



توسعه دو روش SPH تراکم ناپذیر به منظور شبیه سازی جریان های سطح آزاد حاوی رسوب

سعید فرزین¹، یوسف حسن زاده²، محمد تقی اعلمی³، روح اله فاتحی^{4*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

2- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

3- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

4- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر

* بوشهر، کد پستی 7516913817، fatehi@pgu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

دو حل گر عددی SPH تراکم ناپذیر، شامل یک روش صریح اصلاح شده و یک روش شبه ضمنی، به مسائل جریان سطح آزاد حاوی رسوب توسعه داده شده است. روش صریح حاضر، با استفاده از طرح های گسسته سازی سازگار، دقت روش های صریح معمول را تا حدودی بهبود می بخشد. روش ضمنی نیز علاوه بر آن، متضمن ارضای کامل شرط تراکم ناپذیری است. در روش های ارائه شده، فاز مایع با استفاده از معادلات ناویر-استوکس مدل سازی می شود. برای پیش بینی رفتار غیر نیوتنی فاز رسوب، از مدل رئولوژیکی پلاستیک بینگهام استفاده شده است. دقت و قابلیت روش های عددی توسعه داده شده، در ابتدا با حل یک مسئله تک فاز انتقال رسوب غیر ماندگار ناشی از شکست سد و سپس به کمک مسئله شکست سد بر بستر فرسایش پذیر و انتقال مخلوط دوفازی آب-رسوب، به صورت دو بعدی بررسی و با نتایج آزمایشگاهی و عددی موجود مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می دهد که روش های ارائه شده و به ویژه روش ضمنی، دارای توانایی بالایی در مدل سازی مشخصه های جریان آب و رسوب و نیز اندرکنش بین جریان، انتقال رسوب و تغییرات مورفولوژیکی بستر فرسایش پذیر، ناشی از جاری شدن سیلاب های شدید هستند.

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 07 آبان 1392
پذیرش: 28 آبان 1392
ارائه در سایت: 12 مهر 1393
کلید واژگان:
جریان SPH تراکم ناپذیر
روش های صریح و ضمنی
انتقال رسوب
مدل پلاستیک بینگهام
شکست سد

Development of Two Incompressible SPH methods to simulate sediment-laden free surface flows

Saeed Farzin¹, Yousef Hassanzadeh², Mohammad Taghi Aalami³, Rouhollah Fatehi^{4*}

1- Department of Civil Engineering, Tabriz Univ., Tabriz, Iran

2- Department of Civil Engineering, Tabriz Univ., Tabriz, Iran

3- Department of Civil Engineering, Tabriz Univ., Tabriz, Iran

4- Department of Mechanical Engineering, Persian Gulf Univ., Bushehr, Iran

* Bushehr, 7516913817, fatehi@pgu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 October 2013
Accepted 19 November 2013
Available Online 04 October 2014

Keywords:
Incompressible SPH Flow
Explicit and Implicit Methods
Sediment Transport
Bingham Plastic Model
Dam Break

ABSTRACT

Two incompressible SPH numerical solvers, including a modified explicit method and a new implicit method have been developed to simulate the sediment-laden free surface flow problems. Using consistent discretization schemes, the proposed explicit method improves somewhat the accuracy of the usual explicit ISPH methods. The implicit method additionally guarantees the incompressibility condition completely. In the presented methods, the liquid phase is modeled using Navier-Stokes equations and to predict the non-Newtonian behavior of the sediment phase, the Bingham plastic rheological model is used. The accuracy and capabilities of the developed incompressible SPH methods is first validated in comparison with available experimental and numerical results of a single-phase water-sediment mixture flow generated by unsteady dam break problem. Then, they are applied to simulate an eroding dam break problem with a two-phase flow sediment transport. Comparison of the obtained results with the results in the literature shows that the developed methods particularly the implicit one, are very powerful tools for simulation of the problems including sediment transport induced by violent free surface flow, with interactions between flow and sediment and morphological changes in bed.

1- مقدمه

گونه جریان ها به طور ناگهانی است و عموماً همراه با ناپیوستگی شدید یا موج در سطح آب هستند [1]. از سوی دیگر، پدیده انتقال جریان حاوی رسوب از موضوعات اصلی علوم هیدرولیک رسوب و نیز مهندسی رودخانه است [3,2].

گستره وسیعی از جریان های موجود در طبیعت را جریان های متغیر سریع همراه با سطح آزاد و مرز متحرک تشکیل می دهند. تغییرات پارامترها در این

Please cite this article using:

Farzin, Y. Hassanzadeh, M.T. Aalami, R. Fatehi, Development of Two Incompressible SPH methods to simulate sediment-laden free surface flows, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 91-103, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

است. این روش عددی ابتدا توسط لوسی [9] و همچنین جینگلد و موناها [10] در 1977 برای حل مسائل اخترفیزیک مطرح شد. در روش SPH، معادلات حاکم توسط میان‌یابی خواص جریان در یک سری نقاط (ذرات) که در میدان پراکنده هستند، گسسته می‌شوند. این روش بعدها در جریان‌های با سطح آزاد مورد بررسی قرار گرفت. اولین مطالعه در این زمینه توسط موناها [11] انجام پذیرفت.

شبیه‌سازی جریان‌های تراکم ناپذیر سیال یکی از چالش‌های روش SPH است. دو رویکرد متفاوت تاکنون ارائه شده است؛ استفاده از مفهوم سیال اندکی تراکم‌پذیر² (WCSPH) و استفاده از روش تصویر فشار³ (ISPH⁴). در رویکرد اول، از یک حل‌گر جریان تراکم‌پذیر استفاده شده و برای ارضای شرط تراکم‌ناپذیری، سرعت صوت مصنوعی به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌شود [13،12]. در رویکرد دوم، میدان فشار از حل یک معادله پواسون و طی یک فرآیند پیش‌بینی-تصحیح به دست می‌آید. لی و همکاران [14] با مقایسه دو روش فوق، نشان دادند که روش تراکم‌پذیری اندک، میدان فشار نوسانی و غیر قابل اعتمادی تولید می‌کند. همچنین لی و همکاران [15] عملکرد مناسب روش تصویر را در مسائل با سطح آزاد سه بعدی نشان دادند. نتایج مطالعات شادلو و همکاران [16] نیز حاکی از دقت بالای رویکرد تصویر فشار نسبت به روش تراکم‌پذیری اندک است. فرزین و همکاران [17] نشان دادند که در حل صریح روش تصویر فشار، امکان ارضای شرط تراکم‌ناپذیری به صورت دقیق وجود ندارد.

مشکل دیگری که در اغلب مطالعات صورت گرفته با استفاده از روش SPH دیده می‌شود، همگرایی⁵ روش است. فاتی و منطری [18] نشان دادند که طرح‌های SPH رایج برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی با کاهش فاصله ذرات یا افزایش تعداد آن‌ها همگرا نمی‌شود. در این راستا در مرجع [17]، دو طرح گسسته‌سازی جدید که خاصیت سازگاری دارند برای گسسته‌سازی مشتقات اول و دوم مکانی ارائه شده است. همچنین بر مبنای طرح‌های جدید، یک روش شبه ضمني سازگار و پایدار⁶ (ISPH)؛ تضمین‌کننده شرط تراکم‌ناپذیری سیال در روش تصویر، معرفی شده است.

تاکنون پژوهش‌های گوناگونی در راستای به هم آمیختن فازهای جریان آب و رسوب با استفاده از روش‌های شبکه-مبنا و بدون شبکه انجام گرفته است. بیشتر این مطالعات، بر روی بستر ثابت و بدون لحاظ توانایی فرسایشی قوی جریان متغیر سریع و تغییرات مورفولوژیکی مربوط به آن در بستر آبراهه انجام شده است [20،19]. همچنین بسیاری از مدل‌های موجود با فرض جریان ماندگار اقدام به شبیه‌سازی این پدیده نموده‌اند. این مدل‌ها، محدود به فرآیندهای آبرفتی با انتقال رسوبات ضعیف و تغییرات آهسته بستر هستند.

در مدل‌سازی جریان رسوب در آب، دو فاز مطرح است. یک فاز سیال (مایع) و یک فاز رسوب (جامد). بطور کلی می‌توان فازهای مایع و رسوب را به صورت پیوسته و یا ذرات گسسته شبیه‌سازی نمود. اگر ذرات رسوب، جداگانه در نظر گرفته شوند، رویکرد حاصل اولبری-لاگرانژی [22،21] خواهد بود. به این معنی که به سیال به صورت اولبری و به رسوب، لاگرانژی نگریسته می‌شود. حالت دیگر وقتی است که سیال و رسوب به عنوان یک سیال مصنوعی همگن با خواص و لزوجت جدید در نظر گرفته شود. این رویکرد را در مقابل رویکرد قبلی، اولبری-اولبری می‌نامند. در این حالت، دو فاز سیال و رسوب، تشکیل یک فاز می‌دهند. علاوه بر این دو دیدگاه، شبیه‌سازی عددی

جریان سطح آزاد همراه با فرآیندهای مختلف فرسایش و رسوب‌گذاری، دارای کاربردهای عملی زیادی است و در بسیاری از رویدادهای طبیعی همچون بالاروی امواج بر روی ساحل شیب‌دار، انتقال آلودگی و آب‌شویی رسوب در مخازن سدها قابل مشاهده است. اهم معضلاتی که این پدیده ایجاد می‌کند عبارتند از: کاهش عمر مفید سدها به دلیل رسوب‌گذاری در مخازن آن‌ها [3]. رسوب‌گذاری در بستر رودخانه‌ها و تشکیل دلتا در محل ورود رودخانه به دریا، ایجاد اختلال در تجهیزات مکانیکی، تاسیسات هیدرولیکی و ابنیه پایین دست سد.

از جمله پدیده‌های مهم که دارای جریان با سطح آزاد است، پدیده انتقال جریان ناشی از شکست سد است. رها شدن ناگهانی توده عظیم آب انبار شده در پشت سدها که با دبی‌های سیلابی معمولی قابل مقایسه نیست [4]، موجب حرکت شدید رسوب به صورت غیر ماندگار به شکل‌های مختلف از قبیل نخاله‌های شناور، جریان لجن، جریان‌های رسوبی و مخلوط مایع-ذرات ریزدانه با رئولوژی پیچیده می‌شود. در فرآیندهای رسوبی شدید از جمله پدیده شکست سد با بستر متحرک، اندرکنش شدیدی میان جریان، انتقال رسوبات و تغییرات مورفولوژی بستر رودخانه وجود دارد. عواملی همچون ارتباط پارامترهای غیرخطی و دینامیکی رسوب و جریان [3]، تغییرات سریع در عمق آب و وقوع پرش هیدرولیکی، تغییر مکان‌های بزرگ و سرعت بسیار زیاد سیال، و مرزهای دارای انحنا، نامنظم و متغیر سبب گشته که ماهیت جریان حاوی رسوب ناشی از شکست سد دارای پیچیدگی‌هایی گردد. انتقال شدید رسوبات پس از شکست سد، سبب ایجاد خطرات جانی و اقتصادی و نیز مشکلات بهره‌برداری از منابع آب‌های سطحی و حوزه‌های آبخیز می‌شود. این پدیده سبب تغییرات سریع و فرسایش و آب‌شستگی در بستر می‌شود. تغییرات بستر رودخانه نیز به نوبه خود در تکامل جریان شکست سد تأثیر می‌گذارد و باعث می‌شود که پیش‌بینی حداکثر سطوح آب، تحلیل زمانی جبهه موج و زمان رسیدن آن به پایین دست، و نیز ارزیابی ریسک جریان شکست سد پیچیده شود [5]. در سال‌های اخیر، اهمیت موضوع مورد بررسی، به دلیل تأثیرات محیط زیستی نیز دو چندان شده است.

در ایران نیز، به دلیل شرایط آب و هوایی و هیدرولوژیکی، رودخانه‌ها در مقایسه با رودخانه‌های جهان رسوب نسبتاً بالاتری را حمل می‌کنند [3]. از طرفی همه ساله در نقاط مختلف کشور، وقوع سیل و حمل رسوبات باعث ایجاد خسارت‌های قابل توجهی می‌شود. لذا پایش و پیش‌بینی رفتار رودخانه‌ها از دیدگاه فرسایش و انباشت رسوب از اهمیت بالایی برخوردار است. این امر زمینه اقدامات حفاظتی، امکان تحلیل و کاهش خسارات و مدیریت بحران را فراهم می‌سازد.

تاکنون اغلب مدل‌سازی عددی جریان سطح آزاد مانند مسئله شکست سد، بر پایه روش‌های شبکه-مبنای اولبری همچون روش‌های المان محدود و حجم محدود بوده است که پژوهش‌های [7،6] از این دست هستند. روش‌های اولبری، به رغم موفقیت‌های مختلف، در جریان‌های سطح آزاد با هندسه پیچیده، تغییر شکل‌های بزرگ و سطح واسط¹ بعضاً با مشکلاتی روبرو هستند [8]. همچنین برخی روش‌های اولبری، در شبیه‌سازی جریان، با پخش یا نوسانات غیر فیزیکی ناشی از جمله جابجایی در معادلات ناوبر-استوکس همراه هستند.

برای حل معضلات فوق، روش‌های بدون شبکه در مدل‌سازی و حل مسائل شامل سطح آزاد و جریان‌های تک‌فاز و چندفازی توسعه پیدا کرده‌اند. با سابقه‌ترین روش در این زمینه، روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)

1- Interface

2- Weakly Compressible SPH
3- Projection Method
4- Incompressible SPH
5- Convergence
6- Implicit Incompressible SPH

توسط کوماتینا و جوانویچ [32] و فراکارولو و کاپارت [33] صورت پذیرفته است، بررسی می شود.

2- معادلات حاکم

2-1- معادلات هیدرودینامیکی جریان و مدل آشفتگی

معادلات حاکم برای شبیه سازی جریان سیال لزج تراکم ناپذیر با سطح آزاد، معادلات پایستگی جرم و اندازه حرکت هستند. این معادلات به صورت لاگرانژی و برداری به صورت روابط (1) و (2) نوشته می شوند:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau}_t \quad (2)$$

که در آن u بردار سرعت، p فشار، t زمان، ρ چگالی، g شتاب گرانش، τ تنش لزوجتی سیال و τ_t تنش آشفتگی است. از آنجا که معمولاً جریان در کانال های طبیعی و رودخانه ها ماهیتی آشفتنه دارند، بنابراین در اینجا برای حل میدان جریان سیال نیوتنی، از مدل آشفتگی مطابق رابطه (3) استفاده شده است [34].

$$\vec{\tau}_t = 2\rho\nu_t \vec{D} \quad (3)$$

که در آن \vec{D} تانسور نرخ کرنش است و در رابطه (4) تعریف می شود:

$$\vec{D} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) \quad (4)$$

در رابطه (3)، ν_t لزوجت آشفتگی است که در رابطه (5) محاسبه می شود.

$$\nu_t = (c_s \Delta x)^2 \left| \vec{D} \right| \quad (5)$$

که در آن c_s ثابت اسمانگورینسکی (برابر 0.1)، Δx فاصله بین ذرات و $\left| \vec{D} \right|$ مقدار ناوردای دوم از تانسور نرخ کرنش است.

$$\left| \vec{D} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} [\vec{D} : \vec{D} - \text{Trace}(\vec{D})^2]} \quad (6)$$

از جمله مزایای روش های پیشنهادی در این پژوهش، این است که به لزوجت مصنوعی برای جلوگیری از نوسانات در جواب نیازی نیست. اضافه کردن لزوجت مصنوعی ممکن است به حذف برخی از ویژگی های واقعی فیزیک جریان نیز منجر شود.

2-2- مدل رئولوژی رسوب

در این تحقیق، مدل رئولوژی رسوب، مخلوط مواد ریز دانه را به عنوان سیال غیر نیوتنی در نظر می گیرد. در سیالات غیر نیوتنی تنش برشی تابعی خطی از نرخ کرنش نیست. یک دسته از آن ها، شامل سیالاتی است که دارای تنش تسلیم هستند. ساختمان این سیالات با توجه به خواص رئولوژیکی آن ها (اندازه، شکل، چگالی، چسبندگی و غلظت ذرات رسوبی) قادرند که تنش برشی کمتر از تنش تسلیم را بدون ایجاد جریان تحمل نماید. معروف ترین این ها، پلاستیک بینگهام است. سیال هرشل-بالکلی³ نیز از این جمله است.

مدل رسوب ارائه شده در این مقاله، اصلاح شده مدل ساختاری بینگهام با معیار تنش تسلیم موهر-کولمب است که توسط هوهنمسر و پراگر [35] به صورت رابطه (7) معرفی شده است:

$$D = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_y}{2\mu_B} & \tau \geq \tau_y \\ 0 & \tau < \tau_y \end{cases} \quad (7)$$

مستقیم [23] و فرمول های متداول انتقال رسوب نیز به منظور مدل سازی فاز مایع و رسوب معرفی شده است. در اینجا، رویکرد اوپلری-اوپلری بنا به مزایا و قابلیت هایی که دارد، برای مدل سازی مخلوط آب و رسوب انتخاب شده است. البته برای حل جریان سیال مصنوعی حاصل، از روش لاگرانژی و ذره-مبنای SPH استفاده می شود.

در رویکرد اوپلری-اوپلری، رفتار پیچیده جریان ریز دانه نمی تواند به درستی با استفاده از یک مدل ساده نیوتنی پیش بینی شود. بنابراین، یک مدل غیر نیوتنی مورد نیاز است که قادر به پیش بینی لزوجت وابسته به تنش باشد [8]. برای شبیه سازی این نوع سیالات، چند مدل رئولوژیکی وجود دارد. از این میان، مدل پلاستیک بینگهام²، که بر اساس یک سیال غیر نیوتنی اجرا می شود، به طور گسترده ای برای جریان ریز دانه به کار گرفته شده است [24]. مدل بینگهام قادر به مدل سازی آستانه حرکت ذرات رسوب و در نظر گرفتن تنش برشی بحرانی است (برای نمونه مراجع [26,25] را ببینید). این رویکرد برای جریان های متغیر سریع همچون جریان ناشی از شکست سد مناسب است.

در سال 2003 میلادی، شائو و لو [25] با استفاده از SPH تراکم ناپذیر به شبیه سازی سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی همراه با سطح آزاد در مسئله شکست سد پرداختند. حسینی و همکاران [27] یک روش SPH صریح برای حل مسائل جریان سیال غیر نیوتنی ارائه دادند و جریان سطح آزاد حاصل از شکست سد را شبیه سازی نمودند. کاپونه [28] جریان های گل آلود غیر نیوتنی را بررسی کرد و مسئله شکست سد را حل نمود. اولریش و رانگ [29] اندرکنش آب-رسوب بر روی بستر دریا و کف بندر را به وسیله SPH مدل سازی کردند. شکیبایی نیا و جین [8] یک مدل چند فاز، که قادر به تحلیل ناپوستگی چگالی و لزوجت است و در آن فاز رسوب به عنوان یک سیال غیر نیوتنی رفتار می کند، برای شبیه سازی مسئله شکست سد با بستر متحرک معرفی کرده اند. این مطالعه بر اساس فرمول بندی WC-MPS است. میرمحمدی و کتابداری [26] با استفاده از رویکرد SPH، آب شستگی در اطراف خط لوله دریایی در بستر شیب دار دریا را شبیه سازی نمودند. علی [30]، از SPH تراکم ناپذیر به منظور شبیه سازی فرسایش ناشی از فروپاشی سد بر اثر سونامی استفاده نمود. قدم پور و همکاران [31] سیال گل آلود با سطح آزاد را به کمک روش SPH تراکم ناپذیر و برای مسئله شکست سد مدل سازی نمودند.

هدف از ارائه این مقاله، توسعه روش صریح اصلاح شده و روش شبه ضمنی SPH تراکم ناپذیر معرفی شده در [17]، به جریان های شدید سطح آزاد حاوی رسوب است. مدل رسوب مورد استفاده، مدل پلاستیک بینگهام انتخاب شده است. بدین منظور، پس از بیان مفاهیم و معادلات حاکم بر جریان، مدل بینگهام مورد استفاده تشریح می شود. طرح های جدید سازگار گسسته سازی مشتقات مکانی در SPH بیان شده و سپس روش صریح اصلاح شده و ضمنی پیشنهادی در [17]، به جریان حاوی رسوب توسعه داده می شوند. در ادامه، مسئله انتقال رسوب ناشی از شکست سد با استفاده از روش های ارائه شده، بررسی می شود. در این راستا، انتقال رسوبات از طریق جریان غلیظ در مخزن سد (جریان تک فاز) و نیز از طریق جریان و مصالح رسوبی موجود در بستر مخزن و پایین دست (جریان دوفازی) شبیه سازی و تحلیل می شود. دقت و کارایی روش های عددی توسعه داده شده در این تحقیق، با استفاده از دو مدل فیزیکی مطرح که مطالعات آزمایشگاهی آن ها

1- Direct Numerical Simulation

2- Bingham Plastic Model

3- Herschel-Bulkley

دیفرانسیلی است. معادلات سیال شامل مشتقات مکانی از مرتبه اول و دوم است. در طرح گسسته‌سازی مشتقات مرتبه اول، گرادیان یک میدان دلخواه $\langle \nabla v \rangle_i$ به صورت رابطه (11) بیان می‌شود [17]:

$$\langle \nabla v \rangle_i = \sum_j \omega_j B_{1i} \frac{W_{ij}}{r_{ij}} (-e_{ij}) (v_j - v_i) \quad (11)$$

در این رابطه، i شماره ذرات همسایه و j شماره ذره i است. $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ فاصله دو ذره و $e_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ یک بردار واحد در راستای بین ذرات i تا j است. B_{1i} نیز یک تانسور نرمال‌سازی مجدد است که مطابق رابطه (12) برای مشتق مرتبه اول معرفی شده است.

$$\vec{B}_{1i} = \left[\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij} e_{ij} \right]^{-1} \quad (12)$$

تقریب عددی مشتق دوم مکانی در روش SPH نیز به صورت رابطه (13) ارائه شده است [17].

$$\langle \nabla^2 v \rangle_i = \vec{B}_{2i} : \sum_j 2\omega_j \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} e_{ij} \left(\frac{v_j - v_i}{r_{ij}} + e_{ij} \cdot \langle \nabla v \rangle_i \right) \quad (13)$$

در طرح پیشنهادی بالا، تانسور متقارن دیگری برای نرمال‌سازی مجدد \vec{B}_{2i} معرفی شده است، به نحوی که معادله (14) را ارضا کند.

$$\vec{B}_{2i} : \left[\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij} e_{ij} e_{ij} e_{ij} - \left(\sum_j \omega_j \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} e_{ij} \right) \cdot \vec{B}_{1i} \cdot \left(\sum_j \omega_j W_{ij} r_{ij} e_{ij} e_{ij} \right) \right] = \vec{1} \quad (14)$$

در روابط فوق $W_{ij} = W(|r_i - r_j|, h)$ است که در آن W تابع هسته و h شعاع هموارسازی نامیده می‌شود. در مسأله حاضر، با مقایسه عملکرد توابع مختلف هسته برای مسائل دو بعدی جریان سطح آزاد حاوی رسوب، تابع هسته درجه دوم مشابه مرجع [17] استفاده شد. همچنین در این تحقیق، شعاع هموارسازی $h = 3.0\Delta x$ در نظر گرفته شده است که نسبت به مقالات مشابه در زمینه SPH، مقدار کوچکی است و نشان از کارایی مدل پیشنهادی دارد. مثلاً در مقالات شائو و همکاران [25] و ژو و همکاران [37]، شعاع ناحیه مزبور به ترتیب 4 و 6 برابر فاصله اولیه ذرات است. نتیجه اینکه تعداد ذرات مورد استفاده در مقاله حاضر بسیار کمتر از تحقیقات پر استناد فوق خواهد بود. دیگر مزایای دو طرح پیشنهادی (11) و (13) نسبت به دیگر طرح‌های رایج، در [17] آمده است.

3-2- روش شبه ضمنی پیشنهادی

جهت ارضای کامل شرط تراکم‌ناپذیری، چاره کار حل روش تصویر توسط یک روش شبه ضمنی پایدار با الگوی تکرار شونده است [17]. مراحل توسعه روش پیشنهادی به جریان حاوی رسوب، توسط یک فرآیند پیش‌بینی-تصحیح و مطابق شش گام زیر اجرا می‌شود:

گام اول) برابر قرار دادن مقادیر مکان، سرعت و فشار در اولین مرحله تکرار ($k=1$)، با مقادیر زمان فعلی:

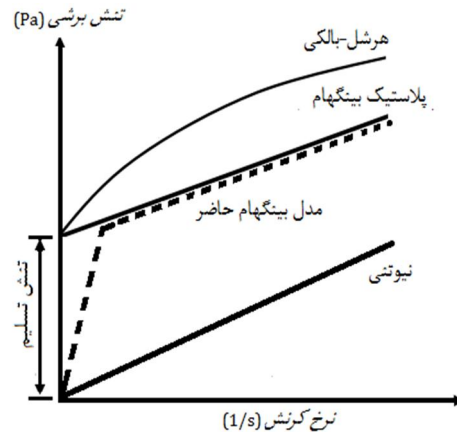
$$r^k = r^n, u^k = u^n, p^k = p^n \quad (15)$$

گام دوم) پیش‌بینی سرعت میانی U^* بر اساس مقادیر تکرار k :

$$u^* = u^n + \Delta t (g + \langle \nabla \cdot (v_{tot} \nabla u) \rangle^k) \quad (16)$$

در رابطه (16)، اثر نیروهای تنش به صورت رابطه (17) گسسته می‌شود:

$$\langle \nabla \cdot (v_{tot} \nabla u) \rangle = \sum_j 2\omega_j \vec{B}_{2i} : \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} e_{ij} \left(\frac{u_j - u_i}{r_{ij}} + e_{ij} \cdot \langle \nabla u \rangle_i \right) \quad (17)$$



شکل 1 مقایسه رفتار رئولوژیکی سیال غیر نیوتنی در مدل حاضر و مرجع [35]

که در آن، τ_y تنش برشی تسلیم و μ_B لزوجت بینگهام است. ملاحظه می‌شود که در مدل پلاستیک بینگهام، رفتار ماده برای تنش‌های کمتر از تنش تسلیم، به صورت یک جسم جامد است. لیکن زمانی که تنش برشی فراتر از تنش تسلیم رود، مخلوط به صورت یک مایع لزج رفتار می‌کند. [25, 27, 24]. اشکال عمده این مدل در آن است که τ تابع پیوسته‌ای از D نیست. معادله ساختاری اصلاح شده، ارتباط بین تنش و نرخ کرنش برای مدل غیر نیوتنی را بیان می‌کند و به صورت رابطه (8) است:

$$\vec{\tau} = 2\mu_{eff} \vec{D} \quad (8)$$

در این رابطه μ_{eff} لزوجت موثر است و طبق رابطه (9) تعریف شده است:

$$\mu_{eff} = \begin{cases} \mu_B + \frac{\tau_y}{2|\vec{D}|} & |\vec{D}| \geq \frac{\tau_y}{2\mu_0} \\ \mu_B + \mu_0 & |\vec{D}| < \frac{\tau_y}{2\mu_0} \end{cases} \quad (9)$$

در رابطه فوق $\mu_0 = \beta \mu_B$ ، شاخص سازگاری¹ ذرات است [8]. در اینجا مقدار β برابر 1000 قرار داده شده است. در شکل 1، مقایسه مدل رابطه (7) [35] و مدل اصلاحی رابطه (8) ارائه شده است.

برآورد مقادیر τ_y و μ_B به صورت تجربی انجام می‌پذیرد. کاناتانی [36] تنش برشی تسلیم برای مواد دانه‌ای² و بر اساس معیار موهر-کولمب را به صورت رابطه (10) معرفی کرده است:

$$\tau_y = C \cos \varphi + \rho \sin \varphi \quad (10)$$

که در آن C چسبندگی و φ زاویه اصطکاک داخلی ذرات رسوب است.

3-1- طرح‌های گسسته‌سازی

برای حل معادلات سیال به روش SPH، نیاز به تقریب گسسته مشتقات برای حل معادلات سیال به روش SPH، نیاز به تقریب گسسته مشتقات

1- Consistency Index
2- Granular Materials

$$\bar{u} = 0 \quad (25)$$

ذراتی که به عنوان ذرات سطح آزاد تعیین می شوند دارای فشار صفر هستند. برای شرط مرزی سرعت در جریان با سطح آزاد داریم:

$$\langle \nabla \bar{u} \rangle + \langle \nabla \bar{u} \rangle^T \cdot n_i = 0 \quad (26)$$

در روابط (26)، برای هر ذره i روی مرز، بردار یکه عمود بر سطح n_i را می توان از رابطه (27) بدست آورد:

$$n_i = \frac{\sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij}}{\left| \sum_j \omega_j W_{ij} e_{ij} \right|} \quad (27)$$

در روش پیشنهادی برای مدل سازی شرایط مرزی، نیازی به استفاده از ذرات اضافی و اصطلاحاً مجازی «نخودی»⁹ یا «آینه ای»¹⁰ نیست.

در مقاله حاضر، برای اینکه یک ذره به عنوان سطح آزاد شناخته شود، می بایست در چهار شرط پیشنهادی صدق کند که عبارتند از:

$$\omega_i \sum_j W_{ij} \leq 0.80 \quad (28)$$

$$\left| \sum_j W_{ij} e_{ij} \right| > 0.25 \quad (29)$$

$$S_{B2}^{\leftrightarrow} > 14 \quad (30)$$

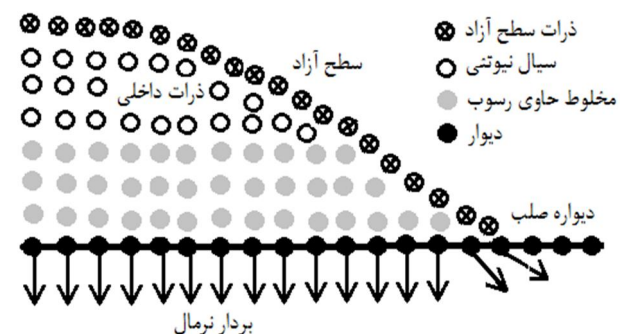
$$\left| B1 \right| = 0 \quad (31)$$

جایی که $S_{B2}^{\leftrightarrow} = \left(\left| \vec{B}_{2xx} \right| + \left| \vec{B}_{2yy} \right| + \left| \vec{B}_{2xy} \right| \right)$ و \vec{B}_{2xy} و \vec{B}_{2yy} و \vec{B}_{2xx} اعضای دومین تانسور نرمال سازی هستند. تفسیر فیزیکی شرایط (28) تا (31) در [17] آمده است. نمونه ای از چینش ذرات SPH در شکل 2 نشان داده شده است.

قابل توجه آنکه در حالتی که بخشی از جریان، شامل سیال بدون رسوب (سیال نیوتنی) است، عملاً جریان مایع مشتمل بر دو فاز است. فاز اول، مایع خالص و فاز دوم، سیال مصنوعی جایگزین مخلوط آب و رسوب است. با این حال، به علت مدل غیر نیوتنی مورد استفاده (مدل اصلاح شده بینگهام) نیازی به تغییر معادلات حاکم نیست. به این صورت که خواص هر یک از فازها در ابتدای حل به ذرات متناظر آن فاز اختصاص داده می شود و از آنجا که در روش لاگرانژی، ذرات با سرعت مادی در حال حرکت هستند، نیاز به انجام عملیات خاصی روی مرز بین دو فاز مایع وجود ندارد. در نتیجه، پیوستگی سرعت و فشار در محل سطح واسط بین دو فاز در عمل ایجاد می شود.

3-5- اندازه گام زمانی

از ملزومات حل عددی معادلات ناویر-استوکس، پایداری روش عددی در فرآیند حل است.



شکل 2 چینش شماتیک ذرات SPH

که در آن $v_{tot} = v_i + \frac{\mu_{eff}}{\rho}$ و $\bar{v}_{tot,ij} = \frac{1}{2}(v_{tot,i} + v_{tot,j})$. واضح است که برای سیال نیوتنی به جای μ ، مقدار لزوجت سیال گذاشته می شود.

گام سوم) محاسبه فشار جدید برای تکرار k از حل دستگاه معادلات (18):

$$\langle \nabla^2 p^{k+1} \rangle^k = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot U^* \rangle^k \quad (18)$$

برای یافتن p^{k+1} از رابطه (18)، می بایست به نحوی از رابطه (13) استفاده کرد که بتوان ماتریس ضرایب فشار را از آن به صورت رابطه (19) استخراج کرد.

$$\langle \nabla^2 p \rangle_i = \vec{B}_{2i} : \sum_j 2\omega_j (p_j - p_i) \left[\frac{W_{ij}}{r_{ij}^2} e_{ij} e_{ij} + \left(\sum_k \omega_k \cdot \frac{W_{ik}}{r_{ik}} e_{ik} e_{ik} \right) \cdot \vec{B}_{1i} \cdot \frac{W_{ij}}{r_{ij}} e_{ij} \right] \quad (19)$$

گام چهارم) محاسبه مقادیر سرعت و مکان مرحله جدید:

$$u^{k+1} = u^* + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p^{k+1} \rangle^k \right) \quad (20)$$

$$r^{k+1} = r^n + \frac{\Delta t}{2} (u^n + u^{k+1}) \quad (21)$$

گام پنجم) خارج شدن از حلقه در صورت همگرایی جواب، در غیر این صورت به روز رسانی رابطه (22) و باز گشت به گام دوم:

$$r^k = r^{k+1}, u^k = u^{k+1}, p^k = p^{k+1} \quad (22)$$

گام ششم) محاسبه مقادیر در زمان جدید:

$$r^{n+1} = r^{k+1}, u^{n+1} = u^{k+1}, p^{n+1} = p^{k+1} \quad (23)$$

شایان ذکر است که در رابطه فوق، بالا نویسی n و k به ترتیب نشان دهنده مقادیر در زمان فعلی و تکرار فعلی است. در حالی که بالا نویسی در $\langle \cdot \rangle^k$ نشان دهنده تقریب SPH در روابط (11) و (13) و بر اساس مکان ذرات در تکرار فعلی است. در روش های لاگرانژی مانند SPH، لازم است که هنگام مشتق گیری تعیین شود که مشتق مکانی بر اساس محل ذرات در چه زمانی صورت می گیرد.

3-3- روش صریح اصلاح شده

تفاوت روش صریح پیشنهادی با روش ضمنی، عدم استفاده از الگوی تکرار است. به این معنی که پس از حل معادله فشار (18) از معادله ای مشابه با (20)، مقدار سرعت زمان جدید بدست می آید. از این رو در اینجا، آن را «صریح» می نامیم. واضح است که در هر حال، به دلیل استفاده از روش تصویر، فشار جدید از یک معادله ضمنی به دست می آید.

اشکال روش صریح آن است که متغیر میدان و مکان مشتق گیری در دو زمان متفاوت محاسبه شده اند که منجر به عدم ارضای کامل شرط تراکم ناپذیری می شود [17]. به هر حال استفاده از طرح های گسسته سازی جدید معرفی شده، باعث بهبود دقت نتایج می شود. این امر در بخش بعد، ضمن بررسی نتایج مسئله جریان حاوی رسوب نشان داده شده است.

3-4- شرایط مرزی

در اینجا، شرایط مرزی میدان جریان (طبق شکل 2) عبارتند از دیواره های صلب و سطح آزاد جریان. برای شرط مرزی فشار و سرعت روی دیوار به ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_j \omega_j \left(\vec{B}_{1i} \cdot \frac{W_{ij}}{r_{ij}} (-e_{ij}) \right) \cdot n_i \frac{p_j - p_i}{\rho_{ij}} = g \cdot n_i \quad (24)$$

که در آن ρ_{ij} ، متوسط چگالی ذرات i و j است.

باعث جلوگیری از به هم پیوستن ذرات می شود.

4- نتایج و بحث

در این بخش، دقت و کارایی روش های صریح اصلاح شده و ضمنی جدید بررسی می شود. بدین منظور، هیدرودینامیک جریان غیر ماندگار حاوی رسوب خروجی از مخزن سد مطالعه می شود. این موضوع به این شکل مطرح می شود که مخزن سدی با شکل منشوری در لحظه اولیه پر از مخلوط آب و رسوب است که به طور آبی دچار گسیختگی می شود و امواج به پایین دست انتشار می یابند. شماتیک دو بعدی مدلی فیزیکی آزمایش ها و شبیه سازی های صورت گرفته، ابعاد آن ها، و مقادیر پارامترهای مختلف رئولوژیکی مورد استفاده، به ترتیب در شکل 3، جدول 1 و جدول 2 ارائه شده است. در جدول 3 نیز، مقادیر پارامترهای عددی مورد استفاده در این تحقیق گزارش شده است.

در این تحقیق بر پایه روش های معرفی شده، یک کد عددی در زبان برنامه نویسی ++C بر اساس شیوه برنامه نویسی شیء گرا و روش عددی SPH توسعه داده شده است. کد حاضر، جهت اعتبارسنجی و بررسی کارایی برای دو مدل فیزیکی دو بعدی [32] و [33] به کار برده شد. بنا به مطالعات صورت گرفته، این دو مدل بیشترین کاربرد را در ادبیات تحقیق داشته اند. در این مقاله، نسبت به مدل سازی های پیشین، مطالعات نسبتاً جامعی از پدیده انتقال رسوب توسط مدل های حاضر صورت گرفته است. به طوری که علاوه بر نتایج سطح آزاد و موقعیت پیشانی موج، آب نمود خروجی از مخزن سد، توزیع فشار و بردارهای سرعت نیز محاسبه و تحلیل شده اند. علاوه بر موارد فوق، از جمله مزایای روش های پیشنهادی در این مقاله، آن است که نیازی به استفاده از لزوجت مصنوعی در مسائل نیست.

4-1- شبیه سازی جریان تک فاز ناشی از شکست سد بر بستر ثابت

با استفاده از رویکرد پلاستیک بینگهام، مواد رسوبی به عنوان یک سیال تک فاز با چگالی معادل شبیه سازی شده است.

جدول 1 هندسه و ابعاد مدل های فیزیکی مورد بررسی

آزمایش	نوع مدل	عمق آب مخزن (HW)	عمق رسوب مخزن (Hsu)	عمق رسوب پایین دست (Hsd)	طول مخزن (Lu)	طول کل ارتفاع کل مدل سازی (L)	ارتفاع کل مدل سازی (H)	شیب (S)
مرجع [32]	تک فاز	0	0/1	0	2	3	0/1	0/1
مرجع [33]	دو فاز	0/1	0/05	0/05	1	2/5	0/15	0

* واحد شیب، درصد و تمامی واحدهای دیگر متر است.

جدول 2 خصوصیات رئولوژیکی مواد رسوبی بستر

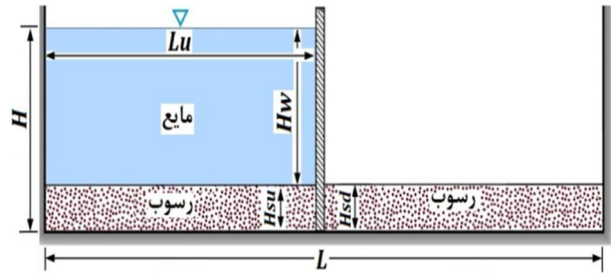
آزمایش	نوع ماده رسوبی	قطر معادل d50 [m]	چگالی مخصوص [kg/m ³]	چگالی بالک [kg/m ³]	زاویه اصطکاک داخلی ذرات [°]
کوماتینا و جوانویچ [32]	کائولینیت	0/006	2650	1332	---
فراکارولو و کاپارت [33]	پی وی سی	0/0035	1540	1452	27

* مربوط به درصد حجمی رسوب 20/1% و ** مربوط به درصد حجمی رسوب 27/4%

جدول 3 مقادیر پارامترهای عددی مورد استفاده در شبیه سازی

مدل	روش حل	تعداد ذرات	فاصله اولیه ذرات [m]	ضریب تصحیح موقعیت ذرات	بیشینه عدد کورانت α
تک فاز	صریح	8649-16589	0/005-0/0035	0/08	0/1
				0/07	0/12
دو فاز	ضمینی	8649-16589	0/005-0/0035	0/07	0/2
				0/07	0/07
دو فاز	صریح	13627	0/0041	0/07	0/07
				ضمینی	0/08

* مربوط به درصد حجمی رسوب 20/1% و ** مربوط به درصد حجمی رسوب 27/4%



شکل 3 طرح شماتیک مدل های جریان حاوی رسوب ناشی از شکست سد

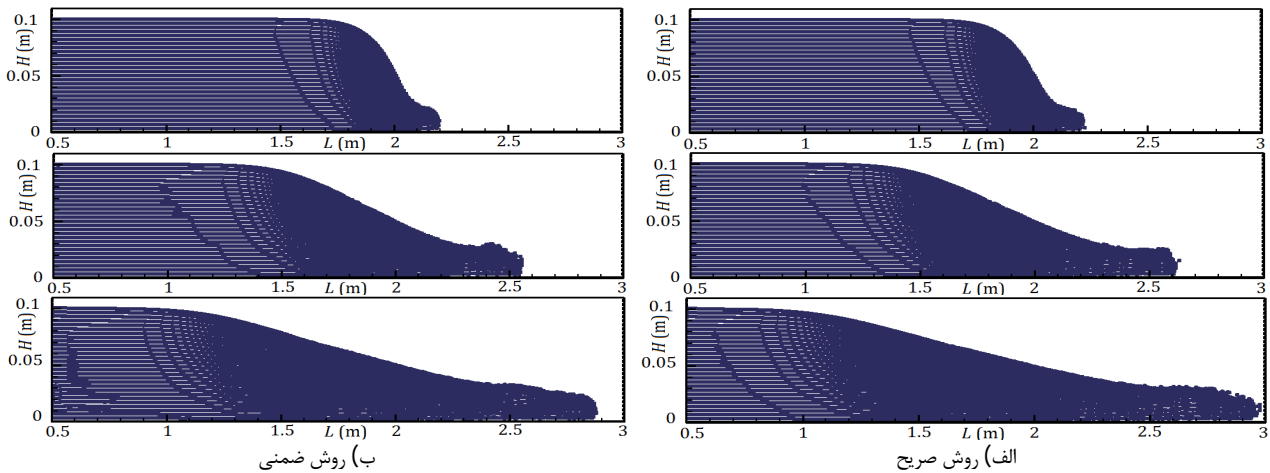
به منظور اطمینان از پایداری عددی الگوی مورد نظر، مقدار اندازه گام زمانی Δt می بایست توسط معیارهای مشخصی محدود شود. در اینجا، این معیارها توسط عبارت (32) بیان می شود:

$$\Delta t = \alpha \cdot \min\left(\frac{\Delta x}{U_{\max}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{gL}}\right) \quad (32)$$

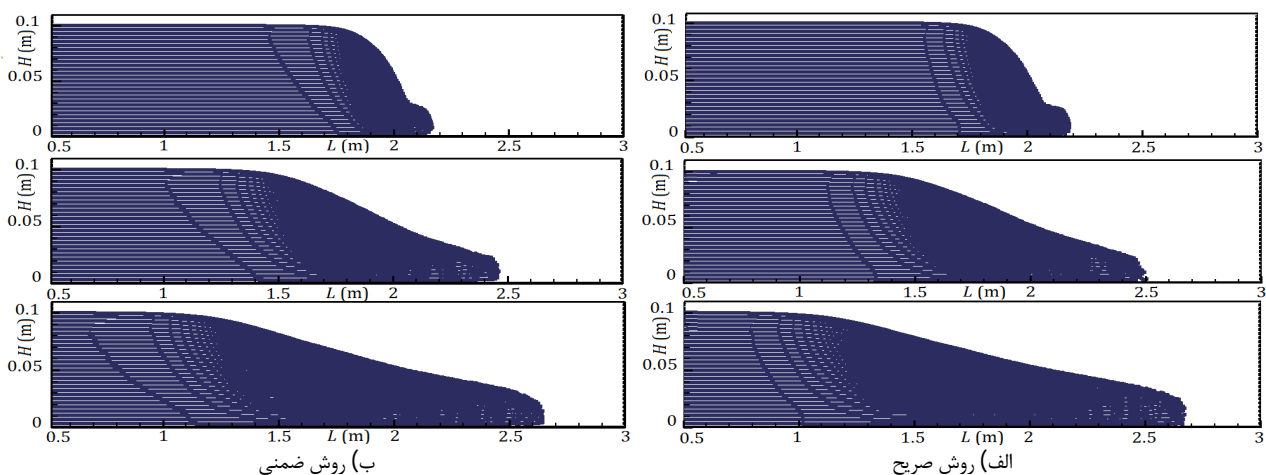
در این روابط U_{\max} سرعت بیشینه جریان، $0 < \alpha < 1.0$ بیشینه عدد کورانت و L طول مشخصه مسئله است. جمله اول سمت راست در رابطه (32) مشابه شرط CFL است و در جریان های با عدد رینولدز زیاد بر سایر شرایط غالب است. در نتیجه، به جز در لحظات آغازین که سرعت سیال کم است، نیازی به بررسی سایر شرط ها نیست. بنابراین جمله دوم، برای زمان های اولیه شکست سد که گرانش حضور موثرتری دارد، پیشنهاد شده است.

3-6- تصحیح موقعیت ذرات

از آنجا که SPH یک روش لاگرانژی است، حرکت ذرات بایستی بر اساس سرعت سیال در همان نقطه انجام شود. اما این کار در برخی مسائل باعث مشکلاتی می شود. برای حل مشکل، می بایست در انتهای هر گام زمانی، ذرات اندکی از وضعیت به دست آمده جابجا شوند به طوری که به همگن شدن توزیع ذرات کمک کند. در کار حاضر، یک روش اصلاح شده مطابق آنچه در مرجع [17] توسط همین نویسندگان پیشنهاد شده استفاده می شود. تصحیح فوق به ذرات اجازه می دهد تا همگنی و سازماندهی بهتری داشته باشند و



شکل 4 مقایسه شکل سطح آزاد و موقعیت پیشانی مخلوط با استفاده از روش های پیشنهادی در زمان های 0/2، 0/6 و 1 ثانیه (از بالا به پایین) و غلظت 20/1%



شکل 5 مقایسه شکل سطح آزاد و موقعیت پیشانی مخلوط با استفاده از روش های پیشنهادی در زمان های 0/2، 0/6 و 1 ثانیه (از بالا به پایین) و غلظت 27/4%

کوماتینا و جوانوچ [32] وابستگی لزوجت پلاستیک (μ_B) و تنش تسلیم بینگهام (τ_y) را به درصد حجمی رسوب در مخلوط مورد نظر گزارش کرده اند. بر این اساس، برای درصد حجمی رسوب 20/1% مقادیر μ_B و τ_y به ترتیب برابر 1/96 پاسکال و 0/0201 پاسکال ثانیه در نظر گرفته شده اند. برای درصد حجمی رسوب 27/4% نیز، مقادیر فوق برابر 23/5 پاسکال و 0/071 پاسکال ثانیه هستند. در شبیه سازی ها، به علت غلظت و در نتیجه لزوجت نسبتاً زیاد و کندی حرکت مخلوط، جریان، لایه ای است و بنابراین نیازی به استفاده از مدل آشفتگی نیست. همان طور که در جدول 3 مشاهده می شود، شبیه سازی های این بخش با استفاده از 8649 و 16589 تعداد ذره محاسباتی انجام شده است.

نتایج شبیه سازی سطح آزاد و موقعیت پیشانی جریان در گذر زمان بعد از شکست سد، با استفاده از روش های ISPH ارائه شده برای غلظت های 20/1% و 27/4% به ترتیب در شکل های 4 و 5 ارائه و مقایسه شده است. این نتایج با استفاده از 16589 ذره محاسباتی حاصل شده است. برای 8649 ذره نیز، نتایج مربوط به پیشروی پیشانی موج به صورت نمودار ارائه خواهد شد.

در شکل های 4 و 5، با شروع حرکت از حالت هیدرواستاتیک آغازین، جریان مخلوط دچار ریزش ناگهانی و یک افت سریع عمق در نزدیکی سد تحت اثر گرانش می شود. بر اساس نتایج این تحقیق، در غلظت 20/1% تراز مخلوط در لحظات اولیه (0/2 ثانیه) تا یک پنجم عمق اولیه افت می کند

در ادامه موقعیت پیشانی موج ناشی از شکست سد با استفاده از 8649 ذره بررسی می شود. در این زمینه علاوه بر آزمایش تجربی [32]، حل های

(صرف نظر از ذرات واقع در نوک پیشانی با عمق بسیار کم). در غلظت 27/4% این مقدار به یک چهارم می رسد. با گذشت زمان جریان توسعه می یابد و پیشانی موج با سرعت تقریباً ثابت پیشروی می کند.

با مقایسه نتایج دو غلظت مورد بررسی، همان طور که انتظار می رفت مشاهده می شود که با افزایش غلظت، میزان پیشروی جبهه موج کاهش یافته است. همچنین با مقایسه نتایج دو غلظت، دقت مدل های عددی پیشنهادی در غلظت 27/4% بیشتر است. برای هر دو غلظت و در تمامی لحظات، موقعیت پیشانی موج در روش صریح، جلوتر از روش ضمنی است. همان طور که در ادامه برای ذرات 8649 نیز نشان داده می شود، هر دو روش مطابقت بالایی با نتایج آزمایشگاهی دارند؛ لیکن نتایج روش ضمنی از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین با توجه به جدول 3، در این مدل سازی گام زمانی روش ضمنی پیشنهادی تا دو برابر روش صریح قابل افزایش است.

از چالش های این مدل سازی، اعمال شرایط مرزی است؛ چرا که شرط مرزی دیواره صلب و بدون لغزش در روش SPH هنوز چالش برانگیز است [28]. بدین منظور از ذرات نخودی استفاده می کنند (مثلاً [28]). از مزایای روش های حاضر آن است که با استفاده از طرح های گسسته سازی جدید معرفی شده و اعمال شرایط مرزی اصلاح شده، این مشکل در SPH برطرف شده و احتیاج به هیچ ذره اضافی نیست.

در شکل 8 نتایج شبیه سازی تغییرات عمق جریان در مقاطع مختلف پس از شکست، با گذشت زمان و در دو غلظت رسم شده است. روی دادن شکست و جاری شدن رسوبات، با افزایش عمق در پایین دست سد همراه است که با گذر زمان نیز بیشتر می شود. تغییرات خیلی سریع عمق و فاصله زمانی کوتاه رسیدن جریان به مقدار بیشینه خود، از جمله خصوصیات جریان های غیر ماندگار همچون شکست سد است که در نمودارهای شکل 8 قابل رویت است. با توجه به این شکل، نمودار آب نمود به صورت صعودی است که علت این مسئله، عامل لزوجت سیال است.

در شکل 8، مطابقت خوبی بین نتایج تجربی [32] و نتایج حاصل از روش های صریح و ضمنی پیشنهادی، مشاهده می شود. روش های حاضر در مقایسه با داده های تجربی، مقدار ماکزیمم عمق مخلوط جریان تخلیه شده را در فاصله زمانی یکسانی نشان می دهند. به عبارتی زمان گسترش سیلاب با دقت بالایی مدل می شود. این امر در طراحی سیستم های هشدار سیلاب و طرح های تخلیه اضطراری در مواقع بحران، اهمیت ویژه ای دارد.

چنانچه از شکل 8 پیداست، تغییرات عمق آب در مقاطع مختلف در مسیر جریان، روند همواری دارد. البته در غلظت 20/1% و دومین مقطع، روش صریح دارای نوسانات در عمق است که روش ضمنی این مشکل را برطرف کرده است.

همچنین با توجه به شکل 8، تراز آب و نیز بیشینه عمق آب، کمتر از مقادیر آزمایشگاهی است. البته این میزان تفاوت با توجه به عدم لحاظ اثر زبری بستر و اصطکاک مسیر حرکت در مدل های عددی حاضر، دور از انتظار نیست. نادیده گرفتن زبری بستر، تندی حرکت و کاهش عمق آب در مقاطع را در پی خواهد داشت. دلیل دیگر این تفاوت، بازشدگی ناگهانی دریچه در شبیه سازی است که در مدل آزمایشگاهی چنین اتفاقی نمی افتد و باید زمان و سرعت بالا آمدن مد نظر قرار گیرد. مشاهده می شود که با گذشت زمان، شتاب گرفتن جریان و همچنین باز شدن کامل دریچه، اختلاف از بین می رود و نتایج عددی و آزمایشگاهی به یکدیگر بسیار نزدیک می شوند. از لحاظ مقایسه روش های پیشنهادی، روش ضمنی در برآورد مقدار بیشینه جریان با دقت نسبتاً بیشتری عمل می کند.

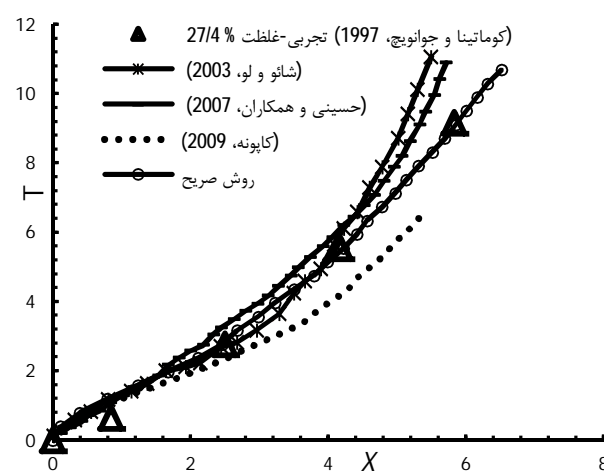
در ادامه، جهت ارزیابی بیشتر کارایی و قابلیت روش های پیشنهادی، نتایج توزیع فشار و سپس بردارهای سرعت که برآورد آن ها در آزمایشگاه به آسانی مقدور نیست، مورد مطالعه قرار می گیرد. در شکل های 9 و 10 نتایج حاصل از شبیه سازی توزیع فشار در دو غلظت 20/1% و 27/4%، در دو زمان انتهایی 0/8 و 1 ثانیه و با استفاده از 8649 ذره ارائه شده است (راهنمای کانتور فشار برای هر دو شکل 9 و 10 یکسان است). علت این انتخاب را می توان بدین صورت تشریح کرد که اگرچه هر دو روش صریح و ضمنی در برآورد توزیع فشار از دقت مطلوبی برخوردار هستند، لیکن برتری روش ضمنی نسبت به روش صریح در محاسبه فشار، در مواردی محسوس تر است؛ از جمله در زمان های انتهایی و در مقادیر غلظت های کمتر. همچنین با مقایسه شکل های 9 و 10 مشاهده می گردد که قابلیت هر دو مدل پیشنهادی در غلظت بالاتر، افزایش یافته است. نوسانات فشاری روش صریح در غلظت 20/1% که در پیشانی موج مشاهده می شود، در غلظت 27/4% بسیار کاهش یافته است.

قابل توجه آنکه در این بخش، شبیه سازی با استفاده از 16589 ذره نیز انجام پذیرفت و مشاهده شد که با افزایش تعداد ذرات، دقت هر دو روش اندکی بهتر شده است. لیکن با توجه به مشابهت روند نتایج، با نتایج حاصل از 8649 ذره، از ارائه آن صرف نظر شد.

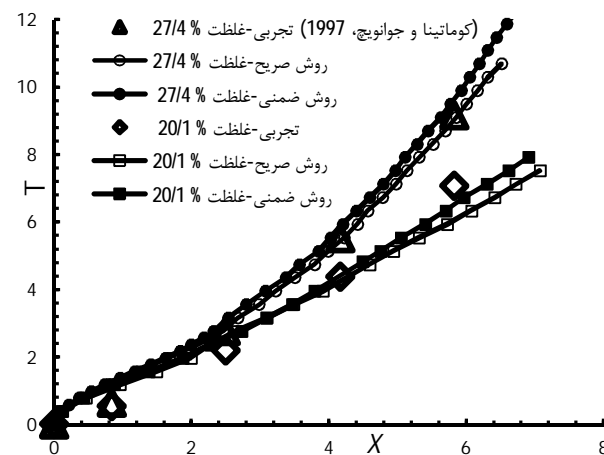
عددی شانو و لو [25]، حسینی و همکاران [27] و کاپونه [28] نیز موجود است. مدل سازی مراجع [25] و [27] به ترتیب با استفاده از 2000 و 8000 ذره انجام شده است. در مرجع [28]، تعداد ذرات بیان نشده و فقط 400 ذره که برای مدل سازی 0/01 متر از پیشانی موج استفاده شده، مشخص است. بنابراین تعداد ذرات مورد استفاده ایشان بسیار زیاد است. نتایج فوق به همراه نتایج حل روش صریح حاضر، برای غلظت 27/4% در شکل 6 ارائه شده است. در این شکل، $X = \frac{x}{H}$ موقعیت بی بعد پیشانی موج مخلوط، از محل سد و $T = t \sqrt{\frac{g}{H}}$ زمان بی بعد شده است.

به منظور نشان دادن قابلیت روش های صریح و ضمنی پیشنهادی، مقایسه آن ها با یکدیگر و مقایسه نتایج در دو غلظت 20/1% و 27/4%، نتایج حاصله در شکل 7 ارائه شده است. قابل توجه این که با توجه به بررسی های صورت گرفته، برای غلظت 20/1%، نتایج عددی در ادبیات موضوع گزارش نشده است.

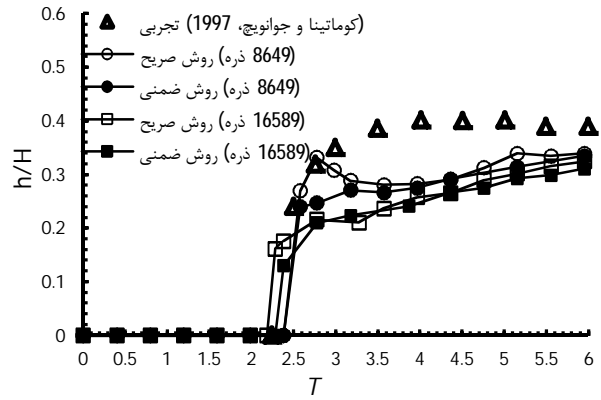
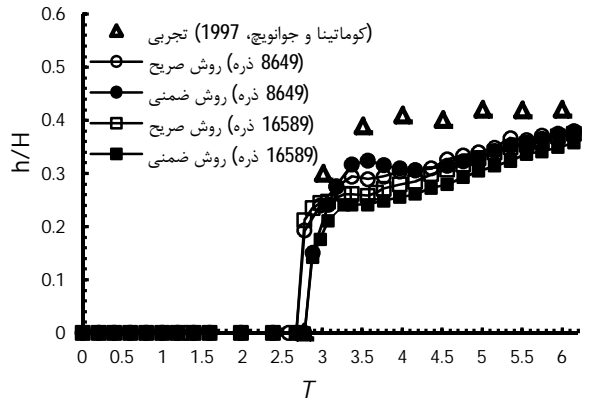
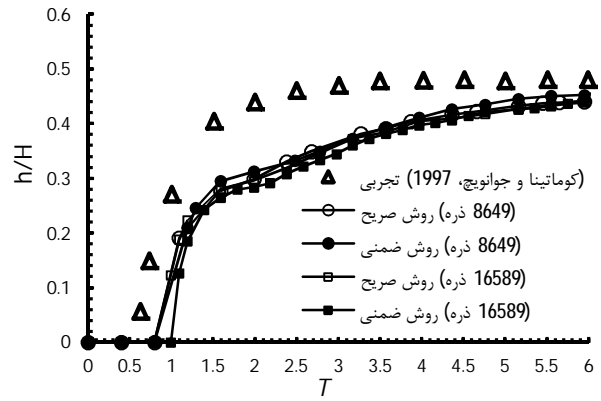
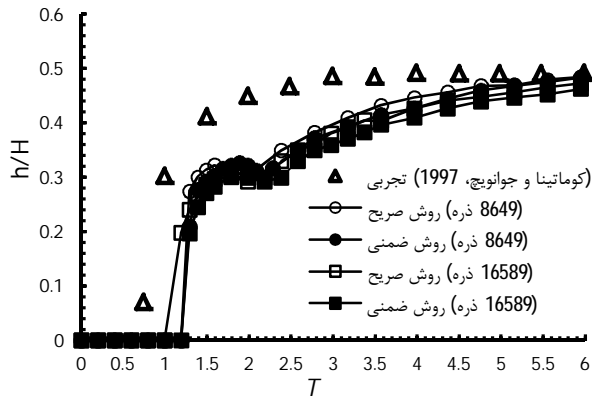
با توجه به شکل 7، هر دو روش پیشنهادی نسبت به سایر روش ها، با دقت بسیار بالاتری نتایج آزمایشگاهی را مدل کرده اند. در مقایسه این دو روش، همچون نتایج با 16589 ذره، روش صریح موقعیت پیشانی مخلوط را اندکی جلوتر پیش بینی می کند. در غلظت 20/1%، دقت بیشتر روش ضمنی، محسوس تر است. همچنین در مقایسه دو غلظت مشاهده می شود که با افزایش غلظت، میزان پیشروی مخلوط کاهش می یابد.



شکل 6 میزان پیشروی مخلوط جریان ناشی از شکست سد در گذر زمان



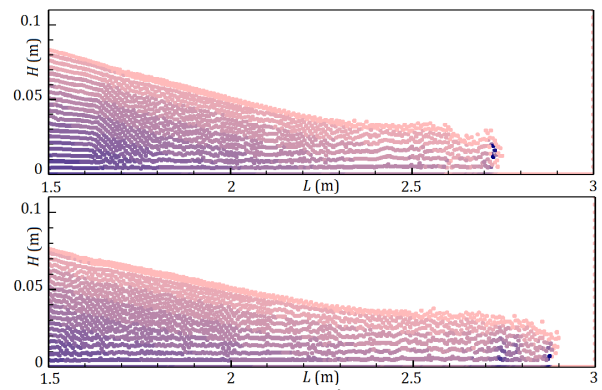
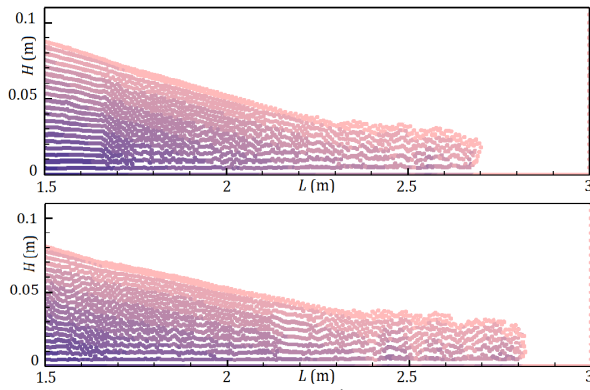
شکل 7 ارزیابی روش های پیشنهادی صریح و ضمنی در شبیه سازی موقعیت پیشانی مخلوط جریان با غلظت های متفاوت



ب) غلظت 27/4%

الف) غلظت 20/1%

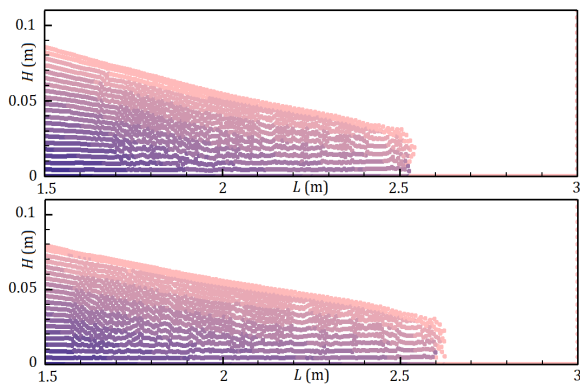
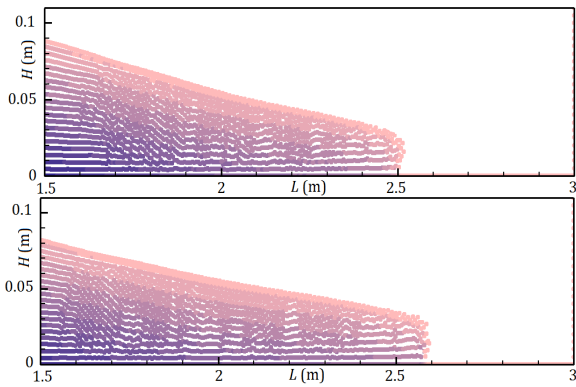
شکل 8 آب نمود خروجی از مخزن سد در مقاطع $\frac{x}{H} = 2.5$ ، $\frac{x}{H} = 0.83$ (به ترتیب از بالا به پایین)



ب) روش ضمنی

الف) روش صریح

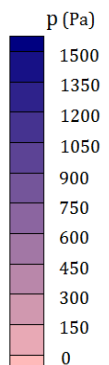
شکل 9 ارزیابی توزیع فشار در زمان های 0/8 و 1 ثانیه (از بالا به پایین) پس از شکست سد و غلظت 20/1%

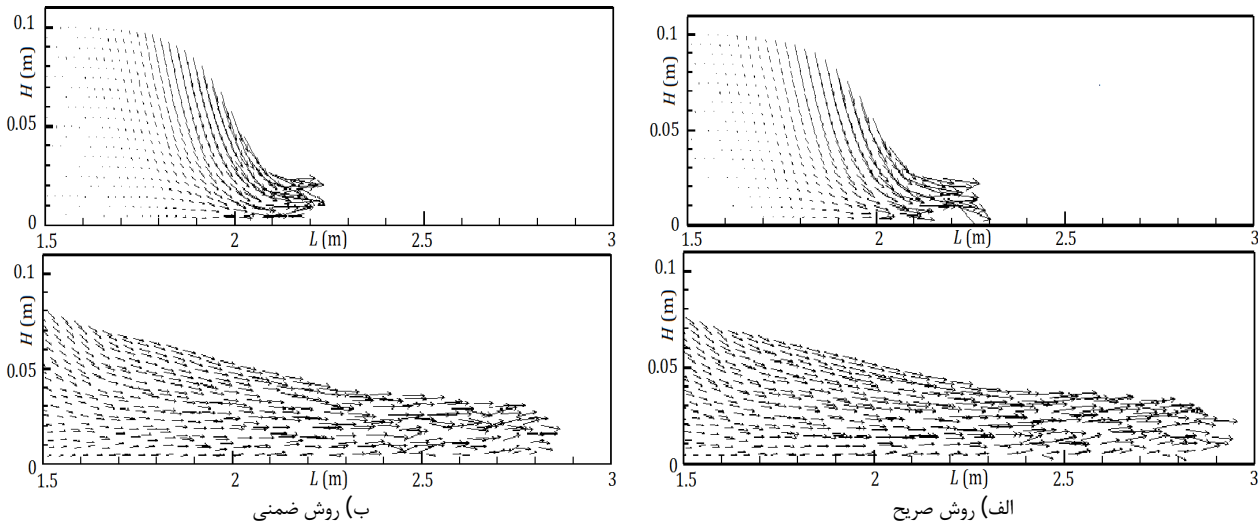


ب) روش ضمنی

الف) روش صریح

شکل 10 ارزیابی توزیع فشار در زمان های 0/8 و 1 ثانیه (از بالا به پایین) پس از شکست سد و غلظت 27/4%





شکل 11 ارزیابی بردارهای سرعت در زمانهای 0/2 و 1 ثانیه (از بالا به پایین) و غلظت 20/1% با استفاده از 8649 ذره

در انتهای این بخش، بردارهای سرعت ناشی از شکست سد با استفاده از روش های پیشنهادی در دو غلظت مورد بررسی و با استفاده از 8649 ذره محاسبه می شود. نتایج شبیه سازی در زمان های متفاوت، در غلظت 20/1% و با استفاده از 8649 ذره در شکل 11 ارائه شده است. در این شکل برای سهولت بیشتر مشاهده، همه بردارها رسم نشده است.

ملاحظه می شود که در زمان های اولیه پس از شکستن سد و تخلیه مخزن، دو ناحیه از جریان قابل تمایز است؛ ناحیه نخست که مشخصه آن سرعت کم و عمق زیاد مخلوط جریان است. این ناحیه، ناحیه جریان زیر بحرانی نامیده می شود. ناحیه دیگر با سرعت زیاد و عمق کم جریان، ناحیه فوق بحرانی است. به عنوان نمونه در شکل 11 و در زمان 0/2 ثانیه، مقادیر بیشینه سرعت افقی برای روش صریح برابر 1/55 متر بر ثانیه و برای روش ضمنی 1/37 متر بر ثانیه محاسبه شده است.

در شکل 11 مشاهده می شود که با گذشت زمان و شتاب گرفتن جریان، سرعت افزایش می یابد و الگوی جریان نسبتاً یکنواخت می شود. حداکثر سرعت نیز در منطقه فوق بحرانی و پیشانی موج رخ می دهد.

با توجه به تغییر شکل های بزرگ سطح آزاد، یک نرخ کرنش بیشینه نیز در نزدیکی ناحیه پیشانی مشاهده می شود. همچنین در مقایسه دو روش ارائه شده، روش ضمنی بردارهای مجاور بستر و نیز پیشانی موج را بهتر مدل سازی می کند؛ خطای سرعت ذرات در نزدیکی دیواره در روش صریح، به وضوح در شکل 11 دیده می شود. در حالی که در روش ضمنی، این بردارها هموارتر هستند. در این مدل سازی نیز، با افزایش تعداد ذرات، دقت هر دو روش افزایش می یابد. قابل توجه است که برای غلظت 27/4% نیز، رفتار به همین صورت است با این تفاوت که در این غلظت به علت بالاتر بودن مقدار لزوجت، میدان سرعت در هر دو روش هموارتر است.

در این قسمت، مدل های پیشنهادی برای شبیه سازی جریان شکست سد بر بستر فرسایش پذیر و بررسی مکانیزم فرآیندهای مورفودینامیکی اجرا می شود. بدین منظور مدل فیزیکی مرجع [33] مورد شبیه سازی و تحلیل قرار می گیرد. تعیین دقیق پارامترهای مختلف تأثیرگذار بر روی خواص جریان های دوفازی از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله این پارامترهای مؤثر، تنش تسلیم و لزوجت مؤثر بینگام است. در این مدل سازی، تنش تسلیم بینگام (τ_y) با استفاده از رابطه (10) و با توجه به غیر چسبیده بودن مواد بستر رسوبی، بر حسب فشار سیال $\tau_y = 0.447\rho$ در نظر گرفته شده است. همچنین لزوجت پلاستیک بینگام (μ_B) برابر 0/04 پاسکال ثانیه قرار داده شده است [8]. جزئیات مقادیر مورد استفاده برای مدل سازی مسئله حاضر در جدول 3 گزارش شده است.

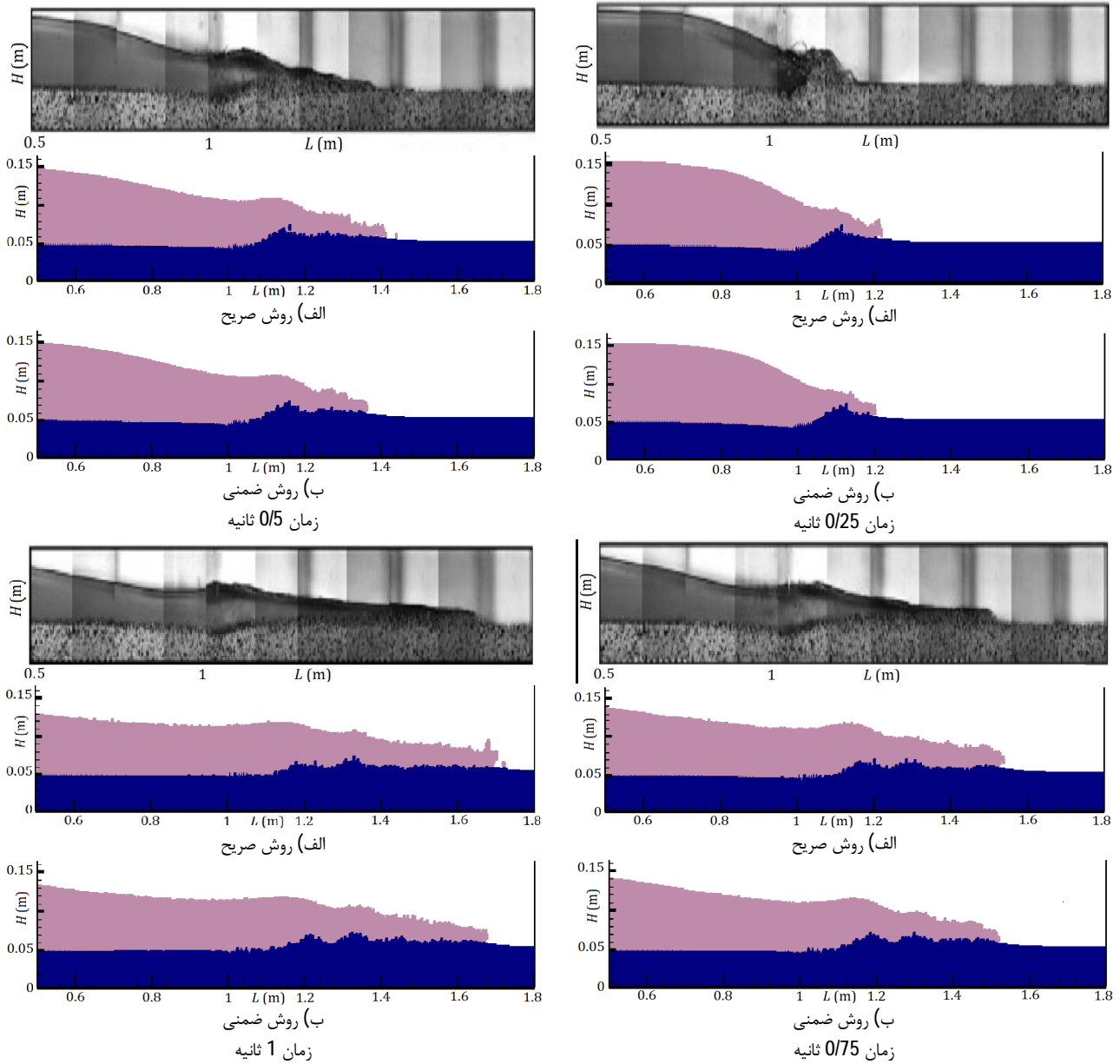
در شبیه سازی های این بخش، با توجه به سرعت و شتاب بالای فاز سیال بعد از شکست سد، مدل آشفتگی مطابق معادلات (3) تا (6) لحاظ شده است.

در شکل 12 نتایج شبیه سازی پروفیل سطح آزاد مدل مورد بررسی با استفاده از روش های پیشنهادی در زمان های متفاوت ارائه شده است. در این شکل، اولین و دومین نمودار زیر نتایج آزمایشگاهی به ترتیب مربوط به روش های صریح و ضمنی است. با توجه به عدم وجود ابعاد و اندازه های دقیق در نتایج (عکس های موجود) آزمایشگاهی و نیز وجود برداشت های متفاوت، در این قسمت مقایسه به طور کیفی صورت می گیرد.

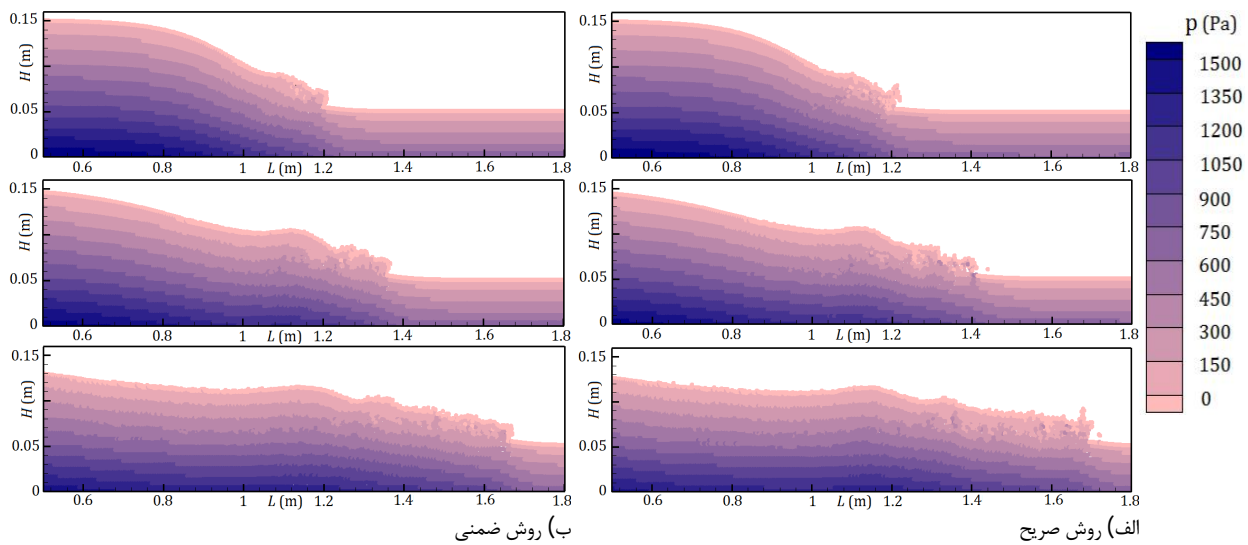
در این مسئله، انتقال رسوب تحت تأثیر میدان جریان ناشی از آب مخزن است. مشاهده نتایج روند پیشروی سیل در اثر شکست سد در شکل 12 حاکی از آن است که در ابتدای شکست، یک موج به شدت غلیظ به سمت پایین دست توسعه می یابد که سبب افزایش ناگهانی عمق آب می شود. انرژی اولیه موج، فرسایش قابل ملاحظه ای در ابتدای بستر ایجاد می کند. به مرور زمان، موج اولیه ذرات شسته شده بستر را به فاصله ای در پایین دست انتقال داده است. بنابراین با کاهش انرژی موج و افزایش تغییر شکل بستر، پدیده رسوب گذاری ذرات صورت می گیرد. این موج همچنان که به پایین دست منتشر می شود، به تدریج فرود می یابد. موج تشکیل شده ابتدایی به سمت بالادست، در قسمت مخزن نیز سبب کاهش سطح آب می شود.

4-2- شبیه سازی جریان دوفازی آب-رسوب ناشی از شکست سد بر بستر فرسایش پذیر

شکست سد بر روی بستر فرسایش پذیر، سبب انتقال رسوب پشت مخزن سد و تغییرات سریع بستر می شود. ماهیت و رفتار جریان های دوفازی جامد-مایع با جریان های تکفازی متفاوت است. بررسی سرعت و رفتار این جریان ها به دلیل وجود ذرات معلق و قابل ته نشینی پیچیده بوده و به دلیل کاربرد وسیعشان در صنعت مورد توجه محققان قرار دارد. یکی از دشوارترین مسائل



شکل 12 ارزیابی پیشروی پیشانی موج، مورفولوژی بستر و سطح آزاد توسط روش های صریح (بالا) و ضمنی (پایین) در زمان های مختلف



شکل 13 نتایج توزیع فشار روش های صریح و ضمنی پیشنهادی در زمان های 0/5, 0/25 و 1 ثانیه (از بالا به پایین)

معمول در حل معادلات را با محدودیت مواجه می سازد. در روش های پیشنهادی در این تحقیق، این مسئله مرتفع شده است و نیازی به لحاظ کردن سطح واسط در مدل سازی نیست. همچنین با توجه به پایداری بیشتر روش ISPH ضمنی، در این مدل سازی مطابق جدول 3، گام زمانی روش ضمنی تا سه برابر روش صریح افزایش یافته است.

در نهایت می بایست بیان نمود که اعمال روش ضمنی پیشنهادی، به علت نیاز به حدود 10 مرتبه تکرار در هر گام زمانی، هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش صریح اصلاح شده حاضر و طبعاً سایر روش های صریح معمول دارد. لیکن استفاده از گام زمانی تا سه برابر روش صریح حاضر و عدم به کارگیری ذرات اضافی برای شرایط مرزی (نسبت به روش های صریح رایج)، باعث می شود که در مجموع افزایش هزینه محاسبات روش پیشنهادی ISPH، نسبت به افزایش دقت بدست آمده قابل قبول باشد.

5- نتیجه گیری و جمع بندی

شناخت کامل پدیده طبیعی انتقال رسوب ناشی از شکست سد بر بستر فرسایش پذیر مستلزم توسعه مدل های عددی پیشرفته است. در این مقاله یک روش صریح اصلاح شده و یک روش ضمنی جدید در قالب روش SPH تراکم ناپذیر توسعه داده شده است. از جمله قابلیت های روش های پیشنهادی و مدل های مورد استفاده می توان موارد ذیل را برشمرد:

- (1) چارچوب نظری به کار گرفته شده به مسائل رودخانه ای و یا ساحلی خاص محدود نمی شود.
- (2) فرآیندهای بسیار ناپایدار و فعال انتقال رسوب را مدل می کند.
- (3) مشکل برخی مدل های رایج در زمینه اعمال شرایط مرزی در جریان سطح آزاد با تغییر مکان های زیاد و مرزهای متحرک، حل می شود.
- (4) برای مسائل جریان سطح آزاد با مقیاس های زمانی کوتاه مدت کاربرد گسترده ای دارد.
- (5) روش ضمنی پیشنهادی نسبت به روش صریح علاوه بر دقت بالاتر، محدودیت کمتری را برای بازه زمانی ایجاد کرده و اجازه می دهد که بازه زمانی بزرگتری انتخاب گردد.
- (6) نیازی به استفاده از لزوجت مصنوعی و ذرات سطح واسط در مسائل مربوطه نیست.

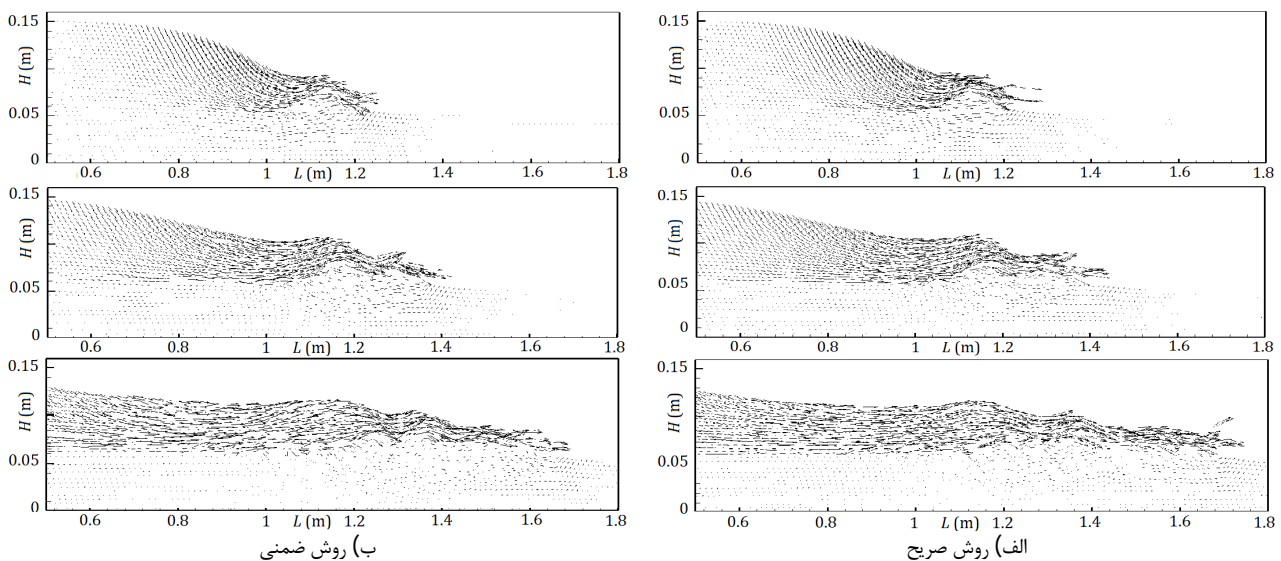
با توجه به شکل 12 قابلیت روش های پیشنهادی صریح و ضمنی در پیش بینی پروفیل بستر فرسایش یافته نشان داده می شود. هر دو مدل در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی محل آب شستگی و عمق آن را به خوبی پیش بینی می کند. لیکن روش ضمنی از نتایج دقیق تری برخوردار است. در این روش پیشانی موج نیز بهتر مدل می شود.

در ادامه به منظور شناخت بهتر مسئله جریان دوفازی حاصل از شکست سد، مقادیر فشار و بردارهای سرعت که برآورد آن ها در آزمایشگاه به آسانی امکان پذیر نیست، ارائه و تحلیل شده است. در شکل 13 نتایج توزیع فشار شبیه سازی شده با استفاده از روش های پیشنهادی، در زمان های مختلف مقایسه شده است. با عنایت به شکل 13 مشهود است که هر دو روش صریح و ضمنی ارائه شده به خوبی توزیع فشار را مدل کرده اند. البته در روش صریح مقداری نوسان در نتایج وجود دارد. همان گونه که انتظار می رفت، روش ضمنی نوسانات فشاری را کاهش داده و فشار، هموارتر شده است.

به منظور کاهش خطرات احتمالی شکست سدها، محاسبه و پیش بینی سرعت امواج سیلابی اهمیت ویژه ای دارد. در این قسمت، بردارهای سرعت بر روی بستر فرسایش پذیر با استفاده از روش های عددی حاضر شبیه سازی شده است. در شکل 14، نتایج مدل عددی به صورت بردارهای سرعت که مسیر حرکت ذرات آب و رسوب را مشخص می کنند، ارائه شده است.

با توجه به شکل 14، اختلاف اندازه بردارهای سرعت، سبب تمایز لایه انتقالی در حال حرکت از بستر زیرین می شود. پس از گذشت اندک زمانی از حرکت، جریان شدید آب در بالای توده ای از مواد رسوبی در حال حرکت مشاهده شده است. سرعت جریان در بازه پایین دست میدان در حالت عمومی بالا بوده و در بالا دست کاهش می یابد. پروفیل سرعت در محل پیشانی موج پایین دست دارای مقدار بیشینه شدیدی است. بنابراین در این ناحیه، تولید آشفتگی و تنش برشی بستر افزایش چشمگیری پیدا می کند. این امر نشان دهنده ظرفیت فرسایش زیاد جریان در این منطقه است. با گذشت زمان، ملاحظه می شود که الگوی میدان جریان نسبتاً یکنواخت می شود.

قابل توجه آنکه همان طور که بیان شد از مشخصه های پدیده جریان دو فازی آب و رسوب که در بسیاری از مسائل مهندسی کاربرد دارد، اختلاف چگالی بین دو فاز در سطح واسط است که این مسئله استفاده از روش های



شکل 14 ارزیابی بردارهای سرعت روش های صریح و ضمنی در زمان های 0/5، 0/25 و 1 ثانیه (از بالا به پایین)

- [17] S. Farzin, Y. Hassanzadeh, M. T. Aalami, R. Fatehi, An Implicit Incompressible SPH Method for Free Surface Flow Problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, PP. 99-110, 2014 (In Persian)
- [18] R. Fatehi, M. T. Manzari, Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 2, PP. 482-498, 2011.
- [19] Z. Y. Yue, Z. X. Cao, X. Li, T. Che, Two-dimensional coupled mathematical modeling of fluvial processes with intense sediment transport and rapid bed evolution, *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, Vol. 51, No. 9, pp. 1427-1438, 2008.
- [20] D. Vetsch, *Numerical Simulation of Sediment Transport with Meshfree Methods*, PhD Thesis, ETH, Zürich, 2012.
- [21] A. Yeganeh-Bakhtiari, H. Gotoh, T. Sakai, Applicability of Euler-Lagrange coupling multiphase flow to bed-load transport under high bottomshear, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 38, No. 5, pp. 389-398, 2000.
- [22] P. Krištof, B. Beneš, J. Krivánek, O. Št'ava, Hydraulic erosion using smoothed particle hydrodynamics. *Computer Graphics Forum*, Vol. 28, No. 2, pp. 219-228, 2009.
- [23] A. Wachs, A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows: Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions, *Computers & Fluids*, Vol. 38, No. 8, pp. 1608-1628, 2009.
- [24] M. X. Rodriguez-Paz, J. Bonet, A corrected smooth particle hydrodynamics method for the simulation of debris flows, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 20, pp. 140-163, 2004.
- [25] S. Shao, E. Y. M. Lo, Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources*, Vol. 26, No. 7, pp. 787-800, 2003.
- [26] A. Mirmohammadi, M. J. Ketabdari, Numerical simulation of wave scouring beneath marine pipeline using smoothed particle hydrodynamics, *International Journal of Sediment Research*, Vol. 26, No. 3, pp. 331-342, 2011.
- [27] S. M. Hosseini, M. T. Manzari, S. K. Hannani, A fully explicit three-step SPH algorithm for simulation of non-Newtonian fluid flow. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 17, No. 7, pp. 715-735, 2007.
- [28] T. Capone, *SPH numerical modelling of impulse water waves generated by landslides*, PhD Thesis, Sapienza University of Rome, Italy, 2009.
- [29] C. Ulrich, T. Rung, Multiphysics SPH for Harbour and Ocean Engineering Hydrodynamics, in *The 5th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, Lisbon, Portugal, 2010.
- [30] A. M. Aly, *An Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics to Simulate Fluid-Soil-Structure Interactions*, PhD thesis, Kyushu university, Fukuoka, Japan, 2012.
- [31] Z. Ghadampour, N. Talebbeydokhti, M. R. Hashemi, A. H. Nikseresht, S. P. Neill, Numerical simulation of free surface mudflow using incompressible SPH, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, Vol. 37, No. C1, pp. 77-95, 2013.
- [32] D. Komatina, M. Jovanovic, Experimental study of steady and unsteady free surface flows with water-clay mixtures, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 35, No. 5, pp. 579-590, 1997.
- [33] L. Fraccarollo, H. Capart, Riemann wave description of erosional dam-break flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 461, pp. 183-228, 2002.
- [34] A. Khayyer, *Improved particle methods by refined differential operator models for free-surface fluid flows*, PhD Thesis, Kyoto University, 2008.
- [35] K. V. Hohenemser, W. Prager, Über die ansätze der mechanik isotroper kontinua. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 12, No. 4, pp. 216-226, 1932.
- [36] K. Kanatani, A plasticity theory for the kinematics of ideal granular materials, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 20, No. 1, pp. 1-13, 1982.
- [37] Y. Zhu, P. J. Fox, J. P. Morris, A pore-scale numerical model for flow through porous media, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Vol. 23, No. 9, pp. 881-904, 1999.

دقت روش های عددی توسعه داده شده در این تحقیق، با مطالعه پدیده انتقال رسوب در جریان های غیر ماندگار شکست سد با بستر ثابت و فرسایش پذیر و با غلظت های متفاوت رسوبات، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که روش های پیشنهادی و به ویژه روش ضمنی به خوبی اندرکنش بین جریان، انتقال رسوب و تغییرات مورفولوژیکی بستر ناشی از جاری شدن سیلاب شکست سد را لحاظ می کنند. همچنین مؤلفه های میدان جریان از جمله سطح آزاد با پیچیدگی های خاص خود، موقعیت پیشانی موج، زمان رسیدن سیلاب به مقدار بیشینه، آبنمود، توزیع فشار و میدان های سرعت را با دقت بالایی مدل سازی می کنند.

روش های ارائه شده، قابل گسترش برای طیف وسیعی از مسائل کاربردی مربوط به علم هیدرولیک رسوب است که در آن ها دینامیک جریان، انتقال رسوبات و پیش بینی دقیق سطح آزاد مورد نیاز است.

6- مراجع

- [1] Y. Hassanzadeh, Bore Propagation due to sudden dam failure, *Journal of Faculty of Engineering*, vol. 51, pp. 41-48, 1991. (In Persian)
- [2] M. Shafai bejestan, *Basic Theory and Practice of Hydraulics of Sediment Transport*, second ed., Shahid Chamran University, 2008. (In Persian)
- [3] Y. Hassanzadeh, *Hydraulics of Reservoir Sedimentation*, Iranian national committee on large dams, 2010. (In Persian)
- [4] Y. Hassanzadeh, *Dam-Break Hydraulics*, Iranian national committee on large dams, 2004. (In Persian)
- [5] J. Wu, K. Bao, H. Zhang, Research progress on dam-break floods. In *The 2nd IEEE International Conference on Emergency Management and Management Sciences (ICEMMS)*, Beijing, China, 2011.
- [6] B. Spinewine, *Two-layer flow behaviour and the effects of granular dilatancy in dam break induced sheet-flow*. PhD Thesis, Universitè de Louvain, Belgium, 2005.
- [7] Y. Zech, S. Soares-Frazão, B. Spinewine, Dam break induced sediment movement: experimental approaches and numerical modeling, *Journal of Hydraulic research*, Vol. 46, No. 2, pp. 176-190, 2008.
- [8] A. Shakbaeinia, Y. C. Jin, A mesh-free particle model for simulation of mobile-bed dam break, *Advances in Water Resources*, Vol. 34, No. 6, pp. 794-807, 2011.
- [9] L. B. Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
- [10] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *The astronomical journal*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [11] J. J. Monaghan, Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, Vol. 110, No. 2, pp. 399-406, 1994.
- [12] R. Fatehi, M. Manzari, A remedy for numerical oscillations in weakly compressible smoothed particle hydrodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 67, No. 9, pp. 1100-1114, 2011.
- [13] A. Tayebi, B. GHadiri Dehkordi, M.T. Manzari, Control of pressure fluctuations in SPH method for simulation of flow past a cylinder, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 7, pp. 32-44, 2013. (In Persian)
- [14] E. S. Lee, C. Moulinec, R. Xu, D. Violeau, D. Laurence, P. Stansby, Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 18, pp. 8417-8436, 2008.
- [15] E. S. Lee, D. Violeau, R. Issa, S. Ploix, Application of weakly compressible and truly incompressible SPH to 3-D water collapse in waterworks, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 48, PP. 50-60, 2010.
- [16] M. S. Shadloo, A. Zainali, M. Yildiz, A. Suleman, A robust weakly compressible SPH method and its comparison with an incompressible SPH, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, No. 8, PP. 939-956, 2012.