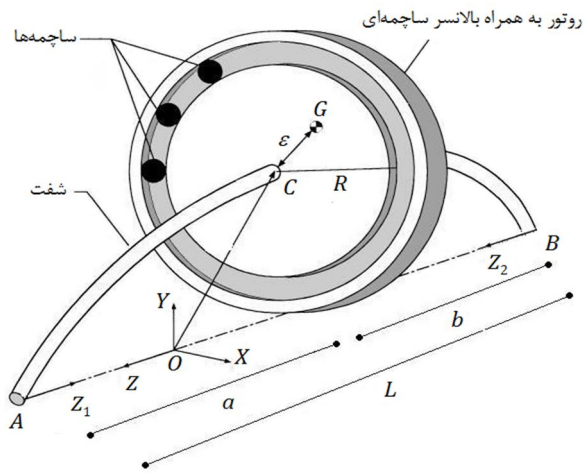
ارتعاشات ماشین‌های دوار یکی از مسایل مهم مهندسی محسوب می‌شود. نابالانسی علت عمده ارتعاش در سیستم‌های دوار است. بر اساس تعریف ارائه شده توسط مؤسسه بین‌المللی استانداردها¹، بالانس فرایندی است که در آن

1- ISO

Please cite this article using:

M. Rezaee, R. Fathi, A.M. Alizadeh Fard, Investigating the stability of automatic ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the Nelder-Mead simplex algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 155-166, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:



شکل 1 روتور همراه بالانسر ساچمه‌ای

2- بالانسر ساچمه‌ای تحت اثر ژيروسکوپی

در شکل 1 روتور نابالانسی به همراه بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌شود بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای از یک دیسک دوار شیاردار تشکیل شده که در آن ساچمه‌هایی قرار دارند و در فضای خالی بین ساچمه‌ها و شیار، مایع لزجی وجود دارد. تحت شرایطی این ساچمه‌ها نهایتاً در وضعیتی قرار می‌گیرند که نابالانسی سیستم را جبران کرده و نهایتاً آن را به حالت بالانسر در می‌آورند [16]. عدم تقارن در محل قرارگیری روتور ($a \neq b$) سبب ایجاد اثر ژيروسکوپی در سیستم می‌شود.

3- استخراج معادلات غیرخطی حرکت اتوبالانسر ساچمه‌ای در حضور اثر ژيروسکوپی

برای به‌دست آوردن معادلات حرکت همان‌طور که در شکل 2 دیده می‌شود، سیستم مختصات XYZ به‌عنوان دستگاه مرجع اینرسی انتخاب شده است و برای مشخص کردن مرکز هندسی C از مختصات قطبی r و θ استفاده شده است. برای تعیین موقعیت مرکز جرم G نسبت به C ، دو پارامتر ε (خروج از مرکز) و ωt بکار گرفته شده است.

موقعیت ساچمه‌ها نسبت به C نیز با دو پارامتر R و $\varphi_i (i=1, \dots, n)$ مشخص شده‌اند که n تعداد ساچمه‌ها داخل رینگ است.

به‌منظور نشان دادن جهت دستگاه مختصات متحرک متصل به روتور، XYZ ، می‌توان از زوایای اوپلر و رابطه بین دستگاه مختصات متحرک و دستگاه مختصات مرجع XYZ استفاده کرد.

چرخش اول دستگاه مختصات متحرک به اندازه زاویه ωt در جهت پادساعتگرد حول محور Z و در صفحه XY انجام می‌گیرد و همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده است، باعث تبدیل $XYZ \rightarrow X'Y'Z'$ می‌شود. چرخش دوم به اندازه زاویه α در جهت پادساعتگرد حول محور X' و در صفحه $Y'Z'$ انجام می‌گیرد و همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده است، باعث تبدیل $X'Y'Z' \rightarrow X''Y''Z''$ می‌شود. چرخش سوم به اندازه زاویه β در جهت پادساعتگرد حول محور Y'' باعث تبدیل $X''Y''Z'' \rightarrow XYZ$ می‌شود. این تبدیل مختصات را می‌توان به فرم ماتریسی (1) بیان کرد [17]:

$$\bar{X}' = [R_{\omega t}] \bar{X}, \bar{X}'' = [R_{\alpha}] \bar{X}', \bar{X}''' = [R_{\beta}] \bar{X}'' \quad (1)$$

که در آن $[R_{\beta}]$ ، $[R_{\alpha}]$ و $[R_{\omega t}]$ ماتریس‌های دوران هستند و با روابط (2) تعریف می‌شوند:

روش‌های بالانس غیرفعال است [2]. توصیه می‌شود که قادر است بدون نیاز به متوقف کردن دستگاه برای عملیات بالانس، عملیات موزون‌سازی را انجام دهد. اتوبالانسر ساچمه‌ای کاربردهای متفاوتی از جمله در سی‌دی‌رام یا دی‌وی‌دی درایوها و ماشین‌های ابزار دارد [3-5].

مطالعات پایه‌ای در زمینه اتوبالانسر ساچمه‌ای دینامیکی به‌وسیله تیرل [6]، الکساندر [7] و کید [8] انجام شده است. چانگ و همکارش [9] با بکارگیری دستگاه مختصات قطبی توانستند معادلات حرکت را به صورت خودگردان بدست آورند. آنها وضعیت‌های تعادل سیستم را با استفاده از معادلات حرکت به‌دست آورده سپس با استفاده از روش اغتشاشات، معادلات را حول نقاط تعادل خطی کردند و پایداری سیستم را در حول نقاط تعادل بررسی کردند. در سال 1999 چیول و همکارش [10] به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای دو ردیفه پرداختند. دلیل آنها برای دو ردیفه در نظر گرفتن اتوبالانسر جلوگیری از برخورد میان ساچمه‌ها بود تا ساچمه‌ها بعد از مدتی دچار شکستگی نشوند. در سال 2003 چانگ و همکارانش [11] به بررسی رفتار دینامیکی مدل روتور استودولا-گرین مجهز به اتوبالانسر پرداختند. آنها با در نظر گرفتن یک شفت انعطاف‌پذیر که در انتهای آن روتور قرار دارد. با لحاظ کردن اثر ژيروسکوپی، انرژی پتانسیل و جنبشی را استخراج کرده و سپس معادلات لاگرانژ را جهت استخراج معادلات حاکم به کار بردند و محدوده پایداری را بر حسب پارامترهای مختلف آن بررسی کردند. در سال 2009 چانگ و همکارانش [12] به بررسی تحلیلی پایداری اتوبالانسر پرداختند. آنها محدوده پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی کردند. چان و همکارانش [13] تاثیر غیرخطی بودن تعلیق در عملکرد بالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد غیرخطی در نظر گرفتن تعلیق باعث تغییر در موقعیت ساچمه‌ها در هنگام پایداری و همچنین محدوده پایداری پیش‌بینی شده نسبت به حالت خطی می‌شود. در سال 2011 چانگ و همکارش [14] به‌جای محدود کردن حرکت ساچمه‌ها در شیار اتوبالانسر، آنها را به فترهایی وصل کردند تا ساچمه‌ها قادر به حرکت شعاعی باشند. این کار سبب افزایش محدوده پایداری سیستم شد. یکی از جدیدترین تحقیقات در زمینه اتوبالانسر ساچمه‌ای در سال 2013 توسط سانق و همکارانش [15] انجام شده است که در آن تأثیر تحریک خارجی بر موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها بررسی شده است.

از مرور تحقیقات پیشین مشخص می‌شود که تاکنون تحقیقی در زمینه بهینه‌سازی پارامترهای اتوبالانسر با لحاظ کردن اثرات ژيروسکوپی برای کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر کردن زوایای اوپلر صورت نگرفته است. با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های دوار، محدودیت‌هایی برای نصب روتور و بالانسر در وسط شفت وجود دارد بنابراین در اثر عدم تقارن و وجود شیب در بخشی از شفت که روتور و بالانسر در آن نصب شده است در اثر دوران سیستم، اثر ژيروسکوپی پدید می‌آید. در مقاله حاضر، روتور مجهز به بالانسر ساچمه‌ای در حضور اثر ژيروسکوپی به‌عنوان یک سیستم دوار انتخاب شده است. با در نظر گرفتن شتاب زاویه‌ای در مرحله راه‌اندازی روتور که به واقع‌بینانه‌تر شدن مدل دینامیکی منجر می‌شود معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیستم استخراج و تاثیر پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با استفاده از روش الگوریتم سیمپلکس نلد-میلد، مقادیر بهینه پارامترهای مذکور براساس کمینه کردن زمان بالانس و صفر شدن سریع زوایای اوپلر تعیین شده است.

مختصات تعمیم یافته عبارتند از $(r, \theta, \alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i)$.

برای بیان انرژی جنبشی روتور به همراه بالانسر، ابتدا بردار موقعیت مرکز جرم G را در دستگاه مختصات XYZ با استفاده از ماتریس‌های دوران و روابط (5) بیان می‌شود:

$$\vec{r}_{OC/XYZ} = r(\cos\theta\vec{I} + \sin\theta\vec{J}), \vec{r}_{CG/xyz} = \varepsilon\vec{i}$$

$$\vec{r}_{CB_i/xyz} = R\cos\varphi_i\vec{i} + R\sin\varphi_i\vec{j} \quad (5)$$

بردار موقعیت مرکز جرم G در دستگاه مختصات XYZ به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$\vec{r}_G = (r\cos\theta + \varepsilon\cos\beta\cos\omega t - \varepsilon\sin\beta\sin\alpha\sin\omega t)\vec{I}$$

$$+ (r\sin\theta + \varepsilon\cos\beta\sin\omega t + \varepsilon\sin\beta\sin\alpha\cos\omega t)\vec{J}$$

$$- (\varepsilon\sin\beta\cos\alpha)\vec{K} \quad (6)$$

و بردار موقعیت i امین ساچمه نیز با رابطه (7) بیان می‌شود.

$$\vec{r}_{B_i} = (r\cos\theta + R\cos\varphi_i\cos\beta\cos\omega t - R\cos\varphi_i\sin\beta\sin\alpha\sin\omega t$$

$$- R\sin\varphi_i\sin\omega t\cos\alpha)\vec{I} + (r\sin\theta + R\cos\varphi_i\cos\beta\sin\omega t$$

$$+ R\cos\varphi_i\sin\beta\sin\alpha\cos\omega t + R\sin\varphi_i\cos\omega t\cos\alpha)\vec{J}$$

$$+ (-R\cos\varphi_i\sin\beta\cos\alpha + R\sin\varphi_i\sin\alpha)\vec{K} \quad (7)$$

اگر بالانسر دارای n ساچمه باشد، رابطه انرژی جنبشی از رابطه (8) بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T J \vec{\Omega} + \frac{1}{2}M \frac{d\vec{r}_G}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{r}_{B_i}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_{B_i}}{dt} \quad (8)$$

که در آن M جرم دیسک و m جرم هریک از ساچمه‌ها است و J ماتریس اینرسی و $\vec{\Omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای روتور است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [11]:

$$[J] = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{\Omega} = (-\omega\cos\alpha\sin\beta + \dot{\alpha}\cos\beta)\vec{I}$$

$$+ (\omega\sin\alpha + \dot{\beta})\vec{J} + (\omega\cos\alpha\cos\beta + \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{K} \quad (10)$$

که در آن J نشان دهنده ممان اینرسی جرمی حول محورهای X و Y و J_z ممان اینرسی جرمی حول محور Z است.

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل سیستم با صرف نظر کردن از اثر گرانش و انحراف پیچشی و طولی شفت، انرژی پتانسیل ناشی از خمش شفت محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل 1 مشاهده می‌شود، برای محاسبه تابع خیز شفت در دو ناحیه طرفین دیسک، در ناحیه سمت چپ دیسک از مختصه Z_1 که مبدا آن در نقطه A قرار دارد استفاده شده و برای محاسبه خیز شفت در ناحیه سمت راست دیسک از مختصه Z_2 که مبدا آن در نقطه B قرار دارد استفاده شده است. شفت با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته شده که در $Z_1=0$ و $Z_2=0$ دارای خیز صفر است. خیز شفت در جهات X و Y در $Z_1=a$ و $Z_2=b$ با D_x و D_y در رابطه (11) نشان داده شده است:

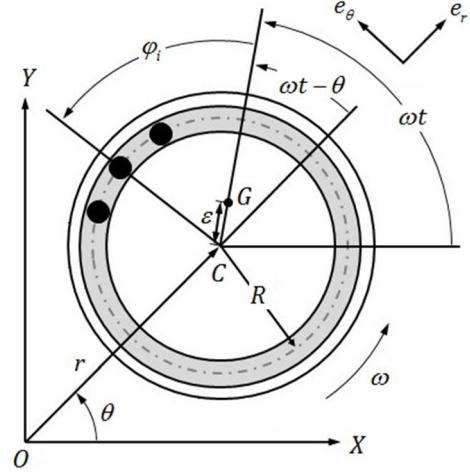
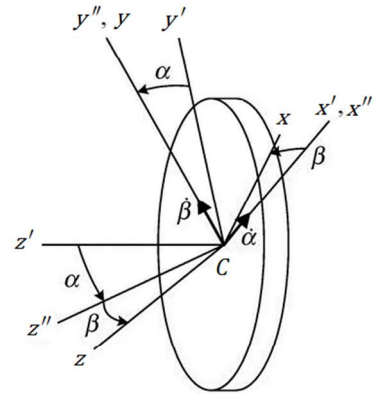
$$D_x = r\cos\varphi, D_y = r\sin\varphi \quad (11)$$

زوایای دوران دیسک حول محورهای X و Y به ترتیب Φ_x و Φ_y است که از روابط (12) بدست می‌آیند [11]:

$$\Phi_x = \alpha\cos\omega t - \beta\cos\alpha\sin\omega t$$

$$\Phi_y = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\alpha\cos\omega t \quad (12)$$

انرژی پتانسیل شفت ناشی از خمش در دو صفحه $Z-X$ و $Z-Y$ استخراج شده است. برای این کار ابتدا صفحه $Z-X$ را در نظر گرفته می‌شود. در این صفحه معادله خیز شفت به صورت رابطه (13) بیان می‌شود:



شکل 2 روتور و بالانسر ساچمه‌ای

$$[R_{\omega t}] = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_{\beta}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

بردارهای $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}''$ و \vec{X} بر حسب مؤلفه‌هایشان به صورت رابطه (3) تعریف می‌شوند:

$$\vec{X} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad \vec{x}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\vec{x}'' = x''\vec{i}'' + y''\vec{j}'' + z''\vec{k}'', \quad \vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (3)$$

که در آن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای یکه در راستای محورهای X, Y, Z ، $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ بردارهای یکه در راستای محورهای x', y', z' ، $\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''$ بردارهای یکه در راستای محورهای x'', y'', z'' و $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای یکه در راستای محورهای x, y, z هستند.

معادلات غیرخطی حرکت برای اتوبالانسر ساچمه‌ای با استفاده از معادلات لاگرانژ که در رابطه (4) نشان داده شده بدست می‌آیند [12].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n+4 \quad (4)$$

که در آن T انرژی جنبشی، V انرژی پتانسیل، F تابع اتلاف ریلی و q_k ($k=1, 2, \dots, n+4$) مختصات تعمیم یافته هستند. برای سیستم داده شده

$$\begin{aligned} & (M+nm)(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})+c_r r\dot{\theta} \\ & +\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right)(-\beta\sin(\omega t-\theta)+\alpha\cos(\omega t-\theta)) \\ & +mR^2\sum_{i=1}^n[(\dot{\varphi}_i+2\dot{\omega})\cos(\varphi_i+\omega t-\theta) \\ & -(\dot{\varphi}_i+\omega+\dot{\omega})^2\sin(\varphi_i+\omega t-\theta)] \\ & -M\varepsilon[(\omega+\dot{\omega})^2\sin(\omega t-\theta)-(2\dot{\omega})\cos(\omega t-\theta)]=0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(J+mR^2\sum_{i=1}^n\sin^2\varphi_i\right)\ddot{\alpha}-mR^2\beta\sum_{i=1}^n\cos\varphi_i\sin\varphi_i \\ & +\left(c_r+2mR^2\sum_{i=1}^n\dot{\varphi}_i\cos\varphi_i\sin\varphi_i\right)\dot{\alpha} \\ & +\left[(J_z-2J)\omega+2mR^2\sum_{i=1}^n\dot{\varphi}_i\sin^2\varphi_i\right]\dot{\beta} \\ & -r\sin(\omega t-\theta)\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right) \\ & +\left[\frac{3EI}{a}+\frac{3EI}{b}+(J_z-J)\omega^2\right. \\ & +mR^2\sum_{i=1}^n(2\omega\dot{\varphi}_i+\omega^2+2\dot{\omega}\omega+\dot{\omega}^2t^2+2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_i)\sin^2\varphi_i \\ & \left.-mR^2\sum_{i=1}^n2\dot{\omega}\sin\varphi_i\cos\varphi_i\right]\alpha \\ & +mR^2\beta\sum_{i=1}^n[\dot{\varphi}_i-(2\omega\dot{\varphi}_i+\omega^2+2\dot{\omega}\omega+\dot{\omega}^2t^2+2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_i) \\ & \times\cos\varphi_i\sin\varphi_i+2\dot{\omega}\cos^2\varphi_i]+\dot{\omega}(J_z-J)\beta=0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left(J+mR^2\sum_{i=1}^n\cos^2\varphi_i\right)\ddot{\beta}-mR^2\alpha\sum_{i=1}^n\cos\varphi_i\sin\varphi_i \\ & +\left(c_r-2mR^2\sum_{i=1}^n\dot{\varphi}_i\cos\varphi_i\sin\varphi_i\right)\dot{\beta} \\ & -\left[(J_z-2J)\omega+2mR^2\sum_{i=1}^n\dot{\varphi}_i\cos^2\varphi_i\right]\dot{\alpha} \\ & -mR^2\alpha\sum_{i=1}^n[(2\omega\dot{\varphi}_i+\omega^2+2\dot{\omega}\omega+\dot{\omega}^2t^2 \\ & +2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_i)\cos\varphi_i\sin\varphi_i-2\dot{\omega}\cos^2\varphi_i]+\dot{\omega}J\alpha \\ & -r\cos(\omega t-\theta)\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right)+\left[\frac{3EI}{a}+\frac{3EI}{b} \right. \\ & \left.+(J_z-J)\omega^2+mR^2\sum_{i=1}^n(2\omega\dot{\varphi}_i+\omega^2+2\dot{\omega}\omega+\dot{\omega}^2t^2 \right. \\ & \left.+2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_i)\cos^2\varphi_i+mR^2\sum_{i=1}^n2\dot{\omega}\sin\varphi_i\cos\varphi_i\right]\beta=0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & mR^2(\ddot{\varphi}_i+2\dot{\omega})+D\dot{\varphi}_i-mR[(\dot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin(\varphi_i+\omega t-\theta) \\ & -(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\cos(\varphi_i+\omega t-\theta)]=0, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (25)$$

4- تعیین موقعیت‌های تعادل و خطی‌سازی معادلات حاکم حول نقاط تعادل

برای تعیین موقعیت‌های تعادل معادلات حرکت در فضای حالت به صورت ماتریسی - برداری به شکل رابطه (26) بیان می‌شوند:

$$A(x)\ddot{x}=\bar{X}(x) \quad (26)$$

$$\delta_x = AZ^3 + BZ^2 + CZ + D \quad (13)$$

در رابطه (13)، A, B, C, D ضرایب ثابتی هستند که با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. برای $0 \leq Z_1 \leq a$ با توجه به این نکته که در $Z_1=0$ خیز و گشتاور برابر صفر است، (رابطه (14)):

$$\delta_{x1} = AZ_1^3 + CZ_1 \quad (14)$$

همچنین، در $Z_1=a$ خیز شفت برابر D_x و شیب آن Φ_y است (رابطه (15)):

$$\delta_{x1} = \frac{3D_x - a\Phi_y}{2a} Z_1 - \frac{D_x - a\Phi_y}{2a^3} Z_1^3 \quad (15)$$

این رابطه نشان دهنده رابطه خیز شفت در صفحه $Z-X$ برای محدوده $0 \leq Z_1 \leq a$ می‌باشد. مشابه تحلیل انجام شده، رابطه خیز شفت در صفحه $Z-X$ برای $0 \leq Z_2 \leq b$ از رابطه (16) به‌دست می‌آید:

$$\delta_{x2} = \frac{3D_x - b\Phi_y}{2b} Z_2 - \frac{D_x - b\Phi_y}{2b^3} Z_2^3 \quad (16)$$

با توجه به اینکه خیز شفت در $Z_2=b$ و $Z_1=a$ در صفحه $Z-Y$ برابر D_y و شیب آن Φ_x می‌باشد می‌توان روابط (18,17) را نوشت:

$$d_{y1} = \frac{3D_y + a\Phi_x}{2a} Z_1 - \frac{D_y + a\Phi_x}{2a^3} Z_1^3 \quad (17)$$

$$d_{y2} = \frac{3D_y + b\Phi_x}{2b} Z_2 - \frac{D_y + b\Phi_x}{2b^3} Z_2^3 \quad (18)$$

که d_{y1} معادله خیز شفت برای ناحیه $0 \leq Z_1 \leq a$ و δ_{y2} معادله خیز شفت برای ناحیه $0 \leq Z_2 \leq b$ در صفحه $Z-Y$ است.

انرژی پتانسیل کل ناشی از خمش شفت از رابطه (19) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}EI \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_{x1}}{\partial Z_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_{y1}}{\partial Z_1^2} \right)^2 \right] dZ_1 \\ & + \frac{1}{2}EI \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_{x2}}{\partial Z_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_{y2}}{\partial Z_2^2} \right)^2 \right] dZ_2 \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن E مدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع شفت است.

تابع اتلاف ریلی که در بر گیرنده کلیه نیروهای ناشی از میرایی است از رابطه (20) به دست می‌آید [11]:

$$F = \frac{1}{2}c_r(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}c_r(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}D\sum_{i=1}^n\dot{\varphi}_i^2 \quad (20)$$

که c_r ضریب میرایی انتقالی، c_r ضریب میرایی دورانی ناشی از گردش مخروطی روتور و D ضریب میرایی لزج ناشی از ویسکوزیته سیال درون شیار است. ثابت میرایی لزج برای همه ساچمه‌ها یکسان فرض می‌شود.

معادلات غیرخطی حرکت سیستم با استفاده از معادلات لاگرانژ و با وجود شتاب زاویه‌ای به صورت روابط (21) تا (25) به‌دست می‌آیند. در ضمن از آنجایی که $\alpha, \beta, r, \varepsilon$ دارای مقادیر کوچکی هستند، بنابراین از جملاتی که از حاصل ضرب آنها تشکیل شده‌اند می‌توان صرف نظر کرد:

$$\begin{aligned} & (M+nm)(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)+c_r\dot{r}+\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right)r \\ & -\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right)(\alpha\sin(\omega t-\theta)+\beta\cos(\omega t-\theta)) \\ & -mR^2\sum_{i=1}^n[(\dot{\varphi}_i+2\dot{\omega})\sin(\varphi_i+\omega t-\theta) \\ & +(\dot{\varphi}_i+\omega+\dot{\omega})^2\cos(\varphi_i+\omega t-\theta)] \\ & -M\varepsilon[(\omega+\dot{\omega})^2\cos(\omega t-\theta)+(2\dot{\omega})\sin(\omega t-\theta)]=0 \end{aligned} \quad (21)$$

6- بررسی پایداری سیستم

پایداری سیستم در همسایگی وضعیت تعادل به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی می‌شود [12]:

$$A^* \Delta \dot{x} = B^* \Delta x \quad (41)$$

همچنین حالتی که بالانسر تنها دارای دو ساچمه است بررسی می‌شود. بنابراین ماتریس‌های A^* و B^* ماتریس‌های 12×12 هستند. پایداری حول وضعیت تعادل را می‌توان به یک مسأله مقدار ویژه تبدیل کرد، پاسخ سیستم به صورت رابطه (42) در نظر گرفته می‌شود:

$$\Delta x = \Delta X e^{\lambda_0 t} \quad (42)$$

که در آن λ_0 مقدار ویژه و ΔX بردار ویژه متناظر با مقدار آن می‌باشد. بردارهای ویژه را می‌توان به صورت رابطه (43) در نظر گرفت:

$$\Delta X = \{ \Delta R, \Delta \psi, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2, \Delta \hat{R}, \Delta \hat{\psi}, \Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}, \Delta \hat{\varphi}_1, \Delta \hat{\varphi}_2 \}^T \quad (43)$$

معادلات حاکم، به مسأله مقدار ویژه که با رابطه (44) نشان داده شده تبدیل می‌شوند:

$$(B^* - \lambda_0 A^*) \Delta X = 0 \quad (44)$$

هنگامی که همه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند سیستم به صورت مجانبی پایدار است. ولی اگر یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است [18]. مسأله مقدار ویژه را می‌توان با حل معادله مشخصه که به صورت رابطه (45) به دست می‌آید حل کرد:

$$\det(B^* - \lambda_0 A^*) = 0 \quad (45)$$

که می‌توان آن را با یک چندجمله‌ای بر حسب λ_0 طبق رابطه (46) بیان کرد:

$$\begin{aligned} & c_0 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^{12} + c_1 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^{11} + c_2 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^{10} + c_3 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^9 + c_4 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^8 \\ & + c_5 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^7 + c_6 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^6 + c_7 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^5 + c_8 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^4 + c_9 \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^3 \\ & + c_{10} \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right)^2 + c_{11} \left(\frac{\lambda_0}{\omega_0} \right) + c_{12} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

تنها نواحی پایدار برای حالت تعادل بالانس سیستم که در آن $r^* = 0$ است مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نقطه تعادل محل قرارگیری ساچمه‌ها به صورت رابطه (47) است:

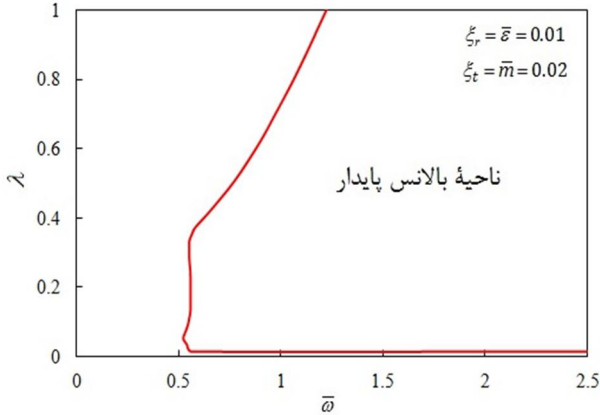
$$\varphi_1^* = -\varphi_2^* = \cos^{-1} \left(-\frac{\bar{e}}{2\bar{m}} \right) \quad (47)$$

با توجه به اینکه آرگومان آرک کسینوس مقداری بین 1 و 1- است، رابطه (48) بین جرم بی‌بعد ساچمه‌ها، نابالانسی بی‌بعد برقرار باشد:

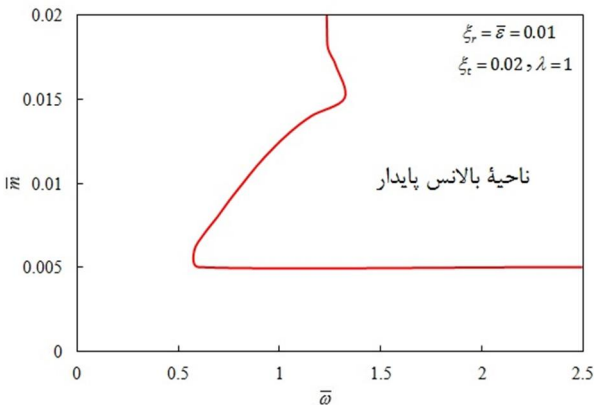
$$\bar{m}^3 \frac{1}{2} \bar{e} \quad (48)$$

همچنین با توجه به این نکته که علاوه بر ψ و $\Delta \psi$ که در معادلات وجود دارند، متغیر ψ^* نیز وجود دارد و تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است بنابراین از معادله کمکی (49) استفاده می‌شود:

$$\sin^2 \psi^* + \cos^2 \psi^* = 1 \quad (49)$$



شکل 3 پایداری براساس تغییرات سرعت دورانی بی‌بعد نسبت به ضریب میرایی



شکل 4 پایداری بر اساس تغییرات سرعت دورانی بی‌بعد نسبت به جرم بی‌بعد ساچمه‌ها با حذف ψ^* از معادلات و انجام یک سری عملیات نسبتاً پیچیده جبری، ضرایب معادله مشخصه به دست می‌آیند. به دلیل مفصل بودن ضرایب از آوردن آن‌ها خودداری شده است.

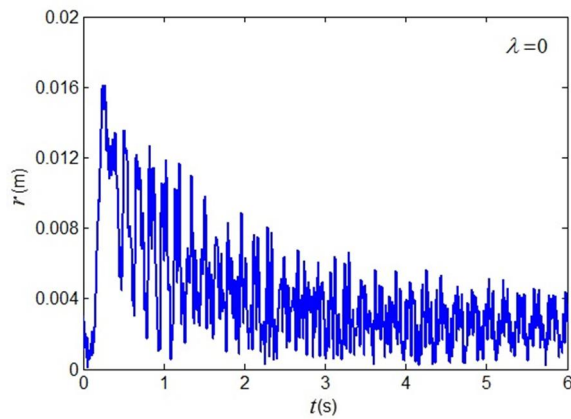
هر یک از ضرایب در حالت کلی تابعی از پارامترهای بی‌بعد سیستم است که عبارتند از $\lambda, \bar{e}, x_r, x_t, \bar{m}$ و $\bar{\omega}$. بنابراین مقادیر ویژه که همان صفرهای چند جمله‌ای رابطه (46) هستند نیز تابعی از این شش پارامتر هستند. با توجه به اینکه نواحی پایدار بر حسب هر شش پارامتر را نمی‌توان به طور همزمان نشان داد، در هر مرحله به چهار پارامتر از شش پارامتر فوق مقدار داده و نواحی پایدار بر حسب دو پارامتر دیگر رسم می‌شود. شکل 3 نواحی پایدار بر حسب پارامترهای λ و $\bar{\omega}$ است. در این حالت چهار پارامتر دیگر $\bar{e} = 0.01$ ، $x_r = \bar{m} = 0.02$ و $x_t = 0.01$ در نظر گرفته می‌شوند.

در شکل 4 نواحی پایدار بر حسب پارامترهای \bar{m} و $\bar{\omega}$ است؛ در این حالت چهار پارامتر دیگر به صورت $\bar{e} = 0.01$ ، $x_r = 0.02$ و $\lambda = 1$ در نظر گرفته می‌شوند.

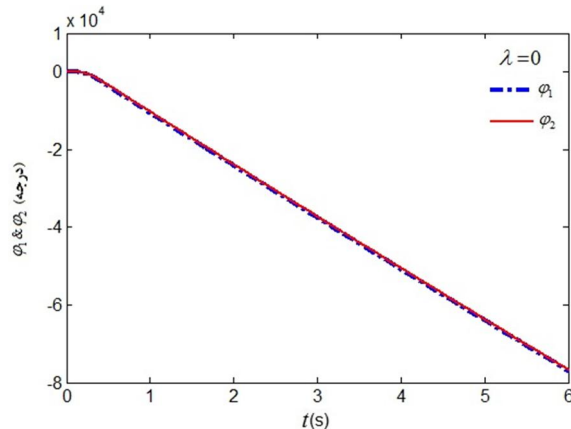
با توجه به شکل‌های 3 و 4 مشاهده می‌شود اتوبالانسر ساچمه‌ای فقط به ازای محدوده خاصی از پارامترها می‌تواند نابالانسی را برطرف کند.

7- پاسخ‌های زمانی سیستم

به منظور تأیید صحت تحلیل پایداری و همچنین بررسی رفتار دینامیکی سیستم، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به وسیله روش رانگ کوتا مرتبه 4 استخراج شد. برای به دست آوردن این پاسخ‌ها لازم است علاوه بر پارامترهای فیزیکی سیستم ($R=0.1m$ ، $M=1Kg$ ، $b=0.4m$ ، $a=0.8m$) و شرایط اولیه حاکم بر آن نیز مشخص باشد. ($EI=101.6 Nm^2$)



شکل 7- الف پاسخ زمانی دامنه حرکت سیستم



شکل 8- ب پاسخ زمانی برای موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها

در شکل 7- الف پاسخ زمانی دامنه و در شکل 7- ب پاسخ زمانی برای موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها بر اساس معادلات غیرخطی سیستم نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشاهده می‌شود سیستم به ازای $\lambda = 0$ در محدوده بالانس پایدار قرار نمی‌گیرد.

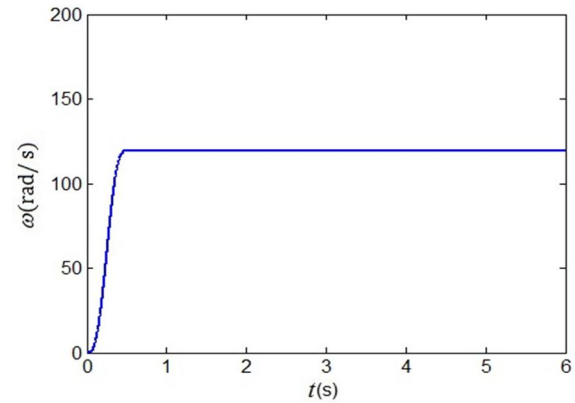
8- تعیین زمان مورد نیاز برای میرا شدن دامنه حرکت

برای تعیین زمان مورد نیاز برای میرا شدن دامنه حرکت و میرایی زوایای اوپلر با استفاده از برنامه‌ای که در نرم‌افزار متلب نوشته شده است، پوش پاسخ زمانی را بدست می‌آورد و بدین طریق، زمان مورد نیاز برای میرا شدن دامنه حرکت و میرایی زوایای اوپلر بدست می‌آید. معیار بالانس سیستم زمان رسیدن دامنه حرکت r به مقداری کمتر از 10^{-4} متر در نظر گرفته شده است. زمان رسیدن زوایای اوپلر به مقداری کمتر از 10^{-3} رادیان نیز به عنوان زمان میرایی زوایای اوپلر در نظر گرفته شده است.

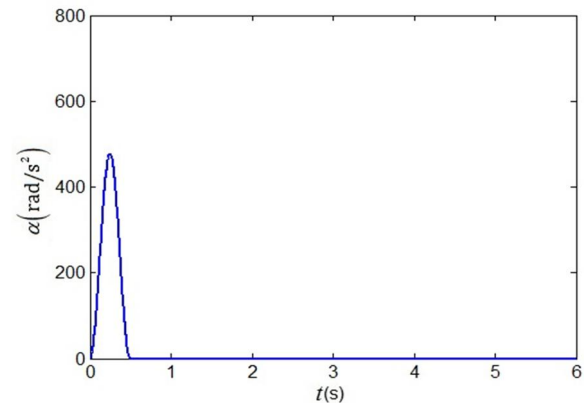
در شکل 8 پاسخ زمانی و منحنی پوش برای سیستمی با مشخصات $(\lambda = 1, \bar{m} = \xi_r = 0.02, \bar{\varepsilon} = \xi_r = 0.01, \varphi_1(0) = 40^\circ, \varphi_2(0) = 45^\circ)$ آورده شده است. برنامه، زمان مورد نیاز برای میرا شدن دامنه را 14 ثانیه نشان می‌دهد که این مطلب از شکل 8 نیز دیده می‌شود.

9- بهینه‌سازی

با توجه به اینکه نیروهای مضر ایجاد شده در اثر نابالانسی در سیستم باعث کاهش عمر، ایجاد صدا و ارتعاشات ناخواسته و در برخی موارد سبب به خطر افتادن سلامتی کاربر می‌شود بنابراین کاهش زمان مورد نیاز برای بالانس سیستم اهمیت پیدا می‌کند.



شکل 5 پروفیل سرعت زاویه‌ای بر حسب زمان



شکل 6 پروفیل شتاب زاویه‌ای بر حسب زمان

با فرض شرایط اولیه به صورت رابطه (50) و با در نظر گرفتن سرعت و شتاب زاویه‌ای مطابق روابط (51) و (52) می‌توان پاسخ‌های زمانی را برای حالت‌های مختلف به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} r(0) &= 10^{-3} \text{ m}, \theta(0) = 0^\circ, \alpha(0) = \beta(0) = 9^\circ \\ \varphi_1(0) &= a, \varphi_2(0) = b \\ \dot{r}(0) &= \dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

دلیل اینکه به $\varphi_1(0)$ و $\varphi_2(0)$ مقدار مشخصی داده نشده این است که در عمل این دو مقدار مشخصی ندارد به همین علت برای کسب نتایج واقعی‌تر با در نظر گرفتن شرایط اولیه متفاوت برای محل قرارگیری ساچمه‌ها نتایج مورد نظر استخراج شده است.

سرعت زاویه‌ای به صورت روابط (52,51) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} \omega = 240t - \left(\frac{60}{\pi}\right) \sin(4\pi t) & t < 0.5 \\ \omega = 120 & t \geq 0.5 \end{cases} \quad (51)$$

$$\dot{\omega} = \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (52)$$

در شکل‌های 5 و 6 به ترتیب پروفیل سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای بر حسب زمان نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشاهده می‌شود روتور در 0/5 ثانیه اول شتاب گرفته و به دور کاری 120rad/s می‌رسد.

با توجه به شکل 3 ملاحظه می‌شود که برای اتوبالانسی با دو ساچمه برای $\lambda = 0$ ، سیستم در حالت بالانس پایدار قرار نمی‌گیرد. این حالت متناظر با وقتی می‌باشد که هیچ‌گونه سیالی با خاصیت میرایی در بالانسر موجود نباشد و $D=0$ باشد. برای تأیید تحلیل پایداری از نمودار پاسخ زمانی که در شکل 7- الف و 7- ب آورده شده است، استفاده می‌شود.

که در آن، x_i ها بردار n بعدی متناظر با هریک از رئوس هستند. با توجه به این تعریف مراحل اجرای این الگوریتم به ترتیب زیر است [19-21]:

1- مرتب‌کردن؛ با جایگذاری بردار D در تابع هدف، f ، مقادیر آن در این رئوس محاسبه می‌شود. سپس مقادیر مورد نظر به ترتیب شایستگی مرتب شده و بهترین و بدترین راس از نقطه نظر شایستگی تعیین می‌شود. برای مسأله کمینه‌سازی می‌توان روابط (56) را نوشت:

$$\begin{aligned} f_b &= f(x_b) = \min \{f_1, f_2, \dots, f_{n+1}\} \\ f_w &= f(x_w) = \max \{f_1, f_2, \dots, f_{n+1}\} \end{aligned} \quad (56)$$

که در آن f_b و f_w به ترتیب مقدار تابع هدف به ازای بهترین و بدترین راس است.

2- محاسبه‌ی بردار مرکزوار رئوس؛ با توجه به گام 1، n راس با شایستگی بیشتر انتخاب شده و بردار مرکزوار این رئوس با رابطه (57) محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \right) - X_w \right] \quad (57)$$

3- بازتاب؛ با استفاده از مرکزوار فوق بازتاب راس x_r مطابق رابطه (58) به دست می‌آید:

$$x_r = \bar{x} + a(\bar{x} - x_w) \quad (58)$$

که در آن، a ضریب بازتاب است که باید مقداری مثبت باشد تا بازتاب در جهت مناسب انجام شود. با جانشانی بردار محاسبه شده در تابع هدف، مقدار f_r محاسبه می‌شود.

4- انبساط؛ برای مسأله کمینه‌سازی اگر $f_r < f_b$ باشد، بازتاب صورت گرفته مطابق رابطه (59) منبسط می‌شود:

$$x_e = \bar{x} + h(x_r - \bar{x}) \quad (59)$$

که در آن، h ضریب انبساط است. برای انجام انبساط مقدار این ضریب باید بزرگ‌تر از واحد باشد. با محاسبه مقدار تابع هدف، f_e ، به‌ازای بردار به دست آمده، اگر $f_e < f_r$ باشد، راس x_w با x_e جایگزین می‌شود و گام 8 اجرا می‌شود. در غیر این صورت الگوریتم با انجام گام 5 ادامه می‌یابد.

5- انقباض خارجی؛ با توجه به گام 3، اگر رابطه $f_r < f_w$ برقرار باشد، بردار حاصل از انقباض خارجی با استفاده از رابطه (60) محاسبه می‌شود:

$$x_{oc} = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) \quad (60)$$

که در آن، γ ضریب انقباض است که باید مقداری مثبت و کوچک‌تر از یک باشد. در شرط فوق f_r مقدار تابع هدف به ازای مقدار آن متناظر با بدترین راس با حذف راس x_w است. با محاسبه مقدار تابع هدف به‌ازای بردار حاصل از انقباض (f_{oc})، اگر $f_{oc} < f_r$ باشد، راس x_w با x_{oc} جایگزین می‌شود و الگوریتم گام 8 را اجرا می‌کند در غیر این صورت گام 7 اجرا می‌شود.

6- انقباض داخلی؛ با توجه به گام 3، اگر $f_w \leq f_r$ باشد، بردار حاصل از انقباض داخلی با استفاده از رابطه (61) محاسبه می‌شود:

$$x_{ic} = \bar{x} - \gamma(x_r - \bar{x}) \quad (61)$$

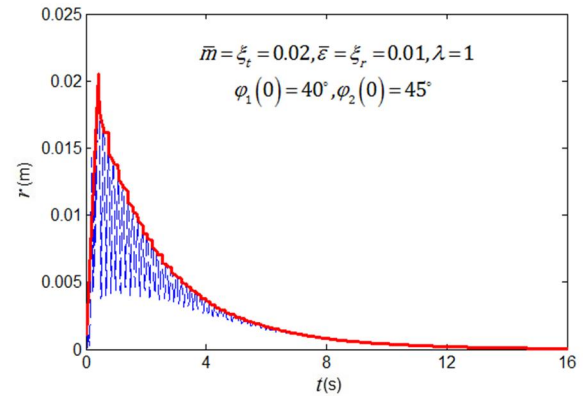
پس از محاسبه مقدار تابع هدف (f_{ic}) به‌ازای بردار حاصل از انقباض، اگر $f_{ic} < f_w$ باشد، راس x_w با x_{ic} جایگزین می‌شود و الگوریتم، گام نهایی را اجرا می‌کند در غیر این صورت گام 7 اجرا می‌شود.

7- کاهش؛ تمام رئوس به‌جز راس x_b با رابطه (62) کاهش می‌یابد:

$$x_i = x_b + d(x_i - x_b), \quad i = 1, \dots, n+1 \text{ and } i \neq b \quad (62)$$

که در آن، d ضریب کاهش و مقداری بین صفر و یک است.

8- کنترل همگرایی؛ گام‌های فوق تا همگرا شدن الگوریتم به سیمپلکس محقق کننده شرط همگرایی (63) ادامه می‌یابد:



شکل 8 پاسخ زمانی سیستم و منحنی پوش

به همین منظور در این بخش به تعیین بازه بهینه برای پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها براساس زمان کمینه برای بالانس و میرایی سریع زوایای اوپلر پرداخته شده است.

نابالانسی از مقدار $\bar{\epsilon} = 0.005$ تا $\bar{\epsilon} = 0.01$ متغیر در نظر گرفته شده است. همچنین، $\xi_r = 0.01$ و $\xi_t = 0.02$ در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این، با توجه به اینکه موقعیت اولیه ساچمه‌ها در عمل مقدار مشخصی ندارد، در این مقاله برای کسب نتایج عمومی‌تر و واقعی‌تر، پارامترهای بهینه برای سه مقدار متفاوت شرایط اولیه ساچمه‌ها که در رابطه (53) اشاره شده بدست آمده‌اند:

$$\begin{cases} IC1 \rightarrow \varphi_1 = 40^\circ, \varphi_2 = 45^\circ \\ IC2 \rightarrow \varphi_1 = 110^\circ, \varphi_2 = 115^\circ \\ IC3 \rightarrow \varphi_1 = 260^\circ, \varphi_2 = 265^\circ \end{cases} \quad (53)$$

با توجه به توضیحات فوق تابع هدف مورد استفاده در بهینه‌سازی شامل زمان لازم برای بالانس سیستم و میرایی زوایای اوپلر است که در بخش 8 نحوه استخراج این زمان‌ها توضیح داده شد. پارامترهای بهینه‌سازی شامل جرم ساچمه و ضریب میرایی هستند. برای تعیین مقادیر بهینه برای این دو پارامتر نخست پاسخ‌ها با استفاده از روش سیمپلکس نلدر-مید تعیین شده و در ادامه برای اعتبارسنجی پاسخ‌ها از الگوریتم ژنتیک پیوسته نیز استفاده شده است. محدوده پارامترها به شکل رابطه (54) فرض شده است:

$$\begin{aligned} \bar{m} &\in [0.005, 0.02] \\ \lambda &\in [0.01, 1] \end{aligned} \quad (54)$$

دلیل انتخاب کران پایین بازه برای جرم ساچمه‌ها این است که جرم ساچمه‌ها باید رابطه (48) را ارضا کنند که در این صورت کمترین مقدار جرم برابر 0/005 است. در ضمن با توجه به شکل 3 برای اینکه سیستم در حالت بالانس پایدار باشد، مقدار λ باید بزرگ‌تر از 0/01 انتخاب شود.

9-1- الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید

الگوریتم بهینه‌سازی سیمپلکس نلدر-مید از دسته روش‌های غیرگرادیانی نامقید است. زمان اجرای این روش نسبت به دیگر روش‌های غیرگرادیانی کمتر است. در ضمن، از مزایای این روش نسبت به روش‌های گرادیانی، بهینه‌سازی بدون نیاز به محاسبه پیچیده مشتقات است. این روش با تولید یک سری از سیمپلکس‌ها به تعیین جواب بهینه می‌پردازد [19].

سیمپلکس برای یک تابع n متغیره، یک چندضلعی محدب با $n+1$ رأس است که مطابق رابطه (55) تعریف می‌شود:

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\} \quad (55)$$

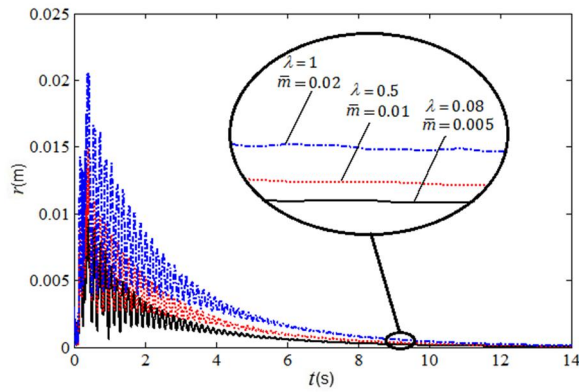
بهینه‌سازی با این الگوریتم، ابتدا یک جمعیت اولیه تولید می‌شود [22]. در بررسی حاضر جمعیت اولیه دارای 100 عضو است. در مرحله بعد مقادیر جمعیت بر حسب تابع هدف، ارزیابی و مرتب می‌شوند. پس از مرتب‌سازی نیمی از جمعیت نامناسب حذف می‌شوند. سپس با انتخاب والدین از میان داده‌های باقی‌مانده، داده‌های جدید تولید می‌شود. برای انتخاب والدین از روش احتمال تجمعی استفاده شده است. هر جفت از والدین با استفاده از عملگر تقاطع پیوسته، دو فرزند تولید کرده و با توجه به حذف نصف جمعیت در مراحل قبل، تعداد اعضاء جمعیت ثابت خواهد ماند. برای جلوگیری از همگرایی الگوریتم به کمینه‌ی محلی از عملگر جهش با نرخ جهش 0/05 استفاده شد. پس از این مرحله مقدار تابع هدف به ازای هر یک از داده‌های جدید حساب شده و مراحل فوق تا همگرایی الگوریتم به جواب بهینه ادامه یافت.

9-3- نتایج بهینه‌سازی

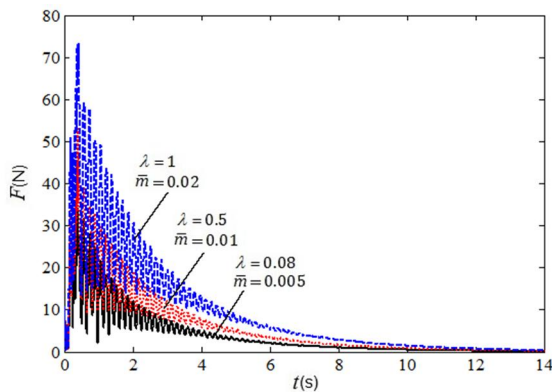
با اعمال دو روش مذکور، مقادیر بهینه جرم و ضریب میرایی با هدف کاهش زمان بالانس و میرایی سریع زوایای اوپلر به دست آمد. نتایج به دست آمده از هر دو روش در جدول 1 خلاصه شده است. همچنین شکل 9 نمونه‌ای از نمودار همگرایی برای روش سیمپلکس نلد-ر-مید برای ردیف اول از جدول 1 را نمایش می‌دهد. نمودار همگرایی حالت مذکور در مورد الگوریتم ژنتیک نیز در شکل 10 آورده شده است.

جدول 1 مقدار بهینه جرم ساچمه و ضریب میرایی بهینه برای شرایط مختلف

ردیف	مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم ژنتیک		مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم نلد-ر-مید		خروج از مرکز \bar{e}	هدف	شرایط اولیه
	λ	\bar{m}	λ	\bar{m}			
1	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
2	0/08	5×10^{-3}	0/07	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی شعاع نابالانسی	
3	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
4	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
5	0/08	5×10^{-3}	0/13	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه a	IC1
6	0/08	5×10^{-3}	0/13	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
7	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
8	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه b	
9	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
10	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
11	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی شعاع نابالانسی	
12	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
13	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
14	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه a	IC2
15	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
16	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
17	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه b	
18	0/04	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
19	0/13	5×10^{-3}	0/13	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
20	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی شعاع نابالانسی	
21	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
22	0/13	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
23	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه a	IC3
24	0/09	5×10^{-3}	0/04	5×10^{-3}	10×10^{-3}		
25	0/13	5×10^{-3}	0/13	5×10^{-3}	5×10^{-3}		
26	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	7×10^{-3}	کمینه‌سازی زمان میرایی زاویه b	
27	0/08	5×10^{-3}	0/08	5×10^{-3}	10×10^{-3}		



شکل 11 پاسخ زمانی دامنه سیستم برای ضریب میرایی‌های مختلف



شکل 12 نیروی وارد بر یاتاقان

جدول 3 ماکزیمم نیروی وارد بر یاتاقان‌ها و زمان میرا شدن نیروی وارد بر یاتاقان‌ها

ضریب میرایی (λ)	جرم ساچمه‌ها (\bar{m})	بر یاتاقان‌ها (N)	زمان میرا شدن نیروی وارد بر یاتاقان (s)
1	0/02	73/39	13/04
0/5	0/01	53/01	11/35
0/08	0/005	34/19	10/00

10- بررسی نیروی وارد بر یاتاقان‌ها

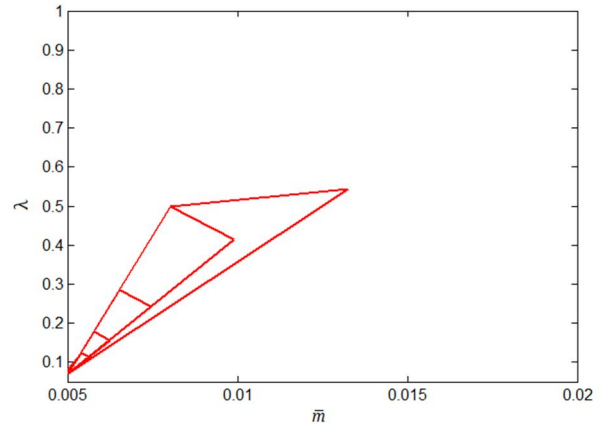
برای بررسی اهمیت موضوع، در این بخش تغییرات نیروهای وارد بر یاتاقان B در طی زمان بالانس بررسی شده است. نیروی دینامیکی وارد بر این یاتاقان از رابطه (65) بدست می‌آید:

$$F = \left(\frac{a}{L}\right) k_{eq} r \quad (65)$$

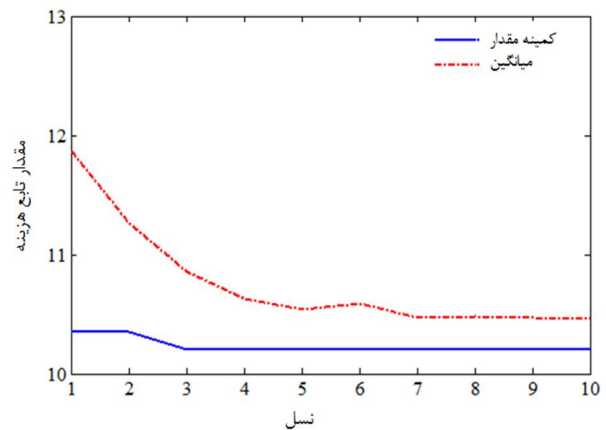
در شکل 12 نیروی وارد بر یاتاقان‌ها بر حسب زمان برای سه حالت مختلف رسم شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود نیروهای ناشی از نابالانسی در حالت انتخاب بهینه پارامترها نسبت به دو حالت دیگر سریع‌تر به صفر میل می‌کنند. نکته مهم دیگر اینکه با بهینه کردن پارامترها نه تنها نیروهای نابالانسی در یاتاقان‌ها سریع‌تر به صفر میل می‌کنند بلکه ماکزیمم دامنه نیروها به ازای پارامترهای بهینه نسبت به حالت‌های دیگر نیز کمتر است. همان‌طور که از جدول 3 مشاهده می‌شود ماکزیمم دامنه و زمان بالانس در حالت بهینه (سطر آخر جدول 3) نسبت به دو حالت غیر بهینه به ترتیب 53 و 23 درصد کاهش یافته است.

11- نتیجه‌گیری

در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های دوار محدودیت‌هایی برای نصب روتور و بالانسر در وسط شفت وجود دارد. تحت چنین شرایطی، در حین چرخش



شکل 9 نمودار همگرایی الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید



شکل 10 نمودار همگرایی الگوریتم ژنتیک

جدول 2 مقایسه‌ی همگرایی الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید و ژنتیک برای شرایط

الگوریتم	ردیف یک از جدول 1	
	زمان اجرا (min)	مقدار تابع هدف (s)
سیمپلکس نلدر-مید	35	10/2
ژنتیک	151	10/2

با توجه به جدول 1 نتیجه می‌شود بازه بهینه برای ضریب میرایی با توجه به پارامترهای فرض شده در دور کاری مذکور و برای شرایط اولیه مختلف ساچمه‌ها برابر با $[0.04 \ 0.13]$ است. با توجه به این بازه، ضریب میرایی پایین باعث بالانس سریع سیستم می‌شود و با توجه به اینکه ضریب میرایی بالانسر متناسب با لزجت سیال درون شیار می‌باشد بنابراین سیالی با لزجت پایین برای بالانس سیستم مناسب‌تر است. در ضمن، با توجه به جدول 1 برای بالانس سریع سیستم بهتر است جرم بی‌بعد هر یک از ساچمه‌ها 0/005 باشد.

در جدول 2، زمان لازم برای همگرایی الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید و ژنتیک برای ردیف اول جدول 1 نشان داده شده است همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود، سرعت همگرایی الگوریتم سیمپلکس نلدر-مید برای تابع هدف مذکور بیشتر از الگوریتم ژنتیک است.

در شکل 11 به ازای سه مقدار مختلف λ و \bar{m} با ثابت نگه داشتن سایر پارامترهای سیستم ($\xi_r = \bar{\epsilon} = 0.01$ و $\xi_t = 0.02$)، پاسخ‌های زمانی مربوط به دامنه حرکت آورده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، سیستم به ازای مقدار بهینه پارامترها ($\lambda = 0.08$ و $\bar{m} = 0.005$) نسبت به دیگر مقادیر سریع‌تر بالانس می‌شود که صحت نتایج قبلی را نشان می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} mR\omega^2 S_1^* & mR\omega^2 S_2^* & \dots & mR\omega^2 S_n^* \\ -mR\omega^2 C_1^* & -mR\omega^2 C_2^* & \dots & -mR\omega^2 C_n^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \left[\left(\frac{3EI}{a} + \frac{3EI}{b} \right) + (J_z - J) \omega^2 + mR^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \sin^2 \varphi_i^* \right] \\ \Theta_2 &= \left[\left(\frac{3EI}{a} + \frac{3EI}{b} \right) + (J_z - J) \omega^2 + mR^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i^* \right] \\ \Theta_3 &= \frac{3EI}{a^3} + \frac{3EI}{b^3} \end{aligned} \quad (67)$$

13- مراجع

- [1] ISO 1940/1, Balance quality requirements of rigid rotors, part 1-1986-09-01.
- [2] Y. Ishida, Recent development of the passive vibration control method, *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 29, pp. 2-18, 2012.
- [3] W.Y. Huang C.P. Chao J.R. Kang C.K. Sung, The application of ball-type balancers for radial vibration reduction of high-speed optic disk drives, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 3, pp. 415-430, 2002.
- [4] C. Rajalingham S. Rakheja, Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 3, pp. 453-466, 1998.
- [5] P.C.P. Chao Y.-D. Huang C.-K. Sung, Non-planar dynamic modeling for the optical disk drive spindles equipped with an automatic balancer, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, pp. 1289-1305, 2003.
- [6] E. Hearle, Automatic dynamic balancers, *Machine Design*, Vol. 22, pp. 119-124, 1950.
- [7] J.D. Alexander, An automatic dynamic balancer, *Proceeding for second southeastern conference*, Vol. 2, pp. 415-426, 1964.
- [8] G.W. Cade, Self-compensating balancing in rotating mechanisms, *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. 23, pp. 71-78, 1965.
- [9] J. Chung, D. S. Ro, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanism, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035-1056, 1999.
- [10] C.H. Hwang, J. Chung, Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races, *JSME international journal, Series C, Mechanical systems, machine elements and manufacturing*, Vol. 42, No. 2, pp. 265-272, 1999.
- [11] J. Chung, I. Jang, Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, pp. 31-43, 2003.
- [12] C.J. Lu, M.C. Wang, Sh.H. Huang, Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 884-896, 2009.
- [13] Chan t.c. sung c.k. chao c.p. non-linear suspension of an automatic ball balancer, *Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 415-424, 2011.
- [14] C.J. Lu M.C. Wang, stability analysis of a ball-rod-spring automatic balancer, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, pp.846-854, 2011.
- [15] C. Sung, T. Chan, C. Chao, C. Lu, Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 69, pp. 115-126, 2013.
- [16] D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson, Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, pp 385-403, 2011.
- [17] J.H. Ginsberg, *Advanced engineering dynamics*: Cambridge University Press, 1998.
- [18] L. Meirovitch, *Fundamentals of vibrations*: Waveland Press, 2010.
- [19] F. Gao, L. Han, Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 51, No. 1, pp. 259-277, 2012.

روتور اثر ژيروسکوپی ظاهر می‌شود. همچنین نیروهای مضر ایجاد شده در اثر نابالانسی در سیستم باعث اختلال در عملکرد سیستم، کاهش عمر سیستم، ایجاد صدا و ارتعاشات ناخواسته و در برخی موارد سبب به خطر افتادن سلامتی کاربر می‌شود. بنابراین رفع نابالانسی در سریعترین زمان ممکن اهمیت پیدا می‌کند در این تحقیق تأثیر دو پارامتر مهم ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها بر پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای در حضور اثر ژيروسکوپی بررسی شد و مقدار بهینه این پارامترها با توجه به سایر پارامترهای سیستم تعیین شد. معیارهای مورد توجه در انتخاب جواب بهینه، کمینه‌سازی زمان رسیدن به حالت بالانس و میرایی سریع زوایای اوپلر در نظر گرفته شد. نتایج کلی حاصل از این تحقیق به شرح زیر است:

- الف- با توجه به نمودارهای پایداری، بالانسر ساچمه‌ای قادر به بالانس سیستم و تصحیح زوایای اوپلر در محدوده خاصی از پارامترها است.
- ب- نتایج نشان می‌دهد که انتخاب بهینه پارامترهای سیستم باعث کاهش قابل ملاحظه همزمان ماکزیم دامنه نیروی وارد بر یاتاقان‌ها و زمان بالانس می‌شود.
- ج- نتایج نشان می‌دهد که ضریب میرایی بالانسر یکی از مهمترین پارامترهای سیستم می‌باشد که در صورت صفر بودن آن سیستم ناپایدار می‌شود در حالی که وجود ضریب میرایی پایین باعث کاهش زمان بالانس و میرایی سریع زوایای اوپلر می‌شود و با توجه به اینکه ضریب میرایی بالانسر متناسب با لزجت سیال درون شیار است، بنابراین سیالی با لزجت پایین برای بالانس سیستم مناسب‌تر است.
- د- با افزایش جرم ساچمه‌ها زمان مورد نیاز برای بالانس افزایش می‌یابد و مقدار بهینه جرم ساچمه‌ها به صورت $\bar{m} = 1/2\bar{\varepsilon}_{Max}$ بدست می‌آید که در آن ماکزیم نابالانسی بی‌بعد در سیستم است.

12- پیوست

$$K^* = \begin{bmatrix} -(M + nm)\omega^2 + \Theta_3 & \left(mR \sum_{i=1}^n S_i^* + M\varepsilon \sin \psi^* \right) \omega^2 \\ c_t \omega & - \left(mR \sum_{i=1}^n C_i^* + M\varepsilon \cos \psi^* \right) \omega^2 \\ - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \sin \psi^* & - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \cos \psi^* \\ - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \cos \psi^* & \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \sin \psi^* \\ mR\omega^2 S_1^* & mR\omega^2 C_1^* \\ mR\omega^2 S_2^* & mR\omega^2 C_2^* \\ \vdots & \vdots \\ mR\omega^2 S_n^* & mR\omega^2 C_n^* \\ - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \sin \psi^* & - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \cos \psi^* \\ \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \cos \psi^* & - \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2} \right) \sin \psi^* \\ \Theta_1 & -mR^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i^* \cos \varphi_i^* \\ -mR^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i^* \cos \varphi_i^* & \Theta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- [21] P. Reiner, B. M. Wilamowski, Nelder-Mead enhanced extreme learning machine, in *Proceeding of IEEE*, pp. 225-230, 2013.
- [22] R.L. Haupt, S.E. Haupt, *Practical genetic algorithms*: John Wiley & Sons, 2004.

- [20] J.C. Lagarias, B. Poonen, M. H. Wright, Convergence of the Restricted Nelder-Mead Algorithm in two dimensions, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 22, No. 2, pp. 501-532, 2012.