



## تخمین دقیق فرکانس‌های طبیعی به کمک روش حذف اثر جرم در آزمایش مodal محیطی

محمد مهدی خطیبی<sup>1</sup>، محمد رضا آشوری<sup>2\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان  
۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران  
\* سمنان، صندوق پستی 35195363

### چکیده

آزمایش مodal کلاسیک ابزار قدرتمندی برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها می‌باشد و در برخی از سازه‌ها به دلیل عدم امکان تحریک یا اندازه‌گیری نیروهای وارد به آن‌ها انجام این آزمایش دشوار یا غیرممکن است. بنابراین برای شناسایی رفتار دینامیکی این نوع سازه‌ها باید از روش‌های آنالیز مodal محیطی استفاده کرد. در عمل مدل‌هایی که به وسیله آزمایش مodal محیطی ایجاد می‌شوند، با مشکلات زیادی مواجه هستند. یکی از این مشکلات، خطاهایی است که به دلیل استفاده از وسایلی مانند شتاب‌سنج‌ها ایجاد می‌شود و موجب کاهش دقت نتایج حاصل می‌گردد. معمولاً نصب شتاب‌سنج‌ها بر روی سازه، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش با مقادیر دقیق اختلاف خواهد داشت. در این مقاله، یک روش جدید برای حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مodal محیطی ارائه شده است. به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی، از مدل یک سیستم جرم- فنر- دمپر استفاده شده است. همچنین با انجام آزمایش‌های مodal کلاسیک و مodal محیطی بر روی یک صفحه فلزی، روش تحت ارزیابی تجربی قرار گرفته است. نتایج حاصل، نشان دهنده کارایی روش پیشنهادی در حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها و تخمین دقیق فرکانس‌های طبیعی سازه است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: ۱۹ آبان ۱۳۹۲  
پذیرش: ۱۶ بهمن ۱۳۹۲  
ارائه در سایت: ۳۰ شهریور ۱۳۹۳

کلید واژگان:  
فرکانس‌های طبیعی  
اثر جرمی شتاب‌سنج  
آنالیز مodal محیطی

## Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing

Mohammad Mahdi Khatibi<sup>1</sup>, Mohammad Reza Ashory<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Semnan Univ., Semnan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Tehran Univ., Tehran, Iran

\* P.O.B. 35195363 Semnan, Iran, m\_ashoori@semnan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 November 2013  
Accepted 05 February 2014  
Available Online 21 September 2014

**Keywords:**  
Natural Frequencies  
Mass-loading Effect of Accelerometer  
Operational Modal Analysis

### ABSTRACT

Conventional modal testing is known as a powerful tool for dynamic analysis of structures. However, for some engineering structures, conventional modal testing is difficult or even impossible to conduct due to the problems associated with the artificial excitation of structure. Operational Modal Analysis (OMA) is one solution to deal with these cases. In OMA the structure is excited by ambient forces and only the responses are measured and taken into account. Accelerometers are the traditional tools for measuring the responses of structure. It is well known that the measured responses are contaminated by bias errors corresponding to the mass-loading effect of accelerometers. This causes the natural frequencies of structure are measured lower than the real values. In this paper a new method is proposed for eliminating the mass-loading effects of accelerometers from measured responses in OMA. A numerical model of a mass-spring-damper system is used for validation of the method. Also a steel plate is used for experimental validation of the proposed approach. The results are confirmed by those of conventional modal testing. Both numerical and experimental results show that the proposed method can effectively eliminate the mass-loading effects of accelerometers from measured responses in OMA. Also, the method has the ability to correct the measured natural frequencies from OMA accurately.

### 1- مقدمه

آزمایش Modal، روشی تجربی برای مدل کردن رفتار دینامیکی سازه‌ها و شناسایی رفتار ارتعاشی سازه از طریق اندازه‌گیری است. از آنجا که در آزمایش، فرضیات اندکی برای سازه در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نتایج قابل اعتمادتری نسبت به مدل‌های عددی مانند مدل اجزای محدود<sup>1</sup> بدست

1- Finite Element Model

Please cite this article using:

M.M. Khatibi, M.R. Ashory, Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 183-192, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مي شود و به منظور حذف جرم ساير شتاب سنجها باید الگوريتم فوق از بند 3 برای هر شتاب سنج تکرار شود و در نهايىت با استفاده از نتایج حاصل و با فرض خطى بودن رفتار سازه اثر جرمى تمامى شتاب سنجها را حذف کرد [16].

تمامى روش های حذف اثر جرم از الگوريتم مشابه آنچه ذکر شد استفاده می کنند و تفاوت آن ها در روابطی است که در بند 6 بكار می گيرند. همچنین همه اين روش ها از توابع پاسخ فركانسي استفاده می کنند که به منظور محاسبه اين توابع باید نيزو وارد به سازه و پاسخ حاصل از آن اندازه گيرى شود [6].

بسیارى از سازه های صنعتى موجود در محبيت پيرامون ما نظير خودورها، پمپها، دستگاه های ماشين کاري و غيره سازه هایي پيچیده اند که طراحي و تعمير و نگهداری آن ها از اهميت ويزه اى برخوردار است. بنابراین تحليل ديناميكي چنین سازه هایي به منظور محاسبه خصوصيات ديناميكي از اهميت فوق العاده اى برخوردار است. اين سازه ها معمولاً تحت تحريك نيزوهای داخلی يا محبيت هستند که اندازه گيرى چنین نيزوهایي دشوار يا غيرممکن است. در نتيجه استفاده از آناليز مodal کلاسيك برای چنین سازه هایي امكان پذير نخواهد بود. وجود چنین مشكلاتي محققان را بر آن داشت تا به ارائه روش های نوين آناليز مodal، بر مبنای اندازه گيرى فقط پاسخ پيردادزند. اين روش ها، آناليز مodal محبيت<sup>4</sup> ناميده می شوند. در اين روش ها، سازه توسيط بارهای محبيت تحريك می شود و فقط با استفاده از آناليز پاسخ سازه پaramترهاي Modal محاسبه می شوند [17].

از آنجا که در آزمایش Modal محبيت، سازه توسيط محبيت تحريك می شود و امكان اندازه گيرى نيز و وجود ندارد. در نتيجه امكان محاسبه توابع پاسخ فركانسي بطور مستقيم وجود نخواهد داشت و در نتيجه نمى توان از روش هایي که تاکنون برای حذف اثر جرم ارائه شده اند استفاده نمود و به اصلاح فركانس های طبيعي پرداخت. البته می توان با استفاده از پaramترهاي Modalی که از آناليز پاسخ بدست می آيند، توابع پاسخ فركانسي را محاسبه کرد [6] ولی از آنجا که نيزو تحريك، اندازه گيرى نشده است، شكل مدها محاسبه شده از آناليز پاسخ، نرمال شده جرمي نisitnd [18] و در نتيجه تابع پاسخ فركانسي به طور صحيح قابل محاسبه نisit. برای محاسبه صحيح تابع پاسخ فركانسي باید ابتدا شكل مدها نرمال شده جرمي را محاسبه کرد، بدین منظور باید هر مود را در ضربى ضرب نمود که اصطلاحاً ضريب ميزان سازی<sup>5</sup> ناميده می شود و البته مجھول است. محاسبه ضراب ميزان سازی<sup>6</sup> ناميده می شود و آنها شده اند. اين موضوع تاکنون توسيط Mحققان مختلف بررسى شده است و روش هایي نيز برای اصلاح و محاسبه ضراب ميزان سازی ارائه شده اند [18]. در اين روش ها پس از انجام آزمایش اصلی، جرم هایي بر روی سازه نصب می شوند و آزمایش تکرار می شود و با استفاده از نتایج آزمایش اصلی و آزمایش سازه با جرم، ضراب ميزان سازی محاسبه می شوند. اما از آنجا که برای حذف اثر جرم شتاب سنجها باید در هر مرحله فقط يك جرم بر روی سازه نصب شود، در نتيجه نمى توان از نتایج آزمایش ميزان سازی برای اصلاح اثر جرمى شتاب سنجها استفاده کرد و باید الگوريتم حذف اثر جرم که در ابتداء به ان اشاره شد، اجرا شود.

از آنجا که در هر دو روش ميزان سازی و حذف اثر جرم، از اعمال تعبيير جرم به سازه و تكرار آزمایش استفاده می شود، به نظر رسيد که می توان با توسيعه روابط حذف اثر جرم به روابط جديدي دست یافت که به كمک آنها، هم ضراب ميزان سازی محاسبه شوند و هم فركانس های طبيعي اصلاح شوند.

4- Operational Modal Analysis (OMA)  
5- Scaling Factor

اضافى در نتایج حاصل از آزمایش خطأ ايجاد مى کند [5]. يك شتاب سنج سبك، اثر بارگذارى كمى روی سازه دارد ولی دارای حساسيت پايان است و از طرفى اين نوع شتاب سنجها هميشه در دسترس نisitند. بنابراین شتاب سنجي با جرم حاصل كه قادر به اندازه گيرى پاسخ های سازه در محدوده فركانسي مدنظر باشد، بهترین گزينه برای انتخاب است.

بنابراین، اثر بارگذارى جرمى شتاب سنج به عنوان منبع از خطأ در آزمایش Modal اجتناب ناپذير خواهد بود. شتاب سنج سوار شده بر روی يك سيسitem ارتعاشي، ديناميک سازه را تغيير مى دهد و خطاهای را در توابع پاسخ فركانسي اندازه گيرى شده ايجاد مى کند که موجب ايجاد نتایج غيرواقعي خواهد شد، بطوري که فركانس های تشديد اندازه گيرى شده كمتر از مقادير واقعی بدست می آيند. در سازه هایي که محاسبه دقيق پاسخ فركانسي سازه مدنظر باشد، مانند صنایع نظامي و يا پژوهشى، حذف چنین خطاهایي به شدت حائز اهميت خواهد بود [5]. بنابراین روش هایي که به حذف اثر جرم اضافي از سازه پرداخته اند؛ روش هایي مهم و مناسب برای غلبه بر اين مشكل می باشنند.

روش حذف جرم شتاب سنجها در نقاط تحريك سازه، توسيط ايونيز در مرجع [6] شرح داده شده است. همچنین انتشاراتي درباره اثر بارگذارى جرمى شتاب سنج در نقاط تحريك سازه نisiz، وجود دارد [6-8]. بطوري كلی، تاکنون روش های اندکي جهت حذف اثر جرم شتاب سنجها ارائه شده است، از جمله روشي که دکر و ويتفلد در مرجع [9] و سيلوا و همكارانش در مرجع [10,11] ارائه داده اند. كلاسترن من نيز به كمك روش اصلاح سازه بر مبنای توابع پاسخ فركانسي تجربi<sup>1</sup> يك راه حل كلی برای تصحيح اثرات بارگذارى جرم شتاب سنجها ارائه کرده است [12]. همچنین سالنيتirk و كاكار نيز به حذف اثر جرم شتاب سنجها پرداخته اند و اثرات نامطلوب نويز اندازه گيرى را در روش های قبلی کاهش داده اند [13,14]. سيلوا و همكارانش نيز روشي برای تعبيين توابع پاسخ فركانسي<sup>2</sup> غير قابل اندازه گيرى با استفاده از يك مجموعه از داده های اندازه گيرى شده سازه همراه با جرم اضافي ارائه کرده اند [15]. علاوه بر روش های فوق، در مرجع [16] روشي برای تعبيين كيفيت اندازه گيرى ها در آزمایش Modal در ارتباط با اثرات بارگذارى جرم شتاب سنجها پيشنهاد شده است. تمامي روش هایي که تاکنون ارائه شده اند بر اساس توابع پاسخ فركانسي حاصل از آزمایش به حذف اثر جرم شتاب سنجها می پردازند [14]. الگوريتم كلی اين روش ها را می توان بصورت زير ببيان کرد:

1- اجرای آزمایش Modal کلاسيك سازه.

2- محاسبه توابع پاسخ فركانسي برای آزمایش بند 1.

3- نصب جرم بر روی سازه در محل نصب يكى از شتاب سنجها.

4- تكرار آزمایش Modal کلاسيك برای سازه هایي با جرم اضافي.

5- محاسبه توابع پاسخ فركانسي جديid برای آزمایش بند 4.

6- بكار گيرى يكى از روش های حذف اثر جرم به منظور محاسبه تابع پاسخ فركانسي اصلاح شده با استفاده از توابع پاسخ فركانسي بدست آمده در بندهای 2 و 5.

7- تخمين فركانس های طبيعي اصلاح شده با اجرای روش انتخاب قله<sup>3</sup> بر روی تابع پاسخ فركانسي اصلاح شده بند 6.

با اجرای الگوريتم فوق، اثر جرم شتاب سنج متناظر با موقعیت نصب جرم اضافي از توابع پاسخ فركانسي و در نتيجه فركانس های طبيعي حذف مى شود. به عبارت دیگر فقط اثر جرم يك شتاب سنج از فركانس های طبيعي حذف

1- Structural Modifications using Experimental Frequency Response Functions (SMURF)

2- Frequency Response Functions (FRFs)

3- Peak Picking Method

روابط (4) و (5) محاسبه می شوند.

$$O = US^{1/2}T \quad (4)$$

$$C = O(1:i,:) \quad (5)$$

ماتريس  $C$  معادل با / سطر ابتدائي ماتريس  $O$  است و / تعداد کاتال هاي اندازه گيري می باشد. با استفاده از ماتريس مشاهده پذيری مبسوط می توان ماتريس سیستم را محاسبه کرد (رابطه (6)).

$$A = O(1:i-1,:)^+ O(1:i-1,:)^+ O(1:i,:) \quad (6)$$

ماتريس  $A$  بيانگر ماتريس سیستم و بالا نويس  $+$  نشان دهنده شبه معکوس است. در رابطه (6) عبارت  $(:)^+$ ، / سطر انتهائي و عبارت  $(:)$ ، / سطر ابتدائي ماتريس مشاهده پذيری را حذف می کند.

با استفاده از تجزيه مقدار ویژه ماتريس سیستم (رابطه (7)) قطب هاي سیستم ( $\mu$ ) و بردار هاي ویژه متاظر با هر قطب ( $\psi$ ) بدست می آيند. اين قطب ها در نموداري به نام نمودار پايداري  $7$  ترسيم می شوند [20].

$$A = [\psi] [\psi]^{-1} \quad (7)$$

در هر مرتبه از مدل در نمودار پايداري، قطب هاي پايدار، ناپايدار و نويزي با توجه به معيارهای ذكر شده (برای تشخيص نوع قطب) در مرجع [19] از يكديگر متماييز می شوند. سپس با انتخاب مرتبه بهينه برای مدل [21] و بر اساس قطب هاي پايدار، فركانس هاي طبيعي، نسبت هاي ميرايي و شكل مودهای سیستم طبق روابط (8) تا (11) محاسبه می شوند [20].

$$\lambda = \frac{\ln(\mu)}{\Delta T} \quad (8)$$

$$\omega = |\lambda| \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|} \quad (10)$$

$$[\phi] = C[\psi] \quad (11)$$

$\Delta T$  دوره نمونه برداري،  $\lambda$  فركانس مختلط،  $\omega$  فركانس طبيعي،  $\zeta$  نسبت ميرايي و  $[\phi]$  ماتريس شكل مود است.

## 2- روش پيشنهادي حذف اثر جرم

همان طور که در مقدمه بيان شد، روش هايی که تاكتون برای حذف اثر جرم شتاب سنج ها ارائه شده اند فقط برای آناليز مodal کلاسيك قابل استفاده اند، زيرا همگي بر اساس توابع پاسخ فركانسي عمل می کنند [14] و آنجا که در آزمایش مodal محطي نيري تحريك اندازه گيري نمی شود، امكان محاسبه مستقيمه توابع پاسخ فركانسي وجود ندارد و در نتيجه نمی توان از روش هاي که تاكتون برای حذف اثر جرم ارائه شده اند استفاده نمود و به اصلاح فركانس هاي طبيعي پرداخت. البته می توان با استفاده از پارامترهای مodalی که از آناليز پاسخ بدست می آيند، توابع پاسخ فركانسي را محاسبه نمود ولی از آنجايي که نيري تحريك، اندازه گيري نشده است، شكل مودهای Modal محطي، نرمال شده جرمي نیستند [18] و در نتيجه تابع پاسخ فركانسي به طور صحيح قابل محاسبه نیست و ابتدا باید شكل مودهای Nرمال شده جرمي را محاسبه کرد که این امر می بایست در فرایند دیگري صورت بگيرد و پس از آن به اصلاح فركانس هاي طبيعي پرداخته شود. بنابراین در اين بخش روش و الگوريتمي ارائه می شود که به کمک آن می توان با استفاده از نتائج حاصل از آناليز Modal محطي بطور همزمان، ضمن اصلاح شكل Modal شبه سازه به حذف اثر جرم شتاب سنج ها از فركانس هاي طبيعي پرداخت.

7- Stabilization Diagram

بنابراین در اين مقاله، روابط و الگوريتم جديدي ارائه می شود که بر مبنای آن می توان ضمن اصلاح شكل Modal شبه سازه به حذف اثر جرم شتاب سنج ها از فركانس هاي طبيعي در آزمایش Modal محطي پرداخت.

به منظور بررسی عددی روش پيشنهادي، از مدل يک سیستم جرم- فنر- دمپر پنج درجه آزادی<sup>1</sup> استفاده شده است. برای اجرای يک آزمایش شبیه سازی شده در نرم افزار متلب، شتاب سنج هاي فرضي بر روی هر يک از جرم ها نسبت شده اند. سپس مدل در محيط نرم افزار متلب در تمام درجات آزادی تحت تحريك اتفاقی قرار گرفته و پاسخ آن اندازه گيري شده است. با اجرای روش زيرفضاهای اتفاقی بر مبنای کواريانس بر روی پاسخ هاي اندازه گيري شده، پارامترهای Modal محاسبه و با مقادير دقيق مقایسه شده اند. به دليل قرار گرفتن چندين شتاب سنج بر روی سازه، فركانس هاي طبيعي حاصل با مقادير دقيق اختلاف خواهند داشت. بنابراین با بكارگيري روش پيشنهادي، فركانس هاي طبيعي اصلاح شده اند. همچنین، برای ارزیابي تجريبي روش، آزمایش هاي Modal کلاسيك و Modal محطي بر روی يک صفحه فلزی انجام شده اند و نتائج حاصل با يكديگر مقایسه شده اند. از آنجا که برای اندازه گيري پاسخ از تعدادي شتاب سنج استفاده شده است، فركانس هاي طبيعي حاصل با مقادير دقيق اختلاف خواهند داشت. بنابراین به کمک روش پيشنهادي، فركانس هاي طبيعي اصلاح شده اند. نتائج حاصل از بررسی هاي عددی و تجريبي، دقت و کارایي مناسب روش و الگوريتم پيشنهادي را در اصلاح فركانس هاي طبيعي شبه سازه نشان می دهد.

## 2- توري

### 2-1- روش زيرفضاهای اتفاقی بر مبنای کواريانس

در اين روش، کواريانس بين پاسخ هاي زمانی در ماتريسي به نام ماتريس بلوكی ثوبليتز<sup>2</sup> (رابطه (1)) جمع آوري می شود [19].

$$T_{1|i} = \begin{bmatrix} R_i & R_{i-1} & \dots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \dots & R_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \dots & R_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$R_i$  کواريانس بين پاسخها است و از رابطه (2) محاسبه می شود [19].

$$R_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T \quad (2)$$

كه  $N$  تعداد نمونه برداري،  $y_k$  بردار خروجي سیستم در زمان  $k$ ، بالاتر و  $T$  نماد تراههاده<sup>3</sup> و  $i$  تأخير زمانی ايجاد شده است.

تجزие مقادير تکين يک ابزار معتبر عددی برای تخمين مرتبه يک ماتريس است، اين ابزار برای ماتريس بلوكی ثوبليتز در رابطه (3) بكار گرفته می شود [19].

$$T_{1|i} = USV^T \quad (3)$$

ماتريس هاي  $U$  و  $V$  در رابطه (3) ماتريس هاي متعامد هستند و  $S$  يک ماتريس قطری است که شامل مقادير ویژه مثبت است.

با استفاده از تجزие مقادير تکين<sup>4</sup> ماتريس ثوبليتز، ماتريس مشاهده پذيری مبسوط<sup>5</sup> و ماتريس کنترل پذيری اتفاقی مبسوط برگردن<sup>6</sup> به ترتيب از

1- Degree of Freedom

2- Toeplitz

3- Transpose

4- Singular Value Decomposition (SVD)

5- Extended Observability Matrix

6- Reversed Extended Stochastic Controllability Matrix

كه  $A_{\parallel}$ ،  $A_{jj}$  و  $A_{ji}$  اکسلرنس های اصلی و  $A_{\parallel}^{(j)}$  اکسلرنس ناشی از جرم اضافی در نقطه  $j$  است.

رابطه (18) رابطه کلی برای اصلاح سیستمی است که جرم  $m$  به آن اضافه شده است. شرایط مختلفی را می توان برای رابطه (18) در نظر گرفت. اگر نقطه اعمال نیرو، محل اتصال شتاب سنج و نقطه پاسخ با هم یکی باشند ( $i = j = l$ ). رابطه (19) بدست می آید [۵.۹].

$$A_{\parallel}^{(l)} = \frac{A_{\parallel}}{1 + m A_{\parallel}} \quad (19)$$

که در آن  $A_{\parallel}^{(l)}$ تابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری شده است.

اگر رابطه (19) بر حسب تابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری شده، مرتب و بازنویسی شود، رابطه (20) حاصل می شود.

$$A_{\parallel} = \frac{A_{\parallel}^{(l)}}{1 - m A_{\parallel}^{(l)}} \quad (20)$$

با توجه به رابطه (20)، اگر جرم  $m$  بر روی سازه قرار گیرد، رابطه (21) بدست خواهد آمد.

$$A_{\parallel} = \frac{\bar{A}_{\parallel}^{(l)}}{1 - m \bar{A}_{\parallel}^{(l)}} \quad (21)$$

که در آن  $\bar{A}_{\parallel}^{(l)}$ تابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری شده پس از قرار گیری جرم  $m$  بر روی سازه است.

می توان توابع پاسخ فرکانسی  $A_{\parallel}^{(l)}$  و  $\bar{A}_{\parallel}^{(l)}$  را بر حسب پارامترهای مودال بیان کرد (روابط (22) و (23)).

$$A_{\parallel}^{(l)} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r^2 \psi_{lr}^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j 2 \zeta_r \omega \omega_r} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) \quad (22)$$

$$\bar{A}_{\parallel}^{(l)} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r^2 \psi_{lr}^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j 2 \zeta'_r \omega \omega'_r} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) \quad (23)$$

که  $\psi_{lr}$  و  $\psi'_{lr}$  درایه شکل مودهای نامیزان،  $\alpha_r$  و  $\beta_r$  ضرایب نامیزان سازی مود  $r$  و  $\omega_r$  و  $\omega'_r$  فرکانس های طبیعی مود  $r$  و  $\zeta_r$  و  $\zeta'_r$  ضرایب دمیینگ مود  $r$  ام می باشند.

با مقایسه روابط (20) و (21) و با استفاده از روابط (22) و (23)، رابطه (24) بدست می آید.

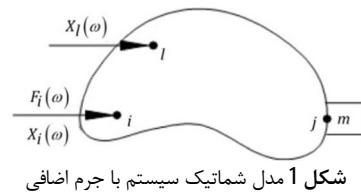
$$\frac{\sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega)}{1 + m \omega^2 \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega)} = \frac{\sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega)}{1 + m' \omega^2 \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega)} \quad (24)$$

با ساده سازی رابطه (24)، رابطه (25) حاصل می شود.

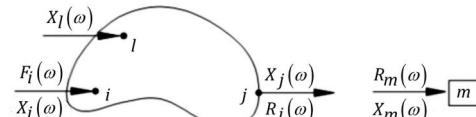
$$\sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) - \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) = -\omega^2 (m' - m) \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) \quad (25)$$

رابطه (25)، رابطه اساسی برای حذف اثر جرم و اصلاح فرکانس های طبیعی است. در این رابطه فقط ضرایب  $\alpha_r$  و  $\beta_r$  مجهول هستند. با بسط رابطه (25) به ازای فرکانس های مختلف، ضرایب مذکور محاسبه می شوند. پس از محاسبه ضرایب با استفاده از رابطه (20) یا (21) اثر جرم شتاب سنجها از نتایج حاصل از آزمایش حذف خواهد شد.

برای توضیح بهتر نحوه عملکرد رابطه (25)، این رابطه بازی دو مود



شکل 1 مدل شماتیک سیستم با جرم اضافی



شکل 2 دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر سیستم

بدین منظور، شکل 1 در نظر گرفته شده و جرم ثانویه  $m$ ، در نقطه  $j$  به سازه متصل شده است. نیرو سازه را در نقطه  $i$  تحریک کرده و پاسخ در نقطه  $i$  اندازه گیری می شود. به منظور جداسازی اثر جرم، دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر سیستم ترسیم شده است (شکل 2).

رابطه (12) تا (14) بیانگر معادلات حاکم بر سیستم شکل (2) می باشند.

$$X_l = \alpha_{\parallel} F_i + \alpha_{jj} R_j \quad (12)$$

$X_l$  پاسخ فرکانسی در نقطه  $i$ ،  $\alpha_{\parallel}$  و  $\alpha_{jj}$  رسپتنس بین نقاط  $i$  و  $j$  ترتیب  $i$  و  $j$  نیروی تحریک در نقطه  $i$  و  $R_j$  نیروی عکس العمل در نقطه  $j$  است.

$$X_j = \alpha_{ji} F_i + \alpha_{jj} R_j \quad (13)$$

$X_j$  پاسخ فرکانسی در نقطه  $j$ ،  $\alpha_{jj}$  و  $\alpha_{ji}$  رسپتنس بین نقاط  $j$  و  $i$  ترتیب  $j$  و  $i$  می باشد.

همچنین برای جرم ثانویه  $m$ ، پس از جدا شدن از سازه اصلی (شکل 2)، رابطه (14) برقرار است.

$$X_m = \alpha_{mm} R_m \quad (14)$$

$X_m$  پاسخ فرکانسی در نقطه  $m$ ،  $\alpha_{mm}$  رسپتنس در نقطه  $m$  و  $R_m$  نیرو در نقطه  $m$  می باشد. همچنین برای  $\alpha_{mm}$  در رابطه (14)، رابطه (15) برقرار است.

$$\alpha_{mm} = -\frac{1}{m \omega^2} \quad (15)$$

با حذف نیروهای عکس العمل و جابجایی در نقطه اتصال جرم به سازه، رابطه (16) بدست آمده است [16].

$$X_l = (\alpha_{jj} - \frac{\alpha_{ji} \alpha_{lj}}{\alpha_{mm} + \alpha_{jj}}) F_i = \alpha_{\parallel}^{(j)} F_i \quad (16)$$

که  $\alpha_{\parallel}^{(j)}$  رسپتنس ناشی از جرم اضافی در نقطه  $j$  و بین دو نقطه  $i$  و  $j$  می باشد. از رابطه (16)،  $\alpha_{\parallel}^{(j)}$  با رسپتنس های اصلی مرتبط می شود و رابطه (17) حاصل می شود.

$$\alpha_{\parallel}^{(j)} = \alpha_{\parallel} - \frac{\alpha_{ji} \alpha_{lj}}{\alpha_{mm} + \alpha_{jj}} \quad (17)$$

$\alpha_{\parallel}$ ،  $\alpha_{jj}$  و  $\alpha_{ji}$  رسپتنس های اصلی هستند. با ضرب طرفین رابطه (17) در  $\omega^2$ ، رابطه بین اکسلرنس ها<sup>2</sup> بدست می آید (رابطه (18)).

$$A_{\parallel}^{(j)} = A_{\parallel} - \frac{A_{ji} A_{lj}}{A_{mm} + A_{jj}} \quad (18)$$

1- Receptance

2- Accelerance

کمک رابطه (22) محاسبه کرد. با استفاده از این تابع پاسخ فرکانسی و به کمک رابطه (20) می‌توان تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را بدست آورد و فرکانس‌های طبیعی را اصلاح نمود. در نتیجه می‌توان الگوریتم کلی روش جدید را بصورت زیر بیان نمود:

1- اجرای آزمایش مودال محیطی سازه (در این آزمایش تعدادی شتاب‌سنج بر روی سازه نصب شده است).

2- محاسبه پارامترهای مودال به کمک آنالیز پاسخ بند 1.

3- نصب جرم بر روی سازه در محل نصب یکی از شتاب‌سنج‌ها.

4- تکرار آزمایش مودال محیطی برای سازه‌ی با جرم اضافی.

5- محاسبه پارامترهای مودال جدید به کمک آنالیز پاسخ بند 4.

6- محاسبه ضرایب میزان‌سازی شکل مودها به کمک رابطه (25) و پارامترهای مودال بدست آمده در بندهای 2 و 5.

7- محاسبه تابع پاسخ فرکانسی با استفاده از پارامترهای مودال (بند 2) و ضرایب میزان‌سازی (بند 6) به کمک رابطه (22).

8- محاسبه تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی بند 7 به کمک رابطه (20).

9- تخمين فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده با اجرای روش انتخاب قله بر روی تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده بند 8.

با اجرای الگوریتم فوق، اثر جرم شتاب‌سنج منتظر با موقعیت نصب جرم اضافی از فرکانس‌های طبیعی حذف می‌شود. به عبارت دیگر فقط اثر جرم یک شتاب‌سنج از فرکانس‌های طبیعی حذف می‌شود و به منظور حذف جرم سایر شتاب‌سنج‌ها باید الگوریتم فوق از بند 3 برای هر شتاب‌سنج تکرار شود و در نهایت با استفاده از نتایج حاصل و با فرض خطی بودن رفتار سازه اثر جرمی تمامی شتاب‌سنج‌ها حذف خواهد شد.

### 3- شبیه‌سازی 1-3 مدل عددی

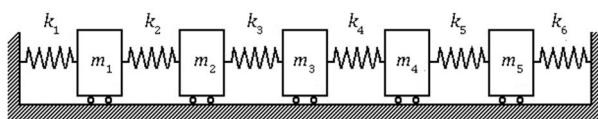
به منظور شبیه‌سازی روش پیشنهادی، از مدل یک سیستم پنج درجه آزادی استفاده شده است (شکل 3).

دیپینگ سیستم به صورت تناوبی در نظر گرفته شده است و ضرایب دیپینگ به همراه سایر پارامترهای سیستم در جدول 1 آمده است.

پس از استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر مدل (شکل 3)، ماتریس‌های جرم و سختی سیستم بدست آمده‌اند. به کمک تجزیه مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های جرم و سختی، فرکانس‌های طبیعی محاسبه و در جدول 2 ارائه شده‌اند.

جدول 1 مقادیر جرم، سختی و ضرایب دیپینگ سیستم

	شماره	مقدار جرم (kg)	مقدار سختی (N/m)	ضریب دیپینگ (%)
0/075	1	2	100000	0/075
0/131	2	1/2	101000	0/131
0/190	3	1	102000	0/190
0/236	4	1/3	103000	0/236
0/286	5	1/4	104000	0/286
-	6	-	109000	-



شکل 3 مدل سیستم 5 درجه آزادی منظر

نوشته شده است (رابطه (26)).

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 A_1(\omega) + \alpha_2^2 A_2(\omega) - \beta_1^2 B_1(\omega) - \beta_2^2 B_2(\omega) = \\ -\omega^2(m'-m)(\alpha_1^2 A_1(\omega) + \alpha_2^2 A_2(\omega)) \\ - (\beta_1^2 B_1(\omega) - \beta_2^2 B_2(\omega)) \end{aligned} \quad (26)$$

با ساده‌سازی رابطه (26)، و تقسیم طرفین این رابطه بر  $\beta_1^2$  رابطه (27) بدست آمده است.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} A_1(\omega) + \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} A_2(\omega) - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} B_2(\omega) + \alpha_1^2 \omega^2 M A_1(\omega) B_1(\omega) \\ + \alpha_2^2 \omega^2 M A_2(\omega) B_1(\omega) - \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \omega^2 M A_1(\omega) B_2(\omega) \\ - \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \omega^2 M A_2(\omega) B_2(\omega) = B_1(\omega) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $M$  بصورت رابطه (28) تعریف می‌شود.

$$M = (m' - m) \quad (28)$$

در رابطه (27)، ضرایب  $\alpha_1^2$ ،  $\alpha_2^2$ ،  $\beta_1^2$  و  $\beta_2^2$  مجھول و سایر عبارات معلوم هستند. از آنجا که رابطه (27) بازای تمامی فرکانس‌ها برقرار است، می‌توان با ایجاد یک دستگاه معادلات (که به ازای تمامی فرکانس‌ها تشکیل می‌شود) ضرایب مجھول را محاسبه کرد (رابطه (29)).

$$\left[ \text{Coeff.} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \\ \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \\ \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \\ \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ B_1(\omega_p) \end{bmatrix} \quad (29)$$

تعداد نقاط فرکانسی مدنظر است و  $\left[ \text{Coeff.} \right]$  از رابطه (30) بدست می‌آید.

$$\left[ \text{Coeff.} \right] = \begin{bmatrix} C_1(\omega_1) & C_2(\omega_1) & \cdots & C_6(\omega_1) & C_7(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1(\omega_p) & C_2(\omega_p) & \cdots & C_6(\omega_p) & C_7(\omega_p) \end{bmatrix} \quad (30)$$

مقادیر  $C_1$  تا  $C_7$  در رابطه (31) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} C_1(\omega) = A_1(\omega), \quad C_2(\omega) = A_2(\omega), \quad C_3(\omega) = -B_2(\omega) \\ , C_4(\omega) = \omega^2 M A_1(\omega) B_1(\omega) \\ , C_5(\omega) = \omega^2 M A_2(\omega) B_1(\omega) \\ , C_6(\omega) = -\omega^2 M A_1(\omega) B_2(\omega) \\ , C_7(\omega) = -\omega^2 M A_2(\omega) B_2(\omega) \end{aligned} \quad (31)$$

همان‌طور که اشاره شد، برای بیان بهتر عملکرد رابطه (25)، این رابطه بازی دو مود نوشته شد و در نهایت دستگاه معادلاتی مطابق رابطه (29) بدست آمد. با حل این دستگاه، ضرایب مجھول رابطه (27)، مخصوصاً  $\alpha_1^2$ ،  $\alpha_2^2$ ،  $\beta_1^2$ ،  $\beta_2^2$  بدست می‌آیند. با استفاده از این دو ضریب می‌توان تابع پاسخ فرکانسی را به

را در مرتبه‌های مختلف نشان می‌دهد و به کمک آن، قطب‌های پایدار، ناپایدار و نویزی قابل تشخیص خواهند بود. به منظور تشخیص قطب‌های نویزی از ضریب دمپینگ استفاده می‌شود. قطب با ضریب دمپینگ بالای ۵٪ به عنوان قطب نویزی شناسایی و در نمودار پایداری با علامت ۰ نشان داده می‌شود. سپس قطب‌های هر مرتبه با قطب مرتبه پیش از خود مقایسه می‌شود. قطب‌هایی که اختلاف آن‌ها کمتر از ۱٪ باشد، به عنوان قطب پایدار سیستم شناخته می‌شود و در نمودار پایداری با علامت + مشخص می‌شوند. سایر قطب‌ها نیز به عنوان قطب‌های ناپایدار شناسایی و با علامت × نشان داده می‌شوند [19].

با استفاده از نمودار پایداری، فرکانس‌های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول ۳) و شکل مودها محاسبه و با مقادیر دقیق مقایسه شده اند.

نتایج حاصل در جدول ۳، نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی و ضرایب دمپینگ سیستم با دقت مناسبی محاسبه شده‌اند ولی فرکانس‌های طبیعی با مقادیر دقیق اختلاف دارند که این اختلاف ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌های فرضی است.

به منظور مقایسه دقیق شکل مودها، از معیار اطمینان مودال استفاده شده است که طبق رابطه (۳۲) تعریف می‌شود [6].

$$MAC(i,j) = \frac{\left| \left\{ \phi \right\}_{S_i}^T \left\{ \phi \right\}_{E_j} \right|^2}{\left| \left\{ \phi \right\}_{S_i}^T \left\{ \phi \right\}_{S_i} \right| \times \left| \left\{ \phi \right\}_{E_j}^T \left\{ \phi \right\}_{E_j} \right|} \quad (32)$$

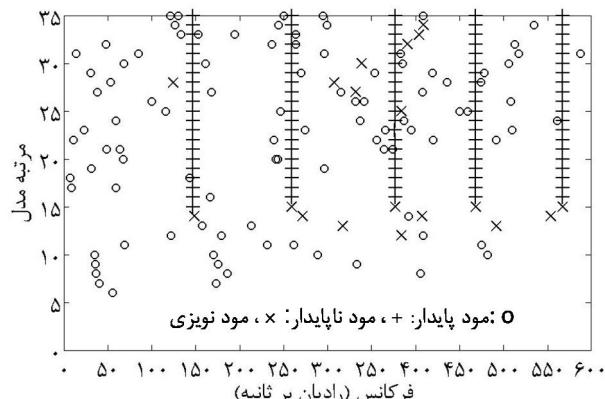
امین شکل مود روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس و  $\left\{ \phi \right\}_{E_j}$ ،  $j$  امین شکل مود روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس و  $\left\{ \phi \right\}_{S_i}$ ،  $i$  امین شکل مود دقیق است.

بنابراین، مقدار معیار اطمینان مودال برای همه مودهای زیرفضاهای اتفاقی و مقادیر دقیق محاسبه و نمودار آن در شکل ۵ ارائه شده است.

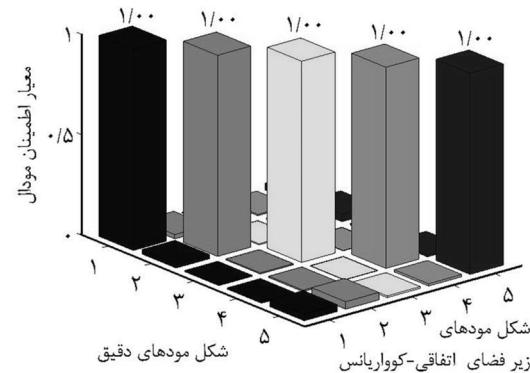
### 3-3- اجرای روش حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها

مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از روش SSI-COV با مقادیر دقیق (جدول ۳)، نشان می‌دهد که جرم شتاب‌سنج‌های نصب شده بر روی سیستم، موجب کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی شده است. بنابراین به منظور حذف اثر بارگذاری جرمی این شتاب‌سنج‌ها، رابطه (25) بکار گرفته می‌شود. فرایند حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها در ۵ مرحله و مطابق الگوریتمی که در بخش ۲-۲ ارائه شد، صورت می‌گیرد. در هر مرحله یک جرم اضافی، بر روی یکی از نقاط سازه نصب می‌شود و با تکرار آزمایش شبیه‌سازی شده، پاسخ سازه محاسبه می‌شود. مقادیر جرم‌های اضافی که بصورت دلخواه انتخاب شده‌اند در جدول ۴ ارائه شده است.

پس از محاسبه پاسخ سازه در هر مرحله، پارامترهای مودال به کمک روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس مجدداً محاسبه می‌شوند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی حاصل از تمام مراحل در جدول ۵ ارائه شده‌اند. به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از رابطه (25) استفاده شده است. همانطور که در بخش ۲-۲ بیان شد، در رابطه (25)، فقط ضرایب میزان‌سازی شکل مودها مجهول هستند. بنابراین در هر مرحله پس از قرارگرفتن جرم اضافی بر روی سازه و محاسبه پارامترهای مودال جدید، با استفاده از دستگاه معادلات حاصل از رابطه (25) ضرایب میزان‌سازی محاسبه می‌شوند. به کمک این ضرایب می‌توان تابع پاسخ فرکانسی سازه را ایجاد نمود که اصطلاحاً تابع پاسخ فرکانسی میزان شده نامیده می‌شود. سپس به کمک رابطه (20) می‌توان با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی میزان شده، تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را محاسبه کرد.



شکل ۴ نمودار پایداری حاصل از آزمایش شبیه‌سازی شده



شکل ۵ مقایسه شکل مودها به کمک معیار اطمینان مودال

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی سیستم (مقادیر دقیق)

فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)	شماره مود
572/42	5
472/63	4
380/03	3
261/53	2
148/89	1

جدول ۳ مقایسه فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) و ضرایب دمپینگ (%) حاصل از روش SSI-COV با مقادیر دقیق (جدول ۲)

شماره SSI-COV	فرکانس طبیعی دقیق	فرکانس طبیعی SSI-COV	ضرایب دمپینگ مود
0/072	0/075	147/76	148/89
0/135	0/131	260/09	261/53
0/188	0/190	377/66	380/04
0/239	0/236	469/55	472/63
0/281	0/286	568/16	572/42

3-2- تخمین پارامترهای مودال سیستم به کمک اندازه‌گیری پاسخ به منظور محاسبه پارامترهای مودال سیستم تحت بررسی با اندازه‌گیری فقط پاسخ، آزمایش شبیه‌سازی شده‌ای در نرمافزار متلب اجرا شده است. بدین منظور ۵ شتاب‌سنج ۱۸ گرمی بر روی جرم‌های سازه قرار داده شد. سپس مدل در محیط نرمافزار متلب در تمام درجات آزادی تحت حریک اتفاقی قرار گرفته است و به کمک شتاب‌سنج‌های فرضی، پاسخ سازه اندازه‌گیری شده است. در فرایند اندازه‌گیری پاسخ، دوره نمونه‌برداری ۰/۰۰۲۸ ثانیه و تعداد نمونه‌ها در هر اندازه‌گیری  $2^{14}$  در نظر گرفته شده است.

پس از اندازه‌گیری پاسخ تمام نقاط سازه، ماتریس سیستم با استفاده از روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس، محاسبه شده است. به کمک تجزیه مقدار ویژه ماتریس سیستم، قطب‌های سیستم بدست می‌آیند و نموداری به نام نمودار پایداری ترسیم می‌شوند (شکل ۴). این نمودار، ابزاری است که قطب‌های سیستم

جدول 8 مقایسه فرکانس‌های طبیعی دقیق و اصلاح شده

فرکانس طبیعی دقیق (رادیان بر ثانیه)	فرکانس طبیعی دقیق (رادیان بر ثانیه)	شماره مود
148/84	148/89	1
261/46	261/53	2
380/07	380/03	3
472/56	472/63	4
572/33	572/42	5

در ادامه، به عنوان نمونه تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای<sup>1</sup> میزان شده و تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای اصلاح شده با مقدار دقیق آن برای نقطه 1، با یکدیگر مقایسه شده‌اند (شکل 6-الف). همچنین به منظور نمایش بهتر توابع مذکور، در شکل 6-ب)، توابع پاسخ فرکانسی در اطراف مود سوم نمایش داده شده‌اند.

همان‌طور که در شکل 6 مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی سازه در تابع پاسخ فرکانسی میزان شده، با مقدار دقیق آن اختلاف دارد، که این اختلاف ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها است. همان‌طور که در تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده که به کمک رابطه (20) بدست آمده است، مشاهده می‌شود، فرکانسی طبیعی نسبت به تابع میزان شده، مقداری افزایش یافته است. به عبارت دیگر در تابع اصلاح شده اثر جرم شتاب‌سنج متناظر با تابع، که در شکل 6 شتاب‌سنج جرم اول می‌باشد، حذف شده است. بدین ترتیب می‌توان برای تمامی مراحل تکرار آزمایش توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را محاسبه کرد و سپس اثر جرم شتاب‌سنج متناظر را حذف نمود. فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده به کمک روش انتخاب قله از توابع اصلاح شده استخراج می‌شوند، این فرکانس‌ها در جدول 6 ارائه شده‌اند.

پس از محاسبه فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده، مقدار تغییر فرکانس هر مود نسبت به حالت سازه با شتاب‌سنج قابل محاسبه خواهد بود. با فرض خطی بودن رفتار سازه، با جمع مقدار تغییر فرکانس هر مود از هر مرحله، مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز برای حذف اثر جرم تمامی شتاب‌سنج‌ها بدست خواهد آمد. این مقدار مطابق رابطه (33) محاسبه و در جدول 7، ارائه شده‌اند.

$$\Delta\omega_r = \sum_{k=1}^q (\omega_{k,r} - \omega_r^{SSI}) \quad (33)$$

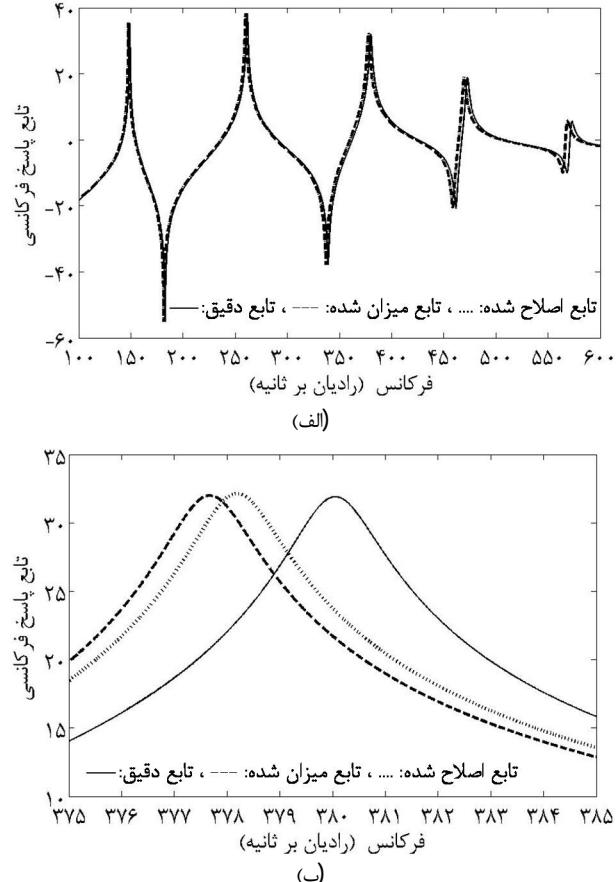
که  $\Delta\omega_r$  مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز برای اصلاح مود  $k$  ام سازه،  $\omega_{k,r}$  فرکانس طبیعی اصلاح شده  $k$  ام پس از قرار گیری جرم اضافی بر روی نقطه  $k$  (جدول 6)،  $\omega_r^{SSI}$  فرکانس طبیعی  $k$  ام سازه در حالت اولیه (جدول 3) و  $q$  تعداد نقاط سازه است.

اگر مقدار تغییر فرکانس ارائه شده در جدول 7، به فرکانس‌های طبیعی حالت با شتاب‌سنج (جدول 3) اضافه شوند، اثر جرمی شتاب‌سنج‌ها حذف و فرکانس‌های طبیعی بصورت دقیق بدست خواهند آمد. این مقدار محاسبه و با مقدار دقیق مقایسه شده‌اند (جدول 8).

جدول 8 نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، می‌تواند اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها را حذف و با دقت مناسبی فرکانس‌های طبیعی دقیق سازه را محاسبه نماید.

#### 4- آزمایش

به منظور ارزیابی تجربی روش پیشنهادی و بررسی تجربی توانایی آن در



شکل 6 (الف) مقایسه تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای متناظر با نقطه 1، (ب) مقایسه تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای متناظر با نقطه 1 در اطراف فرکانس طبیعی سوم سازه

جدول 4 مقادیر جرم‌های اضافی انتخاب شده

شماره	5	4	3	2	1	جرم اضافی (kg)
0/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0/5	

جدول 5 فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) حاصل از روش SSI-COV پس از نصب هر یک از جرم‌های اضافی

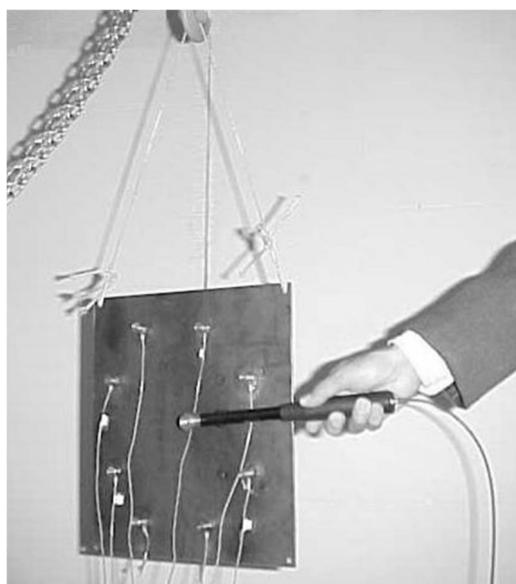
شماره مود	جرم اول	جرم دوم	جرم سوم	جرم چهارم	جرم پنجم
145/47	144/59	140/55	139/19	141/17	145/47
249/86	247/27	254/86	259/10	249/43	249/86
357/66	366/49	367/12	357/43	377/37	357/66
452/48	466/18	447/95	467/97	448/20	452/48
565/30	566/89	553/36	553/25	524/23	565/30

جدول 6 فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) حاصل از اجرای روش انتخاب قله بر روی تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده

شماره مود	جرم اول	جرم دوم	جرم سوم	جرم چهارم	جرم پنجم
147/84	147/88	148/04	148/10	148/01	147/84
260/41	260/56	260/26	260/08	260/51	260/41
378/44	378/15	378/02	378/43	377/69	378/44
470/54	469/77	470/52	469/49	470/42	470/54
568/32	568/51	568/87	570/46	568/83	568/32

جدول 7 مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز ( $\Delta\omega_r$ ) برای حذف اثر جرم از هر مود

شماره مود	5	4	3	2	1
تغییر فرکانس (رادیان بر ثانیه)	4/17	3/01	2/41	1/37	1/08



شکل 8 صفحه فلزی تحت آزمایش مodal کلاسیک - آزمایش 8 شتاب سنج

جدول 9 فركانس هاي طبيعي و ضرائب دمپينگ بدست آمده از آزمایش مodal کلاسیک تک شتاب سنج

شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)	ضریب دمپینگ (%)
0/305	67/25	1
0/370	89/34	2
0/195	136/52	3
0/200	162/74	4
0/205	186/79	5

جدول 10 پارامترهای مodal حاصل از آزمایش مodal کلاسیک با 8 شتاب سنج

شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)	ضریب دمپینگ (%)
0/315	65/72	1
0/350	86/86	2
0/225	134/75	3
0/235	159/58	4
0/185	181/94	5

#### 4- تعیین پارامترهای مodal سازه به کمک 8 شتاب سنج

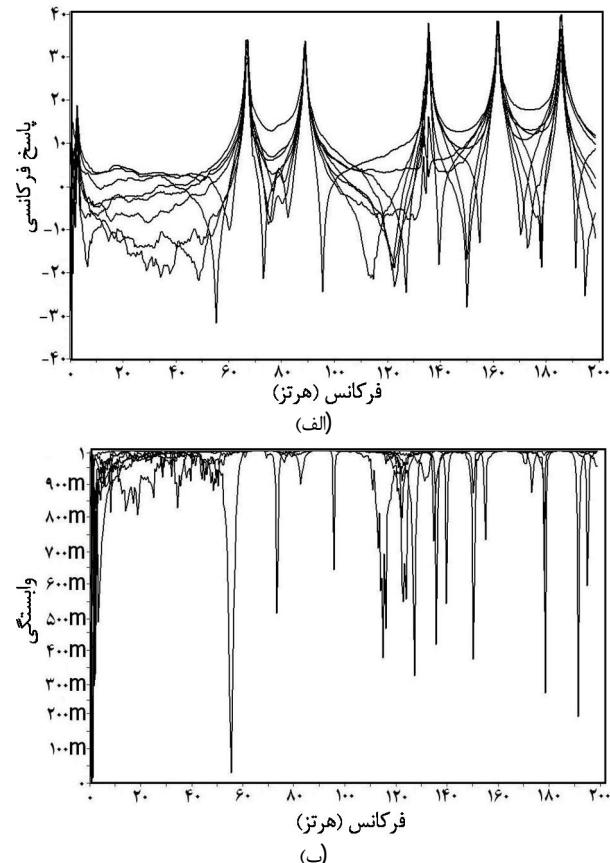
از آنجا که در آزمایش مodal محطي چندین شتاب سنج بر روی سازه نصب می شوند، بنابراین در این بخش به منظور اطمینان از نتایجی که در آزمایش مodal محطي بدست خواهند آمد، آزمایش مodal کلاسیک تکرار می شود. البته در این آزمایش، برای مشاهدت نتایج با نتایج آزمایش مodal محطي، 8 شتاب سنج هر یک به وزن 18 گرم بر روی نمونه تحت آزمایش نصب شده اند (شکل 8).

به منظور انجام آزمایش، صفحه توسط یک چکش نوع BK8202 با آمپلی فایر 2674A تحریک شده است. پاسخ ها توسط هشت شتاب سنج نوع DJB/A120V محدوده فرکانسی آزمایش 200 هرتز و 200 هرتز و 500 میلی هرتز می باشد. نیرو و پسخ فرکانسی در نظر گرفته شده 500 میلی هرتز می باشد. نیرو و شتاب های اندازه گیری شده توسط نرم افزار پالس تحلیل شده اند [24] و توابع پاسخ فرکانسی و وابستگی بدست آمده اند. مشابه بخش 4-1، توابع پاسخ فرکانسی بدست آمده از آزمایش با روش یکپارچه آنالیز و فرکانس های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول 10) و شکل مودهای پنج مود اول الاستیک صفحه بدست آمده اند.

حذف اثر جرم شتاب سنجها و در نتیجه محاسبه دقیق فرکانس های طبیعی سازه، یک صفحه فلزی به ابعاد 0/002×0/35×0/35 متر تحت آزمایش های مodal کلاسیک و مodal محطي قرار گرفته است. این آزمایش ها در چندین مرحله انجام شده اند که در ادامه به طور کامل به شرح و توضیح آنها پرداخته می شود.

#### 4- تعیین پارامترهای مodal دقیق سازه

برای تخمین پارامترهای مodal سازه بصورت دقیق، یک شتاب سنج سبک (گرمی) از نوع DJB/A123E بر روی نمونه مورد آزمایش نصب شده است. صفحه با استفاده از یک چکش BK8202 تحریک و سیگنال نیرو از طریق تقویت کننده 2647A تقویت شده است. محدوده فرکانسی آزمایش 200 هرتز و پسخ فرکانسی در نظر گرفته شده 500 میلی هرتز می باشد. پس از اندازه گیری نیروی تحریک و شتاب، توابع پاسخ فرکانسی<sup>1</sup> و توابع وابستگی<sup>2</sup> بدست آمده اند که در شکل های 7-الف و 7-ب نشان می دهند، آزمایش از همان طور که توابع وابستگی (شکل 7-ب) نشان می دهند، آزمایش از دقت مناسبی برخوردار است. بنابراین، به منظور تخمین پارامترهای مodal سازه، توابع پاسخ فرکانسی به بخش مودنت نرم افزار آیکتس [22] منتقل شده اند. در این بخش به منظور آنالیز توابع پاسخ فرکانسی، از روش یکپارچه استفاده شده است [23]. پس از انجام آنالیز با روش یکپارچه، فرکانس های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول 9) و شکل مودهای پنج مود اول الاستیک صفحه بدست آمده اند.



شکل 7 (الف) توابع پاسخ فرکانسی آزمایش مodal تک شتاب سنج، (ب) توابع وابستگی آزمایش مodal تک شتاب سنج

1-Frequency Response Functions (FRFs)  
2-Coherence Functions

جدول 12 مقادير جرم‌های اضافي انتخاب شده

شماره جرم	جرم اضافي (kg)
1	0/1
2	0/343
3	0/343
4	0/1
5	0/093
6	0/055
7	0/093
8	0/055

جدول 13 فرکانس‌های طبیعی (هرتز) صفحه پس از نصب هر یک از جرم‌های اضافي

بر روی سازه						
5	4	3	2	1	مود	شماره جرم
178/87	157/71	131/70	85/52	64/94	1	
179/95	154/14	130/64	85/75	63/87	2	
183/19	154/52	131/66	85/06	65/30	3	
179/13	156/66	131/82	85/06	64/59	4	
177/93	158/61	133/37	84/83	65/33	5	
180/60	158/72	134/41	85/97	64/78	6	
177/31	158/95	132/90	85/04	65/19	7	
180/74	158/50	134/26	85/66	64/95	8	

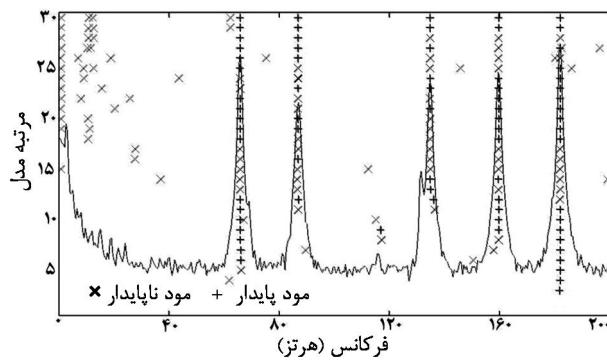
نتایج بدست آمده در جدول 11 نشان می‌دهند که فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از آزمایش مودال محیطی با دقت مناسبی نسبت به آزمایش مودال هشت شتاب‌سنج محاسبه شده‌اند ولی نسبت به آزمایش مودال تک شتاب‌سنج که نتایج دقیق‌تری را دارد، دارای اختلاف می‌باشند. این اختلاف‌ها ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها می‌باشد.

#### 4-4- اجرای روش حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها

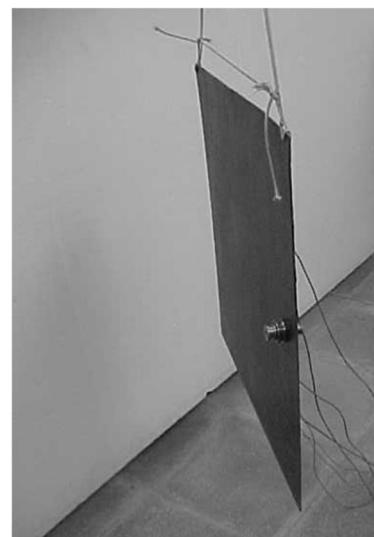
مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی با مقادیر حاصل از آزمایش تک شتاب‌سنج (جدول 11)، نشان داد که جرم شتاب‌سنج‌های نصب شده بر روی سازه، موجب کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی شده است. بنابراین به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها، رابطه (25) به کار گرفته می‌شود. فرآیند حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها در 8 مرحله صورت می‌گیرد. در هر مرحله یک جرم اضافي، بر روی یکی از نقاط سازه نصب می‌شود (شکل 10) و با تکرار آزمایش مودال محیطی، پاسخ سازه مجدد اندازه‌گیری می‌شود.

مقادير جرم‌های اضافي که بر روی سازه نصب شده‌اند بر اساس روش ارائه شده در مرجع [25] محاسبه و در جدول 12 ارائه شده اند.

پس از محاسبه پاسخ سازه در هر مرحله، پارامترهای مودال متناظر، به کمک روش زیر فضاهای اتفاقی مجدد محاسبه می‌شوند. مقادير فرکانس‌های طبیعی حاصل از تمام مراحل در جدول 13 ارائه شده‌اند. به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از رابطه (25) استفاده شده است و مطابق الگوريتم روش (بخش 2-2) تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده محاسبه می‌شود. پس از محاسبه توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده برای هر یک از جرم‌های اضافي نصب شده بر روی سازه، فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده از توابع مذکور استخراج می‌شوند (جدول 14). پس از محاسبه فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده، مقدار تغيير فرکانس هر مود نسبت به فرکانس‌های حاصل از آزمایش مودال محیطی (جدول 11) قابل محاسبه خواهد بود. با استفاده از رابطه (33) مقدار تغيير فرکانس هر مود محاسبه و در جدول 15، ارائه شده‌اند.



شکل 9 نمودار پايداري آزمایش مودال محیطی صفحه



شکل 10 صفحه فلزی تحت آزمایش مودال محیطی به همراه جرم اضافي

جدول 11 مقایسه فرکانس‌های طبیعی (هرتز) بدست آمده از آزمایش‌های مودال کلاسيك و آزمایش مودال محیطی

مود	هشت شتاب‌سنج	نک شتاب‌سنج	شماره آزمایش مودال کلاسيك	آزمایش مودال کلاسيك	آزمایش مودال محیطی
1	65/70	65/72	67/25	1	
2	86/78	86/86	89/34	2	
3	134/72	134/75	136/52	3	
4	159/58	159/58	162/74	4	
5	181/93	181/94	186/79	5	

#### 3-4- آزمایش مودال محیطی

به منظور انجام آزمایش مودال محیطی صفحه، مشابه بخش 2-4.8 شتاب‌سنج بر روی صفحه نصب شده‌اند و سازه توسط یک چکش و بصورت دلخواه در نقاط مختلف تحریک شده است.

بعد از پایان آزمایش، سیگنال‌های شتاب اندازه‌گیری شده توسط روش زیرفضاهای اتفاقی در نرمافزار پالس آنالیز شده‌اند. در این روش با تجزیه مقادير ویژه ماتریس سیستم، قطب‌های سیستم بدست آمده‌اند و با توجه به معیارهای مطرح شده در مرجع [19] قطب‌های پايدار، ناپايدار و تویزی از یكديگر متمایز شده‌اند و نمودار پايداري ترسیم شده است (شکل 9). سپس مرتبه مناسب مدل، با توجه به روابط موجود در مرجع [21] انتخاب شده است و فرکانس‌های طبیعی (جدول 11)، ضرایب دمپینگ و شکل مودها تخمين زده شده اند.

## 7- مراجع

- [1] M.M. Khatibi, M.R. Ashory, A.R. Albooyeh, Optimum Amount of Additive Mass in Scaling of Operational Mode Shapes, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 39, Issue 5, 2011, pp. 733-750.
- [2] S. Adhikari, M.I. Friswell, K. Lonkar, A. Sarkar, Experimental case studies for uncertainty quantification in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 24, Issue 4, 2009, pp. 473-492.
- [3] H. Jung, D.J. Ewins, On the use of simulated experimental data for evaluation of modal analysis methods, *Proc. of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1992.
- [4] H. Sarparast, M.R. Ashory, M.M. Khatibi, The Art of Measurement and Modeling in Modal Testing and Its Difficulties (Part 1), *Journal of Vibration and Sound*, Vol. 1, No. 1, 2012, pp. 59-68. (In Persian).
- [5] M.R. Ashory, Correction of mass loading effects of transducers and suspension effects in modal testing, *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1998.
- [6] D.J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research studies press LTD, United Kingdom, 2000.
- [7] O. Dossing, Prediction of transducer mass-loading effects and identification of dynamic mass, *Proc. of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1991.
- [8] G.M. McConnell, *Vibration Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 1995.
- [9] J. Decker, H. Witfield, Correction of transducer-loading effects in experimental modal analysis, *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1995.
- [10] J.M.M. Silva, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, Some applications of coupling/uncoupling techniques in structural dynamics, Part 1: Solving the mass cancellation problem, *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1997.
- [11] J. M. M. Silva, N. M. M. Maia, A. M. R. Ribeiro, Some applications of coupling/uncoupling techniques in structural dynamics, Part 2: Generation of the whole FRF matrix from measurements on a single column-the mass uncoupling method (MUM), *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1997.
- [12] A. Klosterman, *On the experimental determination and use of modal representations of dynamic characteristics*, PhD thesis, Cincinnati, University of Cincinnati, 1971.
- [13] O. Cakar, K.Y. Sanliturk, Elimination of noise and transducer effects from measured response data, *Proc. of the 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, 2002.
- [14] O. Cakar, K.Y. Sanliturk, Elimination of transducer mass loading effects from frequency response functions, *Mechanical Systems and Signal Processing*, No. 19, 2005, pp. 87-104.
- [15] J.M.M. Silva, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, Cancellation of mass-loading effects of transducers and evaluation of unmeasured frequency response functions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, Issue 5, 2000 pp. 761-779.
- [16] M.R. Ashory, *High quality modal testing methods*, PhD thesis, London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1999.
- [17] H. Sarparast, M.R. Ashory, P. Ebadi, M.M. Khatibi, Modal Parameter Identification of a Structure Subjected to Ambient Load Using Output Analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, 2013, pp. 63-73. (In Persian)
- [18] M.L. Aenlle, P. Fernández, R. Brincker, A.F. Canteli, Scaling factor estimation using an optimized mass-change strategy, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 24, Issue 5, 2010 pp. 1260-1273.
- [19] B. Peeters, *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, PhD thesis, Belgium, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.
- [20] R. Brincker, P. Andersen, Understanding Stochastic Subspace Identification, *Proc. of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 2006.
- [21] A. M. Alibinu, N.A. Rahman, M.J.E. Salami, A.A. Shafie, Optimal Model Order Selection for Transient Error Autoregressive Moving Average MRI Reconstruction Method, *Proc. of World Academy of Science, Engineering and Technology*, No. 42, 2008, pp. 161-165.
- [22] Modent, Integrated Software for Structural Dynamics, ICATS, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, UK, 1988-2000.
- [23] N.M.M. Maia, *Extraction of valid modal properties from measured data in structural vibrations*, PhD thesis, London, Imperial College of Science & Technology, 1988.
- [24] PULSE, Version 8.0, Brüel & Kjær, Sound & Vibration Measurement A/S, 1996-2003.
- [25] A. Taleshi Anbouhi, P. Zamani, M.R. Ashory, M.M. Khatibi, Correction of mass-loading effects of accelerometers on the measured FRFs using optimized mass change algorithm, *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 10, No. 5, 2012, pp. 19-31. (In Persian)

جدول 14 فرکانس های طبیعی (هر تر) حاصل از اجرای روش انتخاب قله بر روی توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده

شماره جرم	مود 5	مود 4	مود 3	مود 2	مود 1	مود
1	182/41	159/93	135/95	87/04	65/88	1
2	182/04	159/86	134/99	86/85	65/83	2
3	181/86	159/84	134/27	86/93	65/76	3
4	182/44	160/70	135/22	87/19	65/77	4
5	182/69	159/73	135/48	87/35	65/80	5
6	182/37	159/86	134/79	87/08	66/03	6
7	182/79	159/70	135/13	87/28	65/81	7
8	182/33	159/93	134/95	87/32	65/98	8

جدول 15 مقدار تغییر فرکانس در هر مود برای حذف اثر جرم شتاب سنجها

تغییر فرکانس (هر تر)	شماره مود 5	شماره مود 4	شماره مود 3	شماره مود 2	شماره مود 1
3/57	2/92	3/75	2/13	1/27	

جدول 16 مقایسه فرکانس های (هر تر) اصلاح شده و آزمایش تک شتاب سنج

(%)	خطا	آزمایش مود	آزمایش تک شتاب سنج	شماره مود
		66/97	67/25	1
		88/91	89/34	2
		138/47	136/52	3
		162/50	162/74	4
		185/50	186/79	5

مقادیر تغییر فرکانس ارائه شده در جدول 15 به فرکانس های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی (جدول 11) اضافه شده اند تا اثر بارگذاری جرمی شتاب سنجها حذف شود. این مقادیر در جدول 16 ارائه و با مقادیر حاصل از آزمایش مودال تک شتاب سنج مقایسه شده اند. جدول 16 نشان می دهد که روش پیشنهادی، می تواند اثر بارگذاری جرمی شتاب سنجها را حذف و در نتیجه فرکانس های طبیعی سازه با دقت مناسبی محاسبه شوند.

## 5- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روشی جدید برای حذف اثر جرم شتاب سنجها از نتایج آزمایش مودال محیطی ارائه شد. در این روش، با قراردادن جرم های اضافی بر روی سازه و تکرار آزمایش، اثر بارگذاری جرمی شتاب سنجها حذف و فرکانس های طبیعی سازه بصورت دقیق محاسبه می شوند.

به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی از مدل یک سیستم 5 درجه آزادی کمک گرفته شد و با انجام آزمایش های شبیه سازی شده ای در محیط نرم افزار متلب، کارایی روش ارزیابی شده است. همچنین به منظور بررسی تجربی، یک صفحه کاملاً آزاد تحت آزمایش هایی قرار گرفته است. نتایج آزمایش مودال محیطی نشان داد که فرکانس های طبیعی حاصل با مقادیر دقیقی که از آزمایش مودال کلاسیک تک شتاب سنج بدست آمده، اختلاف دارد. این اختلاف که ناشی از جرم شتاب سنجها می باشد به کمک روش پیشنهادی حذف شده است و در نتیجه فرکانس های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی اصلاح شده اند. نتایج عددی و تجربی حاصل، کارایی و دقت روش پیشنهادی را در حذف اثر جرم شتاب سنجها و تخمین دقیق فرکانس های طبیعی نشان می دهند.

## 6- تقدیر و تشکر

نویسندها مقاله بر خود لازم می دانند، از حمایت های دفتر استعدادهای درخشنان دانشگاه سمنان تقدیر و تشکر نمایند.