

# طراحی و ساخت موازنه گر دینامیکی خودکار یک صفحه‌ای

مجید محمدی مقدم<sup>۱\*</sup>، مهدی آقاجانی<sup>۲</sup>

۱- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس  
۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

\*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵

m.moghadam@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: خرداد ۱۳۸۶، پذیرش مقاله: اردیبهشت ۱۳۸۷)

**چکیده-** عدم توازن در رتور ماشین‌های ابزار دستی (سنگ فرز) ارتعاش‌های مزاحمی را به دست‌های کاربر وارد می‌کند. با استفاده از موازنه پویای خودکار یک صفحه‌ای می‌توان این ارتعاش‌های مزاحم را حذف کرد. این بالانس شامل تعدادی گوی است که در داخل شیار پر از روغن حرکت کرده و در حالت پایدار و در محدوده مشخصی از سرعت، رتور را متعادل می‌کند. در این پژوهش نمونه‌ای از این نوع بالانس را برای به حداقل رساندن ارتعاش‌های بدنه و دسته سنگ فرز طراحی شده و براساس پارامترهای طراحی به دست آمده ساخته شده است. به همین منظور مدل دینامیکی رتور سنگ فرز به صورت رتور جفکات فرض شده و به روش لاگرانژ معادلات غیرخطی حرکت در مختصات قطبی استخراج می‌شود. موقعیت‌های تعادل و معادلات تغییرات خطی به روش اغتشاشی به دست می‌آید و به روش راث - هرویتز به تحلیل پایداری دینامیکی حول نقاط تعادل پرداخته می‌شود. برای تصحیح و تأیید پایداری سیستم، پاسخ زمانی به روش آلفای عمومی شده محاسبه می‌شود. به منظور مقایسه و تعیین صحت عملکرد بالانس، سطوح ارتعاشی برای سنگ فرز غیر متعادل در حالت با بالانس و همچنین بدون بالانس اندازه‌گیری و مقایسه شده و نتایج آن ارائه می‌شود.

**کلیدواژه‌گان:** موازنه گر پویای خودکار، رتور جفکات، تحلیل پایداری دینامیکی، پاسخ زمانی، تحلیل مدی.

## ۱- مقدمه

فرایند کاهش و به حداقل رساندن نوسان، سر و صدا و ساییدگی اجسام در حال چرخش موازنه نامیده می‌شود. عدم موازنه وقتی اتفاق می‌افتد که محورهای اینرسی اصلی رتور منطبق بر محور هندسی‌شان نباشند. متعادل

کردن با کاهش نیروهای گریز از مرکز و هم خط کردن محور اینرسی با محور هندسی، با اضافه یا کم کردن جرم‌های تصحیح کننده<sup>۱</sup> انجام می‌شود. موازنه گر پویای خودکار یا ADB<sup>۲</sup> وسیله‌ای است که بر همین اساس،

1. Correction masses  
2. Automatic Dynamic Balancer

عدم تعادل‌های رتور را حذف می‌کند. ADB کاربردهای متفاوتی از جمله در سی‌دی‌رام یا دی‌وی‌دی درایوها، ماشین‌های لباسشویی و ماشین‌های ابزار دارد.

روش‌های موازنه کردن رتور را می‌توان به دو دسته روش‌های غیرهمزمان<sup>۱</sup> و روش‌های همزمان<sup>۲</sup> تقسیم کرد.

در روش غیر همزمان، رتور به صورت یک محور صلب مدل‌سازی می‌شود. از دید تئوری، هر توزیع عدم‌توازن در رتور صلب را می‌توان در دو صفحه مختلف متوازن کرد [۱].

واضح است که روش‌های متوازن‌سازی مورد استفاده برای رتورهای صلب را نمی‌توان برای رتورهای انعطاف‌پذیر به کار برد. بنابراین محققان روش‌های مدی و ضریب تأثیر را برای متوازن‌سازی همزمان رتورهای انعطاف‌پذیر توسعه دادند. در این روش هر مد با مجموعه‌ای از جرم‌ها که به طور خاص انتخاب شده‌اند متوازن می‌شود. مرور نسبتاً جامعی از این روش را می‌توان در کار دارلو<sup>۳</sup> [۲] یافت. برخلاف روش مدی، روش ضریب تأثیر، روشی تجربی است. این روش برای نخستین بار به وسیله گودمن<sup>۴</sup> [۳] در سال ۱۹۶۴ معرفی شد.

روش‌های متوازن‌سازی همزمان را می‌توان بر اساس نوع تجهیزات مورد استفاده به دو دسته روش‌های متوازن‌سازی فعال<sup>۵</sup> و غیر فعال<sup>۶</sup> تقسیم‌بندی کرد. می‌توان گفت که بالانس‌های غیرفعال نوعی از بالانس‌های خودکار هستند. یک بار متوازن کردن، فقط در زمانی کافی است که رتور دارای مقدار ثابتی از عدم توازن باشد. در هر حال یک بار متوازن کردن را

نمی‌توان برای حذف عدم توازن رتور با عدم توازن متغیر وابسته به سرعت دوران به کار برد. مطالعات اندکی درباره این نوع متوازن‌کننده‌ها نسبت به سایر روش‌های متوازن‌سازی انجام شده است. مطالعات پایه‌ای در رابطه با این نوع از متوازن‌کننده‌ها به وسیله تیرل<sup>۷</sup> [۴]، آلکساندر<sup>۸</sup> [۵] و کید<sup>۹</sup> [۶] انجام شده است. مروری بر تحلیل‌های دینامیکی برای انواع متوازن‌کننده‌های خودکار با گوی را می‌توان در کار زو<sup>۱۰</sup> و شی<sup>۱۱</sup> [۷] یافت. معادلات حرکت به دست آمده توسط آن‌ها برای سیستم‌های غیرهمزمان بوده و دارای محدودیت‌هایی برای تجزیه و تحلیل کامل پایداری است. برای غلبه بر این مشکل، چانگ<sup>۱۲</sup> و رو<sup>۱۳</sup> [۸] رفتار دینامیکی و پایداری متوازن‌کننده‌های خودکار را برای رتور جفکات بررسی کرده‌اند. آن‌ها با استفاده از دستگاه مختصات قطبی به جای دکارتی، معادلات حرکت را برای سیستم همزمان استخراج کردند.

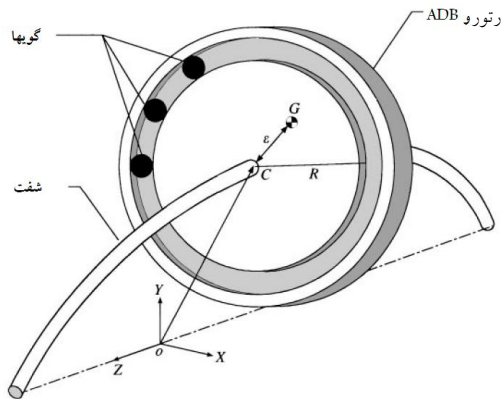
به هر حال مطالعات ذکر شده در بالا فقط برای متوازن‌کننده‌هایی است که برای مدل رتور جفکات استفاده شده و برای توصیف پدیده‌هایی که به سبب دوران جسم صلب با محور انعطاف‌پذیر به وجود می‌آیند، ناکافی است. بدین منظور چانگ و جانگ<sup>۱۴</sup> [۹] در مقاله‌ای به بررسی پاسخ دینامیکی و تحلیل پایداری متوازن‌کننده خودکار با گوی برای رتور انعطاف‌پذیر پرداختند.

در این مقاله به بررسی پاسخ زمانی و تحلیل پایداری نمونه‌ای سنگ فرز همراه با ADB پرداخته و نتایج طراحی و ساخت ADB مناسب را برای به

7. Thearl  
8. Alexander  
9. Cade  
10. Zhou  
11. Shi  
12. Chung  
13. Ro  
14. J. Jang

1. Off-Line Balancing Method  
2. On-Line Or Real-Time Balancing Method  
3. Darlow  
4. Goodman  
5. Active  
6. Passive

شکل ۱ نشان داده شده، معادل با شفت صلبی با یاتاقان‌های الاستیک است.



شکل ۱ رتور جفکات در حال لنگ زدن همراه با ADB

در این مدل  $C$  مرکز چرخش دیسک،  $O$  مرکز هندسی چرخش رتور،  $G$  مرکز جرم و  $R$  شعاع چرخش گوی هاست.

### ۳- استخراج معادلات دینامیکی حرکت

در شکل ۱ دیسک به طور متقارن بر روی محوری که بر روی دو یاتاقان قرار دارد، قرار گرفته است. مرکز جرم دیسک  $G$  و محل تلاقی محور یاتاقان‌ها با دیسک نقطه  $O$  است. دیسک با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  در حال دوران است. مرکز هندسی دیسک  $C$  به وسیله دستگاه مختصات قطبی  $r, \theta$  مشخص شده، به طوری که مرکز جرم  $G$  به وسیله خروج از مرکز  $\varepsilon$  و زاویه  $\omega t$  نسبت به  $C$  تعیین می‌شود. موقعیت زاویه‌ای گوی‌ها به وسیله شعاع گام  $R$  و زاویه  $\Phi_i$ ، مشخص می‌شوند. معادلات غیرخطی حرکت برای ADB به وسیله معادله لاگرانژ استخراج می‌شوند:

حداقل رساندن ارتعاشات بدنه و دسته سنگ فرز ارائه می‌کنیم. به همین منظور مدل دینامیکی رتور سنگ فرز به صورت رتور جفکات فرض و به روش لاگرانژ معادلات غیرخطی حرکت در مختصات قطبی استخراج می‌شود. موقعیت‌های تعادل و معادلات تغییرات خطی به روش اغتشاشی به دست می‌آیند و بر اساس این معادلات تغییرات، به روش راث - هرویتز به تحلیل پایداری دینامیکی حول نقاط تعادل پرداخته می‌شود. برای تصحیح و تأیید پایداری سیستم، پاسخ زمانی به روش آلفای عمومی شده محاسبه می‌شود. به روش تحلیل مدی پارامترهای سفتی و دمپینگ معادل سنگ فرز به دست آمده و با ساخت دیسکی با عدم توازن مشخص، به وسیله حل معادلات دینامیکی حاکم بر رتور سنگ فرز و بالانس، بالانسری طراحی و ساخته می‌شود که بتواند ارتعاش‌های حاصل از عدم توازن را به حداقل برساند. به منظور مقایسه و تعیین صحت عملکرد بالانس، سطوح ارتعاشی برای سنگ فرز نابالانس در حالت با بالانس و همچنین بدون بالانس اندازه‌گیری، مقایسه و نتایج آن ارائه شده است. این آزمون و مقایسه برای نمونه‌ای از بالانس ساخته شده توسط یک شرکت معروف نیز انجام می‌شود.

### ۲- مدل‌سازی دینامیکی

عدم توازن ماشین سنگ فرز به دلیل سایش و خوردگی صفحه سنگ، در یک صفحه اتفاق می‌افتد. لذا می‌توان از مدل رتور جفکات استفاده کرد. رتور جفکات اولین بار در سال ۱۹۱۹ ارائه شد. در این مدل رتور با دیسک صلب بر روی شفت الاستیک دارای جرم نگهداشته شده روی یاتاقان‌های صلب، مدل‌سازی شده است. این مدل که در

$$T = \frac{1}{2} I_G \dot{\omega}^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}_G \cdot \dot{r}_G + \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{r}_{Bi} \cdot \dot{r}_{Bi} \quad (4)$$

که  $I_G$  ممان اینرسی جرمی دیسک حول مرکز جرم و  $M$  جرم دیسک و  $m$  جرم هر گوی است. با صرف نظر کردن از اثر گرانش، انرژی پتانسیل ADB از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$V = \frac{1}{2} k r^2 \quad (5)$$

که  $k$  ضریب سختی معادل سیستم رتور است. تابع اتلاف ریلی از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$F = \frac{1}{2} c (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} D \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i^2 \quad (6)$$

که  $c$  عبارت است از ضریب میرایی معادل و  $D$  ضریب درگ لزجی معادل گوی‌ها. همچنین فرض شده که گوی‌ها ضریب درگ لزجی یکسانی داشته باشند. در استخراج معادلات حرکت فرض بر این است که سرعت زاویه‌ای  $\omega$  ثابت باشد:

$$\begin{aligned} & (M + nm)(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + c\dot{r} + kr \\ & - mR \sum_{i=1}^n [\dot{\phi}_i \sin(\phi_i + \omega t - \theta) + (\dot{\phi}_i + \omega) \cos(\phi_i + \omega t - \theta)] \quad (7) \\ & = M \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

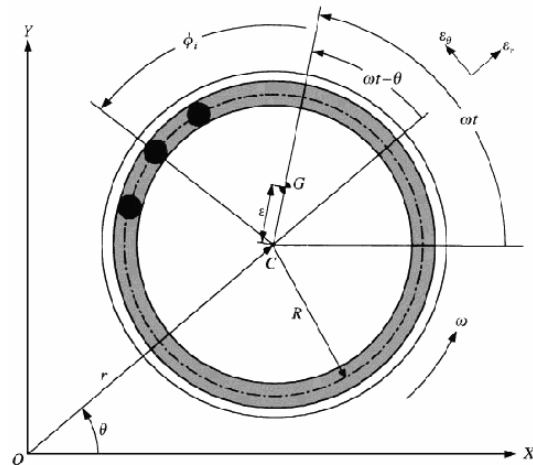
(8)

$$\begin{aligned} & (M + nm)(r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}) + cr\dot{\theta} \\ & + mR \sum_{i=1}^n [\dot{\phi}_i \cos(\phi_i + \omega t - \theta) - (\dot{\phi}_i + \omega) \sin(\phi_i + \omega t - \theta)] \quad (8) \\ & = M \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & mR \dot{\phi}_i + D \dot{\phi}_i - mR(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin(\phi_i + \omega t - \theta) + \\ & mR(r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}) \cos(\phi_i + \omega t - \theta) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (1)$$

$T$  انرژی جنبشی،  $V$  انرژی پتانسیل و  $F$  تابع اتلاف ریلی است. عبارت  $q_k$  از مؤلفه‌های مختصات عمومی.



شکل ۲ وضعیت هندسی یک ADB

شکل ۲ وضعیت هندسی ADB را با سه گوی نشان می‌دهد. با فرض این‌که دیسک فقط در صفحه  $xy$  حرکت کند، بردار موقعیت مرکز جرم،  $G$ ، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$r_G = [r + \varepsilon \cos(\omega t - \theta)] e_r + \varepsilon \sin(\omega t - \theta) e_\theta \quad (2)$$

بردار موقعیت گوی  $i$  ام با رابطه (۳) تعیین می‌شود:

$$r_{Bi} = [r + R \cos(\phi_i + \omega t - \theta)] e_r + R \sin(\phi_i + \omega t - \theta) e_\theta \quad (3) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$n$  عبارت است از تعداد گوی‌ها،  $e_r$  و  $e_\theta$  به ترتیب بردارهای واحد در راستای  $r$  و  $\theta$  است. با فرض این‌که جرم گوی‌ها یکسان و همچنین شعاع آنها ناچیز باشد، انرژی جنبشی ADB، از رابطه زیر تعیین می‌شود:

1. Equivalent Stiffness
2. Equivalent Damping Coefficient
3. Viscous Drag Coefficient

## ۴- تعیین موقعیت‌های تعادل و استخراج معادلات تغییرات خطی سیستم

وقتی  $\theta$  به طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد، تعیین موقعیت‌های تعادل نسبت به  $\theta$  ناممکن است. به منظور غلبه بر این مشکل، یک مختصات عمومی  $\psi$  به جای  $\theta$  به کار برده می‌شود که به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\psi = \omega t - \theta \quad (10)$$

مختصه عمومی  $\psi$  عبارت است از زاویه راستای  $r$  با مرکز جرم، همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده. از آنجاکه معادلات حالت را می‌توان به وضوح برای تحلیل پایداری به کار برد، با استفاده از معادله (۱۰) معادلات حرکت (۷) تا (۹) را به شکل معادلات حالت می‌نویسیم. بدین منظور نمایش سرعت‌ها،  $r$ ،  $\psi$  و  $\phi_i$  به وسیله نمادهای جدید ضروری است.

$$\dot{r} \equiv r, \quad \dot{\psi} \equiv \psi, \quad \dot{\phi}_i \equiv \phi_i \quad (11)$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در معادلات (۷) تا (۹) و به کار بردن نمادهای داده شده با رابطه (۱۱) می‌توان معادلات حرکت را به شکل معادلات فضای حالت نشان داد. این معادلات حرکت را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$A(x)\dot{x} = N(x) \quad (12)$$

$$(13)$$

$$x = \{r, \psi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, r, \psi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} I & \cdot \\ \cdot & M \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$(15)$$

$$N = \{N_r, N_\psi, N_{\phi_1}, N_{\phi_2}, \dots, N_{\phi_n}, N_r, N_\psi, N_{\phi_1}, N_{\phi_2}, \dots, N_{\phi_n}\}^T$$

$I$  ماتریس همانی  $(n+2) \times (n+2)$  است.

$$(16)$$

$$M = \begin{bmatrix} M + nm & \cdot & -mRS_1 & -mRS_2 & \dots & -mRS_n \\ \cdot & (M + nm)r & -mRC_1 & -mRC_2 & \dots & -mRC_n \\ -mRS_1 & -mRrC_1 & mR^T & \cdot & \dots & \cdot \\ -mRS_2 & -mRrC_2 & \cdot & mR^T & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -mRS_n & -mRrC_n & \cdot & \cdot & \dots & mR^T \end{bmatrix}$$

$$N_r = r \quad (17)$$

$$N_\psi = \psi \quad (18)$$

$$N_{\phi_i} = \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

$$N_r = (M + nm)r(\omega - \psi)^T - cr - kr + M\epsilon\omega^T \text{Cos}(\psi) \quad (20)$$

$$mR \sum_{i=1}^n (\phi_i + \omega)^T \text{Cos}(\phi_i + \psi)$$

$$N_\psi = r(M + nm)r(\omega - \psi) + cr(\omega - \psi) - M\epsilon\omega^T \text{Sin}(\psi) \quad (21)$$

$$-mR \sum_{i=1}^n (\phi_i + \omega)^T \text{Sin}(\phi_i + \psi)$$

$$N_{\phi_i} = -D\phi_i - mRr(\omega - \psi)^T \text{Sin}(\phi_i + \psi) - \quad (22)$$

$$r mRr(\omega - \psi) \text{Cos}(\phi_i + \psi) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در رابطه (۱۶)،  $Si_i$  و  $Co_i$  با روابط زیر نشان داده می‌شوند:

$$S_i = \text{Sin}(\phi_i + \psi), \quad C_i = \text{Cos}(\phi_i + \psi) \quad (23)$$

با این معادلات تحلیل پایداری را می‌توان به سادگی انجام داد. بدین ترتیب می‌توان با قرار دادن  $\alpha=0$  در معادله (۱۲) معادلات تعادل را به دست آورد. این بدین معناست که می‌توان موقعیت‌های تعادل را از رابطه زیر به دست آورد:

$$N(x^*) = 0 \quad (24)$$

$$A(x^* + \Delta x)\Delta x = N(x^* + \Delta x) - N(x^*) \quad (31)$$

از آنجاکه  $\Delta x = 0$  یک جواب بدیهی برای (31) است، رابطه فوق را حول  $\Delta x = 0$  بسط می‌دهیم:

$$A^* \Delta x = B^* \Delta x + O(\Delta x) \quad (32)$$

که  $A^*$  و  $B^*$  ثابت بوده و  $O$  نیز تابعی از مراتب دوم یا بالاتر از  $\Delta x$  است.

$A^*$  و  $B^*$  در رابطه بالا به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$A^* = A(x^*) \quad (33)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \cdot & I \\ -k^* & -c^* \end{bmatrix} \quad (34)$$

که  $k^*$  و  $c^*$  در رابطه (34) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c^* = \begin{bmatrix} c & \gamma(M + nm)\omega r^* & -\gamma m R \omega C_i^* & \dots \\ -\gamma(M + nm)\omega & cr^* & \gamma m R \omega S_i^* & \dots \\ \gamma m R \omega C_i^* & \cdot & D & \dots \\ \gamma m R \omega C_i^* & \cdot & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \gamma m R \omega C_n^* & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$k^* = \begin{bmatrix} k - (M + nm)\omega & \omega \left( M \varepsilon \sin \psi^* + m R \sum_{i=1}^n S_i^* \right) & m R \omega S_i^* & \dots \\ -c \omega & \omega \left( M \varepsilon \cos \psi^* + m R \sum_{i=1}^n C_i^* \right) & m R \omega C_i^* & \dots \\ m R \omega S_i^* & m R \omega r^* C_i^* & m R \omega r^* C_i^* & \dots \\ m R \omega S_i^* & m R \omega r^* C_i^* & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ m R \omega S_n^* & m R \omega r^* C_n^* & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (36)$$

در روابط فوق:

$$S_i^* = \sin(\phi_i^* + \psi^*) \quad , \quad C_i^* = \cos(\phi_i^* + \psi^*) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

بردار  $x^*$  بر موقعیت تعادل دلالت میکند و به صورت زیر است:

$$x^* = \{r^*, \psi^*, \phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*, r^*, \psi^*, \phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*\}^T \quad (25)$$

موقعیت‌های تعادل را می‌توان به دو گروه دسته‌بندی کرد، که عبارت‌اند از حالت تعادل متوازن و حالت تعادل نامتوازن، که به ترتیب متناظر با  $r^* = 0$  و  $r^* \neq 0$  است. وقتی سیستم متوازن است، بدین معنا است که  $r^* = 0$  و معادلات جبری حاصل شده از معادله (24) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\varepsilon}{R} + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i^*) = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(\phi_i^*) = 0 \quad (27)$$

برای استخراج معادلات تغییرات خطی از روش اغتشاشی<sup>1</sup> استفاده می‌شود. حرکت اغتشاشی در همسایگی موقعیت‌های تعادل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = x^* + \Delta x \quad (28)$$

که  $\Delta x$  تغییرات  $x$  است. در رابطه (28) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta x = \{\Delta r, \Delta \psi, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \dots, \Delta \phi_n, \Delta \hat{r}, \Delta \hat{\psi}, \Delta \hat{\phi}_1, \Delta \hat{\phi}_2, \dots, \Delta \hat{\phi}_n\}^T \quad (29)$$

حال با استفاده از روابط (12) و (28) داریم:

$$A(x^* + \Delta x)\Delta x = N(x^* + \Delta x) \quad (30)$$

البته به خاطر داریم که در نقاط تعادل  $N(x^*) = 0$  این صورت داریم:

برای آن که معادله فوق جواب داشته باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد :

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\varepsilon}{\gamma R} \quad (44)$$

به منظور تحلیل پایداری در همسایگی موقعیت تعادل متوازن، تغییرات کوچک دستگاه مختصات عمومی از وضعیت تعادل به صورت زیر نوشته می شود:

$$r = X_r e^{\lambda t}, \quad \phi_1 = X_{\phi_1} e^{\lambda t}, \quad \phi_2 = X_{\phi_2} e^{\lambda t} \quad (45)$$

با استفاده از رابطه (۴۶) و معادلات فوق،  $\psi^*$  از روابط حذف شده و شرط جواب غیر صفر برای  $Xr$  و  $X\phi_1$  و  $X\phi_2$  تحقیق می شود.

$$\cos^2 \psi^* + \sin^2 \psi^* = 1 \quad (46)$$

با انجام عملیاتی نسبتاً پیچیده روی معادله (۴۲) و حذف ریشه های زائد، معادله مشخصه به صورت چند جمله ای درجه ۸ زیر ظاهر می شود:

$$\sum_{k=0}^8 H_k \lambda^k = 0 \quad (47)$$

ضرائب این چند جمله ای را که بر حسب  $\omega$ ،  $\varepsilon$ ،  $M$ ،  $d$ ،  $c$ ،  $R$ ،  $m$  و  $k$  میباشند، ملاحظه میکنید:

$$H_7 = -\gamma m^2 \omega^2 c R^2 - \gamma m^2 d \omega^2 R^2 - \gamma m^2 d M \omega^2 R^2 - \gamma m d M^2 \omega^2 R^2 - \varepsilon m^2 d k \omega^2 R^2 + \varepsilon m d k M \omega^2 R^2 - \gamma m d \omega^2 c^2 R^2 - \varepsilon m d^2 \omega^2 c - \gamma m d k^2 R^2 - \gamma d^2 M \omega^2 c - \gamma d^2 k c$$

$$H_6 = -\varepsilon m^2 \omega^2 R^2 - \gamma m^2 M \omega^2 R^2 - \varepsilon m^2 e^2 M^2 \omega^2 R^2 + e^2 M^2 \omega^2 \gamma m^2 k \omega^2 R^2 - \gamma m^2 d \omega^2 c R^2 - \varepsilon m^2 d^2 \omega^2 - \varepsilon m d^2 M \omega^2 - d^2 M^2 \omega^2 + \varepsilon m d^2 k \omega^2 + \gamma d^2 k M \omega^2 - d^2 \omega^2 c^2 - d^2 k^2$$

$$H_5 = -\varepsilon m^2 d \omega^2 R^2 - \gamma m^2 d M \omega^2 R^2 + \gamma m^2 d k \omega^2 R^2$$

$$H_4 = -m^2 e^2 M^2 \omega^2 R^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 M^2 \omega^2$$

با فرض این که  $\Delta x$  به اندازه کافی کوچک باشد طوری که بتوان از  $O$  صرف نظر کرد، معادله (۳۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$A^* \Delta x = B^* \Delta x \quad (38)$$

(۳۸) معادلات تغییرات خطی است. البته باید توجه کرد که این معادله حول نقاط تعادل تعیین می شود.

## ۵- تحلیل پایداری

پایداری سیستم در همسایگی موقعیت های تعادل، به وسیله معادلات تغییرات خطی (۳۸) و با استفاده از مسأله مقدار مشخصه تجزیه و تحلیل می شود. در این بخش به بررسی پایداری ADB با دو گوی پرداخته می شود. بدین منظور حل معادله (۳۸) به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Delta x = \Delta X e^{\lambda t} \quad (39)$$

که  $\lambda$  مقدار مشخصه و  $\Delta X$  بردار ویژه متناظر با  $\lambda$  است.

بردار ویژه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta X = \left\{ \begin{matrix} \Delta X_r, \Delta X_{\psi}, \Delta X_{\phi_1}, \Delta X_{\phi_2}, \dots, \\ \Delta X_{\phi_1}, \Delta X_r, \Delta X_{\psi}, \Delta X_{\phi_1}, \Delta X_{\phi_2}, \dots, \Delta X_{\phi_2} \end{matrix} \right\} \quad (40)$$

با جایگذاری معادله (۳۹) در معادله (۴۰) داریم:

$$(B^* - \lambda A^*) \Delta X = 0 \quad (41)$$

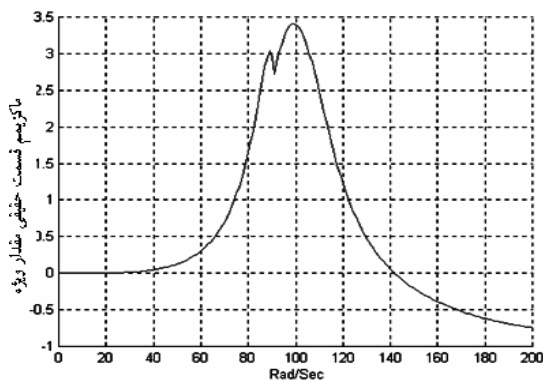
$$\det(B^* - \lambda A^*) = 0 \quad (42)$$

وقتی ADB فقط دو گوی داشته باشد، می توان موقعیت تعادل گوی ها را از رابطه (۲۶) و (۲۷) تعیین کرد:

$$\phi_1^* = -\phi_2^* = -tg^{-1} \sqrt{\left( \frac{\gamma m R}{M \varepsilon} \right)^2 - 1} \quad (43)$$

به منظور بررسی پایداری، از بین هفت پارامتر جدول ۱ شش پارامتر را معلوم در نظر گرفته و پارامتر هفتم را تغییر می‌دهیم، در این صورت به ازای مقادیر متفاوت برای پارامتر هفتم و همچنین تغییر سرعت زاویه‌ای، معادله‌های مشخصه متفاوتی حاصل می‌شود. حال با حل این معادله‌ها مشخصه، حداکثر قسمت حقیقی ریشه‌های این معادله‌ها به دست می‌آید. اگر این مقدار منفی باشد، سیستم پایدار و چنانچه مثبت باشد سیستم ناپایدار است.

شکل ۳ پایداری را به صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای  $\omega$  در حالت  $r^*=0$  نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این سیستم از حوالی  $\omega=140 \text{ rad/sec}$  به بالا پایدار است. قابل ذکر است که فرکانس بحرانی در این سیستم برابر  $\omega_n=100 \text{ rad/sec}$  است.



شکل ۳ نمایش پایداری به صورت تابعی از  $\omega$  در حالت  $r^*=0$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در سرعت‌های زاویه‌ای  $100 \text{ rad/sec}$  تا  $140 \text{ rad/sec}$  سیستم ناپایدار است، بنابراین شرط  $\omega/\omega_n > 1$  برای کارکرد طبیعی ADB، شرطی کافی است. همان‌طور که پیشتر ذکر شد، علاوه بر این شرط، برقراری شرط  $m/M \geq \varepsilon/\sqrt{R}$  ضروری است.

در شکل ۴ ملاحظه می‌شود که با افزایش  $c$ ، محدوده کارایی ADB افزایش می‌یابد، به طوری که در  $c=2 \text{ N.Sec/m}$ ، سیستم از حوالی سرعت  $140 \text{ rad/sec}$

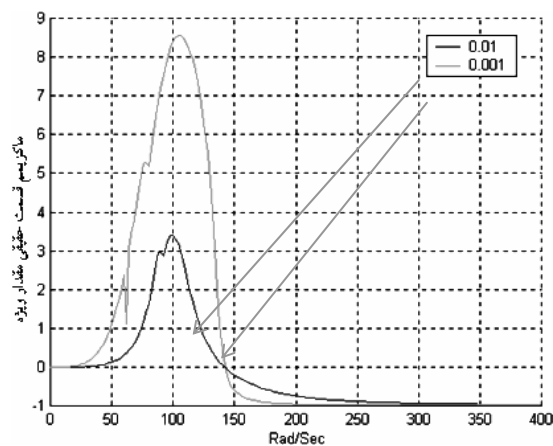
$$\begin{aligned}
 H_\lambda &= -\gamma m^T M R^\varepsilon - m^T e^T M^T R^\gamma - m^T M^T R^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} e^\varepsilon M^\varepsilon \\
 H_\gamma &= -\gamma m^T c R^\varepsilon - \gamma m^T M c R^\varepsilon - \varepsilon m^T d R^\gamma - \gamma m^T d M R^\gamma \\
 &\quad - \gamma m d M^T R^\gamma \\
 H_\gamma &= -\varepsilon m^\varepsilon \omega^T R^\varepsilon - \gamma m^T M \omega^T R^\varepsilon - \varepsilon m^T e^T M^T \omega^T R^\gamma - \\
 &\quad \gamma m^T M^T \omega^T R^\varepsilon + e^\varepsilon M^\varepsilon \omega^\varepsilon - \gamma m^T k R^\varepsilon \\
 &\quad - \gamma m^T k M R^\varepsilon - m^T c^T R^\varepsilon - \gamma m^T d c R^\gamma \\
 &\quad - \varepsilon m d M c R^\gamma - \varepsilon m^T d^\gamma - \varepsilon m d^\gamma M - d^\gamma M^T \\
 H_\varepsilon &= -\lambda m^T \omega^T c R^\varepsilon - \gamma m^T M \omega^T c R^\varepsilon - \gamma m^T d \omega^T R^\gamma \\
 &\quad - \gamma m^T d M \omega^T R^\gamma - \gamma m^T k c R^\varepsilon - \varepsilon m d M^T \omega^T R^\gamma \\
 &\quad - \gamma m^T d k R^\gamma - \varepsilon m d k M R^\gamma - \gamma m d c^T R^\gamma \\
 &\quad - \varepsilon m d^\gamma c - \gamma d^\gamma M c \\
 H_\varepsilon &= -\lambda m^\varepsilon \omega^\varepsilon R^\varepsilon - \gamma m^T M \omega^\varepsilon R^\varepsilon - \gamma m^T e^T M^T \omega^\varepsilon R^\gamma \\
 &\quad - m^T M^T \omega^\varepsilon r^\varepsilon + \lambda \varepsilon e^\varepsilon M^\varepsilon \omega^\varepsilon - \lambda m^T k \omega^\varepsilon R^\varepsilon \\
 &\quad + \gamma m^T K M \omega^\varepsilon R^\varepsilon - m^T \omega^\varepsilon c^T R^\varepsilon \\
 &\quad - \gamma m^T d \omega^\varepsilon c R^\gamma - m^T k^\gamma R^\varepsilon - \varepsilon m d M^T \omega^\varepsilon c R^\gamma - \\
 &\quad \lambda m^T d^\gamma \omega^\gamma - \lambda m d^\gamma M \omega^\gamma - \varepsilon m d k c R^\gamma - \gamma d^\gamma M^T \omega^\gamma \\
 &\quad - \varepsilon m d^\gamma k - \gamma d^\gamma k M - d^\gamma c^\gamma
 \end{aligned}$$

در این قسمت پایداری به صورت پارامتری بررسی می‌شود. برای مشاهده تأثیر پارامترهای مختلف بر پایداری، ADB مفروضی در نظر گرفته می‌شود. جدول ۱ فهرست پارامترهای یک ADB مفروض را نشان می‌دهد. نمودارهایی که در مورد آنها بحث می‌شود، بر اساس اطلاعات این جدول به دست آمده است.

جدول ۱ پارامترهای مفروض در بحث پایداری ADB

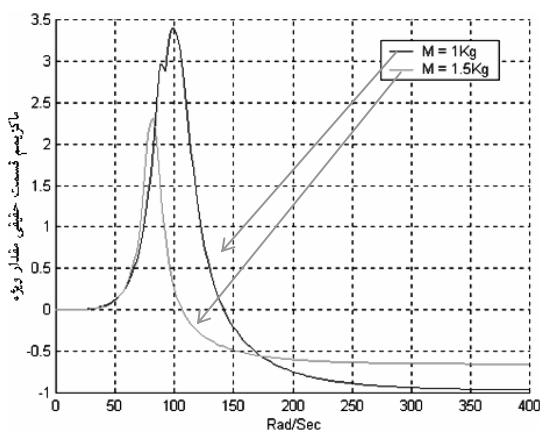
مقدار	واحد	پارامتر	توضیح
۰/۰۱	Kg	$m$	جرم گوی‌های اصلاح کننده
۱	Kg	$M$	جرم دیسک
۲	N.Sec/m	$c$	ضریب میرایی معادل خارجی
۰/۰۱	N.m.Sec	$d$	ضریب درگ لزجی گوی‌ها
۰/۱	$m$	$R$	شعاع دیسک
۱۰۰۰۰	N/m	$k$	ضریب سختی فنر معادل
۰/۰۰۱	$m$	$e$	خروج از مرکز





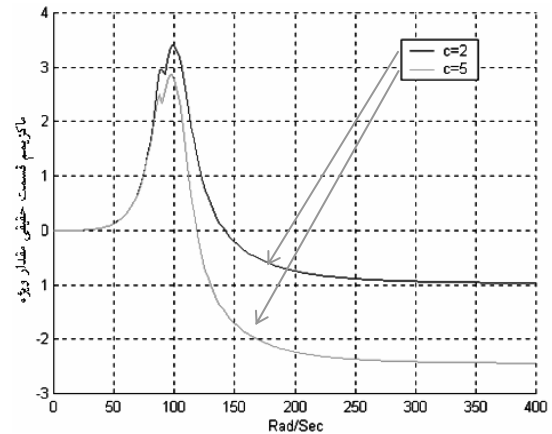
شکل ۵ نمایش پایداری در حالت‌هایی با ضریب درگ لزجت متفاوت به صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای ( $\omega$ )

همان‌طور که در شکل ۶ ملاحظه می‌شود، با افزایش جرم دیسک محدوده کارایی ADB به‌نحو چشمگیری افزایش می‌یابد، اما همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حالت  $M=1/5\text{kg}$  اگرچه محدوده کاری ADB بیشتر است، اما مقادیر حداکثر قسمت حقیقی مقادیر مشخصه، بزرگتر از حالت  $M=1\text{kg}$  است، و این امر همان‌طور که پیشتر توضیح داده شد، باعث طولانی شدن زمان رسیدن به حالت تعادل می‌شود.



شکل ۶ نمایش پایداری بر حسب سرعت زاویه‌ای در دو حالت  $M=1\&1/5\text{kg}$  در وضعیت  $r^*=0$

به بالا پایدار است، در حالی که در  $c=5\text{N.Sec/m}$ ، سیستم از حوالی سرعت  $120\text{rad/sec}$  به بالا پایدار است.



شکل ۷ نمایش پایداری به صورت تابعی از ( $\omega$ ) در دو حالت  $c=2\&5\text{N.sec/m}$  و در وضعیت  $r^*=0$

علاوه بر این، حداکثر قسمت حقیقی مقادیر ویژه در حالت  $c=5\text{N.Sec/m}$  نسبت به حالت  $c=2\text{N.Sec/m}$  کوچکتر است و سیستم سریعتر متوازن شده و زودتر به وضعیت تعادل می‌رسد. بنابراین با افزایش میرایی خارجی ( $c$ ) کارکرد ADB افزایش می‌یابد، بدین معنا که ADB در سرعت‌های زاویه‌ای بیشتر، عملکرد طبیعی بهتری دارد. همان‌طور که در شکل ۵ ملاحظه می‌شود، با افزایش  $d$  از  $0.01\text{N.m.Sec}$  به  $0.1\text{N.m.Sec}$ ، تغییر محسوسی در ناحیه کاری ADB به وجود نمی‌آید. اما همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در حالت  $d=0.1\text{N.m.Sec}$  مقادیر حداکثر قسمت حقیقی مقادیر ویژه نسبت به حالت  $d=0.01\text{N.m.Sec}$  بزرگتر بوده و در نتیجه باعث پاسخ کندتر ADB به عدم توازن می‌شود و زمان رسیدن به حالت تعادل ( $r^*=0$ ) افزایش می‌یابد.

باید توجه کرد که وقتی سیستم در زیر سرعت بحرانی عمل می‌کند، ADB در نواحی تعادل ناپایدار قرار می‌گیرد و این به انتخاب ضریب میرایی معادل ( $c$ ) و ضریب درگ لزجی گوی‌ها ( $d$ )، بستگی ندارد.

برای مثال اگر روش رانگ-کوتا<sup>۳</sup> برای مسأله به کار رود، برای رسیدن به پاسخ‌های زمانی، انتخاب گام‌های زمانی بسیار کوچک، ضروری است. برای اعمال روش عمومی شده  $\alpha$  بر معادلات غیرخطی، معادله (۱۲) به صورت یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم بیان می‌شود:

$$G(y, y, y) = M(y)y + F(y, y) = 0 \quad (48)$$

که

$$y = \{r, \psi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}^T \quad (49)$$

ماتریس‌های  $M$ ،  $F$  در رابطه (۴۹) به صورت زیر به دست می‌آیند:

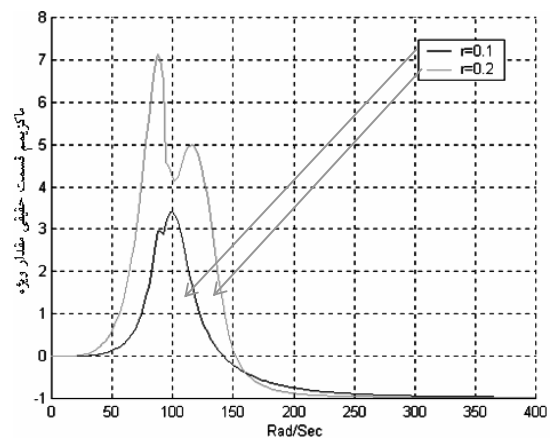
$$M = \begin{bmatrix} M + nm & \cdot & -mRS_1 & -mRS_2 & \dots \\ \cdot & (M + nm)r & -mRC_1 & -mRC_2 & \dots \\ -mRS_1 & -mRrC_1 & mR^2 & \cdot & \dots \\ -mRS_2 & -mRrC_2 & \cdot & mR^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -mRS_n & -mRrC_n & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (50)$$

(۵۱)

$$F = \begin{bmatrix} -(M + nm)r(\omega - \psi)^2 + cr + kr - M\epsilon\omega^2 \cos \psi \\ -mR \sum_{i=1}^n (\phi_i + \omega)^2 C_i \\ -2(M + nm)r(\omega - \psi) - cr(\omega - \psi) + M\epsilon\omega^2 \sin \psi \\ + mR \sum_{i=1}^n (\phi_i + \omega)^2 S_i \\ D\phi_1 + mRr(\omega - \psi)^2 S_1 + 2mRr(\omega - \psi)C_1 \\ D\phi_2 + mRr(\omega - \psi)^2 S_2 + 2mRr(\omega - \psi)C_2 \\ \vdots \\ D\phi_n + mRr(\omega - \psi)^2 S_n + 2mRr(\omega - \psi)C_n \end{bmatrix}$$

$S_i$  و  $C_i$  قبلاً تعریف شده است.

روش عمومی شده  $\alpha$  برای معادله (۴۹) به صورت زیر بیان می‌شود:



شکل ۷ نمایش پایداری بر حسب سرعت زاویه‌ای  $(\omega)$  در دو حالت  $R=0.1$  و  $R=0.2$  در وضعیت  $r^*=0$

شکل ۷ پایداری را بر حسب سرعت زاویه‌ای  $(\omega)$  در دو حالت  $R=0.1$  و  $R=0.2$  را در وضعیت  $r^*=0$  نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش  $R$  از  $0.1$  به  $0.2$ ، محدوده کارایی ADB کاهش می‌یابد، همچنین زمان رسیدن به حالت تعادل در  $R=0.1$  کمی بیشتر از  $R=0.2$  است.

## ۶- پاسخ زمانی

به منظور تحقیق درستی تحلیل پایداری و همچنین بررسی رفتار دینامیکی سیستم، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به وسیله یک روش انتگرال‌گیری مستقیم محاسبه می‌شوند.

در این مقاله از روش عمومی شده  $\alpha$  - که نوعی روش انتگرال‌گیری ایمپلیسیت<sup>۱</sup> است - استفاده شده. از آنجاکه این روش به‌طور نامشروط پایدار است، مزیتی نسبت به روش‌های انتگرال‌گیری اکسپلیسیت<sup>۲</sup> دارد، و آن این است که انتخاب گام‌های زمانی بزرگتر در این روش امکان‌پذیر است.

1. Implicit  
2. Explicit

3. Runge-Kutta

حال با استفاده از مقادیر معلوم  $a_n, v_n, d_n$  و  $\Delta t$  مقادیر  $a_{n+1}, v_{n+1}, d_{n+1}$  با روش نیوتن-رافسون محاسبه می شود.

بدین منظور برای این شبیه سازی ها از برنامه کامپیوتری به زبان Delphi استفاده شده است [۱۱].

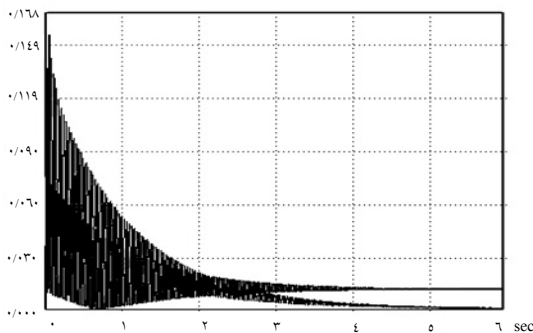
در این مقاله به منظور تأیید تحلیل پایداری که در بخش های پیش مطرح شد، رفتار دینامیکی نوعی ADB با سه گوی بررسی می شود. پارامترهای این ADB مطابق جدول ۱ است. با استفاده از این برنامه کامپیوتری، وضعیت های  $\omega/\omega_n > 1$  (وضعیت پایدار و ناپایدار)،  $\omega/\omega_n = 1$ ،  $\omega/\omega_n < 1$  بررسی می شود. در شبیه سازی رفتار دینامیکی شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$\phi(\cdot) = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{\phi}(\cdot) = \frac{\pi}{6}, \quad \ddot{\phi}(\cdot) = \frac{\pi}{2} \quad (66)$$

$$\psi(\cdot) = 0, \quad r(\cdot) = 1 \cdot 10^{-7} m$$

$$\dot{r}(\cdot) = \dot{\psi}(\cdot) = \dot{\phi}(\cdot) = \dot{\phi}(\cdot) = \dot{\phi}(\cdot) = 0$$

شکل ۸ پاسخ زمانی تغییر مکان شعاعی را وقتی  $\omega/\omega_n = 3$  نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود، در این حالت ADB بخوبی سیستم را متوازن می کند. در صورتی که سیستم بدون ADB اگرچه پایدار اما نامتوازن است و این در واقع تأییدی است بر تحلیل پایداری که در بخش های پیش مورد بحث قرار گرفت. شکل ۹ پاسخ زمانی موقعیت گوی اول را نشان می دهد.



شکل ۸ پاسخ های زمانی تغییر مکان شعاعی وقتی  $\omega/\omega_n = 3$  پارامترهای ADB مطابق جدول ۱ است.

$$M(d_{n+1-\alpha_f}, a_{n+1-\alpha_m}) + F(d_{n+1-\alpha_f}, v_{n+1-\alpha_f}) = 0 \quad (52)$$

که در آن:

$$d_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) d_{n+1} + \alpha_f d_n \quad (53)$$

$$d_{n+1} = \bar{d}_n + \beta \Delta t \dot{a}_{n+1} \quad (54)$$

$$\bar{d}_n = d_n + \Delta t v_n + \left(\frac{1}{\gamma} - \beta\right) \Delta t \dot{a}_n \quad (55)$$

$$v_{n+1} = \bar{v}_n + \gamma \Delta t a_{n+1} \quad (56)$$

$$\bar{v}_n = v_n + (1 - \gamma) \Delta t a_n \quad (57)$$

$$a_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) a_{n+1} + \alpha_m a_n \quad (58)$$

$$v_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) v_{n+1} + \alpha_f v_n \quad (59)$$

$\Delta t$  یعنی گام زمانی در روابط فوق عبارت است از -  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ،  $\alpha_m, \beta, \gamma$  و  $\alpha_f$  پارامترهای الگوریتم روش عمومی شده  $\alpha$  بوده، و با روابط زیر مربوطند:

$$\gamma = \frac{1}{\gamma} - \alpha_m + \alpha_f \quad (60)$$

$$\alpha_m = \frac{\gamma \rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (61)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (62)$$

در این مقاله  $\rho_\infty$  برابر ۱ در نظر گرفته شده است. یعنی روش عمومی شده  $\alpha$ ، میرایی عددی<sup>۱</sup> ندارد. شرایط اولیه برای انتگرال گیری زمانی با روابط زیر معرفی می شوند:

$$d = y(\cdot) \quad (63)$$

$$v = \dot{y}(\cdot) \quad (64)$$

$$a = -M^{-1}(y(\cdot))F(y(\cdot), \dot{y}(\cdot)) \quad (65)$$

### 1. Numerical Damping

## ۲-۷- مشخصات سنگ فرز

مشخصات عمومی سنگ فرز در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲ مشخصات عمومی فرز انتخاب شده

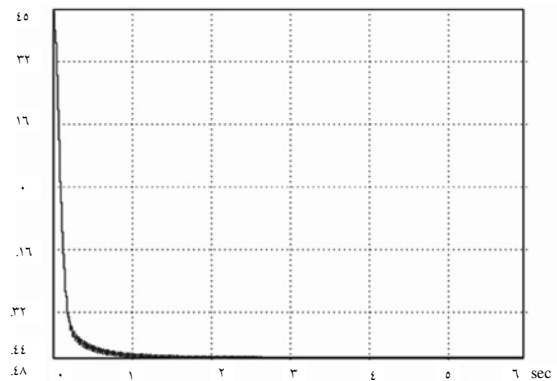
مقدار	واحد	مشخصه
۱۵۰۰	W	توان
۱۲۵	mm	حداکثر قطر دیسک
۱۱۰۰۰	rpm	دور کاری بدون بار
۲/۵	kg	وزن

سنگ فرزی که انتخاب می‌شود باید در حالت بدون دیسک نامتوازن لرزش کمی داشته باشد در واقع لرزش‌های داخلی بر اثر حرکت موتور و چرخنده‌ها حداقل باشد.

## ۳-۷- تعیین ضرایب میرایی و سفتی اسپیندل سنگ فرز به روش مدی

اولین مرحله از تحلیل مدی، نحوه سوار کردن سازه است. دو روش برای این کار وجود دارد: یک روش پایه مقید است که باید سنگ فرز به سازه دیگری که وزن آن بسیار بیشتر است بسته شود. به دلیل اینکه استفاده از این روش پایه به علت شرایط بدنه سنگ فرز امکان‌پذیر نبود، در این تحقیق از روش پایه آزاد استفاده شد.

گام بعدی انتخاب تابع تحریک و سیستم تحریک است. با فرض بر اینکه مدل دینامیکی سنگ فرز دستی مدل رتور جفکات<sup>۱</sup> باشد و مدل رتور جفکات نیز دارای شفت الاستیک ایزوتروپیک است، لذا می‌توان اندازه‌گیری‌های نیرو و شتاب را برای تعیین ضرایب سفتی و میرایی در راستای شعاعی و در هر

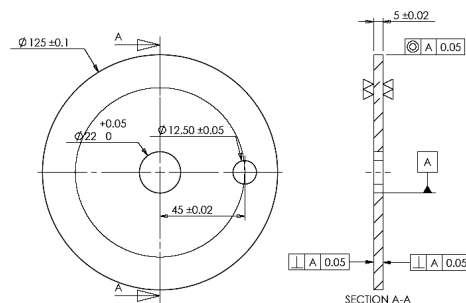
شکل ۹ پاسخ زمانی موقعیت گوی اول وقتی  $\omega/\omega_n=3$ 

به همین روش می‌توان پاسخ‌های زمانی رتور را با پارامترهای مختلف تریسم و بررسی کرد.

## ۷- تعیین پارامترهای مورد نیاز طراحی

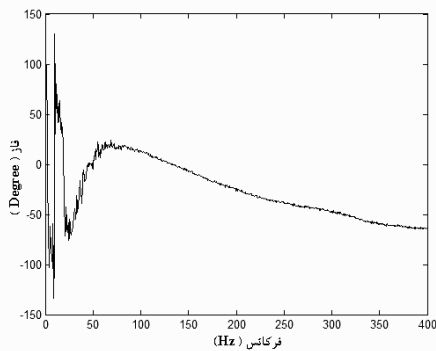
## ۷-۱-۲ دیسک با عدم توازن مشخص

به منظور مقایسه بهتر عملکرد سنگ فرز در حالت با بالانس و حالات بدون بالانس، آزمایش در شرایط یکسان لازم است. به همین منظور برای داشتن عدم توازن یکسان در دو حالت، از یک دیسک نامتوازن استفاده می‌شود. به دلیل اینکه در طراحی بالانس، باید عدم توازن دیسک معلوم باشد، لذا باید دیسکی با عدم توازن مشخص در اختیار باشد. بر اساس استاندارد ابعاد این دیسک مطابق شکل ۱۰ است. این دیسک از جنس آلومینیم با چگالی  $2840 \text{ kg/m}^3$  است.



شکل ۱۰ دیسک با عدم توازن مشخص

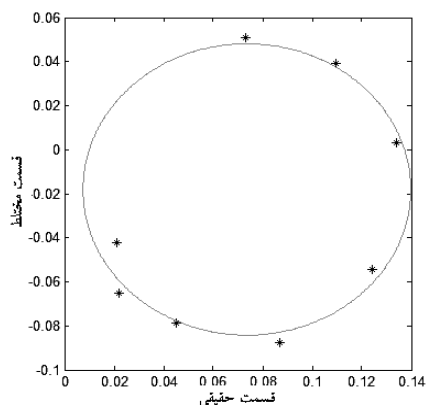
1. Jeffcott



شکل ۱۲ نمودار فاز تابع پاسخ فرکانسی محور سنگ فرز

بر اساس روش انطباق دایره<sup>۳</sup> [۱۰] ابتدا با استفاده از روش حل جبری<sup>۴</sup> دایره مدی که نزدیکترین دایره به نقاط حول فرکانس طبیعی است ترسیم می‌شود. با استفاده از برنامه‌ای که در نرم‌افزار متلب<sup>۵</sup> نوشته شده، این دایره ترسیم می‌شود که در شکل ۱۳ آورده شده است.

با توجه به اینکه مدل دیسک سنگ فرز، مدل با یک درجه آزادی در جهت شعاعی فرض شد، لذا دایره فوق بر اساس سیستم یک درجه آزادی رسم شده است از آنجا که این دایره از این به بعد بیانگر حالت سازه است لذا تفاوتی که بین این دایره و ۹ نقطه انتخاب شده از FRF وجود دارد، خطایی را به سیستم وارد می‌کند.



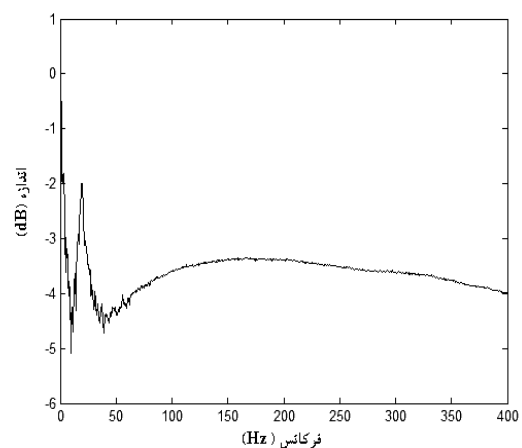
شکل ۱۳ دایره مدی سیستم SDOF<sup>۶</sup> مفروض محور سنگ فرز

3. Circle-Fit
4. Algebraic Solution
5. Matlab Program
6. Single Degree Of Freedom

جهتی انجام داد. بنابراین به تحلیلگر با حداقل دو کانال ورودی نیاز است؛ یکی برای نیرو و دیگری برای شتاب. از آنجا که تحریک ضربه تابعی است که تمامی مدهای سازه را تحریک می‌کند و همچنین به دلیل سادگی و در دسترس بودن آن، در این مقاله از این تابع استفاده شده است.

بر اساس توضیحات فوق، نتایج اندازه‌گیری به صورت دو نمودار اندازه و فاز بر حسب فرکانس در شکل ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است.

این نمودارها مقادیر اندازه و فاز تابع تحریک<sup>۱</sup> است. همان‌طور که در دو نمودار فوق مشاهده می‌شود، این تابع در فرکانس حدود ۲۰ هرتز دارای حداکثر است که این نشان‌دهنده وجود مد اول در این فرکانس است. با توجه به اینکه فرکانس کاری سنگ فرز برابر ۱۸۰ هرتز است و همچنین با توجه به نمودار<sup>۲</sup> FRF فوق که نشان می‌دهد نزدیکترین مد به فرکانس کاری همان مد اول است لذا مد اول به عنوان مد اصلی در نظر گرفته می‌شود و پارامترهای مدی در این مد محاسبه می‌شوند.



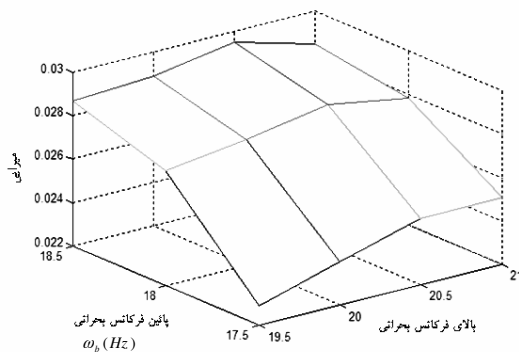
شکل ۱۱ نمودار اندازه تابع پاسخ فرکانسی محور سنگ فرز

1. Mobility
2. Frequency Response Function

سرانجام با انتخاب نقاط نصف توان<sup>۲</sup> و در حالتی که  $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$  رابطه (۷۰) به شکل زیر ساده تر می‌شود:

$$\zeta = \frac{\omega_r - \omega_1}{2\omega_r} \quad (72)$$

با ترسیم نمودار کارپت می‌توان میرایی را محاسبه کرد. در واقع نمودار کارپت ترسیم تابع معادله (۷۰) بر حسب مقادیر مختلف  $\omega_b$  و  $\omega_a$  است. این نمودار در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵ نمودار کارپت محور سنگ فرز

همان‌طور که از نمودار کارپت پیداست، مقدار میرایی در نقاط مختلف حول فرکانس طبیعی ثابت نیست. این ناشی از طبیعت سیستم‌های فیزیکی است که در عمل، در فرکانس‌های مختلف میرایی متفاوتی دارند. با توجه به نمودار کارپت مقدار متوسط  $\zeta = 0.03$  را می‌توان برای سیستم متصور شد.

در این مرحله باید ثابت مدی محاسبه شود. قبل از معرفی ثابت مدی پارامتر قطر دایره مدی یعنی  $r_{D_{jk}}$  معرفی می‌شود که در تعیین ضرایب مدی استفاده می‌شود. پارامتر دیگر، مقدار ثابت مدی یا رزیجو  $|r_{A_{jk}}|$  است.

## 2. Half-Power Point

به منظور تعیین مقدار دقیق فرکانس طبیعی بر اساس بیشینه نرخ چرخش، محل مرکز دایره و شعاع آن به روش فاصله هندسی<sup>۱</sup> محاسبه می‌شود. برای دو به دو نقاط نرخ چرخش به شکل زیر است.

$$S_W = \frac{\theta_r - \theta_1}{\omega_r - \omega_1} \quad (67)$$

اکنون با محاسبه بیشینه نرخ چرخش بر اساس معادله (۶۷) مقدار فرکانس طبیعی برابر ۱۹ هرتز به دست می‌آید که البته دقت به کار رفته بر اساس دقت آنالایزر برابر ۰/۵ هرتز است.

برای سیستم با یک درجه آزادی با میرایی لزجی روابط زیر برقرار است

$$\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \frac{1 - (\omega_a / \omega_r)^2}{(2\zeta\omega_a / \omega_r)} \quad (68)$$

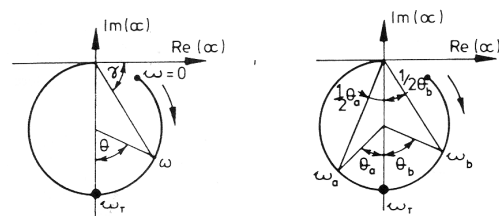
$$\tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) = \frac{1 - (\omega_b / \omega_r)^2}{(2\zeta\omega_b / \omega_r)} \quad (69)$$

$$\zeta = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_r(\omega_a \tan(\theta_a/2) + \omega_b \tan(\theta_b/2))} \quad (70)$$

که برای میرایی نرم رابطه فوق ساده می‌شود به:

$$\zeta = \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_r(\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2))} \quad (71)$$

$\theta_a$  و  $\theta_b$ ، در دایره مدی مطابق شکل ۱۴ تعریف می‌شوند.



شکل ۱۴ نمودار نایکوئیست سیستم SDOF

## 1. Geometric Distance

رابطه بین ثابت مدی و شعاع دایره مدی به صورت معادله زیر است.

$${}_r D_{jk} = \frac{|{}_r A_{jk}|}{\zeta \omega_r} \quad (۷۳)$$

با داشتن ثابت مدی می توان ضرایب مدی را یافت. ابتدا رابطه بین ثابت مدی و ضرایب مدی معرفی می شود. شرط تعامد مدهای سیستم با  $n$  درجه آزادی عبارت است از:

$$[\Phi^T][M][\Phi] = I \quad (۷۴)$$

که  $[\Phi]$  ماتریس شکل مد،  $[M]$  ماتریس جرم و  $I$  ماتریس همانی است. برای این سیستم رابطه زیر برقرار است.

$$[\Phi^T][K][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_r^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (۷۵)$$

و برای سیستمی با میرایی تناسبی<sup>۱</sup> رابطه زیر حاکم است:

$$[\Phi^T][C][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \zeta \omega_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (۷۶)$$

برای سیستم SDOF که  $n=1$  روابط (۷۴) تا (۷۶) به صورت زیر ساده می شود:

$$[\Phi^T]m[\Phi] = I \quad (۷۷)$$

$$[\Phi^T]k[\Phi] = \omega_r^2 \quad (۷۸)$$

$$[\Phi^T]c[\Phi] = \zeta \omega_r \quad (۷۹)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$[\Phi^T][\Phi] = A_r \quad (۸۰)$$

ضرایب میرایی و سفتی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$m = \nu / A_r \quad (۸۱)$$

$$k = \omega_r^2 / A_r \quad (۸۲)$$

$$c = \zeta \omega_r / A_r \quad (۸۳)$$

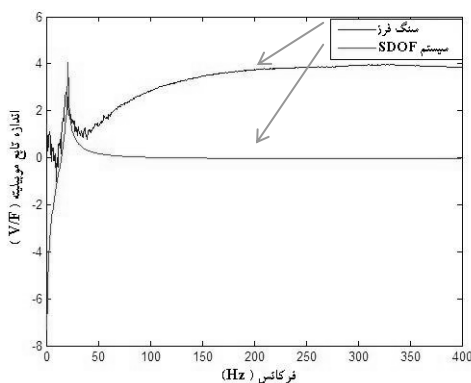
با داشتن فرکانس طبیعی، ثابت مدی و میرایی مقادیر ضریب میرایی و سفتی محاسبه می شوند:

$$k = \nu \omega_r^2 N / m \quad (۸۴)$$

$$c = \nu \zeta N \text{Sec} / m \quad (۸۵)$$

بدین ترتیب پارامترهای مدی محاسبه شد.

به منظور مقایسه می توان نمودار FRF (تابع تحرک) به دست آمده از آزمایش را همراه با نمودار تابع تحرک سیستم با یک درجه آزادی با پارامترهای مدی یکسان در مد مشترک اول ترسیم کرد. این نمودار در شکل ۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۶ مقایسه نمودارهای تابع تحرک محور سنگ فرز و سیستم با یک درجه آزادی با پارامترهای مدی یکسان

#### ۷-۴- تعیین ضریب درگ لزجی گویها

نوعی از درگ، ناشی از نیروی برشی است که در هنگام حرکت سیال بر روی جسم به وجود می آید. این نوع

1. Proportional

بر اساس معادله (۸۷) برابر  $0.1 N.m.Sec$  به دست می‌آید. در انتهای حرکت که گوی‌ها به حالت تعادل می‌رسند سرعت نسبی به صفر می‌رسد، لذا نیروی درگ لزجی نیز برابر صفر خواهد بود. با توجه به اینکه ضریب درگ لزجی در معادلات ثابت فرض شده، لذا مقدار متوسط آن در معادلات جایگزین می‌شود. یعنی ضریب درگ لزجی معادل برابر  $0.2 N.m.Sec$  است.

با توجه به اینکه یکی از پارامترهای متغیر طراحی انتخاب جرم مناسب گوی است، لذا می‌توان این قسمت را در بخش طراحی مطرح کرد؛ اما تغییرات کم در چگالی و لزجت سیال، شعاع چرخش گوی‌ها و قطر گوی‌ها که تغییرات کمی را در عدد رینولدز موجب می‌شود، در ناحیه  $Re \geq 2 \times 10^3$  ضریب درگ تقریباً ثابت می‌ماند و چون در طراحی ما پارامترهای متغیر بهینه نزدیک به اعداد انتخاب شده در مثال فوق هستند و همچنین تأثیر تغییرات کم در ضریب درگ فقط در زمان رسیدن به پایداری است، بنابراین مقدار این ضریب در طراحی، همان عدد  $D_m = 0.2 N.m.Sec$  فرض می‌شود.

## ۸- طراحی ADB برای سنگ فرز

همان‌طور که در بخش دوم بحث شد، برای طراحی بالانس دینامیکی خودکار یک صفحه‌ای به ۹ متغیر به‌عنوان ورودی در معادلات دینامیکی و تحلیل پایداری است. در شکل ۱۷ این ورودی‌ها نشان داده شده است. واحدهای هر یک از متغیرها در سیستم واحدهای SI در جدول ۱ آورده شده است. با استفاده از روابط مطرح شده در بخش ۲ و پارامترهای به دست آمده از بخش‌های قبل، پاسخ‌های زمانی در وضعیت‌های مختلف بررسی می‌شود تا طراحی بهینه‌ای به دست آید.

درگ، درگ لزجی نامیده می‌شود. ضریب بدون بعدی تعریف می‌شود بنام ضریب درگ لزجی که با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$D = \frac{\gamma F_D}{A_c \rho_f v^2} \quad (86)$$

$$Re = \frac{d_p v}{\nu_f} \quad (87)$$

که  $F_D$  نیروی درگ لزجی بر روی ذره،  $A_c$  سطح مقطع مؤثر ذره،  $\rho_f$  چگالی سیال،  $\nu_f$  «سرعت نسبی،  $Re$  عدد رینولدز،  $d_p$  قطر ذره،  $\nu_f$  لزجت سینماتیکی سیال است. روابط مختلفی برای محاسبه ضریب درگ لزجی ارائه شده که دو فرمول زیر رایجترین آنهاست. در ناحیه  $Re \leq 2 \times 10^3$  معادله آبراهام<sup>۱</sup> به خوبی ضریب درگ را توصیف می‌کند:

$$D = 0.28 \left(1 + \frac{9.06}{Re^{0.5}}\right)^2 \quad (88)$$

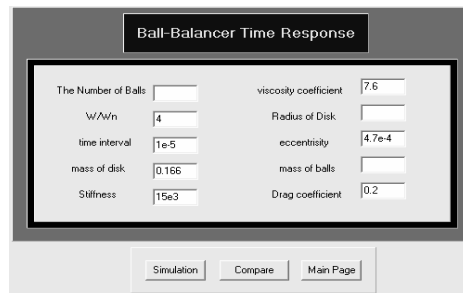
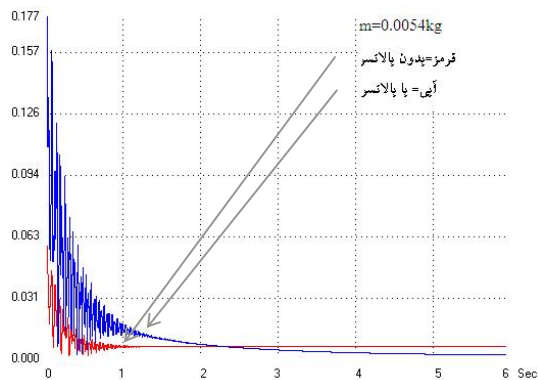
و در ناحیه  $Re \leq 2 \times 10^5$  این توصیف با معادله تورنون-لونسپیل<sup>۲</sup> انجام می‌شود.

$$D = \frac{\gamma \xi}{Re} (1 + 0.173 Re^{0.75}) + \frac{0.413}{1 + 16300 Re^{-1.19}} \quad (89)$$

به‌عنوان مثال اگر سیال مورد نظر، پارس بابک ۶۸ باشد چگالی و لزجت آن به ترتیب برابر  $\rho_f = 883 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu_f = 68 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  است. اگر شعاع چرخش  $0.04 \text{ m}$  و قطر گوی  $0.11 \text{ m}$  انتخاب شود، در ابتدای حرکت که سرعت چرخشی نسبی برابر  $1100 \text{ rpm}$  است عدد رینولدز بر اساس معادله (۸۵) برابر  $7500$  و ضریب درگ

1. Abraham Equation  
2. Turton-Levenspiel Equation





شکل ۱۷ پارامترهای ورودی معادلات حرکت محور سنگ فرز با ADB

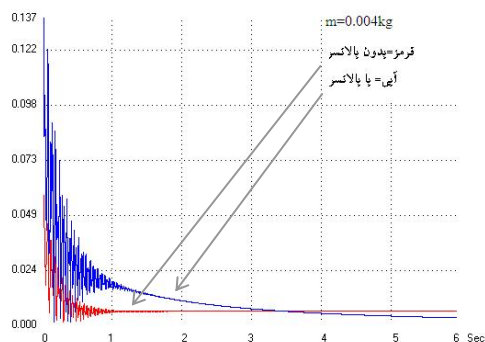
شکل ۱۹ پاسخ زمانی در حالتی که  $R=0.038m$  و  $n=5$  ثابت و جرم گوی  $m=0.0054kg$  است.

همان طور که از مقایسه دو شکل ۱۸ و ۱۹ بر می آید، وقتی که جرم گوی‌ها افزایش می یابد، زمان رسیدن به تعادل کاهش می یابد اما دامنه ارتعاش یعنی  $r$  افزایش می یابد و نکته مهمتر - که یکی از اهداف طراحی نیز هست - این است که مقدار خطای ماندگار کاهش می یابد. بنابراین گوی با جرم بیشتر یعنی  $m=0.0054kg$  انتخاب می شود.

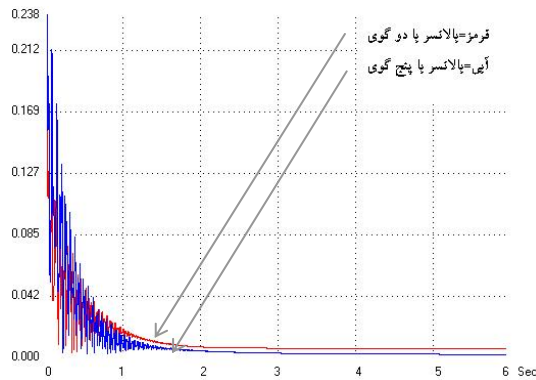
گزینه بعدی تغییر شعاع چرخش است. از آنجا که شعاع دیسک برابر  $0.0625m$  است، لذا نباید شعاع چرخش بیشتر از این مقدار باشد. اگر شعاع چرخش بزرگ باشد، باعث افزایش وزن بالانسر می شود و از آنجا که خطا در پروسه ساخت و مونتاژ بالانسر گریزناپذیر است، لذا خود بالانسر باعث افزایش عدم توازن می شود. لذا هرچه شعاع چرخش کوچکتر باشد هم از نظر ظاهر و هم از نظر ساخت بهتر است. با انتخاب گوی به تعداد  $n=5$  و وزن  $m=0.0054kg$  می خواهیم تأثیر تغییرات  $R$  را بینیم. در شکل ۲۰ و ۲۱ نمودار پاسخ زمانی به ترتیب برای دو مقدار  $R=0.0325m$  و  $R=0.038m$  رسم شده است.

بدین منظور برای این شبیه سازی ها، برنامه ای کامپیوتری به زبان دلفی ارائه شده است. الگوریتم و برنامه کامپیوتری مربوط به روش  $\alpha$ ، برای به دست آوردن پاسخ های زمانی در [۱۱] آورده شده است. از ۹ متغیر فوق، ۶ متغیر که در بخش های پیشین محاسبه شده ثابتند. ۳ متغیر دیگر که در شکل ۱۷ نیز جایشان خالی است، به عنوان پارامتر طراحی قابل تغییر است. به دلیل محدودیت در فضای پشت دیسک نمی توان گویی را با قطر بیش از ۱۱ میلی متر انتخاب کرد و همچنین نمی توان شعاع چرخش را بیشتر از شعاع دیسک در نظر گرفت. بهینه سازی با تغییر جرم گوی ها شروع می شود. لازم است در این قسمت به محدودیت بازار در انتخاب گوی ها توجه داشت.

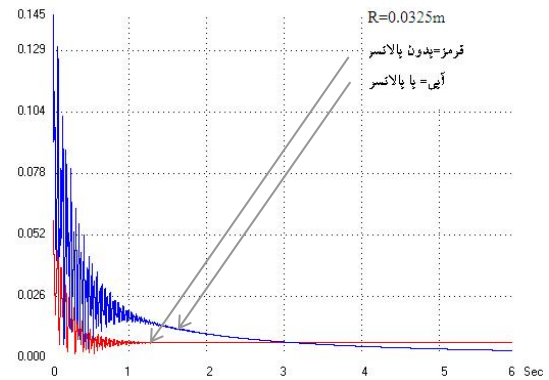
چنانچه  $R=0.038m$  و  $n=5$  باشد پاسخ زمانی به ازای دو جرم  $m=0.0054kg$  و  $m=0.004kg$  به ترتیب به صورت شکل ۱۸ و ۱۹ است.



شکل ۱۸ پاسخ زمانی در حالتی که  $R=0.038m$  و  $n=5$  ثابت و جرم گوی  $m=0.004kg$  است.

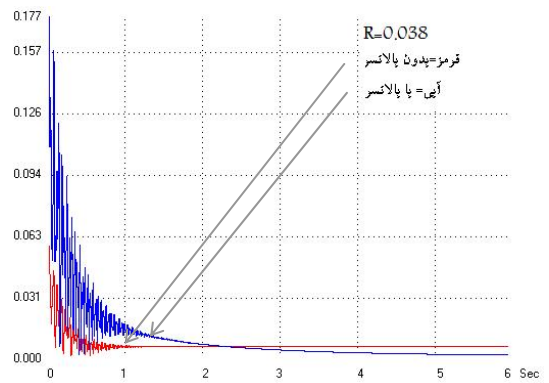


شکل ۲۲ پاسخ زمانی دو حالت با  $R=0.0325m$  و  $m=0.005kg$  ثابت ولی با تعداد گوی متفاوت



شکل ۲۰ پاسخ زمانی در حالتی که  $n=5$ ،  $m=0.005kg$  ثابت و شعاع چرخش  $R=0.0325m$

با مقایسه دو نمودار ترسیم شده در شکل ۲۲ واضح است که با لانسر با تعداد گوی  $n=5$  عملکرد بهتری نسبت به حالت  $n=2$  گوی دارد. یعنی هم خطای ماندگار کمتری دارد و هم در مدت زمان کوتاهتری به حالت تعادل می‌رسد. هر چند دامنه ارتعاش قبل از رسیدن به تعادل در آن کمی، است اما قابل اغماض است. لذا نمودار پاسخ زمانی با لانسر با  $n=5$  گوی و مشخصات دیگری که در شکل ۱۷ درج شده، به‌عنوان نمودار بهینه با لانسر برای سنگ فرز با دیسک نابالانس مشخص انتخاب می‌شود. تمامی پارامترهای طراحی مفروض و محاسبه شده در جدول ۳ آورده شده است.



شکل ۲۱ پاسخ زمانی در حالتی که  $n=5$ ،  $m=0.005kg$  ثابت و شعاع چرخش  $R=0.038m$

جدول ۳ پارامترهای به‌دست آمده از طراحی ADB

پارامتر	واحد	مقدار
$\omega/\omega_n$	-	۴
$M$	$Kg$	۰/۱۶۶
$\varepsilon$	$m$	۰/۰۰۰۴۷
$k$	$N/m$	۱۵۰۰۰
$c$	$N.Sec/m$	۷/۶
$d$	$N.m.Sec$	۰/۲
$R$	$m$	۰/۰۳۸
$m$	$Kg$	۰/۰۰۵۴
$n$	-	۵

با مقایسه دو شکل ۲۰ و ۲۱ می‌توان دریافت که با افزایش مقدار شعاع چرخش گوی‌ها، زمان رسیدن به تعادل کوتاهتر شده اما دامنه ارتعاش قبل از رسیدن به تعادل افزایش می‌یابد و همچنین مقدار خطای ماندگار کاهش می‌یابد. بنابراین شعاع چرخش برابر  $R=0.038m$  انتخاب می‌شود.

گزینه آخر انتخاب تعداد گوی‌ها است. برای دو حالت با جرم و شعاع چرخش یکسان اما با تعداد متفاوت گوی نمودار پاسخ زمانی ترسیم می‌شود - که در شکل ۲۲ نشان شده است- تا به تعداد گوی بهینه برسیم.

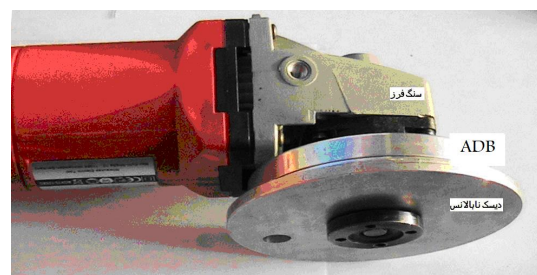
## ۹- ساخت ADB

بر اساس مقادیر جدول ۳ و محدودیت‌های طراحی، ADB ساخته شده در شکل ۲۳ نشان داده شده است.



شکل ۲۳ قطعات ADB

برای سبکی، قطعات از جنس آلومینیوم انتخاب شده است. با توجه به اینکه داخل شیار پر از روغن است و این روغن تحت فشار نیست، لذا در آبیندی کردن بالانس می‌توان از نمدهای کاغذی معروف به واشر ویکتوریا استفاده کرد. در شکل ۲۴ سنگ فرز همراه با ADB و دیسک نابالانس نشان داده شده است.



شکل ۲۴ ADB و دیسک نا متوازن نصب شده بر روی سنگ فرز

## ۱۰- بحث و نتیجه گیری

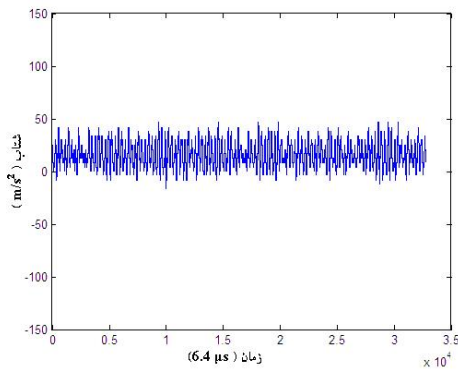
در این مقاله با استفاده از معادله لاگرانژ، معادلات حرکت رتور با ADB نوشته شد. سپس با استفاده از روش

اغتشاشی، معادلات تغییرات خطی و نقاط تعادل به دست آمد. بر اساس معادلات تغییرات و با استفاده از قانون راث-هرویتز، پایداری دینامیکی حول نقاط تعادل بررسی شد. به منظور تأثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد ADB به صورت پارامتری، تحلیل پایداری برای یک محور با عدم توازن فرضی انجام شده است. به منظور تأیید پایداری سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی نیز با استفاده از روش عمومی شده در حالت‌های مختلف محاسبه و ترسیم شده است.

به منظور طراحی ADB برای سنگ فرز ابتدا پارامترهای مدی سنگ فرز به روش تحلیل مدی به دست آمد و نیز سایر پارامترهای لازم محاسبه شد. با رسم نمودارهای پاسخ زمانی بر اساس پارامترهای ثابت و متغیر مفروض طراحی در حالت‌های مختلف و با بررسی آن‌ها، بهترین حالت برای ADB انتخاب شد و بر اساس آن، ADB مناسب برای سنگ فرز ساخته شد.

به منظور بررسی عملکرد ADB ساخته شده، باید سنگ فرز با دیسک نامتوازن در حالت با بالانس و بدون بالانس آزمایش شود این آزمایش که مطابق استاندارد ISO۸۶۶۴ انجام شده، برای دو حالت بدون بالانس و با بالانس انجام شده است. شکل ۲۴ ارتعاش را بر روی بدنه سنگ فرز در حالت بدون بالانس، شکل ۲۵ در حالت با بالانس شرکت میلواکی و شکل ۲۶ در حالت با بالانس ساخته شده نشان می‌دهد. لازم است توضیح دهیم که برای اندازه‌گیری از شتاب‌سنج پیزوالکتریک استفاده شده است.

ADB ساخته شده توسط شرکت میلواکی دارای سطح ارتعاش بالاتری نسبت به ADB ساخته شده در این تحقیق است. علت این موضوع این است که تمامی محاسبات این تحقیق دقیقاً برای عدم توازن تعریف شده‌ای انجام شده است؛ اما شرکت میلواکی ممکن است محاسبات خود را بر مبنای عدم توازن تعریف شده



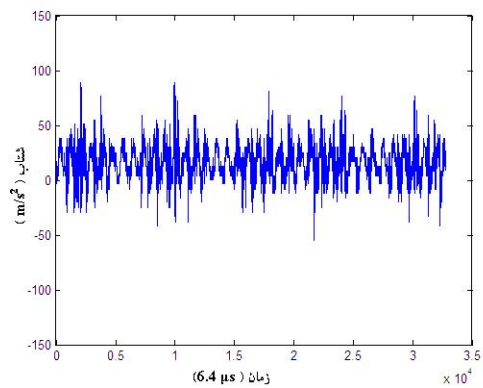
شکل ۲۶ نمودار شتاب بدنه فرز با ADB ساخته شده

## علائم

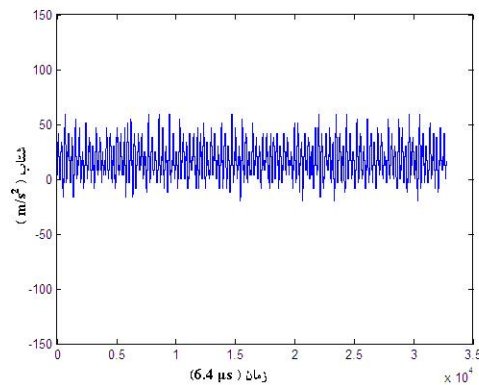
 $A_c$  سطح مقطع مؤثر سیال $C$  ضریب میرایی معادل $C$  مرکز هندسی رتور $D$  ضریب درگ لزجی $d_p$  قطر ذره $F$  تابع اتلاف ریلی $F_D$  نیروی درگ لزجی $g$  شتاب گرانشی $G$  مرکز جرم $I_G$  ممان اینرسی جرمی رتور $j$  نوبت تکرار هر گام زمانی $J^{(j)}$  ژاکوبین ماتریس در تکرار  $j$ ام $k$  ضریب سفتی معادل $m$  جرم هر گوی $M$  جرم مجموعه رتور $M$  ماتریس جرم $n_B$  تعداد گوی‌ها $q_k$  مؤلفه عمومی $r$  مؤلفه شعاعی نقطه  $C$  $r_{B_i}$  بردار موقعیت گوی  $i$ ام

دیگری انجام داده باشد و بالانس آن برای آن عدم توازن بهتر عمل کند. با این توضیحات بدیهی است که نتایج این تحقیق برای عدم توازن تعریف شده در این تحقیق بهتر باشد. به بیان دیگر به دلیل یکی نبودن عدم توازن ( $\varepsilon$ ) در محاسبات این تحقیق و شرکت میلواکی، محدوده عملکرد این دو بالانس نیز یکی نیست.

در استاندارد ISO ۱۶۶۴-۱ مقدار استاندارد ارتعاش بر روی بدنه برابر  $5m/s^2$  است که ملاحظه می‌شود مقادیر سطح ارتعاش به دست آمده بعد از نصب ADB در بیشینه مقدار برابر یا کمتر از این مقدار است. چنانچه میزان عدم توازن تغییر کند، ADB می‌تواند محدوده‌ای از این عدم توازن‌ها (شرط لازم برای توازن،  $\varepsilon/2R \geq nm/M$  است) را متعادل کند.



شکل ۲۴ نمودار شتاب بدنه فرز بدون ADB



شکل ۲۵ نمودار شتاب بدنه فرز با ADB شرکت میلواکی

- [4] Thearle E.L., "Automatic Dynamic Balancers", Machine Design, Vol. 22, 1950, pp 119-124.
- [5] Alexander J.D., "An Automatic Dynamic Balancer", Proceedings for the Second Southeastern Conference, 1964, pp 415-426.
- [6] Cade J.W., "Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms", Design News, 1965, pp 234-239.
- [7] Zhou Sh., Shi J., "Active Balancing and Vibration Control of Rotating Machinery: A Survey", The Shock and Vibration Digest, Vol. 33, No. 4, 2001, pp 361-371.
- [8] Chung J., Ro D.S., "Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms", Journal of Sound and Vibration 5, 1999, pp1035-1056.
- [9] Chung J., Jang I., "Dynamic Response and Stability Analysis of an Automatic Ball Balancer for a Flexible Rotor", J. Sound Vibration 259, 2003, pp 31-43.
- [10] Ewins D.J., "Modal Testing: Theory, Practice and Application", Second Edition, 1994.

 $r_G$  بردار موقعیت مرکز جرم $R$  شعاع چرخش گویها

Re عدد رینولدز

 $Sw$  نرخ چرخش $T$  انرژی جنبشی رتور $V$  انرژی پتانسیل رتور $\mathcal{E}$  خروج از مرکزیت رتور $v_f$  لزجت سینماتیکی سیال $\theta$  مؤلفه مماسی نقطه  $C$  $\rho_f$  چگالی سیال $\phi_i$  موقعیت زاویه‌ای گوی $\omega$  سرعت زاویه‌ای رتور $\omega_a$  فرکانس بالای فرکانس بحرانی $\omega_b$  فرکانس پایین فرکانس بحرانی $\omega_r$  فرکانس بحرانی $\bar{k}$  میرایی

## ۱۱- منابع

- [1] Wovk V., "Machinery Vibration: Balancing", McGraw-Hill, New York, 1995.
- [2] Darlow M.S., "Balancing of High-Speed Machinery", Springer-Verlag, New York, 1989.
- [3] Goodman T.P., "A Least-Squares Method of Computing Balance Corrections", ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry, August 1964, pp 273-277.

[۱۱] پایان نامه دوره کارشناسی ارشد، جواد احمادی