



## تحلیل استاتیکی تیر قوطی کامپوزیت با استفاده از روش کاهش ابعاد

اسماعیل غفاری<sup>1</sup>، جلیل رضایی پزنده<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
\* jrezaeep@um.ac.ir، 9177948974

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 02 شهریور 1393  
پذیرش: 23 مهر 1393  
ارائه در سایت: 24 آبان 1393  
کلیدواژگان:  
تیر کامپوزیت  
تابع اعوجاج  
ریلی-ریتز  
المان محدود

### چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی تیرهای کامپوزیتی با چیدمان و سطح مقطع دلخواه ارائه شده است. شیوه حل بر پایه تفکیک مسئله الاستیسیته غیرخطی سه‌بعدی، به حل دوبعدی سطح مقطع و یک‌بعدی در طول تیر می‌باشد. مدل‌سازی بیان شده به کمک فرضیات کوچک بودن کرنش‌ها نسبت به واحد و ابعاد مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل انجام می‌شود. در تحلیل دوبعدی سطح مقطع توابع اعوجاج به صورت تابعی از کرنش‌های یک‌بعدی محاسبه و سپس ماتریس سختی، دارای کوپل کامل از تغییر شکل‌های کششی، پیچشی و خمشی در دو جهت متعامد حاصل می‌شود. در این تحقیق از روش ریلی-ریتز جهت محاسبه توابع اعوجاج استفاده می‌شود. مزیت استفاده از ریلی-ریتز ساده‌سازی روند حل سطح مقطع در مقایسه با حل المان محدود مورد استفاده در روش‌های مشابه می‌باشد. تحلیل یک‌بعدی در طول تیر با روش المان محدود از طریق محاسبه انرژی کرنشی تیر انجام گرفته است. اثر تغییر زاویه چیدمان مقطع کامپوزیت بر سختی‌های مختلف بررسی شده است. مقایسه نتایج تحلیل استاتیکی تیر قوطی یکسرگردار کامپوزیتی متقارن و نامتقارن با نتایج المان محدود سه‌بعدی در نرم‌افزار آباکوس و نتایج تجربی همگرایی مناسبی نشان می‌دهد. روش پیش‌رو، نتایج با دقت بالاتری برای مقطع نامتقارن ارائه می‌دهد. با توجه به هزینه بالای تحلیل المان محدود سه‌بعدی، روش حاضر با سرعت بالا و دقت قابل قبول، مناسب جهت تحلیل اولیه و بهینه‌سازی سازه‌های تیر شکل کامپوزیت می‌باشد.

## Static analysis of composite box beams by dimensional reduction method

Esmaeel Ghafari<sup>1</sup>, Jalil Rezaeepazhand<sup>1\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran  
\* P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, jrezaeep@um.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 24 August 2014  
Accepted 15 October 2014  
Available Online 15 November 2014

**Keywords:**  
Composite Beam  
Warping Function  
Rayleigh-Ritz Method  
Finite Element Method

### ABSTRACT

This paper presents prediction of static behavior of composite beams with arbitrary anisotropic materials. The procedure is based on decomposing a 3-D nonlinear elasticity problem into a 2-D analysis of cross section and a 1-D analysis across the beam length. This is accomplished by assuming that magnitude of strain is small compared to unity and cross section size is small relative to wavelength of deformation, inherent to beam-like structures. In 2-D cross sectional analysis warping functions are calculated in terms of 1-D strain parameters and finally, fully coupled classical stiffness constants are derived which include extension, torsion and bending in two directions. 1-D analysis is modeled by Finite Element Method through calculating beam strain energy. In this article warpings are derived using Rayleigh-Ritz method. The great advantage of using Rayleigh-Ritz is simplifying cross sectional analysis in contrast with the mesh generation in FEM of similar procedures. Different cross section stiffnesses are investigated for ply orientation angle. Calculated results for symmetric and anti-symmetric composite box beams correlate well with 3-D FEM using Abaqus software as well as the experimental results. The present solution has more accurate results for anti-symmetric composite box beam. According to costly use of 3-D FEM analysis, the present procedure with high speed and acceptable accuracy is sufficient for preliminary and optimization problems.

### 1- مقدمه

تحلیل این سازه‌ها کمتر از انتظار بوده و با وجود مدل‌های مختلف همچنان نیاز به مدل‌های ساده با جامعیت حل وجود دارد. استفاده از مدل‌های سه‌بعدی المان محدود برای مدل‌سازی اولیه پرهزینه و وقت‌گیر می‌باشد. بنابراین تحلیل تقریبی این سازه‌ها حائز اهمیت است. در بسیاری از اجزاء مکانیکی مورد تحلیل، اهمیت بعد طولی نسبت به سایر ابعاد بیشتر است. پره هلیکوپتر و توربین باد، بال هواپیما و اجزاء تیر شکل سازه‌ها از این دست می‌باشند. بنابراین روش مناسب جهت تحلیل این

امروزه مواد کامپوزیت کاربردهای گسترده و روزافزون در صنایع مختلفی مانند هوافضا، خودروسازی، کشتی‌سازی یافته‌اند. نرخ مقاومت به وزن بالا، بروز عمر خستگی بهتر در مقایسه با فلزات در شرایط طراحی دقیق و همچنین امکان طراحی ماده جهت عملکرد خاص (با توجه به طبیعت جهتی خواص در مواد کامپوزیت) از ویژگی‌های برجسته این مواد است. با توجه به مزیت‌های بیان شده، گسترده‌گی استفاده از این مواد به دلایلی چون پیچیدگی

تنش اعمال نمی‌شود و محدودیتی برای هندسه سطح مقطع و ماده مورد استفاده وجود ندارد. این برنامه به عنوان 4 VABS شناخته شده و در مرجع‌های مختلفی مانند یو و همکارانش [10] نشان داده شده که اگر چه روشی تحلیلی جهت حل تیرها می‌باشد دقت مناسبی را در مقایسه با نتایج تحلیل سه‌بعدی المان محدود ارائه می‌دهد. در سال 2012 جدیدترین اصلاحات این برنامه در مرجع [11] ارائه و از آن جهت تحلیل‌های مختلف تیرها در مقالات متعددی استفاده شده است.

در مقاله پیش‌رو پس از ارائه مدل سه‌بعدی تیر، مسئله به حل دوبعدی سطح مقطع و یک‌بعدی در طول تیر تفکیک می‌شود. این روش بر پایه فرضیات کوچک بودن کرنش یک‌بعدی نسبت به واحد و ابعاد سطح مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل انجام می‌شود. در حل دوبعدی سطح مقطع توابع اعوجاج داخل و خارج صفحه محاسبه می‌شود. در کارهای انجام شده تا کنون از روش المان محدود جهت حل سطح مقطع استفاده شده است. در این مقاله حل سطح مقطع به روش ریلی-ریتز با تابعی به فرم کلی چندجمله‌ای-ها انجام می‌شود. استفاده از ریلی-ریتز در مقایسه با حل المان محدود سطح مقطع، باعث فرآیند المان‌بندی، امکان حل تیرهای کامپوزیت را با رویکردی تحلیلی و فرآیندی ساده‌تر جهت تحلیل‌های اولیه ارائه می‌دهد. خروجی این تحلیل ماتریس سفتی  $4 \times 4$  سطح مقطع بدون اثرات برش عرضی می‌باشد. این ماتریس دارای کوپل کامل از تغییر شکل‌های پایه‌ای کشش، پیچش و خمش در دو جهت متعامد است. با دستیابی به این ماتریس امکان حل یک-بعدی تیر با استفاده از روش المان محدود در طول تیر با المان‌های یک‌بعدی و سرعت بالا فراهم می‌شود.

## 2- مدل‌سازی سه‌بعدی تیر

جهت ایجاد مدل یک‌بعدی از مسئله سه‌بعدی تیر نیاز به انرژی کرنشی بر حسب متغیرهای یک‌بعدی وجود دارد. لذا شیوه انتخاب کرنش سه‌بعدی تیر حائز اهمیت ویژه است. کرنش سه‌بعدی تیر بر حسب متغیرهای تغییر شکل یک‌بعدی (کرنش‌های یک‌بعدی کلاسیک) و توابع اعوجاج سطح مقطع (تغییر شکل سه‌بعدی مقطع) نوشته می‌شود. با محاسبه توابع اعوجاج بر حسب متغیرهای یک‌بعدی، می‌توان مسئله سه‌بعدی را به یک‌بعدی تبدیل کرد. امکان حل این روش به صورت دقیق وجود ندارد. حل تقریبی به کمک فرضیات کوچک در نظر گرفتن کرنش‌های یک‌بعدی نسبت به واحد و ابعاد مقطع نسبت به طول موج تغییر شکل تیر است. در مرجع [3] با کوچک در نظر گرفتن تانسور دوران محلی رابطه (1) برای تعریف کرنش سه‌بعدی متقارن  $G$  ارائه شده است.

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (1)$$

در رابطه (1) اجزای تانسور واحد و  $F_{ij}$  اجزای تانسور گرادیان تغییر شکل می‌باشد. برای محاسبه تانسور گرادیان تغییر شکل لازم است بردارهای مکان قبل و بعد از تغییر شکل طبق شکل 1 تعریف گردد. بردار مکان قبل از تغییر شکل  $(r)$  و در حالت تغییر شکل یافته  $(R)$  جهت تعیین تمامی نقاط مادی دلخواه تیر سه‌بعدی در رابطه (2) تعریف می‌شود [3].

سازه‌ها کاهش ابعاد مسئله در مقابل تحلیل سه‌بعدی آن است. از گذشته نیز شیوه‌های تحلیل این سازه‌ها -که به عنوان تیر شناخته می‌شوند- بر اساس کاهش ابعاد مسئله و تبدیل مدل حقیقی سه‌بعدی تیر به مدل یک‌بعدی و صرف نظر از ابعاد کوچک سطح مقطع در مقایسه با بعد طول بوده است. برای مواد همسانگرد از تئوری‌های کاهش‌بعددهنده ابتدایی تیرها می‌توان به مدل‌های معروفی مانند اوپلر-برنولی و تیموشنکو اشاره کرد [1]. درویزه و همکارانش [2] تحلیلی غیرخطی از تیر همسانگرد به کمک روابط مکانیک محیط پیوسته را به فرم‌های یک‌بعدی و دوبعدی ارائه کرده‌اند.

از طرف دیگر برای تحلیل سازه‌های کامپوزیتی امکان وجود اعوجاج<sup>1</sup>‌های خارج و داخل صفحه و کوپل‌های مادی بین تمامی حرکت‌های پایه بیان شده در تئوری‌های مواد همسانگرد مانند تیموشنکو (کشش، خمش در دو جهت، پیچش و برش در دو جهت) وجود داشته و در نتیجه فرضیات ساده‌سازی شده سینماتیکی مدل‌های مقدماتی باید حذف شوند.

تئوری مناسب برای تیرهای کامپوزیتی که اهمیت به‌سزایی در مدل‌سازی پره هلیکوپتر و توربین باد دارد، باید بر پایه سینماتیک دارای هندسه غیرخطی و در نظر گرفتن اثرات غیرکلاسیک تیر مانند اعوجاج‌های خارج صفحه و همچنین داخل صفحه باشد. چنین سینماتیکی غیرخطی توسط هاجز و دانلیسون [3] در سال 1987 مطرح شده است.

اسمیت و کپرا [4] در سال 1990 در مقاله خود تئوری تیر کامپوزیت به روش مستقیم ارائه کرده و اثرات غیرکلاسیک مانند اعوجاج‌های وابسته به پیچش، برش عرضی و انواع کوپلینگ‌های حرکتی را مورد بررسی قرار دادند. کاندرا و همکارانش [5] در سال 1990 تیر قوطی‌های مستطیلی کامپوزیت متقارن و نامتقارن را بررسی و تحلیل کرده‌اند. مدل‌ها تحت بارهای خمشی، پیچشی و کششی مورد بررسی آزمایشگاهی قرار گرفته و زوایای خمشی و پیچشی با تجهیزات نوری اندازه‌گیری شده‌اند. نتایج با تئوری تحلیلی و المان محدود مقایسه شده و موضوع ایجاد کوپل‌ها در مدل‌های متقارن و نامتقارن بحث شده است. کیم و وایت [6] تئوری دقیقی برای تیرهای کامپوزیت جدارنازک و ضخیم با سطح مقطع بسته ارائه کرده‌اند. اثرات برش عرضی و اعوجاج‌های اولیه و ثانویه در پیچش در نظر گرفته شده اما اعوجاج‌های داخل صفحه نادیده گرفته شده است.

بردیچوسکی [7] در سال 1982 از روش  $VAM^2$  برای حل میله ناهمسانگرد استفاده کرد. در این مقاله نشان داده شده که مسئله الاستیسیته غیرخطی و سه‌بعدی یک میله قابل تفکیک به حل غیرخطی یک‌بعدی و مسئله خطی دوبعدی است. در این تحقیق تحلیل سطح مقطع برای مدل‌های عمومی ناهمسانگرد و ناهمگن ارائه شد. روش فوق توسط ولووی و هاجز [8] بهبود یافت. بُری و همکارانش [9] در سال 1992 تحلیلی بر پایه مدل‌سازی المان محدود سطح مقطع برای تیر کامپوزیت جهت محاسبه ویژگی‌های سطح مقطع (ماتریس  $6 \times 6$  سفتی) و توابع اعوجاج تیر کامپوزیت برای تیر با خمش و پیچش اولیه ارائه کرده‌اند.

برنامه‌ای جهت تحلیل خطی سطح مقطع تیر با استفاده از تئوری VAM به روش المان محدود از سال 1992 توسط هاجز پایه‌گذاری شد. این روش برای حل مسائلی است که دارای بعد یا ابعاد کوچک (ابعاد سطح مقطع) نسبت به سایر ابعاد می‌باشد و با استفاده از مینیمم‌کردن تابعی<sup>3</sup> انرژی فرمول‌بندی می‌شود. در این روش فرضیات کلاسیک در مورد جابه‌جایی و

1- Warping  
2- Variational Asymptotic Method  
3- Functional

4- Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis

اپراتور  $\partial_i$  مشتق نسبت به  $x_i$  و  $I_3$  و  $O_3$  به ترتیب ماتریس  $3 \times 3$  واحد و تهی می‌باشند.

برای جلوگیری از حرکت جسم صلب مقطع، لازم است قیدهایی برای تغییر شکل‌ها در نظر گرفته شود. بدین منظور قید رابطه (7) برای توابع اعوجاج در نظر گرفته می‌شود [11].

$$\int_s (\omega^T \psi) dx_2 dx_3 = 0 \quad (7)$$

در این رابطه  $s$  سطح مقطع تیر است و  $\psi$  به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود.

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

توابع اعوجاج ویژگی ذاتی یک تیر خاص است و در نتیجه انتخاب سیستم مرجع تیر دلخواه می‌باشد. همچنین با توجه به صفر در نظر گرفتن انتگرال توابع اعوجاج روی سطح مقطع، میانگین اعوجاج روی سطح مقطع صفر می‌گردد.

انرژی کرنشی سطح مقطع با استفاده از رابطه (9) قابل بیان می‌باشد.

$$U = \frac{1}{2} \int_s G^T D G dx_2 dx_3 \quad (9)$$

در رابطه (9) ماتریس سفتی مادی  $6 \times 6$  اجزاء سطح مقطع است.

مسئله سه‌بعدی الاستیسیته سازه تیر، مینیمم کردن تابعی (9) تحت قیدهای رابطه (7) جهت پیدا کردن توابع مجهول اعوجاج می‌باشد.

### 3- کاهش ابعاد مسئله

برای دستیابی به مدل تیر با حداکثر تشابه به مدل سه‌بعدی، با توجه به فرض  $\epsilon \ll 1$  و  $h/l \ll 1$  (پارامتر بزرگترین اندازه کرنش‌های یک‌بعدی کلاسیک و  $h$  اندازه مشخصه سطح مقطع و  $l$  مشخصه طول موج تغییر شکل در طول تیر) برای تیرها می‌توان تمامی توابع مجهول اعوجاج را بر اساس  $h$  و  $\epsilon$  بسط داد. برای تیر بدون خمش و پیچش اولیه می‌توان تابع اعوجاج را از مرتبه  $\epsilon$  در نظر گرفت [12]. در نتیجه دو ترم اول کرنش در رابطه (4) دارای مرتبه  $O(\epsilon)$  و ترم سوم از مرتبه  $O(\epsilon h/l)$  می‌باشند.

جهت بررسی مسائل با هندسه و ماده ناهمسانگرد دلخواه، مینیمم کردن به صورت عددی انجام می‌شود که در اکثر کارهای انجام شده از روش المان-محدود برای این منظور استفاده می‌شود. در مقاله حاضر از روش ریلی-ریتز استفاده شده است و برای این منظور توابع اعوجاج به صورت رابطه (10) تفکیک می‌شود.

$$\omega_i(x_1, x_2, x_3) = N(x_2, x_3) V_i(x_1) \quad (10)$$

$$N = \{x_2^n x_3^m\}$$

در رابطه (10)،  $N$  دسته توابع حدسی روش ریلی-ریتز و  $V$  ماتریس ستونی مقادیر گره‌ای جابه‌جایی اعوجاج سطح مقطع می‌باشد. با قراردادن رابطه (10) در عبارت (9)، تخمین انرژی کرنشی سه‌بعدی با صرف نظر از ترم‌های مرتبه بالای  $h$  به فرم رابطه (11) مشابه مرجع [13] حاصل می‌گردد.

$$2U_0 = V^T D_{hh} V + 2 V^T D_{h\epsilon} \epsilon + \epsilon^T D_{\epsilon\epsilon} \epsilon \quad (11)$$

برای تیر بدون خمش و پیچش اولیه و با صرف نظر از اثرات برش عرضی، تخمین انرژی در رابطه (11) با مرتبه صفر از  $h$  مناسب می‌باشد رابطه (12):

$$D_{hh} = \langle [G_h N]^T D [G_h N] \rangle \quad D_{h\epsilon} = \langle [G_h N]^T D G_\epsilon \rangle \quad (12)$$

$$D_{\epsilon\epsilon} = \langle G_\epsilon^T D G_\epsilon \rangle$$

و علامت  $\langle \rangle$  به معنای انتگرال روی سطح مقطع مرجع می‌باشد.

$$r(x_1, x_2, x_3) = \bar{r}(x_1) + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

$$R(x_1, x_2, x_3) = \bar{R}(x_1) + x_2 A_2(x_1) + x_3 A_3(x_1) + \omega_1(x_1, x_2, x_3) A_1(x_1) + \omega_2(x_1, x_2, x_3) A_2(x_1) + \omega_3(x_1, x_2, x_3) A_3(x_1) \quad (2)$$

مطابق شکل 1،  $\bar{r}$  و  $\bar{R}$  بردارهای مکان خط مرجع (عبوری از مرکز هندسی سطح مقطع) قبل و بعد از تغییر شکل می‌باشند. بردارهای  $a_i$  یک متعامد  $a_i$  مماس بر دستگاه مختصات  $x_i$ ، به صورت  $x_1$  مؤلفه محوری تیر،  $x_2$  و  $x_3$  مؤلفه‌های سطح مقطع تعریف شده است. بردارهای متعامد  $a_i$  پس از تغییر شکل تیر، با دوران به  $A_i$  تبدیل می‌شود.  $\omega_1$  اعوجاج خارج صفحه و  $\omega_2$  و  $\omega_3$  دو اعوجاج داخل صفحه سطح مقطع در جهات  $x_2$  و  $x_3$  می‌باشند. در نتیجه با توجه به رابطه (2) تمام تغییر شکل‌های ممکن برای مقطع تیر در نظر گرفته شده است.

اجزای تانسور گرادیان تغییر شکل با استفاده از رابطه (3) بدست می‌آید [3].

$$F_{ij} = A_i \cdot P_k p^k \cdot a_j \quad (3)$$

در این رابطه  $P_k = \frac{\partial R}{\partial x_k}$  بردار پایه پس از تغییر شکل و  $p^k = a_k$  می‌باشد. طبق روابط بیان شده با انجام محاسبات لازم کرنش سه‌بعدی به فرم ماتریسی برای تیر بدون خمش و پیچش اولیه از رابطه (4) و (5) قابل محاسبه خواهد بود [12].

$$G = G_h \omega + G_\epsilon \epsilon + G_l \omega' \quad (4)$$

( ) جهت نمایش مشتق نسبت به مختصه  $x_1$  می‌باشد که:

$$G = [G_{11} \quad 2G_{12} \quad 2G_{13} \quad G_{22} \quad 2G_{23} \quad G_{33}]^T$$

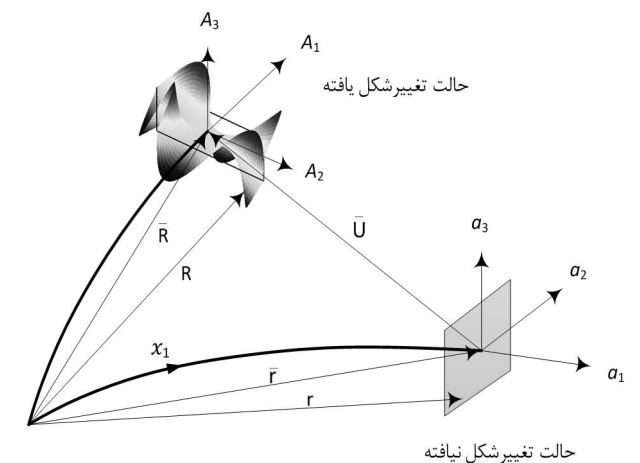
$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$$

$$\epsilon = [\gamma_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T \quad (5)$$

و  $\epsilon$  کرنش یک‌بعدی کلاسیک بوده که  $\gamma_1$  کرنش کششی،  $\kappa_1$  کرنش پیچشی و  $\kappa_2$  و  $\kappa_3$  کرنش‌های خمشی در جهات  $x_2$  و  $x_3$  می‌باشند. همچنین سایر ماتریس‌های رابطه (4) در رابطه (6) ارائه شده است.

$$G_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}, G_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_l = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$



شکل 1 قالب‌بندی تغییر شکل تیر

در این گام، مسئله پیش‌رو مینیمم‌سازی عددی عبارت (11) تحت قیدهای (7) می‌باشد. با اعمال قیدهای لازم، نتیجه نهایی به فرم رابطه (13) قابل بیان می‌باشد.

$$V = \hat{V}_0 \epsilon = V_0 \quad (13)$$

انرژی کرنشی یک‌بعدی تا مرتبه  $O(\epsilon^2)$  با جایگذاری رابطه (13) در (11)، تحت قیدهای مسئله از رابطه (14) بدست می‌آید.

$$2U_0 = \epsilon^T (\hat{V}_0^T D_{h\epsilon} + D_{\epsilon\epsilon}) \epsilon \quad (14)$$

در نتیجه انرژی کرنشی سطح مقطع تیر به صورت رابطه (15) قابل بازاریابی است.

$$2U = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با دستیابی به ماتریس  $C$  موجود در رابطه (15) ویژگی‌های سطح مقطع تیر حاصل شده و به کمک تئوری‌های یک‌بعدی تیر می‌توان به تحلیل تیر پرداخت. پس از تحلیل یک‌بعدی تیر و دستیابی به تغییر شکل‌ها و کرنش‌ها، می‌توان توابع اعوجاج را از طریق روابط بیان شده بدست آورد. در نتیجه با استفاده از توابع اعوجاج داخل و خارج صفحه تغییر شکل و حل سه‌بعدی تیر حاصل می‌شود.

#### 4- یک‌بعدی تیر

با استفاده از انرژی کرنشی بر واحد طول، تئوری یک‌بعدی تیر ارائه می‌شود [14]. در این تئوری از نتایج تحلیل سطح مقطع با خروجی عبارت انرژی کرنشی یک‌بعدی به صورت تابعی از متغیرهای کرنش یک‌بعدی در بخش 3 استفاده می‌شود. رابطه انرژی کرنشی تیر یک‌بعدی با انتگرال روی المان ( $e$ ) از رابطه (16) محاسبه می‌شود.

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_e \epsilon^T C \epsilon \, dx_1 \quad (16)$$

توابع تغییر شکل مورد استفاده به صورت روابط (17) می‌باشند.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ v &= \alpha_3 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_1^3 \\ w &= \alpha_7 + \alpha_8 x_1 + \alpha_9 x_1^2 + \alpha_{10} x_1^3 \\ \varphi_{x_1} &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x_1 \\ \varphi_{x_2} &= -\alpha_8 - 2\alpha_9 x_1 - 3\alpha_{10} x_1^2 \\ \varphi_{x_3} &= \alpha_4 + 2\alpha_5 x_1 + 3\alpha_6 x_1^2 \end{aligned} \quad (17)$$

که  $u, v, w$  و متغیرهای جابه‌جایی و  $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}$  تغییر زاویه مقطع در راستای محورهای  $x_1, x_2, x_3$  طبق شکل 1-آ در پیوست می‌باشند. ماتریس ضرایب  $\alpha$  در رابطه (18) بیان شده است.

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{12}]^T \quad (18)$$

ماتریس درجات آزادی المان  $\delta$  طبق شکل المان (شکل 2- پیوست) به صورت رابطه (19) در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta = [u^i \ v^i \ w^i \ \varphi_{x_1}^i \ \varphi_{x_2}^i \ \varphi_{x_3}^i \ u^j \ v^j \ w^j \ \varphi_{x_1}^j \ \varphi_{x_2}^j \ \varphi_{x_3}^j]^T \quad (19)$$

با تعریف ماتریس  $T, S$  و  $B$  کرنش بر اساس ماتریس درجات آزادی بیان می‌شود (رابطه 20).

$$\begin{aligned} \delta &= T \alpha \\ \epsilon &= S \alpha \\ \epsilon &= S T^{-1} \delta = B \delta \end{aligned} \quad (20)$$

ماتریس  $T$   $12 \times 12$  تابع مختصات گره‌ای المان و ماتریس  $S$   $4 \times 12$  تابع

#### 5- نتایج و بحث

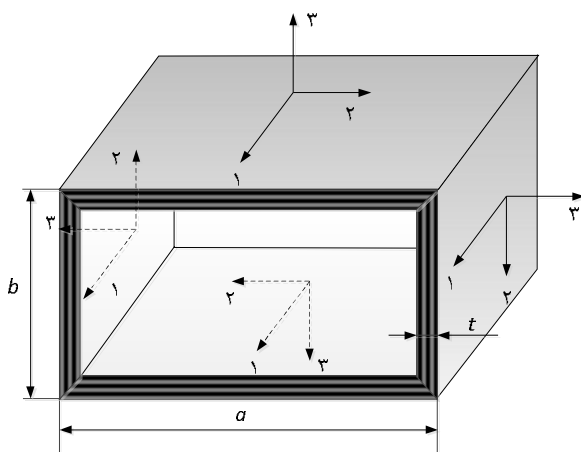
در این بخش با ارائه مثال‌هایی، روش تحلیل سطح مقطع و تئوری یک‌بعدی تیر بررسی می‌شود. کدها در نرم‌افزار متلب تهیه شده و نتایج با نرم‌افزار آباکوس، روش‌های تحلیلی و تجربی سایر مراجع مقایسه می‌شود. در این مقاله تیرهای کامپوزیتی در دو دسته نامتقارن و متقارن بررسی می‌شوند. ویژگی‌های مادی تک‌لایه‌های کامپوزیتی به ضخامت  $0/127$  mm مطابق با جدول 1 و ابعاد تیرها مطابق جدول 2 در نظر گرفته شده است. با توجه به انتخاب دستگاه محورها محلی روی دیواره‌ها مطابق شکل 2 زوایای لایه-چینی دیواره‌ها در جدول 3 ارائه شده است.

جدول 1 ویژگی مادی تک‌لایه‌ها [13]

مقطع متقارن	مقطع نامتقارن	
142 GPa	142 GPa	$E_{11}$
9/8 GPa	9/8 GPa	$E_{22}=E_{33}$
6/0 GPa	6/0 GPa	$G_{12}=G_{13}$
4/8 GPa	4/8 GPa	$G_{23}$
0/42	0/3	$\nu_{12} = \nu_{13}$
0/42	0/34	$\nu_{23}$

جدول 2 ابعاد مقطع تیر کامپوزیت

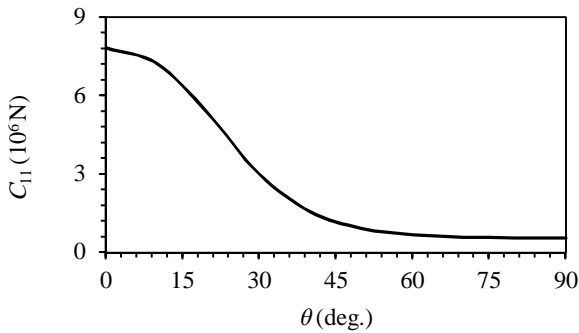
عرض بیرونی	ارتفاع بیرونی	ضخامت دیواره
$a=24/20$ mm	$b=13/46$ mm	$t=0/762$ mm



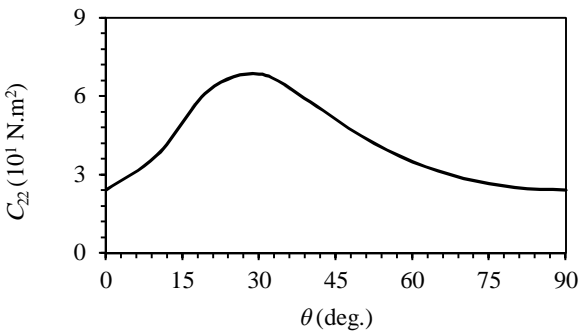
شکل 2 تیر قوطی کامپوزیت و دستگاه‌های محلی دیواره‌ها

جدول 3 لایه‌چینی مقطع تیر

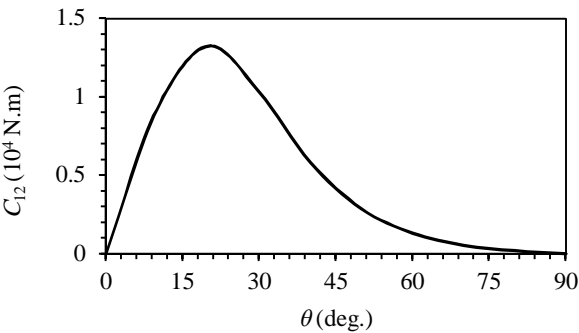
مقطع	دیواره بالا	دیواره پایین	دیواره راست	دیواره چپ
نامتقارن	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$
متقارن	$[-\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[-\theta / \theta]_3$	$[\theta / -\theta]_3$



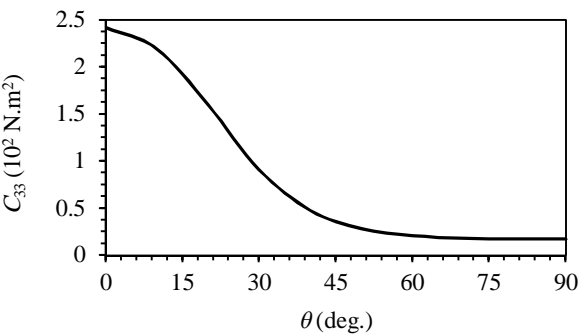
شکل 4 تغییرات سفتی کششی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه  $\theta$



شکل 5 تغییرات سفتی پیچشی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه  $\theta$



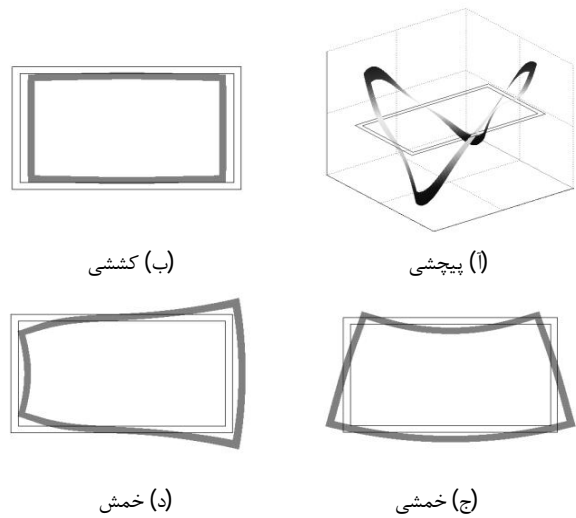
شکل 6 تغییرات سفتی کوپل کششی-پیچشی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه  $\theta$



شکل 7 تغییرات سفتی خمشی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه  $\theta$

با توجه به شکل‌های 4 و 7 برای مقطع نامتقارن، سفتی‌های کششی و خمشی دارای تغییرات قابل ملاحظه در محدوده زاویه لایه‌چینی 10 تا 40 درجه بوده و خارج این محدوده زاویه چیدمان اثر کمتری بر این سفتی‌ها دارد. طبق شکل‌های 5 و 6 در حدود زاویه 30 درجه، حداکثر سفتی پیچشی و حدود زاویه 20 درجه حداکثر سفتی کوپل کششی-پیچشی اتفاق می‌افتد. بررسی دقیق تغییرات سفتی سطح مقطع بر حسب لایه‌چینی‌های مختلف و یافتن طراحی بهینه در کاربرد مورد نظر، حائز اهمیت فراوان می‌-

در شکل 3، شکل توابع اعوجاج برای سطح مقطع قوطی کامپوزیت نامتقارن با استفاده از روش پیش‌رو رسم شده‌اند. اعوجاج‌های مقطع در اثر کرنش پیچشی (ا)، کرنش کششی (ب)، کرنش خمشی در جهت 2 (ج) و 3 (د) می‌باشند. در جدول‌های 4 و 5 به ترتیب مقادیر سفتی مقطع‌های تیر قوطی کامپوزیت نامتقارن و متقارن با زاویه لایه‌چینی  $\theta=15^\circ$  محاسبه شده به روش حاضر ارائه و با مرجع‌های [11] و [13] مقایسه شده است. میزان خطا از طریق رابطه  $(100 \times \text{مرجع}/\text{مرجع-روش حاضر})$  محاسبه شده است. شکل‌های 4 تا 7 به ترتیب تغییرات سفتی‌های کششی، پیچشی، کوپل کششی-پیچشی و خمشی تیر قوطی با مقطع نامتقارن با تغییر زاویه لایه-چینی  $\theta$  را نشان می‌دهد. بررسی تغییرات سفتی کوپل کششی-پیچشی ایجاد شده در مقطع نامتقارن با توجه به مقادیر سایر سفتی‌ها می‌تواند در روند پاسخ‌های تیر قوطی از قبیل مدل‌سازی پایداری سازه مورد توجه باشد.



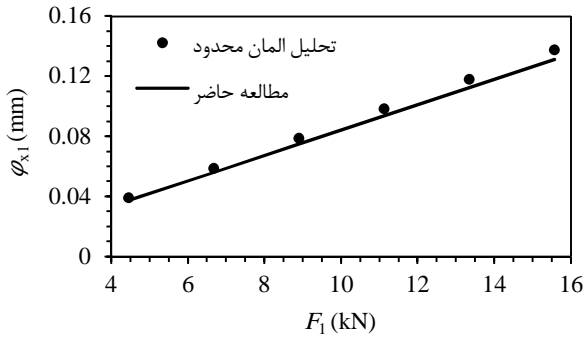
شکل 3 شکل توابع اعوجاج برای سطح مقطع قوطی کامپوزیت نامتقارن

جدول 4 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیت نامتقارن با زاویه  $\theta=15^\circ$

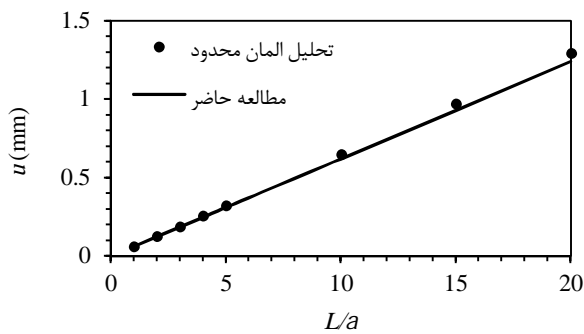
سفتی‌های غیرصفر	روش حاضر	[11]	میزان خطا (%)
$C_{11}$ (N)	$6/42 \times 10^6$	$6/39 \times 10^6$	0/4
$C_{12}$ (N.m)	$1/22 \times 10^4$	$1/12 \times 10^4$	8/9
$C_{22}$ (N.m <sup>2</sup> )	$5/04 \times 10^1$	$4/82 \times 10^1$	4/5
$C_{33}$ (N.m <sup>2</sup> )	$1/93 \times 10^2$	$1/90 \times 10^2$	1/5
$C_{44}$ (N.m <sup>2</sup> )	$4/80 \times 10^2$	$4/95 \times 10^2$	3/1

جدول 5 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیت متقارن با زاویه  $\theta=15^\circ$

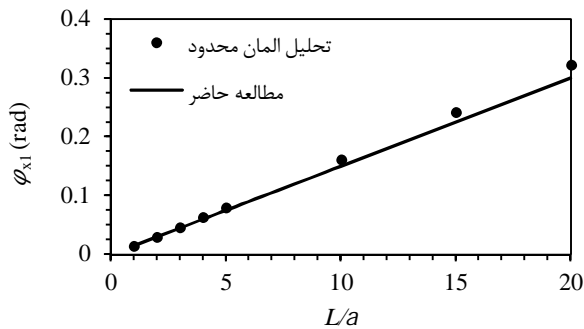
سفتی‌های غیرصفر	روش حاضر	[13]	میزان خطا (%)
$C_{11}$ (N)	$5/80 \times 10^5$	$6/09 \times 10^5$	4/7
$C_{22}$ (N.m <sup>2</sup> )	$5/08 \times 10^1$	$4/88 \times 10^1$	3/9
$C_{23}$ (N.m <sup>2</sup> )	$5/17 \times 10^1$	$5/05 \times 10^1$	2/3
$C_{24}$ (N.m <sup>2</sup> )	-0/775	-1/00	22/5
$C_{33}$ (N.m <sup>2</sup> )	$1/73 \times 10^2$	$1/70 \times 10^2$	1/7
$C_{34}$ (N.m <sup>2</sup> )	-0/683	-1/06	35/5
$C_{44}$ (N.m <sup>2</sup> )	$4/67 \times 10^2$	$5/05 \times 10^2$	7/5



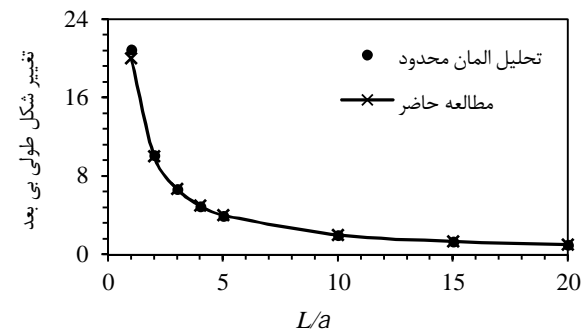
شکل 10 پیچش انتهای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بارهای کششی مختلف



شکل 11 خیز طولی انتهای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  با طول‌های مختلف



شکل 12 پیچش انتهای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  با طول‌های مختلف



شکل 13 تغییر شکل طولی بی بعد انتهای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  با طول‌های مختلف

در شکل‌های 14 و 15 به ترتیب تغییر شکل طولی و پیچشی انتهای تیر نامتقارن با نسبت طولی 5 و بار کششی 8/9 kN در انتها، برای زوایای لایه-چینی مختلف ارائه شده است. طبق شکل 15 در نزدیک زاویه چیدمان 30 درجه، بیشترین زاویه پیچشی و همچنین خطا اتفاق می‌افتد.

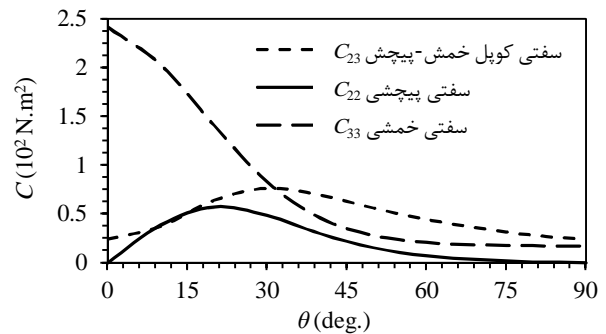
در شکل‌های 16 و 17 برای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  و طول 0/762 m به ترتیب تحت بار کششی 4/5 N و پیچشی 0/11 N.m، پیچش در طول تیر با

باشد. این بهینه‌سازی باید با توجه به تغییرات سایر سفتی‌ها و کاربرد سازه صورت گیرد.

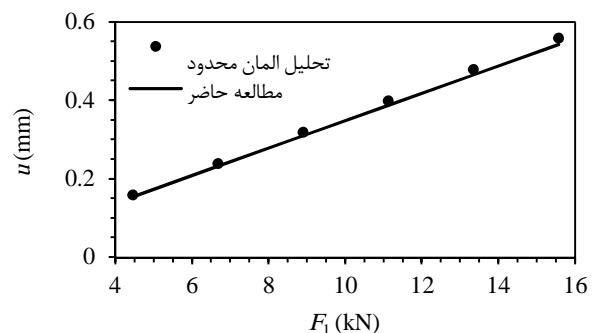
با توجه به ایجاد کوپل خمشی-پیچشی در مقطع متقارن، شکل 8 تغییرات سفتی‌های خمشی، پیچشی و کوپل خمشی-پیچشی را با تغییر زاویه لایه-چینی  $\theta$  نشان داده است. با توجه به شکل 8، مقطع متقارن مورد بررسی در زوایای چیدمان حدود 15 درجه دارای سفتی کوپل خمشی-پیچشی با بزرگی مشابه سفتی پیچشی است. این ویژگی می‌تواند برای پایداری آئرواستاتیسیته بال هواپیما مورد بهره‌برداری قرار گیرد. همچنین مقطع در این ناحیه دارای سفتی خمشی قابل ملاحظه‌ای می‌باشد.

برای تیر یکسرگردار با مقطع نامتقارن، زاویه چیدمان  $\theta=15^\circ$  و طول  $L=5a$  تحت تأثیر بار کششی در انتها، جابه‌جایی طولی و زاویه پیچشی انتهای تیر به ترتیب در شکل‌های 9 و 10 با تغییر نیروی کششی نشان داده شده است. مقادیر حاصل از روش حاضر با نتایج مدل سه‌بعدی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. مثالی از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس در پیوست ارائه شده (شکل آ-3) که المان‌های مورد استفاده از نوع C3D8R بوده و دارای 8 گره است و خطی می‌باشد. جابه‌جایی‌های یک‌بعدی با میانگین‌گیری از نتایج سه‌بعدی در مقطع قابل دستیابی است. با توجه به زمان‌بر بودن تحلیل المان-محدود سه‌بعدی برای تیرهای بلند مورد مطالعه، با بررسی حساسیت به تعداد المان‌ها، از حداقل تعداد شبکه ممکن در مدل‌سازی استفاده شده است.

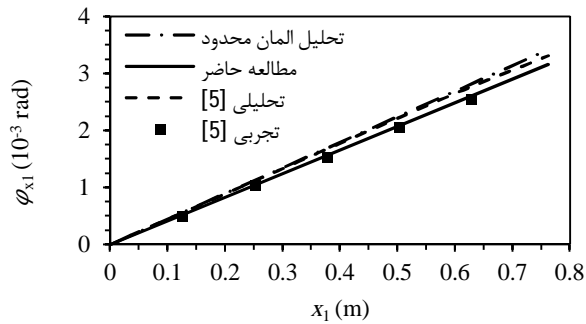
برای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  با نسبت‌های طولی ( $L/a$ ) مختلف تحت بار کششی 8/9 kN تغییر شکل طولی و زاویه پیچشی انتهای تیر به ترتیب در شکل‌های 11 و 12 ارائه و با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. با بی‌بعد سازی تغییر شکل طولی انتهای تیرها نسبت به جابه‌جایی تیر با بزرگترین طول، شکل 13 حاصل می‌شود که بیان‌گر بهبود تقریب با افزایش طول و نزدیک شدن به فرضیات تئوری تیر است.



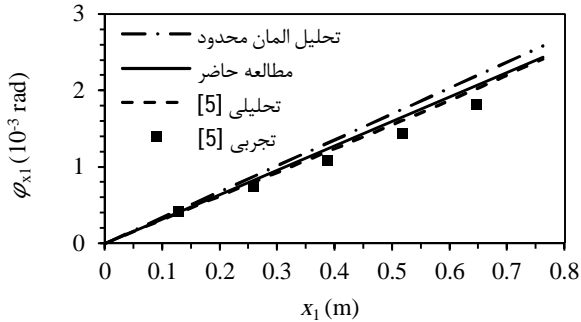
شکل 8 تغییرات سفتی خمشی، پیچشی و کوپل خمشی-پیچشی مقطع متقارن با تغییر زاویه  $\theta$



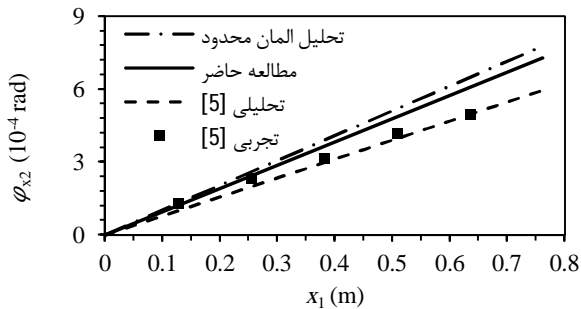
شکل 9 خیز طولی انتهای تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بارهای کششی مختلف



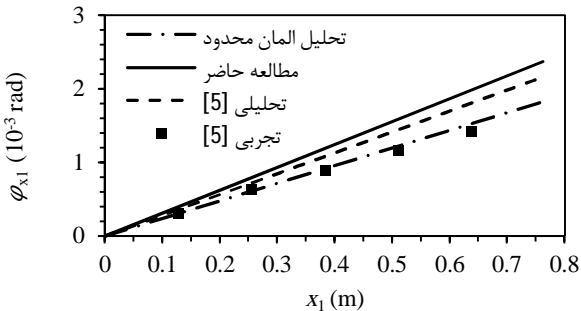
شکل 17 پیچش در طول تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بار پیچشی



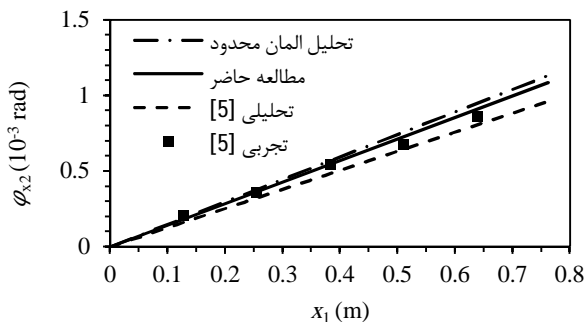
شکل 18 پیچش در طول تیر متقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بار پیچشی



شکل 19 زاویه خمشی در طول تیر متقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بار پیچشی



شکل 20 پیچش در طول تیر متقارن و  $\theta=45^\circ$  تحت بار پیچشی

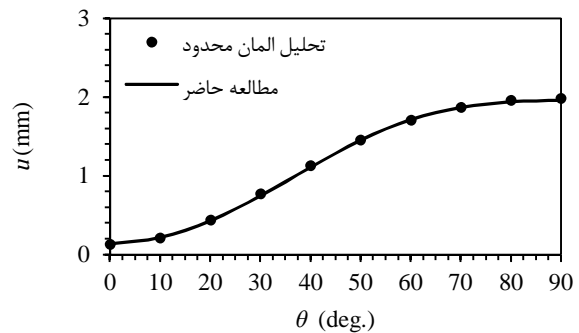


شکل 21 زاویه خمشی در طول تیر متقارن و  $\theta=45^\circ$  تحت بار پیچشی

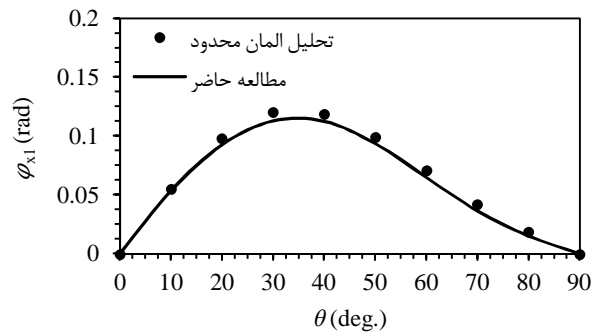
نتایج تحلیلی و تجربی مرجع [5] و همچنین مدل المان محدود آباکوس مقایسه شده است. مرجع [5] از حلی تحلیلی جهت محاسبه سفتی‌های مقطع تیرهای جدارنازک کامپوزیتی استفاده می‌کند. مدل‌های تحلیلی مشابه مرجع [5]، عموماً برای مقاطع جدارنازک مطرح شده و دارای فرضیات ساده-سازي سینماتیکی و یا تنش و کرنش صفحه‌ای می‌باشند. در این دسته از تئوری‌ها در تحلیل سطح مقطع از مدل لایه‌های کامپوزیتی استفاده می‌شود. در عین حال روش‌های عددی حل مقطع مانند مراجع [11-13] دارای فرضیات ساده‌سازی و محدودیت هندسه مقطع در روش‌های تحلیلی نمی‌باشند. مطالعه حاضر با ارائه فرمول‌سازی مشابه مراجع [11-13] و بدون محدودیت‌های بیان شده مرجع [5] حلی تحلیلی از تیر کامپوزیتی ارائه می‌دهد.

بر اساس شکل‌های 16 و 17 نتایج مطالعه حاضر برای مقطع با چیدمان نامتقارن همگرایی مناسب‌تری با نتایج تجربی نسبت به سایر روش‌های مقایسه شده نشان می‌دهد.

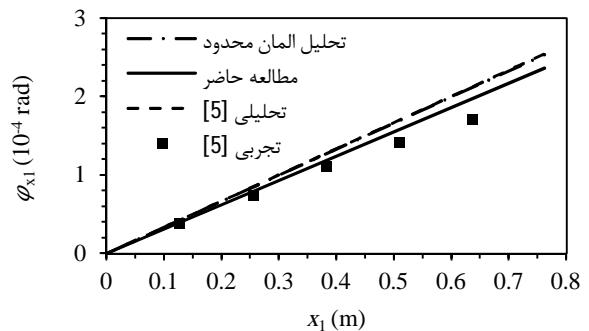
در شکل‌های 18 و 19 به ترتیب زوایای پیچشی و خمشی در طول تیر متقارن برای زاویه لایه‌چینی 15 درجه با طول 0/762 m و در شکل‌های 20 و 21 برای زاویه لایه‌چینی 45 درجه، تحت بار پیچشی 0/11 N.m نشان داده شده است.



شکل 14 تغییرات خیز طولی انتهای تیر نامتقارن با تغییر زاویه لایه‌چینی  $\theta$



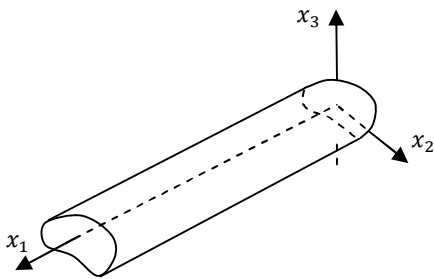
شکل 15 تغییرات پیچش انتهای تیر نامتقارن با تغییر زاویه لایه‌چینی  $\theta$



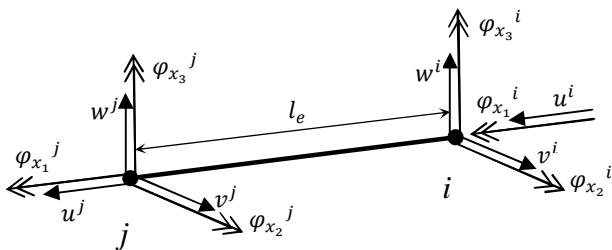
شکل 16 پیچش در طول تیر نامتقارن و  $\theta=15^\circ$  تحت بار کششی

- [8] V. V. Volovoi, D. H. Hodges, Theory of anisotropic thin-walled beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, No. 3, pp. 453-459, 2000.
- [9] M. Borri, G. L. Ghiringhelli, T. Merlini, Linear analysis of naturally curved and twisted anisotropic beams, *Composites Engineering*, Vol. 2, No. 5-7, pp. 433-456, 1992.
- [10] W. Yu, V. V. Volovoi, D. H. Hodges, X. Hong, Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis, *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 2105-2112, 2002.
- [11] W. Yu, D. H. Hodges, J. C. Ho, Variational asymptotic beam sectional analysis - An updated version, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 59, pp. 40-64, 2012.
- [12] B. Popescu, D. H. Hodges, On asymptotically correct Timoshenko-like anisotropic beam theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 37, pp. 535-558, 1999.
- [13] W. Yu, D. H. Hodges, V. V. Volovoi, C. E. S. Cesnik, On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams, *Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 19, pp. 5101-5121, 2002.
- [14] A. H. Sheikh, O. T. Thomsen, An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections, *Composite Science and Technology*, Vol. 68, pp. 2273-2281, 2008.
- [15] D. H. Hodges, A. R. Atilgan, M. V. Fulton, L. W. Rehfield, Free-vibration analysis of composite beams, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 3, pp. 36-47, 1991.

## 8- پیوست



شکل آ-1 مدل یک بعدی تیر



شکل آ-2 المان دو گره‌ای تیر با 12 درجه آزادی



شکل آ-3 مدل سه بعدی تیر قوطی کامپوزیت در آباکوس

با توجه به شکل‌های 18 تا 21، مشاهده می‌شود که روش حاضر برای مقطع متقارن، در زاویه چیدمان کوچکتر و برای پیش‌انتزایی، همگرایی مناسب-تری با نتایج تجربی نشان می‌دهد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت روش حاضر دقت بهتری برای مقاطع نامتقارن ارائه می‌دهد.

## 6- نتیجه‌گیری

استفاده از تئوری‌های کلاسیک جهت تحلیل تیرهای کامپوزیت که سازه‌های با اهمیت مهندسی و جزء اصلی سازه‌های هوافضا است، به علت در نظر نگرفتن اثرات غیرکلاسیک چون اعوجاج‌ها و کوپل‌های مادی غیر قابل اعتماد می‌باشد. از طرف دیگر تحلیل سه‌بعدی این سازه‌ها با توجه به کم اهمیت بودن ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تیر و صرف هزینه و وقت زیاد مناسب نیست. مطالعه حاضر نشان دهنده امکان تفکیک مسئله الاستیسیته سه‌بعدی تیر به تحلیل دوبعدی سطح مقطع و یک‌بعدی در طول تیر، با حفظ ویژگی‌های غیرکلاسیک تیر کامپوزیتی و دقت تحلیل نسبت به المان محدود سه‌بعدی است. همچنین مطالعه پیش‌رو با پیشنهاد استفاده از روش ریلی-ریتز با توابع چندجمله‌ای ساده در مقابل حل المان محدود سطح مقطع روش‌های مشابه، از روندی ساده جهت اعمال برای تیرهای مختلف کامپوزیتی برخوردار است. روش‌های تحلیلی متداول محاسبه سفتی‌های مقطع تیر کامپوزیتی مانند مراجع [4,5] دارای فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی و محدودیت در هندسه مقطع می‌باشند اما مطالعه پیش‌رو بدون محدودیت‌های مدل‌های بیان شده، روشی تحلیلی جهت محاسبه سفتی‌های مقطع تیر کامپوزیتی ارائه می‌دهد. توابع چندجمله‌ای مورد استفاده در این مقاله نتایج مناسب‌تری برای مقطع قوطی نامتقارن مستطیلی ارائه می‌دهد و جهت دستیابی به دقت‌های بالاتر امکان بررسی و استفاده از توابع حدسی مختلف فراهم است. بررسی توابع اعوجاج درک دقیق‌تری نسبت به واقعیت تغییر شکل سه‌بعدی تیر در عین عدم تحلیل سه‌بعدی پیچیده فراهم می‌سازد. همچنین با ترکیب نتایج تحلیل سطح مقطع و طول تیر امکان دستیابی به نتایج سه‌بعدی فراهم می‌شود. با توجه به سرعت بالای حل در روش پیش‌رو با استفاده از نتایج ارائه شده تغییر سفتی‌های مقطع با تغییر زاویه فایبر و چیدمان لایه‌ها، امکان بهینه‌سازی تیر کامپوزیتی به سادگی فراهم می‌باشد. مقایسه نتایج تغییر شکل استاتیکی تیر یکسرگردار قوطی کامپوزیتی با مدل سه‌بعدی المان محدود در نرم‌افزار آباکوس، نتایج تجربی و سایر تئوری‌ها همگرایی مناسبی نشان می‌دهد.

## 7- مراجع

- [1] W. Yu, D. H. Hodges, Generalized Timoshenko theory of the variational asymptotic beam sectional analysis, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 50, No. 1, pp. 46-55, 2005.
- [2] M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, A. Aljani, One- and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 33-40, 2011. (In Persian)
- [3] D. A. Danielson, D. H. Hodges, Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 258-262, 1987.
- [4] E. C. Smith, I. Chopra, Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 3, pp. 23-35, 1990.
- [5] R. Chandra, A. D. Stemple, I. Chopra, Thin-walled composite beam under bending, torsional and extensional loads, *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 7, pp. 619-626, 1990.
- [6] C. Kim, S. R. White, Thick-walled composite beam theory including 3D elastic effects and torsional warping, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 31-32, pp. 4237-4259, 1997.
- [7] V. L. Berdichevsky, On the energy of an elastic rod, *PMM*, Vol. 45, pp. 518-529, 1982.