



مطالعه میکرومکانیکی رفتار الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های حاوی الیاف پیزوالکتریکی با استفاده از روش عددی بدون المان گلرکین

مهدی عین‌بیگی^۱، محمد محمدی‌اقدم^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵، aghdam@aut.ac.ir

چکیده

یک مدل میکرومکانیکی دوبعدی، بر پایه فرضیات کرنش صفحه‌ای توسعه یافته برای مطالعه رفتار الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون عرضی ارائه می‌شود. کوچک‌ترین عضو تکرار شونده از کامپوزیت به عنوان المان نماینده انتخاب می‌شود که $1/4$ از سطح مقطع فایبر را با ماتریسی که آن را در بر گرفته به نمایش می‌گذارد. این کامپوزیت، حاوی الیافی بلند و موازی از جنس مواد پیزوالکتریکی با خواص ایزوتروپیک عرضی است که فرض می‌شود این الیاف با آرایش مربعی درون زمینه پلیمری با خواص ایزوتروپیک، در اتصال کامل می‌باشند. همچنین ماتریس از لحاظ پیزوالکتریسیته غیرفعال بوده و فرض می‌شود که اجزای کامپوزیت از رفتار الاستیسیته و الکتریسیته خطی تبعیت می‌کنند. در این پژوهش، روش عددی بدون المان گلرکین برای حل معادلات حاکم بر مسأله به کار گرفته می‌شود. در این روش، برای تقریب متغیر میدان از ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. مقایسه نتایج حاضر با سایر تکنیک‌های موجود در مقالات چاپ شده، موافقت خوبی را به نمایش می‌گذارد. نتایج حاکی از این موضوع است که ضریب پیزوالکتریکی e_{31} در حالت پولاریزاسیون عرضی نسبت به همان ضریب در حالت ماده پیزو خالص، بهبود قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که در حالت پولاریزاسیون عرضی، الیاف با سطح مقطع بیضی، میزان حساسیت الکتریکی کامپوزیت را برای یک راستای خاص نسبت به نوع دایروی چندین برابر تقویت می‌کنند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۲۲ دی ۱۳۹۲
پذیرش: ۰۷ اسفند ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۳
کلید واژگان:
مدل میکرومکانیکی
روش بدون المان گلرکین
کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی
خواص الکترو-الاستیک

A micromechanical study on the electro-elastic behavior of piezoelectric fibrous composites using element free Galerkin method

Mahdi Eynbeygi, Mohammad Mohammadi Aghdam*

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran, aghdam@aut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 January 2014
Accepted 26 February 2014
Available Online 13 July 2014

Keywords:

Micromechanical Model
Element Free Galerkin Method
Piezoelectric Fibrous Composites
Electro-Elastic Properties

ABSTRACT

A two dimensional generalized plane strain micromechanical model is developed to study electro-elastic behavior of piezoelectric fiber reinforced composites (PFRC) with transverse polarization. A small repeating area of the composite, representing a quarter of fiber surrounded by matrix is considered as representative volume element (RVE). The composite system consists of long parallel piezoelectric fibers with transversely isotropic properties and perfectly bounded to the isotropic matrix in a square array arrangement. In addition, the constituents are assumed to have both linear elastic and electrical behavior, whereas, the matrix is piezoelectrically passive. The element free Galerkin method is employed to obtain solution for the governing system of partial differential of equations. In this method, the Moving Least Square shape functions are used to approximate the field variable at arbitrary point. Comparison of the presented results with other techniques available in the literature reveals good agreement. It is demonstrated that the piezoelectric coefficient " e_{31} " in the transverse polarization is considerably improved in comparison with corresponding coefficient of pure piezoelectric material. Furthermore, as a result, it is found that fibers with elliptical cross section may enhance the amount of electrical sensitivity of PFRC several times than circular fibers in a specific direction.

۱- مقدمه
در روش میکرومکانیک، مطالعه رفتار مواد به گونه‌ای است که اثر متقابل مواد تشکیل‌دهنده در مقیاس میکروسکوپی بررسی می‌شود. در این روش‌ها از مدل‌هایی استفاده می‌شود که مشخصات ذاتی الیاف و زمینه را حفظ می‌کند و خواص کل ماده مرکب بر حسب خواص اجزای تشکیل‌دهنده، نسبت

حجمی آن‌ها و قیدهای متقابل بین فازها، که مربوط به هندسه میکروساختاری است، تعیین می‌شود. خواص تک‌لایه‌های کامپوزیتی را می‌توان با استفاده از روش میکرومکانیکی پیش‌بینی کرد و سپس از این خواص در تحلیل‌های ماکرومکانیکی استفاده نمود. در این پژوهش، مطالعه میکرومکانیکی کامپوزیت‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرد که با الیاف

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
M. Eynbeygi, M. Mohammadi Aghdam, A micromechanical study on the electro-elastic behavior of piezoelectric fibrous composites using element free Galerkin method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 6, pp. 175-184, 2014 (In Persian)

Please cite this article using:

M. Eynbeygi, M. Mohammadi Aghdam, A micromechanical study on the electro-elastic behavior of piezoelectric fibrous composites using element free Galerkin method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 6, pp. 175-184, 2014 (In Persian)

پیزوالکتریکی تقویت شده‌اند.

مواد پیزوالکتریک که به عنوان یکی از انواع مواد هوشمند شناخته می‌شوند، دارای یک ارتباط متقابل مکانیکی و الکتریکی هستند که در اثر اعمال بار مکانیکی، از خود خواص الکتریکی بروز داده و در مقابل بارگذاری‌های الکتریکی نیز، اثرات مکانیکی را به نمایش می‌گذارند. از آن‌جا که مواد پیزوالکتریک قادر به کوپل انرژی‌های مکانیکی و الکتریکی به یکدیگر هستند، لذا، از آن‌ها به عنوان یک انتخاب مناسب در عملگرها^۱ و حسگرها^۲ یاد می‌شود [۱].

تلاش‌های زیادی در جهت کشف خواص کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تک‌جهته انجام شده که نتیجه آن، ارائه مطالعات متعددی با رویکرد میکرومکانیکی در بیان رفتارهای کلی و محلی آن‌هاست. در مقالات چاپ‌شده، روش‌های تحلیلی و عددی، مدل‌های گوناگونی را در بیان رفتار کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تحت بارهای حرارتی، الکتریکی و مکانیکی مطرح کرده‌اند. اثر راستای پولاریزاسیون بر خواص کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی، موضوعی بود که در کارهای محققانی همچون، آدگارد [۲]، گوپتا و همکارانش [۳] مالیک و ری [۴]، ری [۵]، کومار و چاکرابرتی [۶] و لوپز-لوپز [۷] بررسی شد. در این بین، آدگارد [۲] ضمن ارائه یک مدل تحلیلی که در واقع براساس تعمیمی از مدل‌های خودسازگار^۳ و موری-تاناکا^۴ بود، به تحلیل خواص مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون محوری و کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی ذره‌ای پرداخت. مدل آدگارد، در حالی که به سادگی مدل موری-تاناکا بود، اما در بعضی موارد نتایج دقیق‌تری را پیش‌بینی می‌کرد. مالیک و ری [۴] بر مبنای روش سلولی^۵ و روش مقاومت مصالح^۶ به پیش‌بینی ضرایب الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی در حالت پولاریزاسیون عرضی پرداختند. آن‌ها برای نخستین بار نشان دادند، هنگامی که الیاف پیزوالکتریکی به صورت عرضی قطبیده شوند، خواص مؤثر پیزوالکتریکی کامپوزیت براساس نتایج آن‌ها می‌بایست به طور قابل توجهی نسبت به همان ضرایب در حالت ماده پیزوالکتریک خالص تقویت شود. آن‌ها پیشنهاد کردند که به منظور اعمال میدان الکتریکی عرضی یکنواخت در راستای ضخامت الیاف، نیاز به صفحات الکتروودی هست که درون کامپوزیت، به صورت موازی در بالا و پایین الیاف چیده شوند. همچنین، ری [۵] روش مکانیک محیط‌های پیوسته را برای تحلیل این کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به کار برد و نتایجی تقریباً منطبق بر روش مقاومت مصالح بدست آورد. اخیراً کومار و چاکرابرتی [۶] بر پایه روش مقاومت مصالح، خواص کوپل‌شده حرارتی-الکتریکی-مکانیکی این کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها با توجه ویژه به بحث حرارتی این کامپوزیت‌ها، تغییرات ضرایب حرارتی^۷ و پیروالکتریکی^۸ مؤثر این کامپوزیت‌ها را نسبت به کسر حجمی‌های مختلف ارائه دادند. همچنین با بیان وابستگی بین مدول الاستیسیته زمینه پلیمری ایزوتروپ و خواص مؤثر حرارتی و الکتریکی این کامپوزیت‌ها، نشان دادند که استفاده از پلیمرهای نرم‌تر، می‌توانند عملکرد ضرایب حرارتی و الکتریکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی با پولاریزاسیون عرضی را بهبود بخشند.

با این که مدل‌های تحلیلی در دیدگاه میکرومکانیکی می‌توانند خواص

کلی کامپوزیت‌ها را در بسیاری از شرایط درست پیش‌بینی کنند، اما لحاظ کردن رفتارهای موضعی تنش و کرنش در روش‌های عددی، می‌تواند پیش‌بینی جامع‌تری از مدل را مورد بررسی قرار دهد. برخی از پژوهشگران روش المان محدود را، که یک ابزار عددی رایج و متداول حل مسائل فیزیکی است، برای بررسی اثر شکل فایبر در خواص الکترومکانیکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به کار بستند [۹،۸]. گوپتا و ون کائش [۹] یک مدل المان-محدود سه‌بعدی را برای مطالعه رفتار الکترومکانیکی ۵ نوع متفاوت از کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی به کار گرفتند که این ۵ نوع شامل: کامپوزیت-های ذره‌ای^۱، فایبر کوتاه^۱، فایبر طولی^{۱۱}، ورقه‌ای^{۱۲} و شبکه‌ای^{۱۳} بودند. علاوه بر این، آن‌ها در [۸]، به کمک روش المان محدود، رفتار کلی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی را در حالت فعال بودن هر دو جزء تشکیل‌دهنده کامپوزیت از لحاظ پیزوالکتریسیته، بررسی کردند. از دیگر کارهایی که در زمینه تحلیل رفتار کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی به کمک روش‌های عددی انجام شده است، می‌توان به پژوهش لی [۱۰] در خصوص بررسی اثر میکروحباب‌های موجود در زمینه‌های پلیمری و اثر آن بر رفتار ضرایب مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی و پژوهش دای [۱۱] در بررسی اثر هسته‌های کربنی و نقش آن در تقویت الیاف پیزوالکتریکی و اثرات آن بر ضرایب مؤثر الکترو-الاستیک کامپوزیت اشاره کرد. آن‌ها بیان کردند که هدف از افزودن کربن به الیاف توخالی پیزوالکتریکی، جلوگیری از شکسته شدن این الیاف و به عبارتی مقابله با طبیعت ترد مواد پیزوالکتریکی بوده‌است.

در سال‌های اخیر روش‌های عددی بدون‌المان^{۱۴}، توجه ویژه‌ای را در حل و شبیه‌سازی مسائل فیزیکی به خود اختصاص داده‌اند [۱۲-۱۴]. فقدان قید المان در ساختار این روش‌های عددی، ویژگی منحصر به فرد و قابل ملاحظه‌ای را به آن‌ها بخشیده است؛ به‌گونه‌ای که بسیاری از مشکلات تولید المان در هندسه‌های پیچیده و با در مسائلی که به دلیل تغییرشکل‌های بزرگ نیازمند تولید شبکه‌های متوالی در حین حل مسئله هستند، از بین می‌رود. اخیراً، احمدی [۱۶،۱۵] روش بدون المان مبتنی بر انتگرال موضعی را در تحلیل میکرومکانیکی بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی کامپوزیت الیافی، به کار گرفت. در پژوهش حاضر، یک مدل میکرومکانیکی براساس روش عددی بدون-المان گلرکین^{۱۵}، برای تحلیل خواص الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی تک‌جهته مورد بررسی قرار گرفته است. روش بدون‌المان گلرکین نخستین بار در سال ۱۹۹۴ میلادی توسط بلیچکو و همکارانش [۱۷] ارائه شد. در میان روش‌های متعدد بدون‌المان، روش بدون‌المان گلرکین نرخ همگرایی بالا و نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد [۱۷-۱۹]. در این مطالعه، با کارگیری یک مدل عددی دقیق بر مبنای روش بدون المان گلرکین، سعی شده است تا با لحاظ کردن اثرات موضعی میدان‌های تنش، تحلیلی کامل‌تر و واقع‌گرایانه‌تری از رفتار میکرومکانیکی کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی نمایش داده شود که ضمن آن، اثر شکل الیاف، در رفتار کامپوزیت‌های الیافی پیزوالکتریکی بررسی و تحلیل خواهد شد.

۲- مدل میکرومکانیکی

در حالت کلی، توزیع الیاف در سطح مقطع کامپوزیت‌های الیافی، به‌صورت تصادفی می‌باشد؛ شکل ۱-الف. اما معمولاً در مدل‌سازی میکرومکانیکی فرض

9- Particulate
10- Short-Fiber
11- Long-Fiber
12- Laminar
13- Networked
14- Mesh-Free Numerical Methods
15- Element Free Galerkin (EFG)

1- Actuator
2- Sensor
3- Self-consistent
4- Mori-Tanaka
5- Method of Cells (MOC)
6- Strength of Materials
7- Thermal Coefficient
8- Pyroelectric Coefficient

در این تحلیل، یک دامنه دو بعدی در نظر گرفته می شود که در آن محور x_1 در راستای الیاف قرار گرفته و x_2 و x_3 محورهای صفحه ای عمود بر راستای الیاف هستند. پیرو فرض کرنش صفحه ای توسعه یافته [۲۰، ۱۶]، خواص کامپوزیت در راستای محور x_1 تغییر نمی کند و نسبت به صفحه x_2-x_3 دارای تقارن است. علاوه بر این، در فرض کرنش صفحه ای توسعه یافته، کرنش در راستای x_1 ، یعنی کرنش در راستای الیاف، یک مقدار ثابت در نظر گرفته می شود.

بنابراین میدان جابه جایی، در فرض کرنش صفحه ای توسعه یافته و در حالت بارگذاری و عکس العمل نرمال، به صورت روابط (۱) ارائه می شود [۱۶]:

$$u_1 = \varepsilon_0 x_1, \quad u_2 = u_2(x_2, x_3), \quad u_3 = u_3(x_2, x_3) \quad (1)$$

که u_i مؤلفه جابه جایی مرتبط با مختصه x_i بوده و ε_0 معرف کرنش ثابت محوری می باشد. همچنین، روابط سینماتیک براساس میدان جابه جایی (۱)، بافرض الاستیسیته خطی به صورت روابط (۲) نوشته می شوند [۱۶]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (2)$$

همان طور که ملاحظه می شود، تحت شرایط کرنش صفحه ای توسعه یافته، کرنش های برشی برون صفحه ای صفر هستند.

در این پژوهش به تحلیل کامپوزیت های پیزوالکتریکی الیافی زمینه پلیمری که در راستای عرضی (راستای ضخامت) x_3 پولاریزه شده اند، پرداخته می شوند. به دلیل این که این الیاف دارای ضخامت بسیار کوچکی هستند، می توان به طور قابل قبولی فرض کرد که یک میدان الکتریکی یکنواختی درون سلول واحد برقرار است [۶].

۳- حل مسأله

۳-۱- معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریکی

یک دامنه دو بعدی، Ω ، را مطابق شکل ۱-ب در نظر بگیرید که در یک تعادل الکتریکی و مکانیکی قرار دارد. برای مواد پیزوالکتریکی در غیاب نیروهای حجمی، فرم تضعیف شده معادله تعادل مکانیکی [۲۲، ۱۹] به صورت صورت زیر بیان می شود:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon^T \sigma) d\Omega + \int_{\Omega} (\delta \varepsilon_0 \sigma_{axial}) d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_0 t_{axial} d\Omega = 0 \quad (3)$$

که در رابطه بالا، Ω به عنوان دامنه مسأله در صفحه x_2-x_3 و ε ، σ و \bar{t} به ترتیب، بردار کرنش صفحه ای، بردار تنش صفحه ای و بردار ترکشن درون صفحه ای می باشند. علاوه بر این، σ_{axial} و t_{axial} نیز به ترتیب بیان گر تنش محوری و ترکشن محوری می باشند. بنابراین با فرض کرنش صفحه ای توسعه یافته، مسأله سه بعدی الاستیسیته به یک مسأله دوبعدی توسعه یافته تبدیل خواهد شد که هزینه های محاسباتی را بسیار کاهش خواهد داد.

حالت الکترواستاتیک مواد پیزوالکتریکی نیز دارای رفتاری مشابه رفتار مکانیکی هستند؛ از این نقطه نظر، فرم تضعیف شده معادله ماکسول [۲۲] در غیاب دانسیته بار الکتریکی حجمی به صورت رابطه (۴) نوشته می شود.

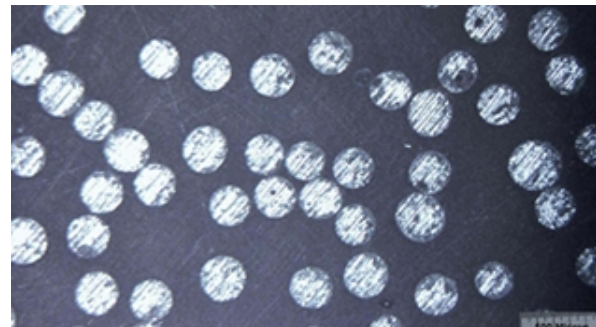
$$\int_{\Omega} \delta E_3 D_3 d\Omega - \int_{\Omega} \delta E_3 q_3 d\Omega = 0 \quad (4)$$

در رابطه (۴)، E_3 ، D_3 و q_3 به ترتیب، مؤلفه های میدان الکتریکی، جابه جایی الکتریکی و دانسیته بار الکتریکی در راستای محور پولاریزاسیون را نشان می دهند.

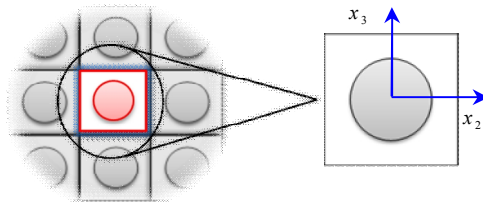
می شود که الیاف دارای شکل یکسان بوده و به صورت منظم در یک آرایش مربعی^۱ و یا آرایش شش ضلعی^۲ در کنار هم چیده شده اند [۲۰]. برای کاهش کاهش حجم محاسبات، کوچکترین جزء تکرار شونده از سطح مقطع کامپوزیت، متناسب با نوع بارگذاری و شرایط مرزی مسأله، به عنوان المان نماینده^۳ کامپوزیت در نظر گرفته می شود که در تحلیل های میکرومکانیکی فرض می گردد، رفتار سازه با استفاده از مدل سازی صحیح المان نماینده قابل تعمیم، تحلیل و بررسی خواهد بود [۲۱، ۲۰]. در این جزء نماینده، هم ماتریس و هم فایبر سهمیه هستند و خواص آن ها متناسب با کسر حجمی شان، در خواص معادل کامپوزیت تأثیرگذار خواهد بود.

در پژوهش حاضر بر بارگذاری های نرمال و عکس العمل های نرمال، یعنی مُد نرمال سنسوری و عملگری^۴، کامپوزیت های پیزوالکتریکی پرداخته می شود. در مُد نرمال سنسوری، ماده پیزوالکتریکی تحت یک بارگذاری نرمال و یا جابه جایی نرمال در هر یک از سه راستای مختصات اصلی ماده قرار داده می شود که باعث رخداد یک میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون می گردد و در مُد نرمال عملگری، ماده پیزوالکتریکی تحت یک میدان الکتریکی در راستای محور پولاریزاسیون قرار می گیرد که نتیجتاً، ماده در هر یک از سه راستا از خود جابه جایی نرمال نشان می دهد [۲۲].

در این پژوهش، به منظور بررسی خواص مؤثر الکترو-الاستیک چندلایه حاوی الیاف پیزوالکتریکی، ترکیبی از بارگذاری الکتریکی در راستای محور پولاریزاسیون (راستای x_3) و بارگذاری های نرمال مکانیکی در هر یک از سه راستای مختصات اصلی ماده، برحسب این که محاسبه کدام ضریب مورد نظر است، انجام می شود. بنابراین منطقی است که در مُد نرمال برای کاهش حجم محاسبات و همچنین افزایش دقت حل مسأله، ربع (یک چهارم) المان نماینده نشان داده شده در شکل ۱-ب به عنوان ناحیه محاسباتی نهایی در نظر گرفته شود؛ به طوری که مبدأ محورهای مختصات در مرکز الیاف الصاق شده و خواص تقارن در مرزهای مورد نظر اعمال می گردد.



(الف)



(ب)

شکل ۱ الف- چینش واقعی الیاف در سطح مقطع کامپوزیت [۲۳] ب- مدل المان نماینده و تعمیم آن در فضای دوبعدی

- 1- Square Array
- 2- Hexagonal Array
- 3- Representative Element
- 4- Normal Mode Sensing and Actuation

5- Generalize Plane Strain
6- Weak-Form
7- Maxwell

که تابعی از مختصات x است.

این ضرایب مجهول طوری محاسبه خواهند شد که مجموع مربعات خطای وزن دار، مینیمم شود. بنابراین، نرم دوم خطای وزن دار به صورت رابطه (۸) بیان می‌شود.

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{w}(x-x_i) (P^T(x_i)a(x) - u_i)^2 \quad (8)$$

به طوری که در عبارت بالا، n تعداد گره‌های درون دامنه موضعی x را نشان می‌دهد و $\widehat{w}(x-x_i)$ تابع وزن مسأله بوده که با فاصله نقطه x از گره واقع در محل x_i متناسب است. همچنین در رابطه بالا، u_i پارامترگره‌ای متغیر میدان را در محل گره i ام، نشان می‌دهد.

توابع شکل حداقل مربعات متحرک در صورتی که توابع وزنی مناسبی انتخاب شوند، در کل دامنه پیوسته خواهند بود [۲۴]. مرتبه پیوستگی توابع شکل حداقل مربعات متحرک، ارتباط مستقیمی با مرتبه چندجمله‌ای‌های پایه و مرتبه توابع وزنی مورد استفاده دارد. در این پژوهش از توابع پایه خطی و منحنی مرتبه سوم به عنوان توابع وزنی استفاده شده است [۲۴].

$$P^T(x) = \langle 1 \quad x \quad y \rangle$$

$$w(x-x_i) = w_i(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 \leq \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (9)$$

در رابطه بالا \bar{r}_i یک پارامتر بی‌بعد است که به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{\|x - x_i\|_2}{r_w} \quad (10)$$

که شعاع ناحیه پشتیبان موضعی نقطه x تعریف می‌شود. همچنین، $d_i = \|x - x_i\|_2$ نرم دوم بردار $x - x_i$ بوده که بیان‌گر فاصله گره x_i تا نقطه x می‌باشد.

با مینیمایز کردن فانکشنال (۸)، ضرایب مجهول $a(x)$ محاسبه شده و با قرار دادن آن در رابطه (۷)، شکل دیگری از این رابطه، براساس توابع شکل حداقل مربعات متحرک، به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود.

$$u^h(x) = \Phi^T(x)U_s \quad (11)$$

که U_s بردار پارامتر گره‌ای متغیر میدان و $\Phi(x)$ بردار توابع شکل حداقل مربعات متحرک بوده و به صورت رابطه (۱۲) نوشته می‌شود.

$$\Phi^T(x) = \langle \phi_1(x) \dots \phi_n(x) \rangle = P^T(x) \cdot A^{-1}(x) \cdot B(x) \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)، ماتریس $A(x)$ و $B(x)$ مطابق زیر تعریف می‌گردند:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \widehat{w}(x-x_i) P(x_i) P^T(x_i) \quad (13)$$

$$B(x) = \langle \widehat{w}(x-x_1) P(x_1) \dots \widehat{w}(x-x_n) P(x_n) \rangle \quad (14)$$

یکی از ویژگی‌های حائز اهمیت توابع شکل حداقل مربعات متحرک، فقدان خاصیت دلتای کرانیکر است [۱۷]:

$$\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij} \quad (15)$$

در بیان ظاهری، خاصیت دلتای کرانیکر موجب می‌شود که تابع شکل هر گره در محل خود آن گره برابر مقدار واحد و در محل سایر گره‌های موجود در ناحیه پشتیبان، برابر صفر باشد. اما این خاصیت جلوه واقعی خود را در اعمال شرایط مرزی ضروری آشکار می‌کند؛ به طوری که در فقدان این خاصیت، شرایط مرزی ضروری به صورت مستقیم^۳ قابل اعمال نبوده و تلاش مضاعفی را می‌طلبد. از جمله رایج‌ترین این روش‌ها، روش پنالتی [۲۴، ۱۹] و روش

روابط متشکله برای مواد دارای خاصیت پیزوالکتریسته که در راستای محور x_3 پولاریزه شده‌اند [۲۲]، با فرض کرنش صفحه‌ای توسعه یافته، الاستیسیته خطی و پیزوالکتریسته خطیبه صورت روابط (۵) بیان می‌شوند.

$$\sigma = C \varepsilon + \widehat{C} \varepsilon_0 - \widehat{e} E_3, \quad \sigma_{11} = \widehat{C}^T \varepsilon + c_{11} \varepsilon_0 - e_{31} E_3$$

$$D_3 = \widehat{e}^T \varepsilon + e_{31} \varepsilon_0 + k_{33} E_3 \quad (5)$$

در روابط (۵)، رابطه‌های (۶) برقرارند.

$$\sigma = \langle \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \rangle^T, \quad \varepsilon = \langle \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \rangle^T$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C} = \langle c_{12} \quad c_{13} \quad 0 \rangle^T$$

$$\widehat{e} = \langle e_{32} \quad e_{33} \quad 0 \rangle^T \quad (6)$$

در روابط (۶)، c_{ij} ، e_{ij} و k_{ij} به ترتیب، ضرایب الاستیک، ضرایب پیزوالکتریک و دی‌الکتریک ماده را نشان می‌دهند.

۳-۲- روش عددی بدون المان گلرکین

روش المان محدود، به عنوان یکی از روش‌های عددی قدرتمند حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، در گستره وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی به کار می‌رود. در دسترس بودن این روش در غالب بسته‌های نرم‌افزاری تجاری، کاربرهای بسیاری را در سراسر دنیا به خود جذب کرده است، اما با این حال، روش المان محدود محدودیت‌هایی را نیز به همراه دارد؛ هزینه بالا و صرف زمان‌های طولانی برای تولید شبکه^۱ در مدل‌های پیچیده، یکی از معایب این روش است که در آنالیزهای هوشمندی که نیاز به تجدید شبکه در حین فرایند حل دارند، این مشکل خیلی برجسته خواهد شد [۱۹]. علاوه بر این، مشتقات توابع شکل در مرز بین المان‌ها، عموماً، ناپیوستگی‌هایی را از خود به نمایش می‌گذارند [۲۴، ۱۹]. بنابراین نیاز به یک پس‌پردازش همچون تصویرسازی بر مبنای نرم دوم برای نمایش کانتورهایی همچون کانتور تنش وجود دارد [۱۷].

مطابق با تعریف لیو و همکارانش [۱۹]، روش‌های عددی بدون المان، دستگاهی از معادلات گسسته‌شده را برای حل فیزیک حاکم بر مسأله ایجاد می‌کنند که دامنه این مسأله نیاز به هیچ‌گونه شبکه‌بندی ندارد و تنها توزیعی از گره‌های محاسباتی در دامنه مسأله و روی مرزها شکل داده می‌شود. هیچ‌گونه قیدی روی گره‌ها تحت عنوان المان وجود ندارد و به دلیل بهره‌گیری از توابع شکلی با پیوستگی‌های مرتبه بالا، کانتورهای تنش و کرنش بدون هیچ‌گونه پس‌پردازشی به نمایش گذاشته می‌شوند.

۳-۲-۱- ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک^۲

متغیر $u(x)$ ، به عنوان مثال میدان جابه‌جایی در یک مسأله الاستیسته، به عنوان تابع اسکالر و مجهول مسأله در نظر گرفته می‌شود که در دامنه Ω تعریف شده است. با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک، $u^h(x)$ تقریبی از متغیر میدان $u(x)$ در مکان x خواهد بود که به صورت رابطه (۷) ارائه می‌شود [۱۷-۱۹].

$$u(x) = u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = P^T(x) \cdot a(x) \quad (7)$$

که در رابطه بالا $P(x)$ بردار شامل تک‌جمله‌ای‌های پایه و m تعداد این تک‌جمله‌ای‌ها را نشان می‌دهد. همچنین $a(x)$ بردار ضرایب چندجمله‌ای بوده

1- Mesh Generation
2- Moving Least Square

فرم گسسته شده رابطه تعادل الکترواستاتیکی (۴) به صورت رابطه (۲۱) ارائه می شود.

$$\sum_{I=1}^N \delta E_3 \left(\int_{\Omega} \bar{e}^T B_I d\Omega \right) u_I + \delta E_3 \left(\int_{\Omega} e_{31} d\Omega \right) \varepsilon_0 + \delta E_3 \left(\int_{\Omega} \kappa_{33} d\Omega \right) E_3 + \delta E_3 \left(\int_{\Omega} q_3 d\Omega \right) = 0 \quad (21)$$

شکل فشرده رابطه (۲۱) مطابق رابطه (۲۲) بازنویسی می شود.

$$\delta E_3 (F_2^T U + X_2 \varepsilon_0 + X_3 E_3 + Q_3) = 0 \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲) روابط (۲۳) برقرارند.

$$X_3 = \int_{\Omega} \kappa_{33} d\Omega, \quad Q_3 = \int_{\Omega} q_3 d\Omega \quad (23)$$

از آنجا که در رابطه (۱۹) و (۲۲)، $\delta \varepsilon_0$ ، δU ، δE_3 دلخواه هستند، عبارات داخل پرانتز می بایست برابر صفر باشند تا روابط همواره ارضا شوند. بنابراین، فرم نهایی سیستم معادلات خطی حاصل از منفصل سازی معادلات تعادل الکترو-الاستیک، به صورت رابطه (۲۴) ارائه می شود.

$$\begin{cases} KU + F_1 \varepsilon_0 - F_2 E_3 - f_t = 0 \\ F_1^T U + X_1 \varepsilon_0 - X_2 E_3 - f_{axial} = 0 \\ F_2^T U + X_2 \varepsilon_0 + X_3 E_3 + Q_3 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

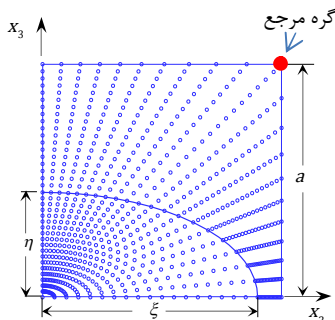
لازم به ذکر است که میدان الکتریکی ثابت E_3 و کرنش محوری ثابت ε_0 در کنار مؤلفه های جابه جایی گره ها، به عنوان مجهولات مسأله، محاسبه خواهند شد.

۳-۲-۳- اعمال شرایط مرزی

ملاحظات صحیح و درستی می بایست در مدل سلول واحد مسأله در نظر گرفته شود تا تقارن و تکرارپذیری^۲ سلول واحد برای ایجاد شکل کلی کامپوزیت دچار خلل نگردد. بنابراین همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، یک گره مرجع به گونه ای تعریف می شود که جابه جایی عمودی گره های واقع در وجه بالایی سلول واحد و جابه جایی افقی گره های واقع در وجه راست مدل، به ترتیب، مساوی با جابه جایی عمودی و افقی این گره مرجع در نظر گرفته می شوند تا مرزها دچار اعوجاج نشده و به حالت صاف^۳ باقی بمانند. علاوه بر این، برای وجوه پایین و چپ مدل شرایط تقارن در نظر گرفته می شود. مطالب ارائه شده در قالب روابط (۲۵) ارائه می شوند [۲۶].

$$u_2(0, x_3) = 0 \quad u_2(a, x_3) = a \bar{e}_{22} \quad u_3(x_2, 0) = 0 \quad u_3(x_2, a) = a \bar{e}_{33} \quad (25)$$

به طوری که \bar{e}_{33} و \bar{e}_{22} کرنش های نرمال متوسط، به ترتیب، در راستای محورهای x_3 و x_2 هستند و پارامتر a معرف پهنای مدل المان نماینده می باشد (شکل ۲). به منظور اعمال این شرایط، روش ضرایب لاگرانژ، که یک روش دقیق در اعمال شرایط مرزی ضروری می باشد، به کار گرفته شد.



شکل ۲ مدل هندسی و توزیع گره در المان نماینده حجمی با الیاف بیضوی

ضرایب لاگرانژ [۱۷، ۱۸] می باشد. روش های دیگر اعمال شرط مرزی ضروری در روش های بدون المان، در مقاله فرناندیز-مندیز و هرتا [۲۵] ارائه شده است. توابع شکل حداقل مربعات متحرک، به دلیل ماهیت برازشی^۱ حاکم بر آن ها، حساسیتی نسبت به تعداد گره درون دامنه موضعی ندارند. علاوه بر این، دقت و سرعت همگرایی بسیار بالا با تعداد گره کم، از مزایایی است که این توابع شکل به روش های عددی بدون المان وابسته به آن ها می بخشد. از معایب این توابع شکل نیز، همان طور که قبلاً هم گفته شد، فقدان خاصیت دلتای کرانیکر است که در موضع اعمال شرایط مرزی ضروری اثر خود را آشکار می کنند و با روش هایی همچون روش پنالتی و یا ضرایب لاگرانژ قابل برطرف کردن می باشد. دقت بالا و سرعت همگرایی بالا مزایای هستند که می توانند اثر فقدان خاصیت دلتای کرانیکر را در روش هایی همچون روش بدون المان گلرکین کم رنگ کنند.

۳-۲-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

بر اساس روش بدون المان گلرکین، فرم تضعیف شده معادلات تعادل (۳) و (۴)، بر اساس ساختار توابع شکل حداقل مربعات متحرک تقریب زده می شوند. میدان جابه جایی تقریب زده شده به صورت رابطه (۱۶) ارائه می شود [۱۹].

$$u^h(x) = \begin{Bmatrix} u_2^h \\ u_3^h \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{pmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2I} \\ u_{3I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n \tilde{\Phi}_I u_I \quad (16)$$

که در رابطه (۱۶)، $\tilde{\Phi}_I(x)$ ماتریسی قطری شامل تابع شکل گره I ام و u_I و $u^h(x)$ به ترتیب، جابه جایی گره ای و جابه جایی تقریب زده شده در نقطه x را نشان می دهند. همچنین، n تعداد گره های درون ناحیه پشتیبان نقطه x است که در تقریب شرکت می کنند.

فرم گسسته شده معادله تعادل مکانیکی (۳) با در نظر گرفتن روابط متشکله و سینماتیک، به صورت رابطه (۱۷) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} & \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \delta u_I^T \left(\int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega \right) u_J + \sum_{I=1}^N \delta u_I^T \left(\int_{\Omega} B_I^T \bar{C} d\Omega \right) \varepsilon_0 \\ & - \sum_{I=1}^N \delta u_I^T \left(\int_{\Omega} B_I^T \bar{e} d\Omega \right) E_3 + \sum_{I=1}^N \delta \varepsilon_0 \left(\int_{\Omega} \bar{C}^T B_I d\Omega \right) u_I \\ & + \delta \varepsilon_0 \left(\int_{\Omega} c_{11} d\Omega \right) \varepsilon_0 - \delta \varepsilon_0 \left(\int_{\Omega} e_{31} d\Omega \right) E_3 \\ & - \sum_{I=1}^N \delta u_I^T \left(\int_{\Gamma_t} \tilde{\Phi}_I^T t d\Gamma \right) - \delta \varepsilon_0 \left(\int_{\Omega} t_{axial} d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که N معرف تعداد کل گره های درون دامنه مسأله بوده و ماتریس B_I به صورت زیر تعریف می شود.

$$B_I = \begin{pmatrix} \phi_{I,2} & 0 \\ 0 & \phi_{I,3} \\ \phi_{I,3} & \phi_{I,2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

رابطه (۱۷) در شکل فشرده به صورت رابطه (۱۹) بازنویسی می شود.

$$\delta U^T (KU + F_1 \varepsilon_0 - F_2 E_3 - f_t) + \delta \varepsilon_0 (F_1^T U + X_1 \varepsilon_0 - X_2 E_3 - f_{axial}) = 0 \quad (19)$$

که K ، F_1 ، F_2 ، X_1 ، X_2 ، f_t و f_{axial} به مطابق زیر تعریف می شوند:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega, \quad F_{1I} = \int_{\Omega} B_I^T \bar{C} d\Omega, \quad F_{2I} = \int_{\Omega} B_I^T \bar{e} d\Omega$$

$$X_1 = \int_{\Omega} c_{11} d\Omega, \quad X_2 = \int_{\Omega} e_{31} d\Omega, \quad f_{tI} = \int_{\Gamma_t} \tilde{\Phi}_I^T t d\Gamma$$

$$f_{axial} = \int_{\Omega} t_{axial} d\Omega \quad (20)$$

جدول ۱ خواص الکترو-الاستیک اجزای کامپوزیت پیزوالکتریکی اپوکسی/PZT-7A [۴]

ثوابت ماده	PZT-7A	اپوکسی
C_{11}, C_{22} (GPa)	۱۴۸	۳/۸۶
C_{12} (GPa)	۷۶/۲	۲/۵۷
C_{13}, C_{23} (GPa)	۷۴/۲	۲/۵۷
C_{33} (GPa)	۱۳۱	۳/۸۶
C_{44}, C_{55} (GPa)	۲۵/۴	۰/۶۴
C_{66} (GPa)	۳۵/۹	۰/۶۴
e_{31}, e_{32} (C/m ²)	-۲/۱	۰
e_{33} (C/m ²)	۹/۵	۰
$\kappa_{33} \times 10^9$ (F/m)	۲/۰۷	۰/۰۷۹

یکتواخت و منظمی از گره‌های محاسباتی انتخاب شده است. علاوه بر این، روش بدون المان گلرکین در آزمایش‌های عددی توانایی چشمگیری را در همگرایی مسأله براساس توزیع دلخواه و نامنظم گره‌ها نشان می‌دهد. با این حال ایجاد یک توزیع منظم از گره‌ها به دقت مسأله بسیار کمک می‌کند؛ مخصوصاً هنگامی که مشتقات متغیر میدان، یعنی توزیع تنش و یا کرنش، مدنظر باشد.

روش بدون المان گلرکین بر اساس فرم تضعیف‌شده کلی^۳ به گسسته‌سازی معادلات می‌پردازد که برای حل انتگرال‌های موجود در مسأله، روش انتگرال‌گیری عددی گوس مربعی^۴ به کار گرفته شده است. بدین منظور، می‌بایست مجموعه‌ای از سلول‌های شبکه گوسی درون دامنه مسأله چیده شوند. درون هر سلول، بسته به مرتبه انتگرال گوسی انتخاب شده، نقاط انتگرالی چیده می‌شوند. در این پژوهش، از انتگرال گوس مربعی مرتبه ۴م با ۱۶ نقطه گوسی درون هر سلول استفاده شده است. این نقاط گوسی، دقیقاً، از همان الگوی چینش گره‌ها پیروی می‌کنند. بنا به آزمایش‌های عددی لیو و همکارانش تعداد این نقاط گوسی می‌بایست حدود ۳ الی ۹ برابر تعداد گره‌ها موجود در دامنه باشد تا همگرایی مسأله تضمین شود [۱۹]. لازم به ذکر است که توزیع نقاط گوسی کاملاً مستقل از توزیع گره‌ها محاسباتی انجام می‌شود. نهایتاً، با حل دستگاه معادلات خطی (۲۸) با استفاده از روش حذفی گوس^۵، مقادیر جابه‌جایی گره‌ها (U)، کرنش محوری ثابت (ϵ_0) و میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون (E_3) محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که تمامی مراحل برنامه نویسی، تحت زبان فرترن ۹۰ در سیستم عامل لینوکس انجام شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، هدف بررسی خواص الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های زمینه اپوکسی تقویت‌شده با الیاف بلند از جنس مواد پیزوالکتریک PZT-7A در حالت پولاریزاسیون عرضی است که بررسی این خواص در دو حالت الیاف با سطح مقطع دایروی و بیضوی با نسبت تناسب ۰/۵ انجام شده است. لازم به ذکر است که برای الیاف دایروی با آرایش منظم مربعی حداکثر کسر حجمی قابل دسترس حدود ۷۸/۵٪ می‌باشد که این مقدار برای الیاف بیضوی با نسبت تناسب ۰/۵، حدود ۳۹٪ است.

جزئیات اجزای تشکیل دهنده کامپوزیت در جدول ۱ لیست شده است که همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، اپوکسی از لحاظ پیزوالکتریکی خنثی می‌باشد. برای یکپارچه‌سازی در مقایسه نتایج، از شکل نرمالیزه یا بی‌بعدشده ضرایب الکترو-الاستیک، مطابق روابط (۳۰) استفاده می‌شود.

$$e_{ij}^* = \frac{e_{ij}}{e_p^*}, C_{ij}^* = \frac{C_{ij}}{C_p^*}, \kappa_{33}^* = \frac{\kappa_{33}}{\kappa_0} \quad (30)$$

که κ_0 ، معرف ثابت گذردهی الکتریکی خلأ می‌باشد و برابر 8.85×10^{-12} F/m تعریف شده است [۲۷]. همچنین اندیس بالانویس p، نمایانگر خصوصیت مرتبط با ماده پیزوالکتریک خالص می‌باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود پیش‌بینی حاضر در مورد ضرایب پیزوالکتریکی مؤثر کامپوزیت با الیاف دایروی، موافقت خوبی را با مدل‌های ارائه شده توسط مالیک و ری [۴] در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که برای این پیش‌بینی، آن‌ها از دو مدل میکرومکانیکی، برپایه روش مقاومت مصالح و روش سلولی، استفاده کردند.

در خصوص مرز مشترک فایبر-ماتریس، فرض اتصال کامل^۱ برقرار می‌باشد که برای اعمال این شرط مرزی، از روش پنالتی^۲ که جزئیات و مراحل آن توسط لیو و یانگ در سال ۱۹۹۹ میلادی ارائه شد، استفاده شده است [۲۴].

برای اعمال شرایط پیوستگی، در ابتدا، یک محیط غیرهمگن که از دو ماده‌ی همگن تشکیل شده است در نظر گرفته می‌شود و روی مرز دو جسم همگن، مجموعه‌ای از گره‌ها تعریف می‌شود. برای دامنه‌های محلی، نقاطی که درون جسم A قرار گرفته‌اند، منحصراً، تحت تأثیر گره‌های درون جسم A و گره‌های روی مرز مشترک هستند. ارتباط بین ناحیه‌های مختلف با اعمال شرایط پیوستگی ایجاد می‌شود. اگر مرز دو ناحیه با Γ_c معرفی شود، شرایط پیوستگی مطابق رابطه (۲۶)، روی مرز اعمال می‌شود.

$$u^f = u^m \quad (26)$$

که در رابطه (۲۶)، u^m و u^f ، به ترتیب، پارامتر جابه‌جایی الیاف و ماتریس برای نقاط روی مرز هستند. فرم فانکشنال مرتبط با این شرط مرزی به صورت رابطه (۲۷) ارائه می‌شود [۲۴].

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (u^f - u^m)^T \alpha (u^f - u^m) d\Gamma \quad (27)$$

که α یک ماتریس قطری از ضرایب پنالتی بوده و در مسائل دوبعدی از مرتبه ۲ می‌باشد. با اعمال فرم تضعیف‌شده فانکشنال (۲۷) به رابطه (۳)، اثر این شرط مرزی به صورت رابطه (۲۸) در معادله اول دستگاه معادلات (۲۴) گنجانده می‌شود.

$$(K + K^\alpha)U + F_1 \epsilon_0 - F_2 E_3 - f_t = 0 \quad (28)$$

که K^α ماتریسی است که شرط مرزی اتصال کامل الیاف و زمینه را برقرار می‌کند و به صورت رابطه (۲۹) ارائه می‌شود [۲۴].

$$K_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_c} [\tilde{\Phi}_I^m - \tilde{\Phi}_I^f]^T \alpha [\tilde{\Phi}_J^m - \tilde{\Phi}_J^f] d\Gamma \quad I, J = 1, \dots, N \quad (29)$$

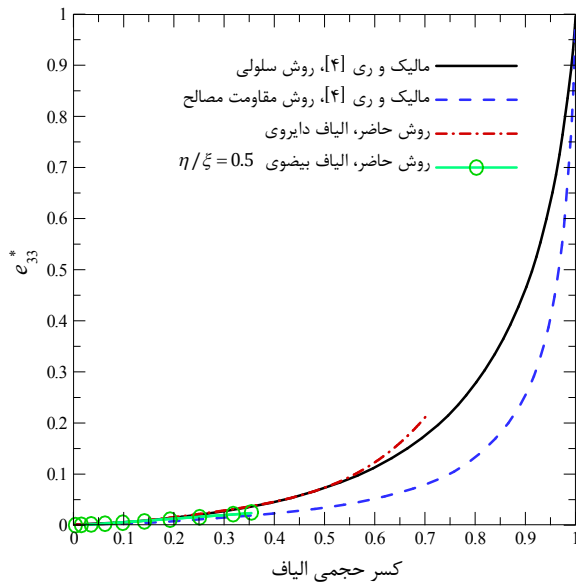
در رابطه (۲۹) $\tilde{\Phi}_I^m$ و $\tilde{\Phi}_I^f$ ، ماتریس‌هایی قطری از تابع شکل حداقل مربعات متحرک گره I م، برای فایبر و ماتریس می‌باشند. به جز گره‌های روی مرز مشترک که ناحیه تأثیر آن‌ها هر دو فاز الیاف و زمینه را در برمی‌گیرد، گره‌های درون ماتریس بر نقاط درون ماتریس و گره‌های درون فایبر بر گره‌های درون فایبر تأثیرگذار خواهند بود.

۳-۲-۴- توزیع گره‌ها و نقاط انتگرال‌گیری در دامنه مسأله

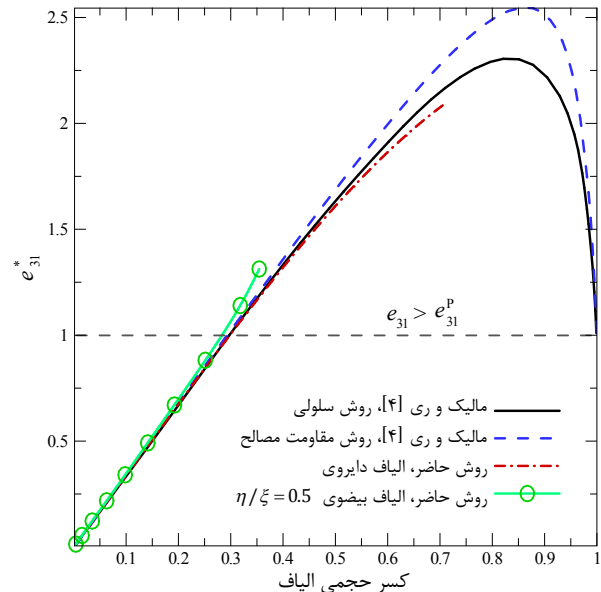
در مدل حاضر از یک توزیع شعاعی برای گره‌های محاسباتی درون دامنه مسأله استفاده شده است. همان‌طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود، توزیع

3- Global Weak-Form
4- Gauss Quadrature
5- Gauss Elimination

1- Perfectly or Fully Bounded
2- Penalty Method



شکل ۵ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{33}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۳ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{31}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

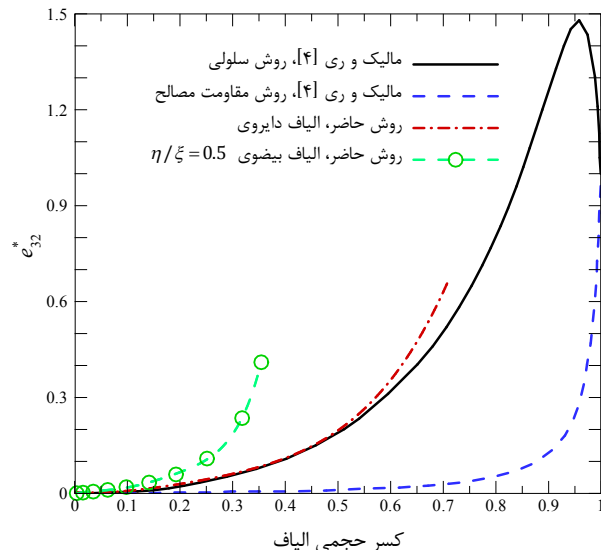
شکل ۴ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{32}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی را نسبت به کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود، به دلیل فرضیات ساده شونده موجود در مدل مقاومت مصالح [۴]، این مدل اختلاف بسیار زیادی را با مدل سلولی [۴] نشان می‌دهد. می‌توان ملاحظه کرد که پیش‌بینی حاضر در حالت الیاف دایروی، به دلیل این که اثرات موضعی میدان‌های تنش در آن لحاظ شده است، رفتار بسیار نزدیک تری را با روش سلولی نشان می‌دهد؛ چرا که در ماهیت روش سلولی نیز سلول واحد، به چند زیر بخش تقسیم می‌شود و مسأله جزئی تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{33}^* در شکل ۵ نشان داده شده است. همان طور که در این شکل نیز دیده می‌شود، پیش‌بینی حاضر برای کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی که از الیاف دایروی تشکیل شده‌اند، موافقت بهتری را با روش سلولی نشان می‌دهد.

نتایج حاصل از پیش‌بینی حاضر، حاکی از این موضوع است که ضرایب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{31}^* و e_{33}^* تا کسر حجمی حدود ۳۵٪ نسبت به تغییر شکل حساسیتی اندکی از خود نشان می‌دهند، (شکل‌های ۳ و ۵). این در حالی است که e_{32}^* به شدت وابسته به شکل الیاف می‌باشد؛ به طوری که مقدار این ضریب در کسر حجمی ۳۵٪، برای الیاف بیضوی حدود ۴/۵ برابر الیاف دایروی است.

شکل ۶ تغییرات ضریب دی‌الکتریک نرمالیزه شده κ_{33}^* را نسبت به کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد. مقایسه نتایج حاضر با نتایج مدل‌های ارائه شده در [۴] روند صحیحی را نشان می‌دهد با این حال، اختلاف‌های اندکی نیز قابل مشاهده است. علاوه بر این، همان طور که ملاحظه می‌گردد، اثر تغییر شکل الیاف بر رفتار ضریب دی‌الکتریک مؤثر κ_{33}^* تقریباً بی‌اثر می‌باشد.

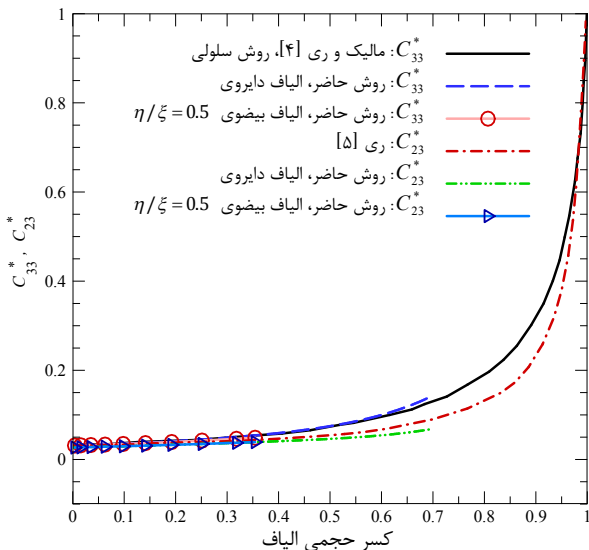
شکل ۷ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{11}^* کامپوزیت را در حالت پولاریزاسیون عرضی نشان می‌دهد. موافقت بسیار خوبی بین نتایج پیش‌بینی حاضر با مدل‌های ارائه شده در [۴] دیده می‌شود. همان طور که ملاحظه می‌شود، این تغییر شکل الیاف بر رفتار این ضریب، که ارتباط بین تنش محوری و کرنش محوری را برقرار می‌کند، تأثیر نخواهد گذاشت.



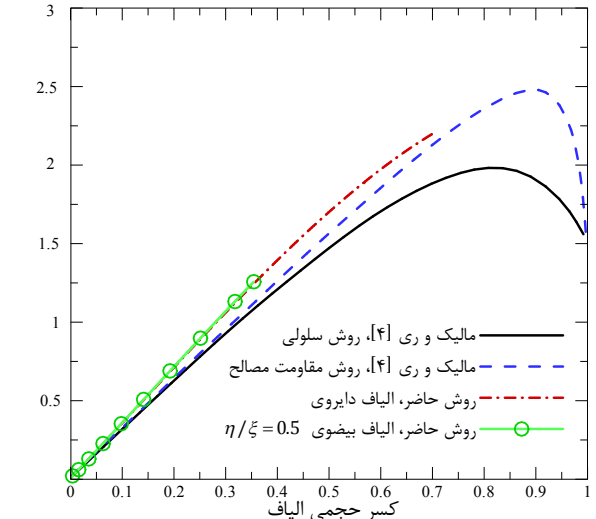
شکل ۴ تغییرات ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{32}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

در کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی که راستای پولاریزاسیون آن‌ها عمود بر راستای الیاف باشد، خواصی متفاوت قابل مشاهده است؛ به طوری که منحنی ضریب مؤثر پیزوالکتریکی e_{31} به گونه‌ای است که اگر کسر حجمی الیاف از یک میزان مشخص افزایش یابد، مقدار این ضریب به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد؛ تا آنجا که ضریب پیزوالکتریکی مؤثر فوق‌الذکر برای کامپوزیت با الیاف دایروی، تا چند برابر همان ضریب در ماده پیزو الکتریک خالص پیش می‌رود، (شکل ۳).

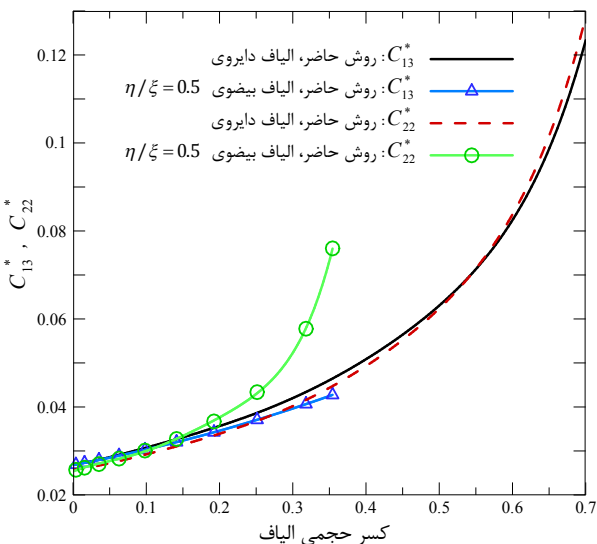
از آنجا که ضرایب پیزوالکتریکی، در واقع، به عنوان واسطه تنش‌های مکانیکی و میدان الکتریکی هستند، تقویت آن‌ها، کنترل‌پذیری عملگرها و سنسورها را افزایش خواهد داد. لذا، همان طور که ملاحظه می‌شود، در حالت پولاریزاسیون عرضی که میدان الکتریکی در راستای ضخامت کامپوزیت برقرار است، ضرایب پیزوالکتریکی مؤثر e_{31} کامپوزیت با الیاف دایروی در کسر حجمی ۷۰٪ تا حدود دو برابر حالت خالص رشد می‌کند، (شکل ۳).



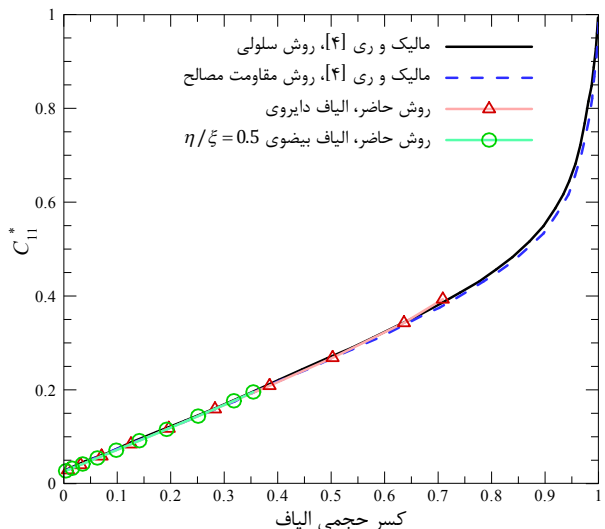
شکل ۹ تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه شده C_{33}^* و C_{23}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۶ تغییرات ضریب دی‌الکتریکی نرمالیزه شده κ_{33}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی



شکل ۱۰ تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه شده C_{13}^* و C_{22}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

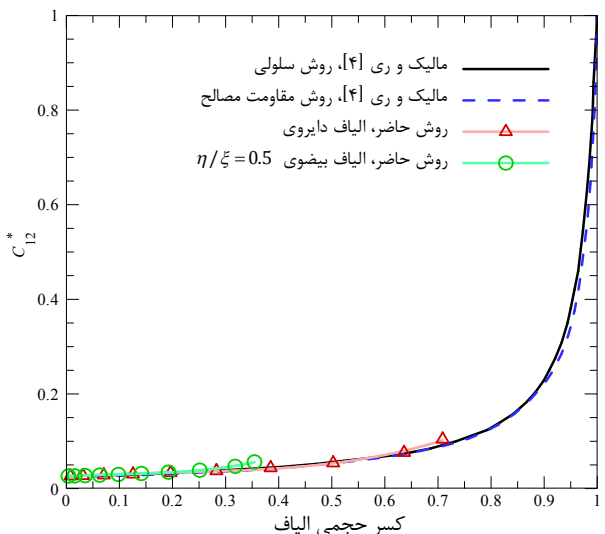


شکل ۷ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{11}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

شکل ۸ رفتار ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{12}^* کامپوزیت را نسبت به کسر حجمی الیاف پیزوالکتریکی ترسیم می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این ضریب براساس تمامی مدل‌های ارائه شده در [۴] و پیش‌بینی حاضر، در ابتدا با افزایش کسر حجمی، تغییر ناچیزی از خود به نمایش می‌گذارد و به عبارتی، در کسر حجمی‌های پایین، نسبت به افزایش حجم الیاف درون زمینه، حساسیتی نشان نمی‌دهد. علاوه بر این، تغییر شکل الیاف بر رفتار این ضریب تا کسر حجمی ۳۵٪ تأثیر گذاری اندکی را نشان می‌دهد.

در شکل ۹ منحنی تغییرات ضرایب الاستیک نرمالیزه شده C_{33}^* و C_{23}^* نسبت به کسر حجمی الیاف مشاهده می‌شود. این ضرایب، نسبت به میزان کسر حجمی الیاف پیزوالکتریکی، از رفتاری مشابه با ضریب C_{12}^* برخوردار هستند؛ به‌گونه‌ای که پیش‌بینی‌ها حاکی از این است که شکل الیاف تأثیر ناچیزی بر رفتار این ضرایب خواهد گذاشت.

شکل ۱۰ تغییرات ثابت الاستیک مؤثر نرمالیزه شده C_{13}^* و C_{22}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی را نسبت به کسر حجمی الیاف ترسیم می‌کند.



شکل ۸ تغییرات ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{12}^* کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی نسبت به کسر حجمی الیاف در حالت پولاریزاسیون عرضی

علایم یونانی

بردار توابع شکل	$\Phi(x)$
تنش محوری	σ_{axial}
ضریب دی‌الکتریک	κ_{33}
کرنش ثابت محوری	ϵ_0
مؤلفه‌های تانسور تنش	σ_{ij}
مؤلفه‌های تانسور کرنش	ϵ_{ij}
نصف قطر بزرگ بیضی	ξ
نصف قطر کوچک بیضی	η
بالانویس‌ها	
شکل بی بعد شده	*
ماده پیزوالکتریک خالص	p

۷- مراجع

[1] A. Safari, Development of piezoelectric composites for transducers, *J. Phys. III France*, Vol. 4, No. 7, pp. 1129-1149, 1994.

[2] G. M. Odegard, Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites, *Acta Materialia*, Vol. 52, No. 18, pp. 5315-5330, 10/18/, 2004.

[3] R. Kar-Gupta, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: An analytical model, *Acta Materialia*, Vol. 55, No. 3, pp. 1093-1108, 2//, 2007.

[4] N. Mallik, M. C. Ray, Effective Coefficients of Piezoelectric Fiber-Reinforced Composites, *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 4, pp. 704-710, 2003/04/01, 2003.

[5] M. Ray, Micromechanics of piezoelectric composites with improved effective piezoelectric constant, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 3, No. 4, pp. 361-371, 2006/12/01, 2006. English

[6] A. Kumar, D. Chakraborty, Effective properties of thermo-electromechanically coupled piezoelectric fiber reinforced composites, *Materials & Design*, Vol. 30, No. 4, pp. 1216-1222, 4//, 2009.

[7] E. López-López, F. J. Sabina, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos, Effective permittivity of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents, *Journal of Electrostatics*, Vol. 71, No. 4, pp. 791-800, 8//, 2013.

[8] R. Kar-Gupta, C. Marcheselli, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: Effect of fiber shape, *Journal of Applied Physics*, Vol. 104, No. 2, pp. 024105-024105-17, 2008.

[9] R. Kar-Gupta, T. A. Venkatesh, Electromechanical response of piezoelectric composites: Effects of geometric connectivity and grain size, *Acta Materialia*, Vol. 56, No. 15, pp. 3810-3823, 9//, 2008.

[10] Z. Li, C. Wang, C. Chen, Effective electromechanical properties of transversely isotropic piezoelectric ceramics with microvoids, *Computational Materials Science*, Vol. 27, No. 3, pp. 381-392, 5//, 2003.

[11] Q. Dai, K. Ng, Investigation of electromechanical properties of piezoelectric structural fiber composites with micromechanics analysis and finite element modeling, *Mechanics of Materials*, Vol. 53, No. 0, pp. 29-46, 10//, 2012.

[12] C.-P. Wu, K.-H. Chiu, R.-Y. Jiang, A meshless collocation method for the coupled analysis of functionally graded piezo-thermo-elastic shells and plates under thermal loads, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 56, No. 0, pp. 29-48, 7//, 2012.

[13] B. Dai, B. Zheng, Q. Liang, L. Wang, Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov-Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, No. 19, pp. 10044-10052, 6/1/, 2013.

[14] I. Ahmadi, N. Sheikhy, M. M. Aghdam, S. S. Nourazar, A new local meshless method for steady-state heat conduction in heterogeneous materials, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, No. 12, pp. 1105-1112, 12//, 2010.

[15] I. Ahmadi, M. M. Aghdam, Micromechanics of fibrous composites subjected to combined shear and thermal loading using a truly meshless method, *Computational Mechanics*, Vol. 46, No. 3, pp. 387-398, 2010/08/01, 2010. English

[16] I. Ahmadi, M. M. Aghdam, A truly generalized plane strain meshless method for combined normal and shear loading of fibrous composites, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, No. 3, pp. 395-403, 3//, 2011.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، منحنی تغییرات C_{13}^* در مورد شکل بیضوی الیاف اندکی نسبت به الیاف دایروی از خود انحراف نشان می‌دهد. این در حالی است که پیش‌بینی‌ها بیان می‌کنند که ضریب نرمالیزه شده C_{22}^* وابسته به شکل الیاف می‌باشد؛ به طوری که در کسر حجمی ۳۵٪ مقدار این ضریب برای الیاف بیضوی ۱/۲۲ برابر الیاف دایروی می‌باشد.

۵- جمع بندی و نتیجه گیری

در پژوهش حاضر مطابق با رویکرد تحلیل میکرومکانیکی مواد مرکب، یک المان نماینده حجمی مناسب از کامپوزیت پیزوالکتریکی الیافی تک جهته، مطابق با شرایط بارگذاری مسأله انتخاب شد. آرایش مربعی از الیاف برای این المان نماینده در نظر گرفته شد و نهایتاً به دلیل این‌که شرایط بارگذاری نرمال در این مسأله مد نظر بود، از مدل ۱/۴ سلول واحد به دلیل تقارن هندسی استفاده گردید. در این سلول واحد، سرمایه‌های پیزوالکتریک با خواص ایزوتروپیک عرضی به شکل الیاف طویل و به صورت موازی و منظم، درون محیطی از اپوکسی با خواص ایزوتروپیک جای داده شدند و فرض شد که اتصال کامل بین الیاف و ماتریس برقرار است.

به منظور آنالیز و تحلیل این مسأله، از روش عددی بدون المان گلرکین استفاده شد. در این روش عددی با در نظر گرفتن اثرات میدان‌های موضعی تنش و کرنش اجزای تشکیل‌دهنده کامپوزیت، پیش‌بینی‌هایی از خواص الکترو-الاستیک کامپوزیت‌های پیزوالکتریکی الیافی با پولاریزاسیون عرضی ارائه شد که در موافقت مناسبی با کارهای پیشین بودند.

نتایج حاکی از این موضوع است که هنگامی که میدان الکتریکی در راستای ضخامت کامپوزیت ثابت نگه داشته می‌شود، مقدار ضریب پیزوالکتریکی مؤثر e_{31} برای کامپوزیت پیزوالکتریکی که کسر حجمی الیاف آن از حدود ۳۰٪ فراتر می‌رود، از مقدار همان ضریب در حالت ماده خالص بیشتر می‌شود.

بررسی‌های انجام شده در خصوص تأثیر شکل فایبر بر نوع رفتار ضرایب الکترو-الاستیک نشان داد که در حالی که این تغییر شکل بر ضرایب مرتبط با راستاهای محوری تأثیر چندانی نمی‌گذارد اما می‌تواند ضرایب پیزوالکتریک و الاستیک مرتبط با راستای عرضی را تا حد مطلوبی تقویت کند؛ به گونه‌ای که ضریب الاستیک نرمالیزه شده C_{22}^* و ضریب پیزوالکتریکی نرمالیزه شده e_{32}^* به ترتیب، در مورد الیاف بیضوی تا حدود ۱/۲۲ و ۴/۵ برابر الیاف دایروی می‌باشد.

۶- فهرست علائم

a	اندازه ضلع سلول واحد مربعی
C_{ij}	ضرایب الاستیک
e_{ij}	ضرایب پیزوالکتریک
E_3	میدان الکتریکی در راستای پولاریزاسیون
D_3	جابه‌جایی الکتریکی در راستای پولاریزاسیون
q_3	دانسیته بارالکتریکی در راستای پولاریزاسیون
r_w	شعاع ناحیه موضعی
\bar{w}	تابع وزنی
N	تعداد کل گره‌های دامنه
t_{axial}	ترکشن محوری
\bar{t}	بردار ترکشن درون - صفحه‌ای
x_i	محورهای مختصات
u_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی

- [23] S. Alkoy, C. Gol, Preparation of solid and hollow piezoelectric ceramic fibers and springs using a novel alginate gelation method, in *Proceeding of*, 1711-1714.
- [24] G. R. Liu, *Mesh free methods : moving beyond the finite element method*, United States of America: CRC Press LLC, 2003.
- [25] S. Fernández-Méndez, A. Huerta, Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 12-14, pp. 1257-1275, 3/26/, 2004.
- [26] M. M. Aghdam, M. J. Pavier, D. J. Smith, Micro-mechanics of off-axis loading of metal matrix composites using finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 22-23, pp. 3905-3925, 5//, 2001.
- [27] IEEE Standard on Piezoelectricity, *ANSI/IEEE Std 176-1987*, pp. 0_1, 1988.
- [17] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [18] J. Dolbow, T. Belytschko, An introduction to programming the meshless Element Free Galerkin method, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 5, No. 3, pp. 207-241, 1998/09/01, 1998. English
- [19] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*: Springer London, Limited, 2005.
- [20] M. Bayat, M. M. Aghdam, A micromechanics-based analysis of effects of square and hexagonal fiber arrays in fibrous composites using DQEM, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 32, No. 0, pp. 32-40, 3//, 2012.
- [21] M. Bayat, M. M. Aghdam, A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 8, pp. 2921-2929, 12//, 2012.
- [22] T. H. Brockmann, *Theory of Adaptive Fiber Composites*: Springer, 2009.