مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 225-236

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

وقوع تشدید پارامتریک در ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی واقع بر بستر الاستیک تحت عبور مجموعه پیوسته‌ای از جرم‌های متحرک

احسان ترکان[1]، مصطفی پیرمرادیان[2*]، محمد هاشمیان[2]

1- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر، خمینی‌شهر

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر، خمینی‌شهر

* خمینی‌شهر، صندوق پستی 119-84175، pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 10 خرداد 1396

پذیرش: 24 مرداد 1396

ارائه در سایت: 17 شهریور 1396

کلید واژگان:

ورق-جرم متحرک

تحریک پارامتریک

تشدید پارامتریک

پایداری دینامیکی

روش هارمونیک بالانس نموی

چکیده

در این مقاله، ناپایداری ناشی از وقوع تشدید پارامتریک در ارتعاش عرضی ورق مستطیلی واقع بر بستر الاستیک تحت عبور مجموعه پیوسته‌ای از جرم‌های متحرک به عنوان مدلی از تعامل پل با بارهای متحرک، بررسی شده است. برای استخراج معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت عرضی ورق، اصل همیلتون تعمیم‌یافته بکار گرفته شده است. متعاقباً با استفاده از روش گالرکین، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل گردیده است. لحاظ کردن همه‌ی مولفه‌های شتاب جرم متحرک از جمله شتاب محلی، کریولیس و مرکزگرا در تحلیل، منجر به ظاهر شدن ماتریس‌های متغیر با زمان جرم، میرایی و سختی در ضرایب معادله شده است. عبور متناوب و پیوسته‌ی جرم‌های متحرک در طول مسیری مستقیم روی سطح ورق، سیستم دینامیکی مورد بررسی را به سیستمی تحت تحریک پارامتریک با ضرایب پریودیک تبدیل می‌کند. با اعمال روش نیمه‌تحلیلی هارمونیک بالانس نموی بر معادلات بدست آمده، پایداری سیستم برای مقادیر وسیعی از جرم و سرعت بارهای عبوری و شرایط مرزی مختلف ورق تحلیل شده است. علاوه بر این، تأثیر سختی بستر الاستیک بر پایداری ورق نیز بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تکیه‌گاه‌های گیردار برای لبه‌های ورود و خروج جرم‌ها روی سطح ورق، منجر به تشکیل زبانه‌ای ناپایدار در صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری می‌شود؛ زبانه‌ای که در صورت استفاده از تکیه‌گاه ساده پدیدار نمی‌شود. همچنین، مشاهده می‌شود که با افزایش سختی بستر الاستیک، سرعت‌های بحرانی جرم‌های متحرک افزایش می‌یابد. با انجام شبیه‌سازی‌های عددی، صحت نتایج پیش‌بینی شده با روش نیمه‌تحلیلی، تأیید شده است.

Occurrence of parametric resonance in vibrations of rectangular plates resting on elastic foundation under passage of continuous series of moving masses

Ehsan Torkan, Mostafa Pirmoradian*, Mohamad Hashemian

Department of Mechanical Engineering, Khomeinishahr Branch Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran
* P.O.B. 84175-119, Khomeinishahr, Iran, Pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 May 2017
Accepted 15 August 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
Plate-moving mass interaction
Parametric excitation
Parametric resonance
Dynamic stability
Incremental harmonic balance method

ABSTRACT

In this paper, instability due to occurrence of parametric resonance in transverse vibration of a rectangular plate on an elastic foundation under passage of continuous series of moving masses is examined as a model of bridge-moving loads interaction. The extended Hamilton's principle is employed to derive the partial differential equation of motion. Subsequently, the governing partial differential equation is transformed into a set of ordinary differential equations by the Galerkin procedure. Considering local, Coriolis and centripetal acceleration components of the moving masses in the analysis leads to appearance of time-varying mass, damping and stiffness matrices in the coefficients of the governing equation. The passage of continuous series of moving masses along the rectilinear path results in a parametrically excited system with periodic coefficients. Applying incremental harmonic balance method as a semi-analytical method to the governing equations, stability of the system is investigated for a wide range of masses and velocities of the passing loads and different boundary conditions of the plate. Moreover, effect of the foundation stiffness on stability of the plate is examined. Results indicate that using clamped supports for the edges of entrance and departure of masses over the plate's surface leads to formation of an instability tongue in the parameters plane which does not appear for the case of using simply supports. Also, it is observed that critical velocities of the moving masses will be increased by escalation of the foundation stiffness. Numerical simulations confirm the accuracy of the semi-analytical results.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

E. Torkan, M. Pirmoradian, M. Hashemian, Occurrence of parametric resonance in vibrations of rectangular plates resting on elastic foundation under passage of continuous series of moving masses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 225-236, 2017 (in Persian)

1- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت بارهای متحرک در زمینه‌های مختلف مهندسی همچون سیستم‌های حمل‌ونقل کابلی، پل‌های عبور وسائل نقلیه، جرثقیل‌های سقفی و پروسه ماشین‌کاری از اهمیت بالایی برخوردار است. پیچیدگی تعامل بین سازه و بار متحرک در کاربردهای مرتبط، منجر به تبدیل این موضوع به علاقه‌مندی محققین در سال‌های گذشته شده است. با احتساب تأثیرات اینرسی بارهای متحرک در معادلات دینامیکی، فرمول‌بندی دقیق‌تری حاصل می‌آید که به‌عنوان مسأله‌ی جرم متحرک شناخته می‌شود. شادنام و همکاران [1] ارتعاش ورق کیرشهف با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده تحت عبور جرم متحرک را فقط با در نظر گرفتن مولفه‌ی عمودی شتاب جرم متحرک، مورد بررسی قرار دادند. نیکخو و همکاران پژوهش‌هایی در زمینه‌ی رفتار دینامیکی ورق‌ها تحت عبور بارها و جرم‌های متحرک انجام داده‌اند که شامل پاسخ ارتعاش عرضی ورق مستطیلی نازک تحت تأثیر جرم متحرک [2] و رشته‌ای از بارهای اینرسی متحرک [3]، می‌باشد. نیاز و نیکخو [4] به بررسی رفتار دینامیکی ورق مستطیلی نازک با شرایط مرزی مختلف تحت عبور جرم متحرک شتاب‌دار، پرداختند. قزوینی و همکاران [5] پاسخ دینامیکی ورق‌های مستطیلی نازک با ضخامت متغیر تحت بارگذاری جرم متحرک را با استفاده از روش بسط تابع ویژه ارزیابی کردند. استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک به منظور کنترل پاسخ دینامیکی ورق‌های نازک حامل جرم متحرک توسط نیکخو و رفوئی [6]، مطالعه شد. دینامیک غیرخطی ورق‌های مستطیلی تحت بارگذاری جرم متحرک توسط رفوئی و همکاران [7] و انشائیان و رفوئی [8]، بررسی شد. جیبادیان و دادا [9] پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی میندلین حامل جرم متحرک توزیعی را ارزیابی کردند. وو [10] پاسخ دینامیکی ورق مورب را با لحاظ کردن اثرات نیروهای گریز از مرکز و کریولیس ناشی از جرم متحرک بررسی کرد و متذکر شد که برای سرعت‌های بالای حرکت جرم عبوری، نیروهای گریز از مرکز و کریولیس نقش مهمی در پاسخ دینامیکی ورق ایفا می‌کنند. واثقی امیری و همکاران [11] رفتار دینامیکی ورق‌های مستطیلی ضخیم با شرایط مرزی مختلف تحت عبور جرم‌های متحرک را با بکارگیری روش بسط تابع ویژه و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، بررسی کردند. اسن [12] روشی مبتنی بر المان محدود برای مطالعه‌ی ارتعاش عرضی ورق‌های مستطیلی نازک تحت بارگذاری جرم متحرک، ارائه کرد. همچنین، او در مطالعه‌ای دیگر [13] روشی مشابه برای بررسی ارتعاش طولی و عرضی ورق‌های مستطیلی نازک تحت عبور بارهای متحرک با سرعت متغیر، بکار گرفت. ابراهیم‌زاده حسن-آبادی و همکاران [14] وقوع تشدید در ورق‌های مستطیلی نازک تحت تأثیر سری پیوسته‌ای از جرم‌های متحرک را بررسی کردند.

در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، الکتریکی و بیولوژیکی، رفتار نوسانی سیستم‌های دینامیکی ناشی از تحریک متناوب، توجه بسیاری از دانشمندان و مهندسین را جلب کرده است. تحریک‌های نوسانی به دو دسته‌ی اجباری و پارامتریک تقسیم‌بندی می‌شوند. تحریک اجباری هنگامی اتفاق می‌افتد که سیستم دینامیکی توسط ورودی متناوبی برانگیخته شده باشد. حال اینکه تحریک پارامتریک نتیجه‌ی وجود پارامترهای متغیر با زمان (متناوب با زمان) در سیستم است. بیشتر توجهات به تحریک پارامتریک به علت وقوع نوع منحصر به فردی از تشدید به نام تشدید پارامتریک در این سیستم‌ها می‌باشد. اگر فرکانس پارامترهای متناوب، نزدیک به دو برابر فرکانس طبیعی سیستم شود، سیستم دچار تشدید پارامتریک خواهد شد که نتیجه‌ی آن افزایش نامحدود دامنه‌ی نوسانات است.

مسأله‌ی جرم متحرک از دسته مواردی است که سازه‌ی تحت بارگذاری، دچار تحریک پارامتریک می‌شود. از آنجایی که مکان جرم متحرک بر سطح سازه با گذشت زمان تغییر می‌کند، لذا مسأله‌ی جرم متحرک را اساساً باید جزء مسایل متغیر با زمان دسته‌بندی کرد. ماهیت وابسته به زمان این قبیل سیستم‌ها، فقط در مطالعات محدودی (در مقایسه با حجم وسیع پژوهش‌های انجام شده در این زمینه) در نظر گرفته شده است [15-19]. در این مطالعات، با در نظر گرفتن عبور متناوب جرم‌ها بر سازه‌ی بستر، ضرایب متغیر با زمان به ضرایبی پریودیک تبدیل می‌شوند. تشدید ناشی از عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک می‌تواند منجر به پیامدهایی ناخواسته در سازه‌ی تحت بارگذاری شود. به منظور تنظیم شرایط تشدید به وسیله‌ی کنترلرهای فعال یا نیمه‌فعال لازم است که شرایط وقوع تشدید در این قبیل سیستم‌ها بررسی شود.

تاکنون پاسخ دقیقی برای معادلات با ضرایب پریودیک به صورت کلی ارایه نشده است، اما به کمک برخی روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی می‌توان محدود یا نامحدود بودن پاسخ این قبیل معادلات را بررسی کرد. معمولاً این روش‌ها، ناحیه‌هایی را در فضای پارامترهای معادله مشخص می‌کنند که سیستم به ازای پارامترهای متعلق به آن دچار تشدید پارامتریک شده و در نتیجه، ناپایداری در پاسخ معادله به وجود می‌آید.

ناپایداری حاصل از تشدید پارامتریک در تیر اویلر-برنولی تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک اولین بار توسط نلسون و کونوور مطرح شد [15] و با استفاده از تئوری فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار فضای پارامترهای سیستم مشخص شد. رائو [16] پایداری دینامیکی تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده تحت عبور بار متحرک را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه ارزیابی کرد. در این مطالعه، پدیده‌های تشدید خارجی، داخلی و پارامتریک بررسی گردید و گزارش شد که اگرچه تشدید خارجی در نتیجه‌ی اثرات جاذبه‌ای بار متحرک اتفاق می‌افتد ولی وقوع تشدید پارامتریک و داخلی فقط به پارامترهای جرم و سرعت بار عبوری بستگی دارد. پیرمرادیان و همکاران [17] با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی، تشدید پارامتریک در تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه‌های ساده تحت عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک یکسان را بررسی کردند. کریم‌پور و همکاران [18] وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان را در مطالعه‌ی ناپایداری سیستم تیر-جرم متحرک گزارش کردند و اهمیت توجه به آن را در طراحی مهندسی بیان نمودند.

مروری بر مطالعات پیشین نشان می‌دهد که شرایط وقوع تشدید پارامتریک و ناپایداری ناشی از آن در سازه‌ی تیر تحت بارگذاری جرم متحرک بررسی شده است. در مورد سیستم ورق-جرم متحرک، هرچند مطالعاتی در زمینه‌ی تشدید خارجی و یافتن محدودیت‌هایی برای سرعت جرم عبوری انجام گرفته است [14,11,6,2]، لیکن با توجه به بهترین دانش نویسندگان، تاکنون تحقیقی در زمینه‌ی وقوع تشدید پارامتریک در این قبیل سیستم‌ها صورت نگرفته است. بنابراین، در مطالعه‌ی حاضر با در نظر گرفتن عبور نوبه‌ای جرم‌های متحرک بر سطح سازه، ورق تحریکی از نوع پارامتریک را تجربه می‌کند و ضرایب معادله‌ی حاکم به ضرایبی متناوب تبدیل می‌شوند. با توجه به شباهت این معادله با معادله‌ی هیل، سعی می‌شود که به کمک روش هارمونیک بالانس نموی صفحه‌ی پایداری سیستم استخراج گردد. علاوه بر این، اکثر مطالعات انجام شده در این زمینه، محدود به شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد. حال این‌که عملکرد دینامیکی سیستم‌های ممتد می‌تواند حساسیت بالایی به شرایط مرزی داشته باشد. بنابراین، در این مقاله

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.48.4]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.48.4]

با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف در تحلیل ناپایداری ورق، نتایجی ارایه شده است که توجه به آن‌ها در حوزه‌ی سازه‌های مکانیکی و عمرانی بسیار حایز اهمیت است. برای حرکت جرم‌های متحرک روی سطح ورق مسیری مستقیم در نظر گرفته شده است؛ مسیری که در مسائلی همچون حرکت وسایل نقلیه و قطارها روی پل‌ها و همچنین عرشه‌ی ناوهای هواپیمابر مطرح است.

2- معادلات حرکت

ورقی انعطاف‌پذیر واقع بر بستر الاستیک در معرض عبور جرم متحرک M در طول مسیری مستقیم با سرعت ثابت V، مطابق "شکل 1" در نظر بگیرید. ورق دارای طول a، عرض b، ضخامت h، مدول یانگ E، ضریب پواسون ν و جرم واحد حجم ρ است. با در نظر گرفتن ضخامت کم نسبت به طول و عرض ورق و استفاده از تئوری ورق کیرشهف، از اثرات اینرسی دورانی و تغییرشکل‌های برشـی صرف‌نظر می‌شود. مطابق تئوری ورق کیرشهف، میدان جابجایی u برای هر نقطه از ورق در جهات x، y و z را می‌توان به صورت رابطه‌ی (1) بیان کرد.

$$u_x(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$u_y(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$u_z(x,y,z,t) = w(x,y,t) \tag{1}$$

که $w(x,y,t)$ تغییرشکل عرضی سطح میانی ورق می‌باشد. بر اساس فرضیات کیرشهف، مولفه‌های تانسور کرنش به صورت رابطه‌ی (2) بدست می‌آیند.

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_{yy} = z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varepsilon_{xy} = z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$
$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \tag{2}$$

براساس قانون هوک، روابط تنش-کرنش به صورت رابطه‌ی (3) تعریف می‌شوند.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right),$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right)$$
$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} \tag{3}$$

که G مدول برشی ورق است. تابع انرژی کرنشی برای یک ورق همگن تغییرشکل یافته به صورت رابطه‌ی (4) تعریف می‌شود.

$$U_p = \frac{1}{2}\int_A \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}\right)dz\right] dA \tag{4}$$

با جایگذاری روابط (2) و (3) در (4) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق، انرژی کرنشی برابر خواهد شد با:

$$U_p = \frac{D}{2}\int_A \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu)\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] dA \tag{5}$$

که $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ سختی خمشی ورق است. انرژی پتانسیل جرم متحرک را می‌توان به صورت رابطه‌ی (6) نوشت.

$$U_M = -\int_A F(x,y,t)\, w \, dA \tag{6}$$

تابع بارگذاری مرتبط با جرم متحرک به صورت رابطه‌ی (7) بیان می‌شود.

$$F(x,y,t) = M\left(g - \frac{d^2 w}{dt^2}\right)\overline{\delta}(x - x_M)\overline{\delta}(y - y_M) \tag{7}$$

که $\overline{\delta}$ معرف تابع دلتای دیراک است و برای نشان دادن موقعیت جرم روی ورق استفاده شده است. با فرض تماس کامل جرم با ورق و در نظر گرفتنهمه‌ی ترم‌های اینرسی آن، مشتق‌های زمانی اول و دوم w به فرم روابط (8) و (9) گسترش می‌یابد.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w}{dt^2} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

با انجام مقداری عملیات جبری بر رابطه‌ی (9) و جایگذاری رابطه‌ی حاصل در (7)، در نهایت تابع بارگذاری برای مسیر مستقیم عبور جرم نتیجه می‌شود [12]:

$$F(x,y,t) = M\left(g - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2V\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - V^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\overline{\delta}(x - Vt)\,\overline{\delta}(y - b/2) \tag{10}$$

که ترم‌های $M\partial^2 w/\partial t^2$، $2M\,\partial^2 w/\partial x \partial t$ و $MV^2\,\partial^2 w/\partial x^2$ به ترتیب معرف نیروهای اینرسی، کریولیس و مرکزگرا هستند. انرژی پتانسیل بستر الاستیک به صورت رابطه‌ی (11) تعریف می‌شود.

$$U_W = \frac{1}{2}\int_A k_W w^2 \; dA \tag{11}$$

که k_W سختی بستر وینکلر است. همچنین، انرژی جنبشی ورق به فرم رابطه‌ی (12) بیان می‌شود.

$$K_p = \frac{1}{2}\int_A \rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \; dA \tag{12}$$

به منظور استخراج معادله حرکت سیستم، باید اصل همیلتون تعمیم‌یافته استفاده شود. اصل همیلتون متداول که در استخراج معادلات حرکت سیستم‌ها به کار گرفته می‌شود فقط برای سیستم‌های بسته (سیستم‌هایی که جرم ثابت دارند و ذرات تشکیل دهنده‌ی آن‌ها تغییر نمی‌کنند) معتبر است. برخلاف سیستم‌های بسته‌ی پایستار که در غیاب نیروهای ناپایستار انرژی آن‌ها ثابت است و تغییر نمی‌کند، برای سیستم‌های باز عدم حضور نیروهای ناپایستار لزوماً منجر به پایستاری انرژی نمی‌شود. بنابراین لازم و ضروری است که این اصل برای سیستم‌هایی که ذرات تشکیل دهنده‌ی آن‌ها با گذشت زمان تغییر می‌کند، تعمیم یابد. این مطلب به خصوص در مسایلی مانند عبور سیال از لوله‌های انتقال سیال و یا شلیک گلوله از لوله‌های سلاح مهم بوده و عدم توجه به ورود و خروج شار یا جرم به سیستم، منجر به بروز خطا در استخراج معادلات و در نتیجه تحلیل‌های ناصحیح و حصول نتایج غلط می‌شود. سیستم مورد بحث در این مقاله نیز در

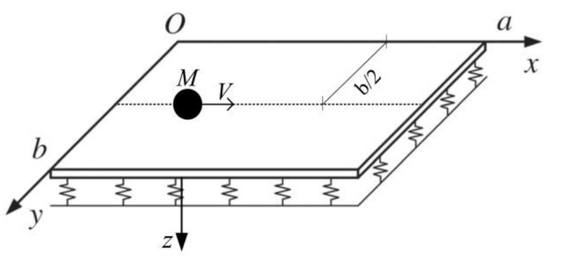


Fig. 1 A moving mass traveling along a straight path

شکل 1 جرم متحرک در حال حرکت در طول مسیری مستقیم

نتیجه‌ی ورود و خروج نوبه‌ای جرم‌ها بر روی ورق از دسته سیستم‌های با جرم متغیر خواهد بود. فرم کلی این اصل به صورت رابطه‌ی (13) قابل بیان است [20].

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L)_0\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta H\, dt = 0 \qquad \text{(13-الف)}$$

$$\delta H = \delta W + \iint_{B_0(t)} (\rho_m \vec{u}\cdot\delta\vec{r})(\vec{V}_B - \vec{u})\cdot\vec{n}\, ds \qquad \text{(13-ب)}$$

که $(L)_0 = \left(K_p - U_p - U_M - U_w\right)_0$ لاگرانژین سیستم با حجم کنترل باز و δW کار مجازی انجام شده روی این سیستم است. عبارت انتگرال در معادله‌ی (13-ب) را می‌توان به مثابه کار مجازی حاصل از ممنتوم شار عبوری (جرم‌های عبوری) از سطح باز $B_0(t)$ به حساب آورد. از آنجایی که در این پژوهش فرض بر این است که جرم‌های عبوری در طول مسیری مستقیم با سرعت ثابت موازی لبه‌های طولی ورق حرکت می‌کنند، بنابراین جرم متحرک در طول این مسیر جابجایی مجازی ندارد ($\delta W = 0$). سرعت جرم در ورود و خروج از سطح ورق برابر $\vec{u} = \dot{\vec{R}} + V\vec{t}$ است که $\vec{R}$ و $\vec{t}$ به ترتیب بردارهای جابجایی و مماس یکه در ابتدا و انتهای ورق هستند. همچنین، سرعت نسبی عبور از مرزهای سطوح برابر با $\left(\vec{u} - \vec{V}_B\right)\cdot\vec{n} = \pm V$ است. با این تفاسیر، رابطه‌ی (13-ب) را می‌توان به صورت رابطه‌ی (14) بیان کرد.

$$\delta H = 0 + \iint_{S_i(t)\cup S_e(t)} (\rho_m \vec{u}\cdot\delta\vec{r})(\vec{V}_B - \vec{u})\cdot\vec{n}\, ds = \left(-MV\left(\dot{\vec{R}} + V\vec{t}\right)\delta\vec{r}\right)\Big|_{x=0}^{x=a} \qquad (14)$$

که سمت راست رابطه‌ی (14) بیان‌گر انتقال ممنتوم مجازی در نتیجه‌ی جریان ترافیکی MV از سطح کنترل است. در این مقاله، برای لبه‌های ورود و خروج جرم روی سطح ورق نوعاً از تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار استفاده شده است. از آنجایی که جابجایی مجازی در این نوع تکیه‌گاه‌ها وجود ندارد ($\delta\vec{r} = 0$) لذا نتیجه‌ی رابطه‌ی (14) برابر صفر خواهد شد و نهایتاً رابطه‌ی (13) به صورت رابطه‌ی (15) ساده خواهد شد.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L)_0\, dt = 0 \qquad (15)$$

قابل ذکر است در مواردی که برای لبه‌ی ورود و/یا خروج جرم از روی ورق از تکیه‌گاه‌های آزاد استفاده می‌شود، برای جلوگیری از ایجاد خطا در تحلیل‌ها الزاماً باید رابطه‌ی (14) در معادلات حرکت لحاظ شود.

با جایگذاری روابط (5)، (6)، (11) و (12) در رابطه‌ی (15) و گرفتن تغییرات اول نسبت به w، نتیجه می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_A \Bigg[\rho h \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t} - D\Bigg\{(\nabla^2 w)\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right) + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right)\Bigg\} - k_{\mathrm{w}} w\delta w + F\bar{\delta}(x-Vt)\bar{\delta}(y-b/2)\delta w\Bigg] dA\, dt = 0 \qquad (16)$$

با انتگرال‌گیری از قسمت‌های مختلف معادله‌ی اخیر و نهایتاً قرار دادن ضرایب δw برابر صفر، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حرکت به صورت رابطه‌ی (17) استخراج می‌شود.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_{\mathrm{w}} w + M\left(-g + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2V\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\bar{\delta}(x-Vt)\bar{\delta}(y-b/2) = 0 \qquad (17)$$

که ∇^4 عملگر دیفرانسیلی بای‌هارمونیک است.

3- گسسته‌سازی معادله حرکت

یافتن تابع آزمایشی به عنوان تابع مقایسه‌ای که شرایط مرزی اساسی و طبیعی مسأله‌ی ورق-جرم متحرک را تأمین کند، دشوار است. از این رو، روش گالرکین به معادله دیفرانسیل پاره‌ای حرکت اعمال می‌شود [21]. بنابراین، تابع وزنی $\bar{w}$ برای تابع آزمایش w معرفی می‌شود و با ضرب طرفین رابطه‌ی (17) در تابع وزنی $\bar{w}$ و سپس انتگرال‌گیری از معادله‌ی حاصل روی سطح ورق، نتیجه می‌شود:

$$\int_A D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\bar{w} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\bar{w} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\bar{w}\right) dA + \int_A \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bar{w}\, dA + \int_A k_{\mathrm{w}} w\bar{w}\, dA + \int_A M\left(-g\bar{w} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bar{w} + V^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bar{w} + 2V\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\bar{w}\right)\bar{\delta}(x-Vt)\,\bar{\delta}(y-b/2)\, dA = 0 \qquad (18)$$

تابع آزمایشی برای جابجایی‌های عرضی ورق را می‌توان به صورت رابطه‌ی (19) تقریب زد.

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x,y) q_i(t) \qquad (19)$$

که N تعداد توابع پایه، $\phi_i(x,y)$ توابع مقایسه‌ای و $q_i(t)$ توابع وابسته به زمان ناشناخته هستند که محاسبه خواهند شد. لازم به ذکر است که $\phi_i(x,y)$ در این‌جا توابع شکل ورق می‌باشند و به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی مسأله را ارضا کنند. تابع وزنی مرتبط با تابع آزمایشی توسط رابطه‌ی (20) تقریب زده می‌شود.

$$\bar{w}(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x,y) \bar{q}_j(t) \qquad (20)$$

که $\bar{q}_j(t)$ توابع وابسته به زمان دلخواه می‌باشند. با جایگذاری معادلات (19) و (20) در معادله‌ی (18)، سپس استفاده از خاصیت تابع دلتای دیراک برای ترم‌های بارگذاری به صورت:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\bar{\delta}^{(n)}(x-x_0)\, dx = \begin{cases} (-1)^n p^{(n)}(x_0) & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (21)$$

که $\bar{\delta}^{(n)}(\ )$ بیانگر n-امین مشتق تابع دلتای دیراک می‌باشد، در نهایت با توجه به دلخواه و غیر صفر بودن $\bar{q}_j(t)$، معادله دیفرانسیل گسسته شده در فرم بردار-ماتریس به صورت رابطه‌ی (22) بدست می‌آید.

$$\mathrm{M}(t)\ddot{\vec{\mathrm{q}}}(t) + \mathrm{C}(t)\dot{\vec{\mathrm{q}}}(t) + \mathrm{K}(t)\vec{\mathrm{q}}(t) = \vec{\mathrm{F}}(t) \qquad (22)$$

که در آن $\vec{\mathrm{q}}(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots\}^{\mathrm{T}}$ بردار مختصه‌های مودال است. مولفه‌های ماتریس‌های ظاهر شده در رابطه‌ی (22) عبارتند از:

$$M_{ij} = \int_A \rho h \phi_i(x,y)\phi_j(x,y)\, dA + M\phi_i(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})\phi_j(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$$

$$C_{ij} = 2MV\frac{\partial \phi_i(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})}{\partial x}\phi_j(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$$

$$K_{ij} = D\int_A \frac{\partial^4 \phi_i(x,y)}{\partial x^4}\phi_j(x,y)\, dA + 2D\int_A \frac{\partial^4 \phi_i(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\phi_j(x,y)\, dA$$

$$
\begin{aligned}
&+D\int_A \frac{\partial^4\phi_i(x,y)}{\partial y^4}\phi_j(x,y)\,dA\\
&+\int_A k_{\mathrm{w}}\phi_i(x,y)\phi_j(x,y)\,dA\\
&+MV^2\frac{\partial^2\phi_i(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})}{\partial x^2}\phi_j(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})\\
&F_j = Mg\phi_j(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})
\end{aligned} \tag{23}
$$

قابل ذکر است که اگرچه ورق ذاتاً نامیرا در نظر گرفته شده است، اما به خاطر لحاظ کردن همه‌ی مولفه‌های شتاب جرم متحرک در معادلات حاکم، علاوه بر ماتریس جرم، ماتریس‌های متغیر با زمان میرایی (در اثر شتاب کوریولیس) و سختی (در اثر شتاب مرکزگرا) نیز در ضرایب معادله‌ی (22) ظاهر شده است.

4- تحلیل پایداری

بررسی ارتعاشات سیستم‌های ممتد مستلزم این است که براساس شرایط مرزی مسأله، توابع شکل و فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج شوند. این توابع برای ورق‌های مستطیلی نازک با شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی توسط لیسا [22] ارائه شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده در این مطالعه و توابع شکل مرتبط با آن‌ها از قرار زیر هستند:

SSSS: هر چهار لبه‌ی ورق تکیه‌گاه‌های ساده

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{24}$$

که m و n به ترتیب مودهای ارتعاشی در راستای طول و عرض ورق هستند.

CCCC: هر چهار لبه‌ی ورق تکیه‌گاه‌های گیردار

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\frac{2}{3\sqrt{ab}}\left(\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)-1\right)\left(\cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)-1\right) \tag{25}$$

SCSC: دو لبه‌ی طولی ورق تکیه‌گاه‌های گیردار و لبه‌های دیگر ساده

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{3ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\left(\cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)-1\right) \tag{26}$$

CSCS: دو لبه‌ی طولی ورق تکیه‌گاه‌های ساده و لبه‌های دیگر گیردار

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{3ab}}\left(\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)-1\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{27}$$

SFSF: دو لبه‌ی طولی ورق تکیه‌گاه‌های آزاد و لبه‌های دیگر ساده

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \tag{28}$$

CFCF: دو لبه‌ی طولی ورق تکیه‌گاه‌های آزاد و لبه‌های دیگر گیردار

توابع شکل در این حالت عبارتند از:

$$\phi_i(x,y)=\phi_{mn}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{3ab}}\left(\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)-1\right) \tag{29}$$

به عنوان نمونه، با جایگذاری رابطه‌ی (24) در (22) و در نظر گرفتن مود اول ارتعاشی، معادله دیفرانسیل حاکم بر مختصات مودال برای ورق با شرایط مرزی SSSS به شکل رابطه‌ی (30) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\left(1+4\frac{M}{\rho hab}\sin^2\left(\frac{\pi Vt}{a}\right)\right)\ddot{q}(t)\\
&+\left(8\frac{MV\pi}{\rho ha^2b}\sin\left(\frac{\pi Vt}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi Vt}{a}\right)\right)\dot{q}(t)\\
&+\left(\omega_1^2+\frac{k_{\mathrm{w}}}{\rho h}-4\frac{MV^2\pi^2}{\rho ha^3b}\sin^2\left(\frac{\pi Vt}{a}\right)\right)q(t)\\
&=\frac{2M}{\rho h\sqrt{ab}}g\sin\left(\frac{\pi Vt}{a}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

که $\omega_1=\sqrt{\pi^4D/\rho h}\,(1/a^2+1/b^2)$ فرکانس طبیعی مود اول ارتعاشی ورق است. استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در رابطه‌ی (31) به فرم

$$
\begin{aligned}
&\alpha\triangleq\frac{M}{\rho hab},\quad \beta\triangleq\frac{\pi V}{a\omega_1},\quad \tau\triangleq\beta\omega_1 t,\quad K^*\triangleq\frac{k_{\mathrm{w}}}{\rho h\omega_1^2}\\
&Q\triangleq\frac{q}{ab},\quad g^*\triangleq\frac{g}{\omega_1^2\sqrt{ab}}
\end{aligned} \tag{31}
$$

و استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای، معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم در فرم بی‌بعد به شکل رابطه‌ی (32) حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\beta^2(1+4\alpha\sin^2(\tau))Q''(\tau)+8\alpha\beta^2\sin(\tau)\cos(\tau)\,Q'(\tau)\\
&+(1+K^*-4\alpha\beta^2\sin^2(\tau))Q(\tau)=2\alpha g^*\sin(\tau)
\end{aligned} \tag{32}
$$

که بالانویس پرایم به معنای مشتق نسبت به زمان بی‌بعد τ است. تا زمانی که جرم روی سطح ورق در حرکت است، ضرایب معادله‌ی (32) با گذشت زمان تغییر می‌کنند. به محض اینکه جرم ورق را ترک کند عامل تحریک حذف می‌شود و معادله‌ی (32) به معادله‌ی ارتعاش آزاد ورق تبدیل می‌گردد. بنابراین، به منظور ایجاد تحریک از نوع پارامتریک باید مجموعه پیوسته‌ای از جرم‌ها باعث تحریک ورق شوند. در این مقاله، با در نظر گرفتن عبور مجموعه پیوسته‌ای از جرم‌های متحرک مشابه با فواصلی به اندازه‌ی طول ورق (وقتی یک جرم از انتهای ورق خارج می‌شود جرم بعدی روی آن وارد شده و با سرعت ثابت روی آن حرکت می‌کند) تحریکی پریودیک بر ورق اعمال می‌شود. در واقع با این فرض، ورق تحت عبور پیوسته و نوبه‌ای از جرم‌های متحرک با تناوب $\mathrm{T}=a/V$ قرار می‌گیرد. به منظور انعکاس این فرض در معادله‌ی حاکم، با نوشتن بسط فوریه‌ی ضرایب متغیر با زمان معادله‌ی (32)، نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\beta^2\big(1+2\alpha(1-\cos(2\tau))\big)Q''(\tau)+4\alpha\beta^2\sin(2\tau)\,Q'(\tau)\\
&+\big(1+K^*-2\alpha\beta^2(1-\cos(2\tau))\big)Q(\tau)\\
&=\frac{2\alpha g^*}{\beta^2}\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2k\tau)\right)
\end{aligned} \tag{33}
$$

در سیستم تحت تحریک پارامتریک مدنظر، نیروی گرانش ناشی از جرم-های عبوری تأثیری بر شرایط وقوع تشدید پارامتریک ندارد [16]. بنابراین، با صرف‌نظر کردن از آن، معادله همگن بی‌بعد حاکم بر سیستم متناوب با دوره تناوب $\mathrm{T}=\pi$ به صورت رابطه‌ی (34) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\beta^2\big(1+2\alpha(1-\cos(2\tau))\big)Q''(\tau)+4\alpha\beta^2\sin(2\tau)\,Q'(\tau)\\
&+\big(1+K^*-2\alpha\beta^2(1-\cos(2\tau))\big)Q(\tau)=0
\end{aligned} \tag{34}
$$

4-1- روش هارمونیک بالانس نموی

مطابق با تئوری فلاکه، برای سیستم‌هایی که معادله‌ی حاکم بر آن‌ها دارای ضرایب پریودیک با دوره تناوب T هستند، روی منحنی‌های گذار در فضای پارامترهای معادله، پاسخ‌های پریودیکی با دوره تناوب T و 2T وجود دارند که نواحی پایدار و ناپایدار را از هم جدا می‌کنند. بنابراین، به هر روشی که بتوان پاسخ‌های با دوره تناوب T و 2T معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله را یافت،

مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار مشخص خواهد شد. در این مقاله، با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی این مرزها در صفحه‌ی جرم-سرعت بار عبوری مشخص می‌شود. اگرچه روش‌های عددی مانند تئوری فلاکه دقت خوبی در تحلیل پایداری سیستم‌های پریودیک ارائه کرده‌اند، اما مطالعات نشان داده‌اند که روش‌های نیمه‌تحلیلی قادر به مشخص کردن پدیده‌های خاصی همچون پدیده‌ی پاسخ همزمان هستند که با روش‌های عددی نمی‌توان آن‌ها را توجیه کرد [23].

گام اول روش هارمونیک بالانس نموی، روند نمو است. اگر (α_0,β_0) به عنوان نقطه‌ی اولیه واقع بر مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار متناظر با پاسخ پریودیک $Q_0(\tau)$ باشد، نقطه‌ی مجاور را می‌توان با اضافه کردن نمو مرتبط به صورت رابطه‌ی (35) بیان کرد.

$$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha,\qquad \beta=\beta_0+\Delta\beta,$$
$$Q(\tau)=Q_0(\tau)+\Delta Q(\tau) \tag{35}$$

که $\Delta\alpha$ ، $\Delta\beta$ و $\Delta Q(\tau)$ نموهای کوچک هستند. با جایگذاری روابط (35) در رابطه‌ی (34) و با صرف‌نظر از ترم‌های غیرخطی نموهای کوچک، معادله نموی خطی به فرم رابطه‌ی (36) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\beta_0^2\big(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau))\big)\Delta Q''+4\alpha_0\beta_0^2\sin(2\tau)\,\Delta Q'\\&+\Big(1+K^*-2\alpha_0\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\Big)\Delta Q\\&=R-\big(2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))Q_0''+4\beta_0^2\sin(2\tau)Q_0'\\&-2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))Q_0\big)\Delta\alpha\\&-\big(2\beta_0(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau)))Q_0''+8\alpha_0\beta_0\sin(2\tau)Q_0'\\&-4\alpha_0\beta_0(1-\cos(2\tau))Q_0\big)\Delta\beta\end{aligned} \tag{36}$$

که در آن

$$\begin{aligned}R=&-\big(\beta_0^2(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau)))Q_0''+4\alpha_0\beta_0^2\sin(2\tau)Q_0'\\&+\Big(1+K^*-2\alpha_0\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\Big)Q_0\big)\end{aligned} \tag{37}$$

R عبارت باقیمانده است که به ازای نقاط متعلق به مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار به صفر نزدیک می‌شود.

گام دوم روش هارمونیک بالانس نموی، روند هارمونیک بالانس است. در این گام به منظور یافتن جواب‌های پریودیک معادله‌ی (34)، با گسترش Q_0 و ΔQ به سری‌های فوریه‌ی محدود و اعمال روش گالرکین، جواب‌های پریودیک به‌دست آورده می‌شوند. پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب T را می‌توان به صورت رابطه‌ی (38) بیان نمود.

$$Q_0(\tau)=\sum_{p=0,2,4,\dots}\big[a_p\cos(p\tau)+b_p\sin(p\tau)\big]=\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{even}}\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{even}}$$
$$\Delta Q_0(\tau)=\sum_{p=0,2,4,\dots}\big[\Delta a_p\cos(p\tau)+\Delta b_p\sin(p\tau)\big]=\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{even}}\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}_{\mathrm{even}} \tag{38}$$

که در آن

$$\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{even}}=[1,\cos(2\tau),\cos(4\tau),\dots,\sin(2\tau),\sin(4\tau),\dots]$$
$$\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{even}}=[a_0,a_2,a_4,\dots,b_2,b_4,\dots]^{\mathrm{T}}$$
$$\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}_{\mathrm{even}}=[\Delta a_0,\Delta a_2,\Delta a_4,\dots,\Delta b_2,\Delta b_4,\dots]^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

همچنین برای پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب 2T، Q_0 و ΔQ_0 به فرم رابطه‌ی (40) فرض می‌شوند.

$$Q_0(\tau)=\sum_{p=1,3,5,\dots}\big[a_p\cos(p\tau)+b_p\sin(p\tau)\big]=\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{odd}}\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{odd}}$$
$$\Delta Q_0(\tau)=\sum_{p=1,3,5,\dots}\big[\Delta a_p\cos(p\tau)+\Delta b_p\sin(p\tau)\big]=\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{odd}}\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}_{\mathrm{odd}} \tag{40}$$

که در آن

$$\vec{\mathrm{T}}_{\mathrm{odd}}=[\cos(\tau),\cos(3\tau),\cos(5\tau)\dots,\sin(\tau),\sin(3\tau),\dots]$$
$$\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{odd}}=[a_1,a_3,a_5,\dots,b_1,b_3,\dots]^{\mathrm{T}}$$
$$\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}_{\mathrm{odd}}=[\Delta a_1,\Delta a_3,\Delta a_5,\dots,\Delta b_1,\Delta b_3,\dots]^{\mathrm{T}} \tag{41}$$

با اعمال روش گالرکین بر معادله‌ی (36) برای یک دوره تناوب، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\delta(\Delta Q)^{\mathrm{T}}\Big[\beta_0^2\big(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau))\big)\Delta Q''\\&+4\alpha_0\beta_0^2\sin(2\tau)\,\Delta Q'\\&+\Big(1+K^*-2\alpha_0\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\Big)\Delta Q\Big]d\tau\\&=\int_0^{\pi}\delta(\Delta Q)^{\mathrm{T}}\Big[R-\big(2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))Q_0''+4\beta_0^2\sin(2\tau)Q_0'\\&-2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))Q_0\big)\Delta\alpha\\&-\big(2\beta_0(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau)))Q_0''+8\alpha_0\beta_0\sin(2\tau)Q_0'\\&-4\alpha_0\beta_0(1-\cos(2\tau))Q_0\big)\Delta\beta\Big]d\tau\end{aligned} \tag{42}$$

با جایگذاری فرم فشرده‌ی (38) یا (40) در (42) و براساس ویژگی‌های تغییرات، مجموعه‌ای از معادلات خطی از ترم‌های $\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}$، $\Delta\alpha$ و $\Delta\beta$ به فرم رابطه‌ی (43) حاصل می‌شود.

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{A}}\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}+\mathrm{S}_{\Delta\alpha}\Delta\alpha+\mathrm{S}_{\Delta\beta}\Delta\beta=\mathrm{R} \tag{43}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{\Delta A}=&\int_0^{\pi}\vec{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\Big[\beta_0^2\big(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau))\big)\vec{\mathrm{T}}''\\&+4\alpha_0\beta_0^2\sin(2\tau)\vec{\mathrm{T}}'\\&+\Big(1+K^*-2\alpha_0\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\Big)\vec{\mathrm{T}}\Big]d\tau\\\mathrm{S}_{\Delta\alpha}=&\int_0^{\pi}\vec{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\Big[2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\vec{\mathrm{T}}''+4\beta_0^2\sin(2\tau)\vec{\mathrm{T}}'\\&-2\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\vec{\mathrm{T}}\Big]\vec{\mathrm{A}}\,d\tau\\\mathrm{S}_{\Delta\beta}=&\int_0^{\pi}\vec{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\Big[2\beta_0\big(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau))\big)\vec{\mathrm{T}}''\\&+8\alpha_0\beta_0\sin(2\tau)\vec{\mathrm{T}}'-4\alpha_0\beta_0(1-\cos(2\tau))\vec{\mathrm{T}}\Big]\vec{\mathrm{A}}\,d\tau\\\mathrm{R}=&-\int_0^{\pi}\vec{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\Big[\beta_0^2\big(1+2\alpha_0(1-\cos(2\tau))\big)\vec{\mathrm{T}}''\\&+4\alpha_0\beta_0^2\sin(2\tau)\vec{\mathrm{T}}'\\&+\Big(1+K^*-2\alpha_0\beta_0^2(1-\cos(2\tau))\Big)\vec{\mathrm{T}}\Big]\vec{\mathrm{A}}\,d\tau\end{aligned} \tag{44}$$

معادله‌ی (43) معادله‌ای است که برای بدست آوردن مرزهای ناپایداری برای ترم‌های $\vec{\mathrm{A}}$ ، α_0 و β_0 استفاده می‌شود. این معادله در حقیقت یک معادله‌ی غیرخطی برحسب این کمیت‌ها است. به جای حل این معادلات غیرخطی معادلاتی که برحسب $\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}$، $\Delta\alpha$ و $\Delta\beta$ خطی هستند، در یک الگوریتم بازگشتی حل می‌شوند. از آنجایی که تعداد متغیرهای مجهول از تعداد معادلات دو تا بیشتر است، برای برابر شدن تعداد معادلات و مجهولات، بدون کاهش کلیت حل مسأله، یک المان $\vec{\mathrm{A}}$ برابر یک و نمو متناظر آن در $\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین با انتخاب α به عنوان پارامتر معلوم در روند حل، $\Delta\alpha$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. حال در معادله‌ی (43)، تعداد معادلات و مجهولات برابر شده و قابل حل است. الگوریتم بازگشتی استفاده شده به شرح زیر است:

1- مقدار ابتدایی برای β_0 و $\vec{\mathrm{A}}$ را انتخاب کنید.

2- معادله‌ی خطی (45) را حل کنید.

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathrm{S}}_{\Delta\mathrm{A}} & \mathrm{S}_{\Delta\beta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\tilde{\mathrm{A}}\\ \Delta\beta\end{Bmatrix}=\mathrm{R} \tag{45}$$

که در آن $\tilde{\mathrm{S}}_{\Delta A}$ تغییر شکل یافته‌ی $\mathrm{S}_{\Delta A}$ با حذف کردن i-امین ستون

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.48.4]

آن و $\Delta\tilde{A}$ تغییر شکل یافته‌ی بردار $\overline{\Delta A}$ با حذف کردن i-امین المان آن است.

3- همگرایی پاسخ را با بررسی برقراری رابطه‌ی $\|R\| \leq \varepsilon$ بررسی کنید. ε پارامتر خیلی کوچک است که به عنوان پارامتر همگرایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

4- β_0 و $\vec{A}$ را با استفاده از روابط $\beta_0^{new} = \beta_0 + \Delta\beta$ و $\vec{A}^{new} = \vec{A} + \overline{\Delta A}$ به روز کنید و اگر همگرایی حاصل نشد روند را از مرحله‌ی 2 تکرار کنید.

5- مقدار جدیدی برای α_0 انتخاب کنید و گام‌های 1 تا 5 را برای تعیین مقادیر β_0 و $\vec{A}$ متناظر تکرار کنید.

روش هارمونیک بالانس نموی در حقیقت آن دسته از پارامترهای جرم عبوری در صفحه‌ی $\alpha - \beta$ را مشخص می‌کند که منجر به حصول پاسخ پریودیکی برای معادله‌ی (34) می‌شود. منحنی مرزی متناظر با پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب T برای ورق مستطیلی نازک بدون بستر الاستیک، با شرایط مرزی SSSS تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک در طول مسیر مستقیم، در "شکل 2" رسم شده است. ناحیه‌ی هاشور خورده ناحیه‌ی ناپایدار و ناحیه‌ی سفید ناحیه‌ی پایدار است. در این تحلیل پارامتر همگرایی به صورت $\varepsilon = 10^{-5}$ در نظر گرفته شده است. واضح است که هرچه تعداد جملات هارمونیک بیشتری از سری‌های فوریه ارائه شده در روابط (38) یا (40) در تحلیل لحاظ شود، دقت منحنی حاصل نیز افزایش می‌یابد. همانطور که در "شکل 2" نمایش داده شده است، نتایج حاصل از سه ترم هارمونیک و چهار ترم هارمونیک در تحلیل، همگرا شده است. با اجرای مجدد الگوریتم روش هارمونیک بالانس نموی برای پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب 2T، منحنی دیگری در صفحه‌ی پارامترها ظاهـر شده است. این منحنی در "شکل 3" با خطوط منقطع نمایش داده شده است. براساس مفهوم تئوری فلاکه، این منحنی باید جدا کننده‌ی نواحی پایدار و ناپایدار در فضای پارامترهای مسأله باشد، در صورتی که شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده برای پارامترهای انتخابی از دو طرف این منحنی، پاسخ پایدار را نتیجه می‌دهد. این منحنی بیان‌گر وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان است. در این پدیده، دو منحنی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایداری در صفحه‌ی پارامترهای سیستم کاملاً بر یکدیگر منطبق شده و یک زبانه‌ی ناپایدار بسته و پنهان را تشکیل می‌دهند. وقوع این پدیده برای سیستم تیر-جرم متحرک و اهمیت آگاهی از آن توسط کریم‌پور و همکاران [18] بحث و بررسی شده است. از "شکل 3" می‌توان مشاهده کرد که سرعت و جرم بارهای عبوری بر پایداری ارتعاشات ورق تأثیر گذار است. اگر نسبت جرم بارهای عبوری به جرم سازه‌ی بستر (α) بسیار

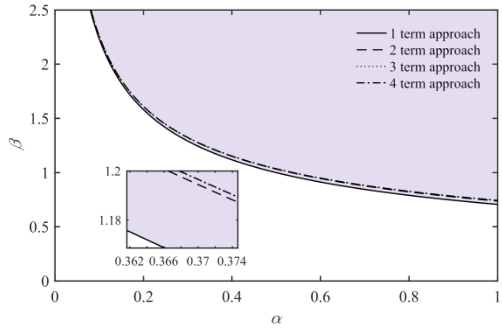


Fig. 2 Boundary curve corresponding to T-periodic solution for plate with SSSS boundary conditions

شکل 2 منحنی مرزی متناظر با پاسخ پریودیک با تناوب T برای ورق با شرایط مرزی SSSS

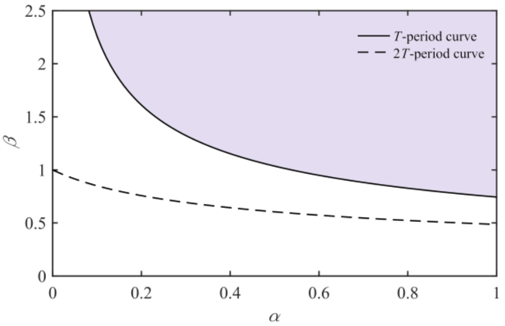


Fig. 3 Boundary curve corresponding to T and 2T-periodic solution for plate with SSSS boundary conditions

شکل 3 منحنی مرزی متناظر با پاسخ پریودیک با تناوب T و 2T برای ورق با شرایط مرزی SSSS

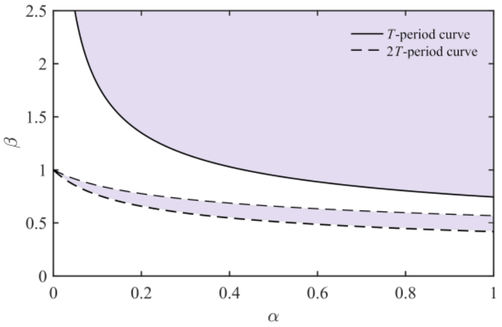
کوچک باشد، ارتعاش ورق برای مقادیر بسیار بالایی از سرعت بارهای عبوری، ناپایدار خواهد شد. با این حال، هرچه α افزایش پیدا کند، ناپایداری به ازای سرعت‌های کمتری از بارهای عبوری اتفاق می‌افتد.

از آنجایی که بررسی تأثیر شرایط مرزی بر رفتار دینامیکی سازه‌ها دارای اهمیت بالایی می‌باشد، در این مقاله، حساسیت پایداری دینامیکی ورق حامل جرم‌های متحرک به شرایط مرزی بررسی شده است. با اجرای الگویی مشابه آنچه برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده انجام شد، صفحه پایداری برای ورق بدون بستر الاستیک و با شرایط مرزی CCCC، SCSC، CSCS، SFSF و CFCF استخراج شد ("شکل 4").

از "شکل 4" می‌توان دریافت که شرایط مرزی تأثیر زیادی بر پایداری دینامیکی دارد که در کاربردهای مهندسی نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. همان‌طور که در "شکل 4-الف" نشان داده شده است در ورق با شرایط مرزی CCCC نسبت به ورق با شرایط مرزی SSSS ("شکل 3" دیده شود)، علاوه بر اینکه وسعت ناحیه‌ی ناپایدار مقدار کمی افزایش پیدا کرده است، زبانه‌ی ناپایداری که شروع آن $\beta = 1$ می‌باشد، به‌وجود آمده است.

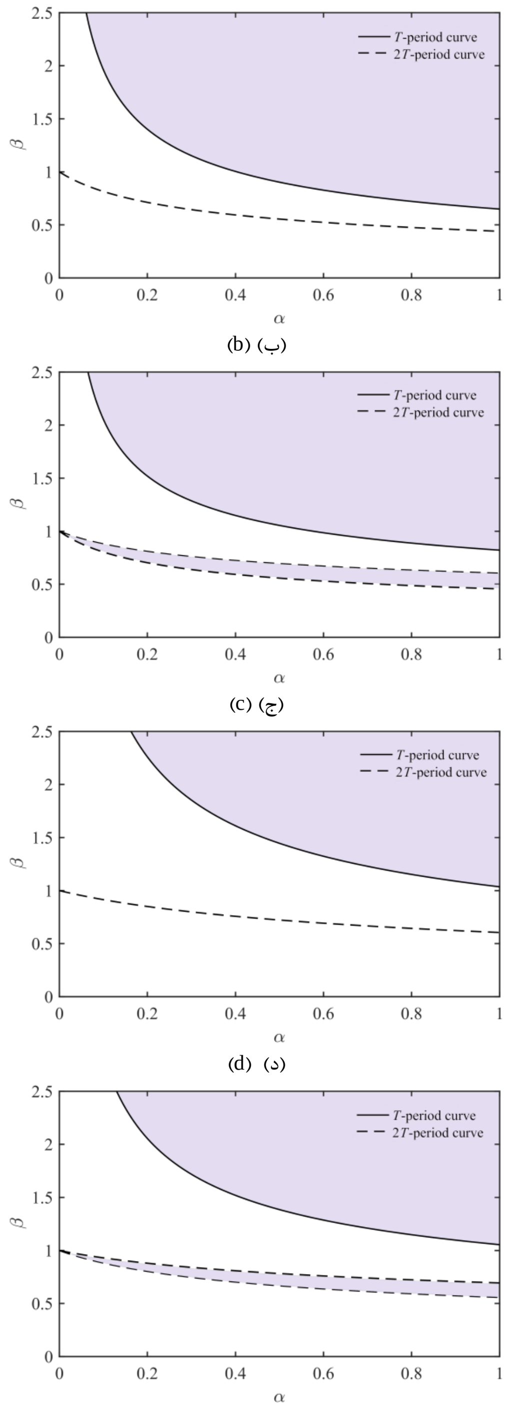
با مقایسه‌ی "شکل‌های 4-ب و 4-ج" واضح است که برای ورق با شرایط مرزی SCSC، دو منحنی متناظر با پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب 2T کاملاً بر یکدیگر منطبق شده و در نتیجه‌ی آن پدیده‌ی پاسخ همزمان اتفاق افتاده است، در حالی‌که برای ورق با شرایط مرزی CSCS این دو منحنی بر یکدیگر واقع نبوده و زبانه‌ی ناپایدار نسبتاً وسیعی در صفحه‌ی پارامترها تشکیل داده‌اند.

صفحه پایداری مرتبط با شرایط مرزی SFSF در "شکل 4-د" نمایش داده شده است. از آن‌جایی که معادله بی‌بعد حاکم بر ورق با شرایط مرزی SFSF تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک در طول مسیر مستقیم، مشابه معادله‌ی حاکم بر تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده در معرض عبور



(a) (الف)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.48.4]



(b) (ب)

(c) (ج)

(d) (د)

(e) (ه)

Fig. 4 Stable and unstable zones in parameters plane for plate with (a) CCCC, (b) SCSC, (c) CSCS, (d) SFSF and (e) CFCF boundary conditions

شکل 4 نواحی پایدار و ناپایدار صفحه پارامترها برای ورق با شرایط مرزی (الف) CCCC، (ب) SCSC، (ج) CSCS، (د) SFSF و (ه) CFCF.

متوالی جرم‌های متحرک می‌باشد، بنابراین انتظار می‌رود که شرایط وقوع تشدید پارامتریک در این دو سیستم، برابر باشد. منحنی متناظر با پاسخ‌های پریودیک با دوره تناوب T و همچنین منحنی پاسخ همزمان که در "شکل 4-د" نمایش داده شده است، مطابقت خوبی با منحنی‌های مشابه در مرجع [18] دارند. قابل ذکر است که در میان نتایج ارائه شده در "شکل 4"، ورق با شرایط مرزی SFSF وسیع‌ترین ناحیه‌ی پایدار را به خود اختصاص داده است.

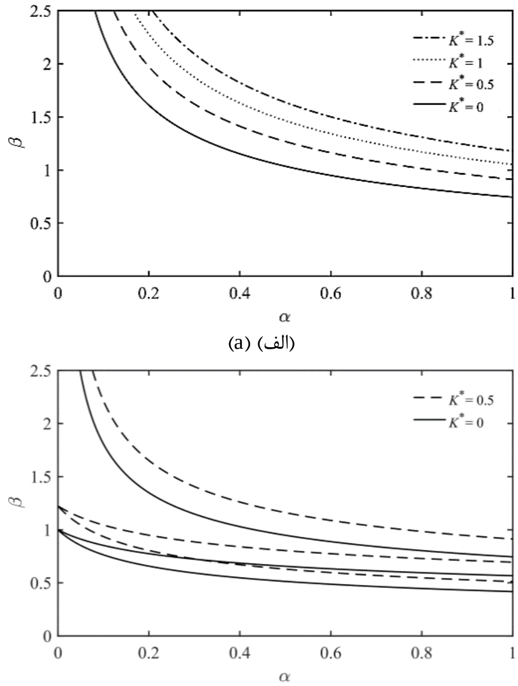
"شکل 4-ه" نشان می‌دهد که برای شرایط مرزی CFCF اگرچه منحنی مرتبط با پاسخ‌های با دوره تناوب T نسبت به همان منحنی در شرایط مرزی SFSF تغییر بسیار اندکی داشته، اما زبانه‌ای ناپایدار برای شرایط مرزی CFCF بوجود آمده است که نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. به عنوان قاعده‌ای کلی، استفاده از تکیه‌گاه‌های ساده برای لبه‌های ورود و خروج جرم منجر به وقوع پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان شده است. این در حالی است که استفاده از تکیه‌گاه‌های گیردار برای این لبه‌ها، منجر به بوجود آمدن زبانه‌ایناپایدار در ناحیه‌ی پایدار صفحه‌ی پارامترها شده است. علاوه بر این، از آنجایی که شرایط مرزی SFSF و CFCF کاربرد وسیعی در پل‌ها دارند، براساس نتایج می‌توان بیان کرد که استفاده از تکیه‌گاه‌های ساده در این قبیل سازه‌ها قابلیت اطمینان بالاتری نسبت به تکیه‌گاه‌های گیردار در بحث پایداری دینامیکی دارند.

4-1-1- تأثیر بستر الاستیک بر پایداری دینامیکی

در "شکل 5"، تأثیر سختی بستر الاستیک (K^*) بر نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود سختی بستر الاستیک تأثیری مثبت بر نواحی پایدار دارد و با افزایش مقدار آن وسعت نواحی ناپایدار برای تمامی شرایط مرزی کاهش یافته و در نتیجه ورق به ازای مقادیر بیشتری از جرم و سرعت بارهای عبوری پایدار است. همچنین "شکل 5-الف" نشان می‌دهد که با افزایش ضریب سختی بستر، برای یک جرم مشخص بار عبوری، ناپایداری در سرعت بالاتری اتفاق می‌افتد.

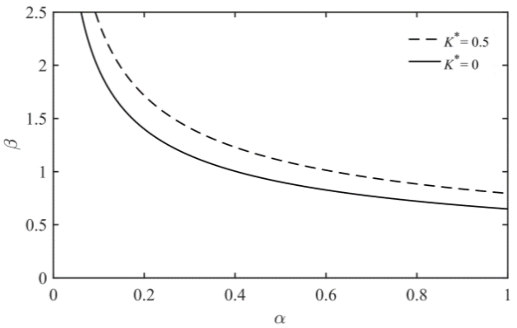
4-2- شبیه‌سازی‌های عددی

مطابق تئوری پایداری لیاپانوف، پاسخ دینامیکی زمانی پایدار است که حل معادله‌ی حاکم بر سیستم با گذشت زمان، در دامنه‌ای مشخص و محدود نوسان کند. در مطالعه‌ی حاضر هرگاه با گذشت زمان، دامنه‌ی ارتعاش ورق به طور بی‌رویه افزایش یابد و واگرایی در پاسخ دینامیکی حاصل شود، گوییم که

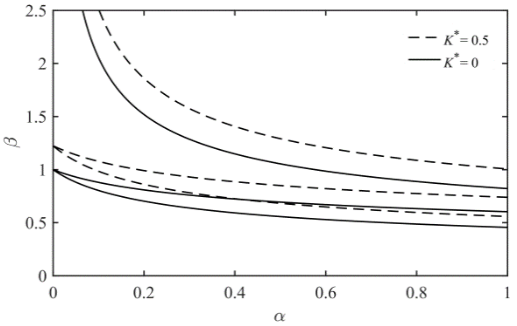


(a) (الف)

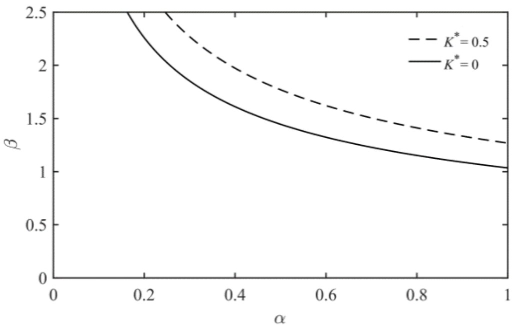
(b) (ب)



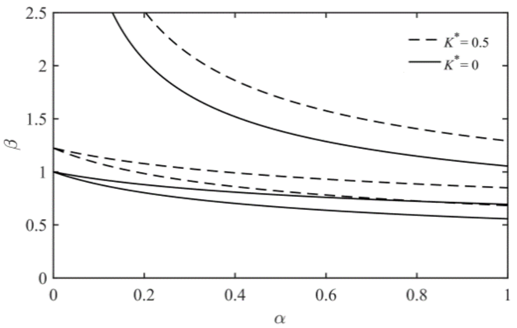
(c) (ج)



(d) (د)



(e) (ه)



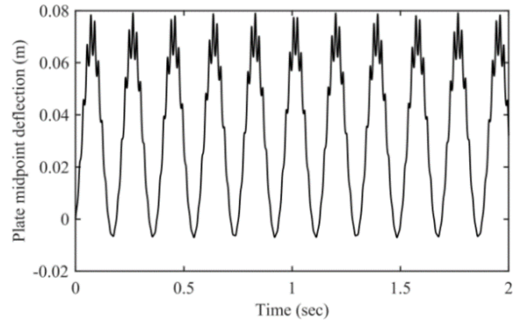
(f) (و)

Fig. 5 Effect of foundation stiffness on plate stability diagram for (a) SSSS, (b) CCCC, (c) SCSC, (d) CSCS, (e) SFSF and (f) CFCF boundary conditions

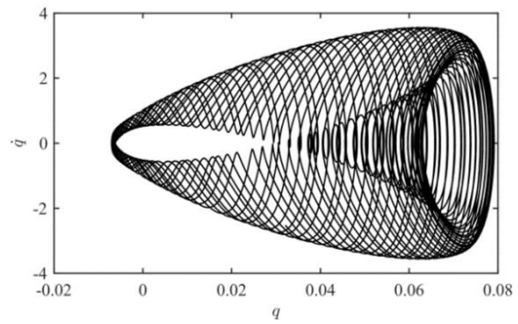
شکل 5 تأثیر سختی بستر الاستیک بر دیاگرام پایداری ورق برای شرایط مرزی (الف) SSSS، (ب) CCCC، (ج) SCSC، (د) CSCS، (ه) SFSF و (و) CFCF

سیستم به سمت ناپایداری میل کرده است. از اینرو، در این بخش به منظور بررسی صحت و دقت نواحی حاصل، با حل عددی معادلات حاکم به کمک روش رانگ-کوتا مرتبه چهار با شرایط اولیه‌ی $q(0)=0$ و $\dot{q}(0)=1$ برای پارامترهای متعلق به این نواحی، تاریخچه زمانی و مسیر فاز ارتعاش نقطه میانی ورق $\left(w(0.5a,0.5b,t)=\phi_1(0.5a,0.5b)q_1(t)\right)$، محاسبه و ترسیم شده است. در این شبیه‌سازی‌ها یک ورق مستطیلی فولادی به طول 10m، عرض 5m، ضخامت 20cm، مدول یانگ 200×10^9Pa، ضریب پواسون 0.3 و جرم واحد حجم $7850\ \mathrm{Kg/m^3}$ در نظر گرفته شده است.

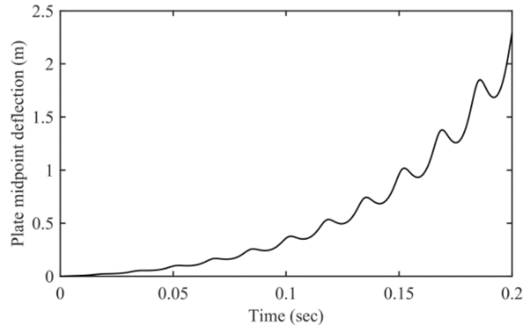
شبیه‌سازی‌ها برای ورق با شرایط مرزی SSSS، در "شکل 6" نمایش داده شده است. اولین نقطه $(\alpha=0.35,\beta=1.2)$ از ناحیه‌ی پایدار در مجاورت مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار، انتخاب شده و تاریخچه زمانی و مسیر فاز مرتبط با این نقطه در "شکل‌های 6-الف و 6-ب" ترسیم شده است. مطابق این شکل‌ها، پاسخ زمانی و مسیر فاز نقطه میانی ورق با گذشت زمان محدود می‌باشد و در نتیجه ورق برای پارامترهای انتخابی رفتاری پایدار مطابق پیش‌بینی از خود نشان می‌دهد. "شکل‌های 6-ج و 6-د" تاریخچه زمانی و مسیر فاز مرتبط با نقطه $(\alpha=0.35,\beta=1.3)$ واقع بر ناحیه‌ی ناپایدار در مجاورت مرز را نشان می‌دهد. بر اساس این شکل‌ها، دامنه‌ی نوسانات ورق برای پارامترهای جرم و سرعت انتخابی، به صورت نمایی و غیرنوسانی افزایش یافته است و ورق رفتاری ناپایدار را تجربه می‌کند. از آنجایی که پاسخ دینامیکی ورق به ازای پارامترهای متعلق به منحنی‌های گذار از صفحه‌ی پارامترها الزاماً باید محدود و پریودیک باشد، تاریخچه زمانی و مسیر فاز مرتبط با نقطه‌ی $(\alpha=0.35,\beta=0.6669)$ برگرفته از منحنی پاسخ همزمان که در "شکل‌های 6-ه و 6-و" نمایش داده شده است، صحت این منحنی را اثبات می‌کند. در "شکل 6-ه"، پاسخ‌های زمانی عددی و نیمه‌تحلیلی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که تطابق خوبی



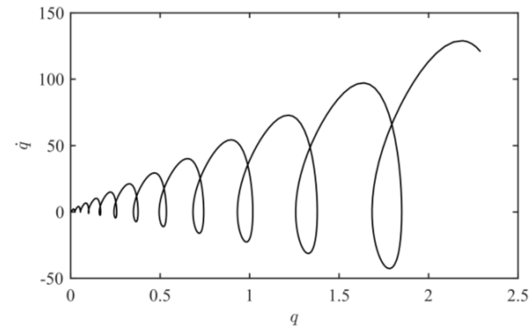
(a) (الف)



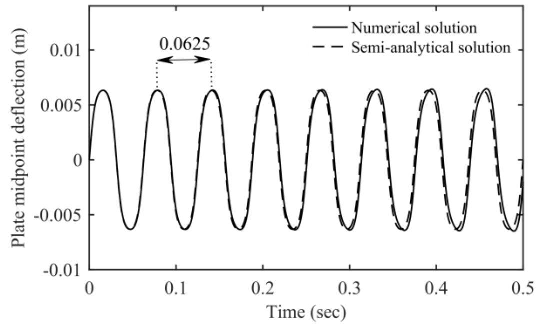
(b) (ب)



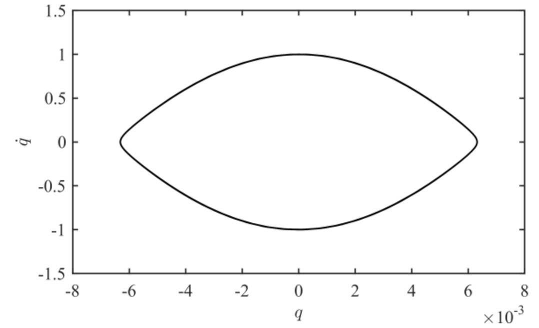
(c) (ج)



(d) (د)



(e) (ه)



(f) (و)

Fig. 6 Time history and phase trajectory corresponding to SSSS boundary condition for parameters (a), (b) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.2$) belonging to stable zone, (c), (d) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.3$) blonging to unstable zone and (e), (f) ($\alpha = 0.35, \beta = 0.6669$) blonging to coexistence curve

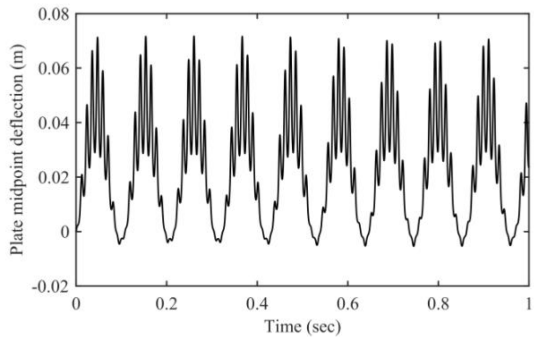
شکل 6 تاریخچه زمانی و مسیر فاز مربوط به شرط مرزی SSSS برای پارامترهای (الف) و (ب) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.2$) متعلق به ناحیه‌ی پایدار، (ج) و (د) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.3$) متعلق به ناحیه‌ی ناپایدار و (ه) و (و) ($\alpha = 0.35, \beta = 0.6669$) متعلق به منحنی پاسخ همزمان

بین روش‌های عددی و هارمونیک بالانس نموی وجود دارد. علاوه بر این، با توجه به "شکل 6-ه"، دوره تناوب نوسانات تقریباً برابر 0.0625 ثانیه است و نزدیک به دو برابر تناوب عبور جرم‌ها می‌باشد که توسط رابطه‌ی (46) محاسبه شده است.

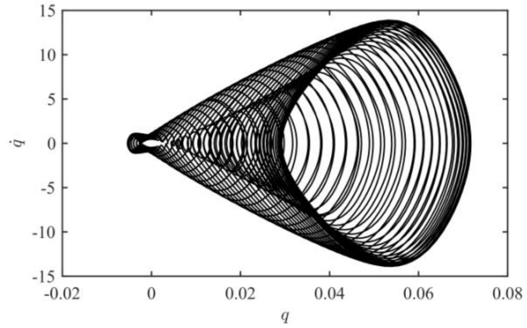
$$\frac{2a}{V} = \frac{2\pi}{\beta\omega_1} = \frac{2\pi}{\beta\pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right)} = 0.06248 \qquad (46)$$

"شکل 7" نتایج مربوط به شرایط مرزی CCCC را نشان می‌دهد. تاریخچه زمانی و مسیر فاز برای نقطه‌ی ($\alpha = 0.6, \beta = 0.85$) برگرفته از ناحیه‌ی پایدار و در نزدیکی مرز، در "شکل‌های 7-الف و ب" رسم شده است. مطابق این شکل‌ها، پاسخ محدود و نوسانی است. نتایج مرتبط با نقاط ($\alpha = 0.35, \beta = 1.2$) و ($\alpha = 0.35, \beta = 0.6669$) که به ترتیب متعلق به ناحیه‌ی ناپایدار و زبانه‌ی ناپایدار هستند، در "شکل‌های 7-ج تا 7-و" نمایش داده شده است. این دو نقطه، شامل پارامترهایی هستند که در ورق با تکیه‌گاه‌های ساده، منجر به ارتعاش پایدار شده‌اند، اما در ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار باعث رشد بی‌رویه دامنه‌ی ارتعاش ورق شده است. این تغییر واضح در رفتار دینامیکی حاکی از اهمیت بالای شرایط مرزی در طراحی این قبیل سیستم‌ها می‌باشد.

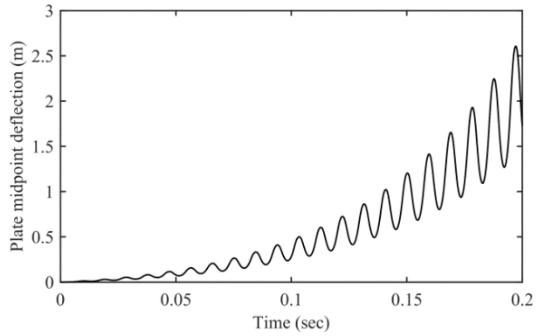
شبیه‌سازی‌های عددی که تا به این‌جا انجام شد برای ورق بدون بستر الاستیک ($k_{\mathrm{w}} = 0$) است. حال به منظور بررسی تأثیر سختی بستر الاستیک بر پایداری پاسخ سیستم، شبیه‌سازی‌های عددی برای نقاطی که در "شکل‌های 6 و 7" منجر به پاسخی ناپایدار شده‌اند، مجدداً با فرض



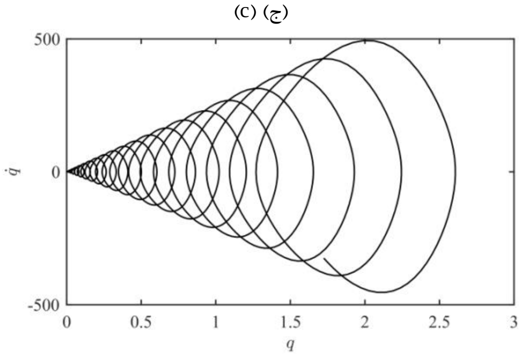
(a) (الف)



(b) (ب)

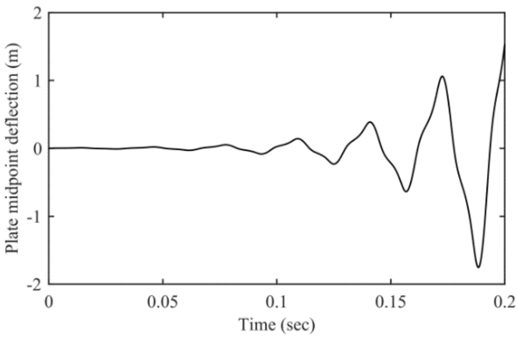


(c) (ج)

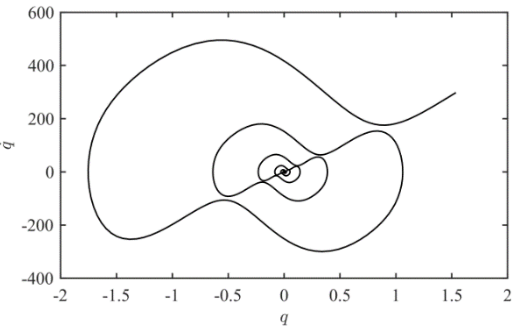


(d) (د)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.48.4]



(e) (ه)



(f) (و)

Fig. 7 Time history and phase corresponding to CCCC boundary condition for parameters (a), (b) ($\alpha = 0.6, \beta = 0.85$) belonging to stable zone, (c), (d) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.2$) blonging to unstable zone and (e), (f) ($\alpha = 0.35, \beta = 0.6669$) blonging to instability tongue.

شکل 7 تاریخچه زمانی و مسیر فاز مربوط به شرط مرزی CCCC برای پارامترهای (الف) و (ب) ($\alpha = 0.6, \beta = 0.85$) متعلق به ناحیه‌ی پایدار، (ج) و (د) ($\alpha = 0.35, \beta = 1.2$) متعلق به ناحیه‌ی ناپایدار و (ه) و (و) ($\alpha = 0.35, \beta = 0.6669$) متعلق به زبانه‌ی ناپایدار

$k_{\mathrm{w}} = 2.5 \times 10^9\ \mathrm{N/m^3}$، انجام شده است. همان‌طور که در "شکل‌های 8 و 9" مشاهده می‌شود، لحاظ کردن سختی بستر الاستیک در تحلیل‌های عددی باعث پایدار شدن پاسخ شده است.

5- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، وقوع تشدید پارامتریک در ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی تحت عبور مجموعه پیوسته‌ای از جرم‌های متحرک بررسی شد. ورق با استفاده از تئوری کیرشهف مدل‌سازی شد. در ابتدا معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت عرضی ورق با در نظر گرفتن مسیری مستقیم برای حرکت جرم روی آن با استفاده از اصل همیلتون و بدون هیچ‌گونه محدودیتی برای شرایط مرزی، استخراج شد. همه‌ی مولفه‌های شتاب جرم متحرک در معادله‌ی حاکم لحاظ شد. این معادله با اعمال روش گالرکین گسسته‌سازی شد. عبور متناوب جرم‌های متحرک در این نوع مسیر منجر به حصول معادلاتی با ضرایب متغیر با زمان و پریودیک گردید. با بکارگیری روش نیمه‌تحلیلی هارمونیک بالانس نموی، نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری برای شرایط مرزی مختلف ورق ارائه شد. با محاسبه‌ی عددی تاریخچه زمانی و مسیر فاز نقطه میانی ورق به ازای پارامترهای مختلف متعلق به نواحی پارامتریک، صحت و دقت نتایج نیمه‌تحلیلی تأیید گردید. نتایج به‌دست آمده از این پژوهش را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

1- شرایط مرزی نقش بسیار مهمی در پایداری دینامیکی ورق مستطیلی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک ایفا می‌کند که در کاربردهای مرتبط نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

2- استفاده از تکیه‌گاه‌های گیردار برای لبه‌های ورود و خروج جرم، منجر به بوجود آمدن زبانه‌ای ناپایدار در صفحه‌ی پارامترها می‌شود. این در حالی است که استفاده از تکیه‌گاه‌های ساده برای این لبه‌ها، باعث وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان می‌شود که در نتیجه‌ی آن زبانه‌ی ناپایدار واقع در ناحیه‌ی پایدار بسته و پنهان می‌شوند.

3- افزایش سختی بستر الاستیک تأثیری مثبت بر نواحی پایدار دارد به

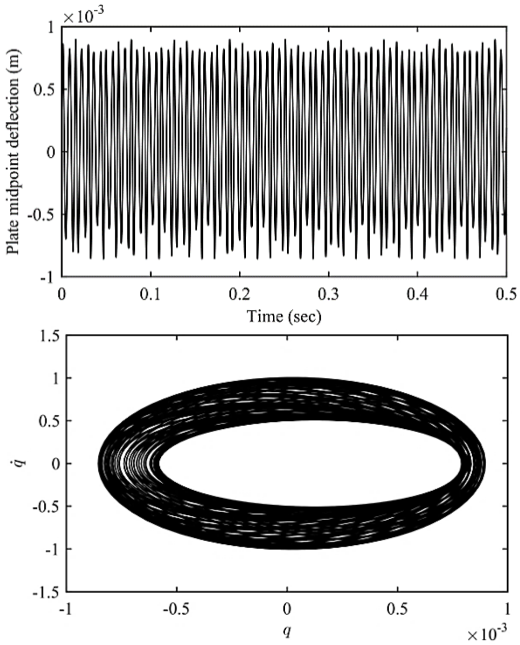
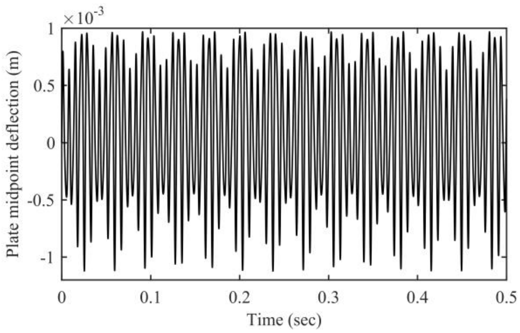
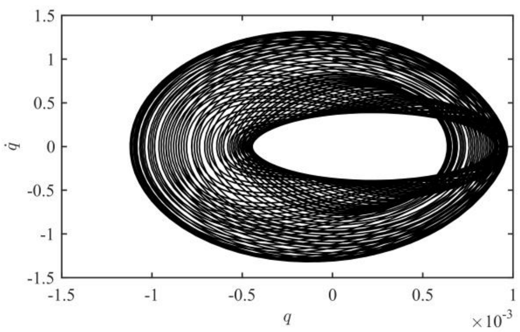


Fig. 8 Time history and phase trajectory corresponding to SSSS boundary condition for parameters $k_{\mathrm{w}} = 2.5 \times 10^9$ and ($\alpha = 0.35, \beta = 1.3$)

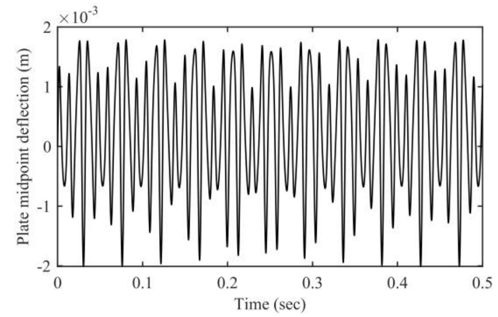
شکل 8 تاریخچه زمانی و مسیر فاز مربوط به شرط مرزی SSSS برای پارامترهای $k_{\mathrm{w}} = 2.5 \times 10^9$ و ($\alpha = 0.35, \beta = 1.3$)



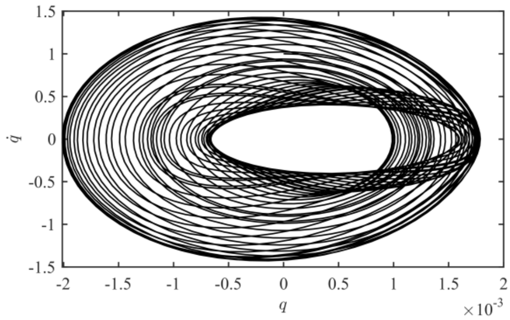
(a) (الف)



(b) (ب)



(c) (ج)



(d) (د)

Fig. 9 Time history and phase trajectory corresponding to CCCC boundary condition for parameters $k_w = 2.5 \times 10^9$ and (a) $(\alpha = 0.35, \beta = 1.2)$ (b) $(\alpha = 0.35, \beta = 0.6669)$

شکل 9 تاریخچه زمانی و مسیر فاز مربوط به شرط مرزی CCCC برای پارامترهای $k_w = 2.5 \times 10^9$ و (الف) $(\alpha = 0.35, \beta = 1.2)$ و (ب) $(\alpha = 0.35, \beta = 0.6669)$

طوری که ورق به ازای مقادیر بیشتری از جرم و سرعت بارهای عبوری پایدار است.

4- روش هارمونیک بالانس نموی یک روش نیمه تحلیلی کارآمد و دقیق با زمان حل کوتاه برای تحلیل پایداری سیستم ورق-جرم متحرک است.

5- نتایج شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده تطابق بسیار خوبی با نتایج پیش‌بینی شده توسط روش هارمونیک بالانس نموی دارد.

6- مراجع

[1] M. R. Shadnam, M. Mofid, J. E. Akin, On the dynamic response of rectangular plate with moving mass, *Thin-Walled Structures*, Vol. 39, No. 9, pp. 797-806, 2001.

[2] A. Nikkhoo, F. R. Rofooei, Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass, *Acta Mechanica*, Vol. 223, No. 1, pp. 15-27, 2012.

[3] A. Nikhkoo, M. E. Hassanabadi, S. E. Azam, J. V. Amiri, Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 55, pp. 105-113, 2014.

[4] M. Niaz, A. Nikkhoo, Inspection of a rectangular plate dynamics under a moving mass with varying velocity utilizing BCOPs, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 317-332, 2015.

[5] T. Ghazvini, A. Nikkhoo, H. Allahyari, M. Zalpuli, Dynamic response analysis of a thin rectangular plate of varying thickness to a traveling inertial load, *Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 403-411, 2016.

[6] F. R. Rofooei, A. Nikkhoo, Application of active piezoelectric patches in controlling the dynamic response of a thin rectangular plate under a moving mass, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 11, pp. 2429-2443, 2009.

[7] F. R. Rofooei, A. Enshaeian, A. Nikkhoo, Dynamic response of geometrically nonlinear elastic rectangular plates under a moving mass loading by inclusion of all inertial components, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 394, pp. 497-514, 2017.

[8] A. Enshaeian, F. R. Rofooei, Geometrically nonlinear rectangular simply supported plates subjected to a moving mass, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 2, pp. 595-608, 2014.

[9] J. A. Gbadeyan, M. S. Dada, Dynamic response of a Mindlin elastic rectangular plate under a distributed moving mass, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 48, No. 3, pp. 323-340, 2006.

[10] J. J Wu, Vibration analyses of an inclined flat plate subjected to moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 1, pp. 373-387, 2007.

[11] J. V. Amiri, A. Nikkhoo, M. R. Davoodi, M. E. Hassanabadi, Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 53-64, 2013.

[12] I. Esen, A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 66, pp. 26-35, 2013.

[13] I. Esen, A new FEM procedure for transverse and longitudinal vibration analysis of thin rectangular plates subjected to a variable velocity moving load along an arbitrary trajectory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 808-830, 2015.

[14] M. Ebrahimzadeh Hassanabadi, K. A. Attari, A. Nikkhoo, S. Mariani, Resonance of a rectangular plate influenced by sequential moving masses, *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 87-100, 2016.

[15] H. D. Nelson, R. A. Conover, Dynamic stability of a beam carrying moving masses, *Applied Mechanics,* Vol. 38, No. 4, pp. 1003-1006, 1971.

[16] G. V. Rao, Linear dynamics of an elastic beam under moving loads, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 3, pp. 281-289, 2000.

[17] M. Pirmoradian, M. Keshmiri, H. Karimpour, On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: instability and resonance analysis, *Acta Mechanica,* Vol. 226, No. 4, pp. 1241-1253, 2015.

[18] H. Karimpour, M. Pirmoradian, M. Keshmiri, Instance of hidden instability traps in intermittent transition of moving masses along a flexible beam, *Acta Mechanica,* Vol. 227, No. 4, pp. 1213-1224, 2016.

[19] M. Pirmoradian, H. Karimpour, Nonlinear effects on parametric resonance of a beam subjected to periodic mass transition, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 284-292, 2017. (in Persian فارسی)

[20] D. B. Mclver, Hamilton's principle for systems of changing mass, *Engineering Mathematics*, Vol. 7, No. 3, pp. 249-261, 1973.

[21] S. Park, H. H. Yoo, J. Chung, Vibrations of an axially moving beam with deployment or retraction, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 51, No. 3, pp. 686-696, 2013.

[22] A.W. Leissa, *Vibration of Plates*, pp. 48-80, Washington DC: US Government Printing Office, 1969.

[23] G. D. Recktenwald, *The Stability of Parametrically Excited Systems: Coexistence and Trigonometrification*, PhD Thesis, University of Cornell, Ithaca, 2006.