



## تحلیل رفتار الاستوپلاستیک و آغاز تسلیم در لوله‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی

سعید انصاری صدرآبادی<sup>1</sup>، غلامحسین رحیمی شرابف مقدس<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، 1411713116، rahimi\_gh@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 آذر 1394

پذیرش: 19 دی 1394

ارائه در سایت: 25 بهمن 1394

کلیدواژگان:

تحلیل الاستوپلاستیک

مواد هدفمند

لوله استوانه‌ای

سطح تسلیم

بررسی پارامترها

### چکیده

در این مقاله از مواد هدفمند در لوله‌های استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم تحت فشار که کاربرد گسترده‌ای در صنعت و محیط‌های دمایی بالا دارند استفاده شده است. براساس معادلات حاکم، معادله دیفرانسیل تنش‌ها در حالت پلاستیک به دست آمده است که می‌تواند کاربرد گسترده‌ای در بررسی رفتار لوله‌ها در حالت الاستوپلاستیک داشته باشد. بر روی توزیع دما و روابط تنش - کرنش در این مخازن، تحت بارگذاری فشار داخلی و اختلاف دما، بحث شده است. خصوصیات این گونه مواد به صورت پارامترهایی با توابعی متغیر نسبت به شعاع در نظر گرفته شده‌اند. همچنین در این کار با تعریف عاملی به نام متغیر تسلیم، اثر این پارامترها بر موقعیت شروع ناحیه‌ی پلاستیک و دماهای تسلیم و روند تغییرات تنش‌ها تحت بارگذاری‌های متفاوت در طول ضخامت لوله بررسی شده است. سپس نشان داده شده است که با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان ساختار لوله را بهینه کرد. در واقع با بررسی چهار پارامتر دمایی داخلی و خارجی، فشار داخلی و عامل تنش تسلیم، باهم می‌توان تحلیل بهتری روی لوله‌ی استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند داشت، که این کار در پایان مقاله نشان داده شده است.

## Elasto-plastic behavior analysis and yield onset in FG cylindrical tubes under mechanical and thermal loads

Saeid Ansari Sadrabadi, Gholamhosein Rahimi Sharbaf Moghadas\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 1411713116 Tehran, Iran, rahimi\_gh@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 09 December 2015  
Accepted 09 January 2016  
Available Online 14 February 2016

#### Keywords:

Elasto- plastic analysis  
FGM  
Cylindrical tube  
Yield surface  
Investigation of parameters

### ABSTRACT

In this paper, FGMs are used as non-uniform materials in high temperature environments, especially in industries like aircraft, aerospace vehicles, nuclear plants and engineering structures. Different industries use them in thin and thick walled cylindrical pressure vessels. Based on the governing equations, differential equation of stresses is obtained in plastic state which can be widely used in the study of vessel and pipe behavior in elasto- plastic state. This research studies the temperature distribution and stress - strain relationships in the tube under internal pressure and temperature difference. Properties of these materials are considered as variable parameters function of radius. In this work, effects of these parameters have been investigated on yielding and the yield temperatures and stress changes under different loading in thickness of the tubes. Furthermore, it is shown that the structure of the tubes can be optimized by choosing appropriate parameters. In fact, by studying the four parameters, internal and external temperature, internal pressure and the yield stress together can be better analyzed on a functionally graded cylindrical tube, which has been shown at the end of the article.

### 1- مقدمه

و پیوسته تغییر کردن رفتار آن‌ها، به صورت توابع وابسته (توابع توانی از شعاع) در نظر گرفته شده‌اند.

در این‌جا پارامترهای ماده مانند مدول الاستیسیته، ضریب رسانندگی گرمایی، ضریب انبساط گرمایی و تنش تسلیم به شکل توابع توانی متغیر نسبت به شعاع در نظر گرفته شده‌اند. این توابع، تغییرات خواص مواد هدفمند را در طول ضخامت مخازن به صورت آرام و پیوسته مقرر می‌کنند. با استفاده از سطح تسلیم ترسکا، گامر [1]، تغییرات تنش‌ها و جابجایی‌ها در یک مخزن الاستیک-پلاستیک تحت فشار داخلی را بیان کرده است. هورگان و چان [2] مسأله‌ی استوانه‌ی توخالی تحت فشار را برای مواد الاستیک خطی و

در سال‌های اخیر با توسعه‌ی موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها که چند نمونه‌ی کاربردی آن در شکل 1 آورده شده است؛ نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم‌تر از لحاظ مکانیکی احساس شده است. مواد هدفمند<sup>1</sup>، موادی با ریز ساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آن‌ها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج آن، ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک بدست می‌آیند. با توجه به خواص مواد هدفمند

1- FGM

Please cite this article using:

S. Ansari Sadrabadi, Gh. Rahimi Sharbaf Moghadas, Elasto-plastic behavior analysis and yield onset in FG cylindrical tubes under mechanical and thermal loads, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 159-166, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Ansari Sadrabadi, Gh. Rahimi Sharbaf Moghadas, Elasto-plastic behavior analysis and yield onset in FG cylindrical tubes under mechanical and thermal loads, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 159-166, 2016 (in Persian)



**Fig. 1** Samples of use of pressure pipes as gas and oil tubes in chemical different industries like petrochemical projects

شکل 1 نمونه‌هایی از کاربرد لوله‌های تحت فشار در صنایع متفاوت شیمیایی، به عنوان لوله‌های گاز و روغن مورد استفاده در پروژه‌های پتروشیمی همسانگرد از جنس مواد هدفمند نشان دادند.

در سال 2006، توسط اراسلان و اکیس [3]، حل‌های تحلیلی کرنش صفحه‌ای برای مسائل لوله‌ای تحت فشار الاستیک و الاستیک-پلاستیک از جنس مواد هدفمند در چارچوب تئوری تغییر شکل‌های کوچک<sup>1</sup> ارائه شد. در این حل، مدول الاستیسیته و سطح تسلیم محوری به صورت تغییرات شعاعی به دو شکل پارامتریک<sup>2</sup> و سهمی وار<sup>3</sup> فرض شده‌اند. تحلیل مدول پلاستیک با در نظر گرفتن معیار تسلیم ترسکا، قانون جریان<sup>4</sup> و رفتار ایده‌آل پلاستیک ماده پایه‌گذاری شده است. تغییرات تنش در حالت الاستیک، جزئی پلاستیک<sup>5</sup> و کاملاً پلاستیک بررسی شده‌اند. نشان داده شده است که پاسخ الاستو-پلاستیک لوله‌ی تحت فشار از جنس مواد هدفمند به طور چشمگیری به علت ناهمگن بودن مواد تأثیر می‌پذیرد. همچنین بگونه‌ی ریاضی، با انتخاب مناسب پارامترهای ماده، حل الاستوپلاستیک ناهمگن به حل همگن کاهش داده شده است.

در اکثر مقاله‌های ارائه شده، تغییرات خواص ماده در مواد ناهمگن به صورت توانی نشان داده شده‌اند اما در مقاله‌ای که توسط تاناکا و اوزتورک [4] در سال 2007 ارائه شد، خواص ماده به صورت تابع نمایی نشان داده شده و تنش‌های درون استوانه‌های جدار ضخیم از جنس مواد هدفمند به دست آمده‌اند. از حل‌های سری توانی برای تنش‌ها و جابجایی‌ها در مخازن استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی با تغییر شکل کوچک استفاده شده است. در سال 2009، جباری و همکاران [5] در مقاله‌ای، یک حل کاملاً تحلیلی از ترموالاستیسیته برای استوانه‌ی توخالی و کوتاه از جنس مواد هدفمند، تحت بارگذاری حرارتی و نیروهای مکانیکی دائمی و متقارن دو بعدی نشان دادند. پراکندگی دما تابعی از جهت‌های طولی و شعاعی فرض شده است. معادلات ناویر بدون استفاده از تابع پتانسیل حل شده‌اند و این نوع تحلیل، تعداد زیادی از تنش و جابجایی و با ترکیبی از آن‌ها را در شرایط مرزی شامل می‌شود. خواص مواد به صورت تابع توانی متغیر نسبت به شعاع بیان شده‌اند. این آنالیز برای دو نوع از شرایط مرزی در دو انتهای استوانه نشان داده شده است. حسینی و خرمی [6] به تحلیل ارتعاش پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. مرجع [7] بر روی آنالیز انتقال حرارت برای استوانه و کره‌های توخالی و ناهمگن ساخته شده از مواد هدفمند تمرکز دارد. در این کار، پارامترها به صورت تابع نمایی فرض شده‌اند. در این مقاله، استوانه و کره متقارن فرض شده‌اند که منجر به بررسی انتقال حرارت به شکل یک بعدی شده است. در سال 2012، صادقی و همکاران [8] به روی استوانه در سایز میکرو از جنس مواد هدفمند کار کرده و تحلیل گرادیان

1- small deformation theory  
2- Parametric  
3- Parabolic  
4- Associated flow rule  
5- Partially plastic

کرنش را داشته‌اند. همچنین وانگ و وی [9] در همین سال به روی تأثیرات پارامترهای غیرهمگن ماده به روی رفتار استوانه جدار ضخیم با ساختار هدفمند کار کرده‌اند. توسط تقوایی‌پور و همکاران [10]، استوانه‌ی توخالی ساخته شده از مواد هدفمند از طریق روش اجزا محدود بررسی شده است. عارفی و رحیمی [11] اثر ناهمگنی روی رفتار الاستیک استوانه ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی بررسی کرده‌اند. بوسیله پانگ و همکاران [12]، آنالیز ترموالاستیسیته در استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری جریان گرما و تنش‌های حرارتی انجام شده است. نایبی و انصاری [13]، به تحلیل الاستوپلاستیک مخازن جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری فشار داخلی و گرادیان دما پرداخته‌اند. در سال 2014، توسط قنبری و فرهت‌نیا [14] به تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای جداره ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی پرداخته شده است.

کاربردی‌ترین شمای سختی‌سازی غیرایزوتروپ، مدل سختی سینماتیکی خطی می‌باشد. در این مدل، دامنه‌ی ناحیه‌ی الاستیک ثابت باقی می‌ماند ولی این دامنه در فضای تنش جابجا می‌گردد که اثر باشینگر را در نظر می‌گیرد. در اینجا از این مدل در به دست آوردن روابط پلاستیک استفاده شده است. در این مقاله، مخازن و لوله‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری فشار داخلی و گرادیان دما بررسی شدند. در اینجا خواص ماده‌ی هدفمند به شکل تابع توانی از شعاع در نظر گرفته شده‌اند. در ابتدا رابطه‌ی توزیع دما در یک مدل استوانه‌ای بر اساس قانون اول ترمودینامیک و در نظر گرفتن استوانه‌ی متقارن محوری و تنها تغییرات شعاعی، بدست می‌آید. سپس به روابط تنش‌ها با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل‌های کوچک و روابط تعادل تنش‌ها و سازگاری کرنش‌ها می‌توان رسید. برای حل تحلیلی رابطه‌ی تنش از روش کاهش مرتبه در ریاضیات استفاده شده است. برای بدست آوردن روابط پلاستیک از قانون جریان و رفتار سینماتیک خطی و مدل پراگر استفاده می‌شود. بعد از بدست آوردن روابط نتایج مهمی استخراج می‌گردد که شامل: الف) ارتباط خواص ماده هدفمند، که به صورت پارامترهای شعاعی نشان داده شده‌اند، با حد بارگذاری‌های فشار داخلی و اختلاف دما و همچنین با شروع تسلیم، ب) تأثیر بارگذاری‌های فشار داخلی و گرادیان دما در به تسلیم رسیدن ماده، ج) بررسی سه بارگذاری دمای داخلی، دمای خارجی و فشار داخلی به همراه پارامتر مربوط به تنش تسلیم در یک نمودار، می‌باشد. که به صورت کلی می‌توان گفت: ترکیبی از بررسی‌های رفتاری روی مخازن، شامل ناحیه‌ی پلاستیک و مواد هدفمند و بارگذاری فشار داخلی و گرادیان دما و به نوعی نشان دادن توانایی بهینه سازی با تغییرات چهارپارامتر انجام شده است.

## 2- معادلات حاکم

ساختار کلی این پژوهش بدین شرح می‌باشد که در ابتدا توزیع دما را در کل لوله با توجه به فرضیات متقارن محوری بودن استوانه و تغییرات در راستای شعاع و همچنین نداشتن منبع انرژی بدست آورده می‌شود. سپس روابط الاستیک بر اساس نظریه‌ها و قوانین ذکر شده در ادامه، بدست می‌آیند. در پایان با ترکیب این روابط در کرنش کل بر اساس مجموع کرنش‌های مکانیکی و حرارتی و عملیات محاسباتی بر روی آن‌ها به رابطه توزیع تنش شعاعی می‌توان دست یافت. نوآوری مهم در این پژوهش بدست آوردن روابط الاستوپلاستیک بر اساس روند گفته شده برای حل الاستیک می‌باشد ولی با این تفاوت که کرنش پلاستیک نیز اضافه می‌گردد. بدست آوردن این رابطه

کاربردن رابطه‌ی تعادل (10) می‌توان با انتگرال‌گیری و استفاده از روش کاهش مرتبه [15] به معادله‌ی (11) رسید.

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{1}{r}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (10)$$

$$\sigma_r = c_3 r^{\lambda_1} + c_4 r^{\lambda_2} + c_5 r^{l_1 + \lambda_1} + c_6 r^{l_2 + \lambda_1} + c_7 r^{l_3 + \lambda_2} + c_8 r^{l_4 + \lambda_2} \quad (11)$$

در معادله (11)،  $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, \lambda_1, \lambda_2, l_1, l_2, l_3, l_4$  ثابت‌های به دست آمده‌اند که در رابطه‌ی (12) آورده شده‌اند و  $c_3$  و  $c_4$  ثابت‌هایی هستند که از شرایط مرزی مشخص می‌شوند. این شرایط مرزی در رابطه‌ی (13) آورده شده‌اند.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(m_2 - 2 \pm \sqrt{(2 - m_2)^2 + 4(1 - \nu)m_2})$$

$$l_1 = m_2 + m_3 - m_1 - \lambda_1$$

$$l_2 = m_2 + m_3 - \lambda_1$$

$$l_3 = m_2 + m_3 - m_1 - \lambda_2$$

$$l_4 = m_2 + m_3 - \lambda_2$$

$$c_5 = \frac{E_0 \alpha_0 c_1 (m_3 - m_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1) b^{m_2 + m_3} l_1}$$

$$c_6 = \frac{E_0 \alpha_0 c_2 m_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b^{m_2 + m_3} l_2}$$

$$c_7 = -\frac{E_0 \alpha_0 c_1 (m_3 - m_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1) b^{m_2 + m_3} l_3}$$

$$c_8 = \frac{E_0 \alpha_0 c_2 m_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) b^{m_2 + m_3} l_4} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \sigma_r(a) = -p \\ \sigma_r(b) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

همان‌طور که در رابطه‌ی (11) مشاهده می‌گردد، اگر فرض شود که ماده همگن است (مثلاً فولاد خالص) و  $\lambda_1 = l_1 = l_2 = 0$  و  $\lambda_2 = l_3 = l_4 = -2$ ، پس این رابطه به شکل رابطه‌ی (14) در می‌آید که رابطه‌ی معلومی برای استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار می‌باشد و صحت روابط را نشان می‌دهد.

$$\sigma_r = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{r^2} \quad (14)$$

در رابطه‌ی (14)  $\text{const}_1$  و  $\text{const}_2$  دو ثابت هستند. برای حل پلاستیک از تنسور تنش و تنش جابجایی سطح تسلیم استفاده شده و از آن‌ها تنسورهای انحرافی به دست آمده است. برای رابطه‌ی تنش‌های انحرافی جابجایی سطح تسلیم و کرنش‌های پلاستیک از مدل پراگر [13] استفاده شده است که آن به صورت (15) نشان داده می‌شود:

$$dX'_{ij} = m d\varepsilon_{ij}^p \quad (15)$$

ضریب پراگر نیز به صورت تابع توانی از شعاع در نظر گرفته شده است:

$$m = m_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{m_5} \quad (16)$$

$m_0$  و  $m_5$  از پارامترهای ماده می‌باشند. برای تابع تسلیم  $F$ ، از معیار ون میسر [13] استفاده می‌گردد:

$$F = \frac{1}{2}(\sigma'_{ij} - X'_{ij})(\sigma'_{ij} - X'_{ij}) - \frac{1}{3}\sigma_y^2 \quad (17)$$

برای کرنش‌های پلاستیک از قانون جریان جایگزینی [13] استفاده می‌شود:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (18)$$

هم‌اکنون با مشتق‌گیری از تابع تسلیم نسبت به تنش‌ها (رابطه (19)) و بدست آوردن  $d\lambda$  با صفر قرار دادن دیفرانسیل تابع تسلیم (رابطه (20)) و سپس با جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی (18) و انتگرال‌گیری از آن (رابطه (21))

مهم در بررسی رفتار ماده تحت بارگذاری‌های متناوب در تحقیقات آینده کمک شایانی خواهد نمود.

برای در نظر گرفتن پارامترهای مربوط به ماده هدفمند، با توجه به مطالعه پیشینه‌ی تحقیقات زیاد، از تابع توانی شعاعی استفاده شده است. رابطه‌ی کلی معادله‌ی انتقال حرارت که در آن  $k$ ، ضریب رسانندگی و  $T$ ، تغییرات دما را نشان می‌دهد به صورت رابطه (1) می‌باشد:

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = 0 \quad (1)$$

کاملاً روشن است که با بسط آن در مختصات استوانه‌ای بدون در نظر گرفتن منبع گرما، همچنین با تغییرات دما در راستای شعاع و با توجه به این که دما در طول زمان تغییر نمی‌کند و متقارن محوری بودن لوله‌ی استوانه‌ای این معادله به شکل (2) در می‌آید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2)$$

رابطه‌ی توانی برحسب شعاع برای ضریب رسانندگی به صورت (3) نشان داده می‌شود:

$$k(r) = k_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{m_1} \quad (3)$$

که در آن  $k_0$  از جنس ضریب هدایت و  $m_1$ ، عامل‌های ماده می‌باشند. برای توزیع دما با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (2) و استفاده از رابطه‌ی (3)، به رابطه‌ی (4) می‌توان رسید.

$$T = c_1 r^{-m_1} + c_2 \quad (4)$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$ ، ثابت‌هایی هستند که با شرایط مرزی (5) به دست می‌آیند:

$$T(a) = T_a \quad , \quad T(b) = T_b \quad (5)$$

$a$  و  $b$  به ترتیب، شعاع درونی استوانه‌ی توخالی و شعاع بیرونی آن می‌باشند و همچنین  $T_a$  و  $T_b$  به ترتیب، دما را در شعاع درونی و شعاع خارجی نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{T_b - T_a}{b^{-m_1} - a^{-m_1}} \\ c_2 &= T_a - a^{-m_1} \frac{T_b - T_a}{b^{-m_1} - a^{-m_1}} \end{aligned} \quad (6)$$

رابطه‌ی توانی برحسب شعاع برای سه پارامتر مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و تنش تسلیم نیز در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{m_2} \\ \alpha(r) &= \alpha_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{m_3} \\ \sigma_y(r) &= \sigma_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{m_4} \end{aligned} \quad (7)$$

$m_2, m_3, m_4, m_5, E_0, \alpha_0, \sigma_0$ ، پارامترهای ماده در نظر گرفته شده اند که  $m_2, m_3, m_4$  از نوع پارامترهای توانی بدون واحد می‌باشند و  $E_0, \alpha_0, \sigma_0$  پارامترهایی هستند که دارای واحد از جنس منبع اصلی مرتبط با آن می‌باشند.

سپس برای بدست آوردن رابطه‌ی الاستیک، کفایت کرنش مکانیکی الاستیک بر اساس قانون هوک و فرض ناچیز بودن آن در راستای طول لوله را با کرنش حرارتی که از ضرب پارامتر انبساط گرمایی در اختلاف دما بدست می‌آید، جمع گردد تا کرنش کل نتیجه شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_0} \left(\frac{b}{r}\right)^{m_2} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{m_3} (c_1 r^{-m_1} + c_2) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_0} \left(\frac{b}{r}\right)^{m_2} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{m_3} (c_1 r^{-m_1} + c_2) \end{aligned} \quad (8)$$

پس از آن با جایگذاری روابط (8) در رابطه‌ی سازگاری (9) و در پایان با به-

رابطه‌ی (24) و تانسور تنش انحرافی اعمال شده در رابطه‌ی (25) برای یک مرتبه بارگذاری و مختصات استوانه‌ای می‌توان به معادله تابع تسلیم (26) رسید.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(\sigma_r - 2\sigma_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\frac{1}{3}(\sigma_r^2(r) + \sigma_\theta^2(r) - \sigma_\theta(r)\sigma_r(r)) - \frac{1}{3}\sigma_y^2(r) = 0 \quad (26)$$

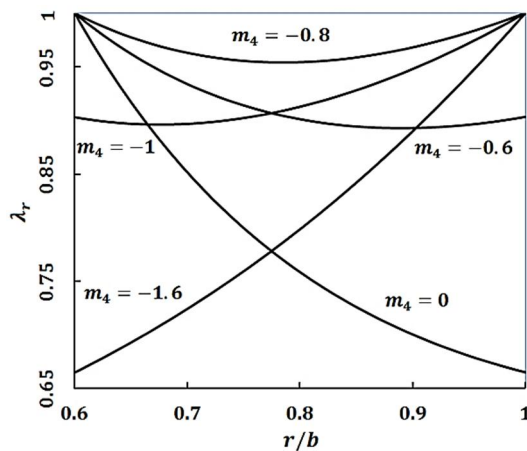
بر اساس رابطه‌ی (26)،  $\lambda_r$  به عنوان متغیر تسلیم که در واقع شکل بی بعد شده‌ی تابع تسلیم دو بعدی در مختصات استوانه‌ای است، در رابطه‌ی (27) تعریف می‌شود.

$$\lambda_r = \left( \frac{\sigma_r^2(r) + \sigma_\theta^2(r) - \sigma_\theta(r)\sigma_r(r)}{\sigma_y^2(r)} \right)^{1/2} \quad (27)$$

هم‌اکنون برای هر یک از تحلیل‌های گفته شده مثالی عددی آورده شده است که به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

جهت بررسی ناحیه‌ی آغاز تسلیم، نتایج تغییرات متغیر تسلیم در راستای ضخامت، برای لوله استوانه‌ای با مشخصات  $\frac{a}{b} = 0.6$  و  $m_2 = 1.1$  برای  $m_4$  های متفاوت 0، -1، -0.8، -0.6، -1.6 و تحت بارگذاریهای بحرانی فشار داخلی به ترتیب  $-\frac{p}{\sigma_y(a)} = -185$ ،  $-\frac{p}{\sigma_y(a)} = -278.3$ ،  $-\frac{p}{\sigma_y(a)} = -278.3$ ،  $-\frac{p}{\sigma_y(a)} = -251.3$ ، در لحظه به تسلیم رسیدن در شکل 2 رسم شد.

برای حل معادلات و گرفتن نتایج، از برنامه‌ی متلب استفاده شده است. در ابتدا ساختار لوله استوانه‌ای طوری در نظر گرفته شده است که جنس رویه‌ی لوله از نوع فولادی با مشخصات آمده در جدول 1، باشد و به تدریج به سمت داخل لوله، از جنس آن کاسته شود. این لوله‌ی استوانه‌ای را که از جنس مواد هدفمند با مشخصات تابعی آورده شده در روابط (3)، (7) و (16) می‌باشد تحت بارگذاری گرادیان دما قرار داده می‌شود و اختلاف دما تا حد



**Fig. 2** Yield variable curve throughout thickness without temperature gradient for several parameters related to yield stress

شکل 2 نمودار متغیر تسلیم در راستای ضخامت برای پارامترهای متفاوت مربوط به تنش تسلیم بدون در نظر گرفتن گرادیان دما  $r/b$

و پس از آن با جایگذاری در رابطه (9) و استفاده از رابطه (10) می‌توان رابطه‌ی تنش شعاعی در حالت الاستوپلاستیک لوله‌های جدارضخیم ذکر شده به‌دست آورد و در رابطه (22) نشان داد.

$$\frac{dF}{d\sigma'_{ij}} = (\sigma'_{ij} - X'_{ij}) \quad (19)$$

$$d\lambda = \frac{3}{2m\sigma_y^2} d\sigma'_{ij} (\sigma'_{ij} - X'_{ij}) \quad (20)$$

$$\varepsilon_r^p = \frac{-1}{2m} (\sigma_\theta - \sigma_r \mp \sigma_y)$$

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{1}{2m} (\sigma_\theta - \sigma_r \mp \sigma_y) \quad (21)$$

$$(Ar^{-m_2+1} + Br^{-m_5+1}) \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + (Cr^{-m_2} + Dr^{-m_5}) \frac{d\sigma_r}{dr} + Gr^{-m_2-1}\sigma_r \pm Hr^{-m_5+m_4-1} + Ir^{m_3-m_1-2} + Jr^{m_3-1} = 0 \quad (22)$$

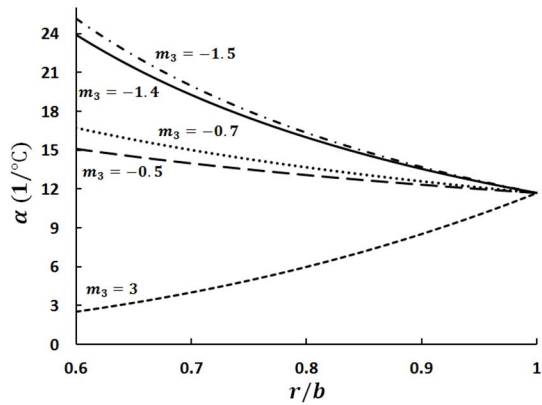
در معادله بالا  $A, B, C, D, E, G, H, I, J$  و  $L$  ثابت‌هایی هستند که در رابطه‌ی (23) آورده شده‌اند.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{E_0} b^{m_2} \\ B &= \frac{1}{2m_0} b^{m_5} \\ C &= \frac{(3-m_2)}{E_0} b^{m_2} \\ D &= \frac{(3-m_2)}{2m_0} b^{m_5} \\ G &= \frac{m_2(v-1)}{E_0} b^{m_2} \\ H &= \frac{\sigma_0(m_6-m_4-2)}{2m_0} b^{m_5-m_4} \\ I &= \frac{(m_3-m_1)\alpha_0c_1}{b^{m_3}} \\ J &= \frac{m_3\alpha_0c_2}{b^{m_3}} \end{aligned} \quad (23)$$

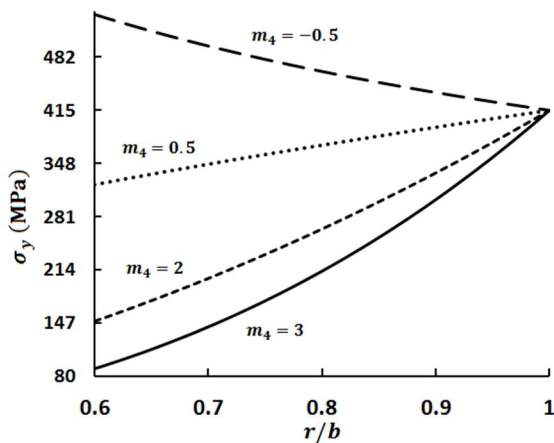
### 3- نتایج عددی

بعد از بدست آوردن روابط و معادلات حاکمه، چندین نتیجه شامل نتایج زیر دریافت می‌شود.

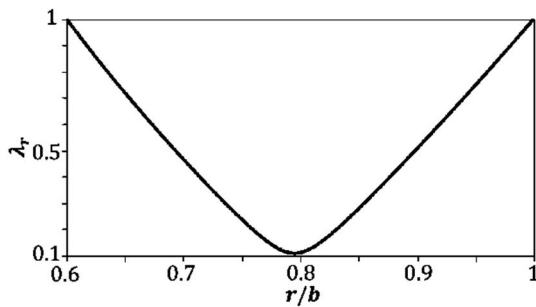
- تحلیل آغاز تسلیم در لوله‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند، که این تحلیل به‌وسیله‌ی تغییرات متغیر تسلیم که در ادامه تعریف شده است انجام می‌گیرد.
- تحلیل تغییرات تنش در راستای شعاع یا ضخامت، که این تحلیل با بررسی نمودارهای تنش در راستای ضخامت توضیح داده می‌شود.
- تأثیر پارامترهای ماده هدفمند روی ناحیه شروع تسلیم، که این تحلیل توسط بررسی تغییرات پارامترهای ماده و متغیر تسلیم انجام می‌گیرد.
- تأثیر بارگذاری فشار داخلی در لوله‌های استوانه‌ای جدارنازک روی به تسلیم رسیدن آن‌ها که این کار با رسم نمودار بررسی می‌گردد.
- بررسی مهم تأثیرات بارگذاری‌های دمای داخلی، دمای خارجی، فشار داخلی و پارامتر مربوط به تنش تسلیم روی هم و ارتباط آن‌ها باهم، که با بررسی نمودار مربوط به آن نشان داده می‌شود.
- با بسط دادن تابع تسلیم (رابطه‌ی (17)) بر اساس تانسور تنش آمده در



**Fig. 4** Thermal expansion coefficient throughout thickness according to material properties in Table 1 with different  $m_3$   
 شکل 4 تغییرات ضریب انبساط حرارتی در راستای ضخامت بر طبق خواص مکانیکی جدول 1 و  $m_3$  های متفاوت



**Fig. 5** Yield stress throughout thickness according to material properties in Table 1 with different  $m_4$   
 شکل 5 تغییرات تنش تسلیم در راستای ضخامت بر طبق خواص مکانیکی جدول 1 و  $m_4$  های متفاوت



**Fig. 6** Yield variable changes throughout thickness under internal pressure 5 MPa and thermal difference 91°C for parameters  $m_1=-3, m_2=0.5, m_3=-0.5$  and  $m_4=0.5$

شکل 6 تغییرات متغیر تسلیم در طول ضخامت برای فشار داخلی 5 MPa و اختلاف دمای 91 °C برای مشخصات  $m_1=-3, m_2=0.5, m_3=-0.5, m_4=0.5$  اگر آن تحت تنها بارگذاری فشار داخلی قرار داده شود و فشار تا حد رخ دادن تسلیم بالا برود، با توجه به تغییرات پارامترها به نتایج جدول 3 می‌توان رسید.

مشاهده می‌شود که بر خلاف نتایج جدول 2، ناحیه‌ی شروع تسلیم تحت فشار داخلی از درون اتفاق می‌افتد. در شکل 7، مثالی از تأثیرات بارگذاری‌های فشار داخلی و اختلاف دما در

رخ دادن تسلیم در لوله‌ی استوانه‌ای بالا می‌رود. برای نشان دادن نتایج بررسی ناحیه شروع تسلیم از روابط (10) و (11) استفاده می‌گردد و تنش‌ها-ی بدست آمده درون رابطه‌ی (21) قرار داده می‌شوند. به نتایجی که در جدول 2 برای لوله استوانه‌ای با مشخصه‌ی هندسی  $a/b=0.6$  و مشخصات ساختار ماده  $E_0, \alpha_0, \sigma_0$  و  $\nu$  که در جدول 1 آورده شده است می‌توان رسید. می‌توان تغییرات مشخصات مکانیکی بررسی شده شامل مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و تنش تسلیم را نسب به شعاع به ترتیب در شکل‌های 3 و 4 بر اساس پارامترهای جدول 2 مشاهده نمود. در واقع با پارامتر متغیر تسلیم در جایی که مقدار 1 را می‌دهد ناحیه‌ی ورود به حالت پلاستیک مشخص می‌شود. همانطور که از جدول 2 پیداست، ناحیه‌ی شروع تسلیم ممکن است از درون یا بیرون و یا با توجه به نتایج به دست آمده برای بارگذاری‌های فشار داخلی 5 مگاپاسکال و اختلاف دمای  $\Delta T=T_a-T_b=91^\circ\text{C}$  بر روی استوانه جدار ضخیم با مشخصات مکانیکی داده شده در جدول 1 و پارامترهای  $m_1=-3, m_2=0.5, m_3=-0.5$  و  $m_4=0.5$  نشان داده شده در شکل 6، هم از درون و هم از بیرون باهم شروع شود. با تغییرات پارامترهای ماده موقعیت ایجاد ناحیه‌ی تسلیم تغییر یافته است. همان‌طور که از جدول 2 نیز پیداست؛ موقعیت ناحیه‌ی تسلیم و همچنین اختلاف دمای تسلیم، وابستگی شدیدی به پارامترهای ماده دارد.

جدول 1 مشخصات ماده

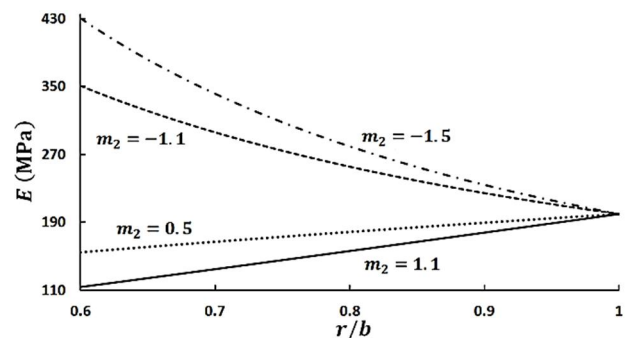
Table 1 Material properties

پارامتر ماده	مقدار پارامتر ماده
$E_0$ (GPa)	200
$\alpha_0$ (1/°C)	11.7
$\sigma_0$ (MPa)	415
$\nu$	0.3

جدول 2 کمیت‌های محاسبه شده در چند ماده بدون فشار داخلی با پارامترهای متفاوت

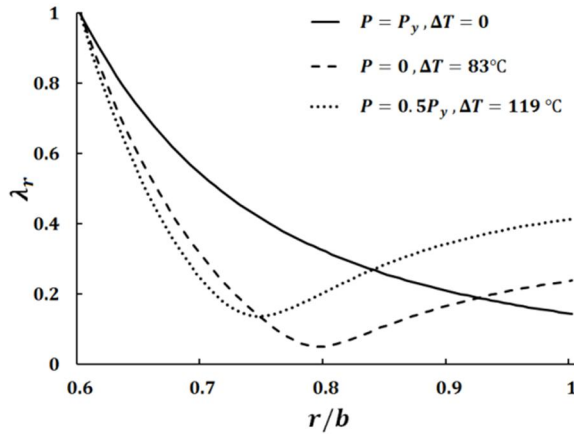
Table 2 The calculated values of several materials with different parameters without internal pressure

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$\Delta T_y$ (°C)	ناحیه‌ی شروع تسلیم
3	-1.1	3	2	157	درون
-2	-1.5	-1.5	-3	328	بیرون
-2.1	1.1	-1.4	3	83	درون
-3	0.5	-0.5	-0.5	92	بیرون
-3	0.5	-0.7	0.5	94	درون

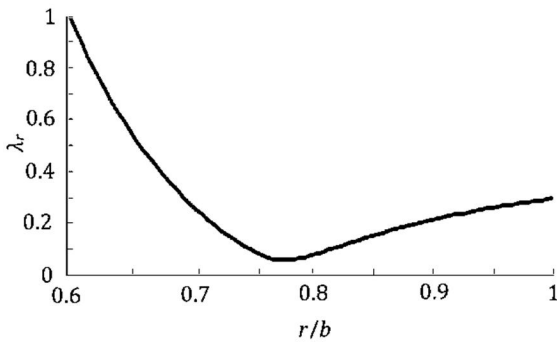


**Fig. 3** Elasticity modulus throughout thickness according to material properties in Table 1 with different  $m_2$   
 شکل 3 تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت بر طبق خواص مکانیکی جدول 1 و  $m_2$  های متفاوت

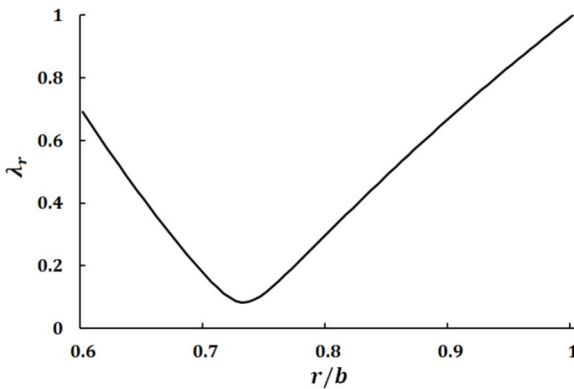
با مشاهده‌ی شکل 10 برای اختلاف دمای  $157^{\circ}\text{C}$  با مشخصات ردیف اول جدول 2، به علت بیشتر شدن متغیر تسلیم از مقدار واحد در شعاع داخلی، می‌توان فهمید که شروع ناحیه‌ی پلاستیک از درون اتفاق می‌افتد. در شکل 11 نمودار تغییرات متغیر تسلیم برای پارامترهای دیگری از ماده‌ی هدفمند که در شعاع بیرونی به مقدار واحد رسیده است ارائه شده است.



**Fig. 9** Yield variable changes throughout thickness in yield onset of material with 3<sup>rd</sup> row properties in Table 3  
 شکل 9 تغییرات متغیر تسلیم در طول ضخامت برای مشخصات ردیف سوم جدول 3 در لحظه‌ی شروع ناحیه‌ی پلاستیک



**Fig. 10** Yield variable curve throughout thickness for  $a=0.06\text{ m}$ ,  $b=0.1\text{ m}$ ,  $m_1=3$ ,  $m_2=-1.1$ ,  $m_3=3$ ,  $m_4=2$  and  $\Delta T=157^{\circ}\text{C}$   
 شکل 10 نمودار متغیر تسلیم (λr) نسبت به شعاع برای  $a=0.06\text{ m}$ ,  $b=0.1\text{ m}$ ,  $m_1=3$ ,  $m_2=-1.1$ ,  $m_3=3$ ,  $m_4=2$  و  $\Delta T=157^{\circ}\text{C}$



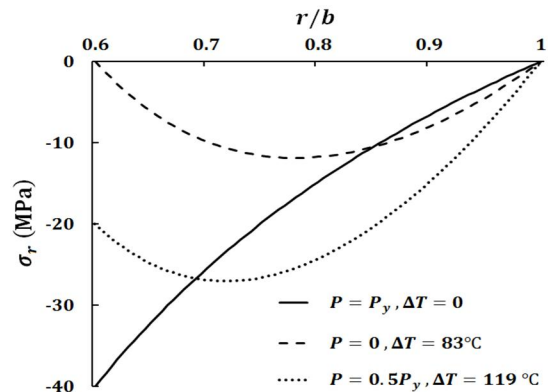
**Fig. 11** Yield variable curve throughout thickness for  $a=0.06\text{ m}$ ,  $b=0.1\text{ m}$ ,  $m_1=-2$ ,  $m_2=-1.5$ ,  $m_3=-1.5$ ,  $m_4=-3$  and  $\Delta T=328^{\circ}\text{C}$   
 شکل 11 نمودار متغیر تسلیم نسبت به شعاع برای  $a=0.06\text{ m}$ ,  $b=0.1\text{ m}$ ,  $m_1=-2$ ,  $m_2=-1.5$ ,  $m_3=-1.5$ ,  $m_4=-3$  و  $\Delta T=328^{\circ}\text{C}$

روند تغییرات تنش شعاعی برای مشخصات لوله استوانه‌ای ردیف سوم جدول 2 آورده شده است. همچنین در شکل 8 و 9، به ترتیب روند تغییرات تنش مماسی و متغیر تسلیم نشان داده شده است. همانطور که از شکل‌های 7 و 8 پیدا است، بارگذاری‌های فشار داخلی و اختلاف دما بر ایجاد تنش‌های فشاری یا کششی در راستای ضخامت اثرات متفاوتی از خود نشان می‌دهند. بر اساس این شکل‌ها می‌توان تأثیرات اعمال بارگذاری‌ها را روی لوله استوانه‌ای ساخته شده از ماده هدفمند را بررسی نمود. یکی از کارهایی که در آینده می‌توان انجام داد بهینه سازی بارگذاری‌ها در بهره بری بهتر از این نوع لوله‌هاست که قسمت کوچکی از آن در ادامه نشان داده می‌شود.

جدول 3 کمیت‌های محاسبه شده در چند ماده بدون گرادیان دما با پارامترهای متفاوت

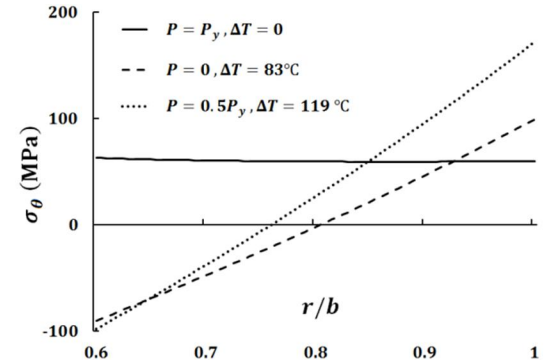
**Table 3** The calculated values of several materials with different parameters without temperature gradient

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$P_y$ (MPa)	ناحیه‌ی شروع تسلیم
3	-1.1	3	2	44.1	درون
-2.1	-1.5	-1.4	3	24.7	درون
-2.1	1.1	-1.4	3	40.0	درون
-3	0.5	-0.5	-0.5	213.1	درون
-3	0.5	-0.7	0.5	127.9	درون



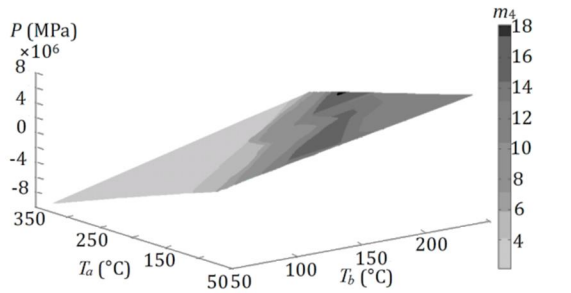
**Fig. 7** Radial stresses changes throughout thickness in yield onset of material with 3<sup>rd</sup> row properties in Table 3

شکل 7 تغییرات تنش‌های شعاعی در طول ضخامت برای مشخصات ردیف سوم جدول 3 در لحظه‌ی شروع ناحیه‌ی پلاستیک



**Fig. 8** Tangential stresses changes throughout thickness in yield onset of material with 3<sup>rd</sup> row properties in Table 3

شکل 8 تغییرات تنش‌های مماسی در طول ضخامت برای مشخصات ردیف سوم جدول 3 در لحظه‌ی شروع ناحیه‌ی پلاستیک



**Fig. 13** Cylindrical tube parameters curve with properties  $a/b=0.6$ ,  $m_1=-2.9$ ,  $m_2=-3$  and  $m_3=1.7$

شکل 13 نمودار تغییرات پارامترهای لوله استوانه‌ای با مشخصات  $a/b = 0.6$ ،  $m_3 = 1.7$ ،  $m_2 = -3$ ،  $m_1 = -2.9$

#### 4- نتیجه گیری

با بررسی لوله‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بر اثر بارگذاری فشار داخلی و اختلاف دما می‌توان به اهمیت پارامترهای مواد در به تسلیم رسیدن ناحیه‌ای از لوله‌ها، تحت فشارهای خاص با تغییرات دما و موقعیت شروع آن ناحیه پی برد. همان‌طور که در رابطه‌ی تنش نسبت به شعاع مشخص شده است، بعد از ورود به ناحیه‌ی پلاستیک، تمام پارامترها نقش مهمی را در به دست آوردن تنش‌ها و کرنش‌ها ایفا کرده‌اند. طی بررسی‌های نشان داده شده می‌توان نتیجه گرفت که به‌وسیله‌ی تغییرات متغیر تسلیم، آغاز تسلیم در لوله‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند، ممکن است در درون یا بیرون یا هر دو باهم اتفاق افتد. اختلاف دما تأثیر بسزایی در رشد ناحیه‌ی پلاستیک دارد. با بررسی نمودارهای تنش در راستای ضخامت به تحلیل تغییرات تنش در راستای شعاع یا ضخامت پرداخته شد. همچنین تغییر عملکرد تنش‌ها و تغییرات آن‌ها در لوله‌های استوانه‌ای بررسی شد و نمودار آن‌ها تحت فشارهای متفاوت رسم شدند. با رسم نمودارهای متفاوت تأثیر بارگذاری فشار داخلی در لوله‌های استوانه‌ای جدارنازک روی به تسلیم رسیدن آن‌ها بررسی گردید. توسط بررسی تغییرات پارامترهای ماده و متغیر تسلیم، تأثیر پارامترهای ماده هدفمند روی ناحیه شروع تسلیم، مورد بررسی قرار گرفت. با بررسی نمودار پایانی، تحلیل مهم تأثیرات بارگذاری‌های دمای داخلی، دمای خارجی، فشار داخلی و پارامتر مربوط به تنش تسلیم روی هم و ارتباط آن‌ها باهم، نشان داده شد، که مشخص گردید که با انتخاب پارامترهای مناسب و بارگذاری‌های مناسب عملکرد مخازن را می‌توان بهینه ساخت.

برای ادامه‌ی تحقیقات در زمینه‌ی لوله‌های تحت فشار از جنس مواد هدفمند، تحلیل الاستوپلاستیک لوله‌های جدارضخیم از جنس مواد هدفمند تحت بارگذاری متناوب به عنوان موضوع کاربردی- تحقیقاتی پیشنهاد می‌شود.

#### 5- فهرست علائم

$a$	شعاع درونی (m)
$b$	شعاع بیرونی (m)
$E$	مدول الاستیسیته (Pa)
$F$	تابع تسلیم
$k$	ضریب هدایت ( $WK^{-1}m^{-1}$ )
$m$	ضریب پراگر
$m_0$	مقدار اولیه ضریب پراگر

با مقایسه‌ی شکل‌های 10 و 11، اثرات پارامترها در توزیع تنش در لوله جدار ضخیم مشاهده شده است.

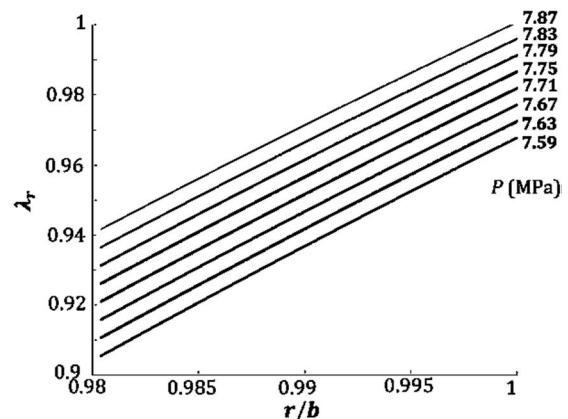
سپس لوله جدارنازکی با مشخصه‌ی هندسی نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی  $a/b = 0.987$  و مشخصات ساختار ماده که در جدول‌های 1 و 4 آورده شده‌اند، تحت گرادیان دمای  $\Delta T = T_a - T_b = 10^\circ C$  و فشار داخلی‌های متفاوت قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل 12 (تغییرات متغیر تسلیم  $\lambda_r$  در راستای ضخامت) مشاهده می‌شود، با افزایش فشار داخلی تغییرات محسوسی در نتایج حاصل نمی‌شود، که علت آن ضخامت کم لوله استوانه‌ای است.

با بررسی پارامتر تنش تسلیم و میزان بارگذاری روی لوله استوانه‌ای می‌توان به حالت‌های بهینه‌ی بارگذاری یا انتخاب بهینه‌ی ماده‌ی هدفمند با پارامترهای مناسب دست یافت که بدین منظور نمودار تغییرات بر اساس پارامترهای فشار،  $m_4$ ،  $T_a$  و  $T_b$  برای یک نوع لوله استوانه‌ای در شکل 13 رسم شده است. این نمودار در لحظه به تسلیم رسیدن می‌باشد یعنی در صفحه‌ی مشخص شده  $\lambda_r = 1$  با تنش‌های بدست آمده از روابط بر اساس فشارهای داخلی، دماهای داخلی و دماهای خارجی متفاوت و همچنین پارامترهای متفاوت مربوط به تنش تسلیم و جایگذاری آن‌ها در متغیر تسلیم  $\lambda_r$  می‌توان ارتباط این چهار پارامتر را بررسی نمود، که تحلیل این نمودار برای لوله‌های متفاوت ساخته شده از مواد هدفمند با مشخصات گوناگون بسیار مهم می‌باشد. اهمیت این موضوع در انتخاب بهینه‌ترین مشخصات ماده بر اساس نوع کاربرد آن (نوع و مقدار بارگذاری) و ساخت ماده هدفمند بر اساس آن مشخصات می‌باشد.

**جدول 4** پارامترهای لوله استوانه‌ای

**Table 4** Cylindrical tube parameters

پارامتر ماده	مقدار پارامتر ماده
$m_1$	3
$m_2$	-1.1
$m_3$	3
$m_4$	2



**Fig. 12** Yield variable changes throughout thickness under different internal pressures

شکل 12 تغییرات متغیر تسلیم در طول ضخامت تحت فشارهای داخلی متفاوت

[3] N. Ahmet Eraslan, T. Akis, Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube, *International Journal of pressure vessels and piping*, Vol. 83, No. 9, pp. 635-644, 2006.

[4] N. Tutuncu, M. Ozturk, The exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composite. Part B. Engineering*, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.

[5] M. Jabbari, A. Bahtui, M. R. Eslami, Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, *International Journal of pressure vessels and piping*, Vol. 86, No. 5, pp. 296-306, 2009.

[6] Sh. Hosseini Hashemi, K. Khorami, Analysis of Free Vibrations of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Using Differential Quadrature Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2011. (in Persian)

[7] I. Keles, C. Conker, Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 3, pp. 449-455, 2011.

[8] H. Sadeghi, M. Baghani, R. Naghdabadi, Strain gradient elasticity solution for functionally graded micro-cylinders, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 50, No. 1, pp. 22-30, 2012.

[9] H. M. Wang, Y. K. Wei, Effect of material nonhomogeneity on the mechanical behaviors of a thick-walled functionally graded sandwich cylindrical structure, *Results in Physics*, Vol. 2, No. 0, pp. 118-122, 2012.

[10] A. Taghvaeipour, M. Bonakdar, M. T. Ahmadian, Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 50, No. 0, pp. 1-7, 2012.

[11] M. Arefi, G. H. Rahimi, The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped-clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 96-97, No. 0, pp. 30-37, 2012.

[12] Y. Ch. Yang, W. L. Chen, H. M. Chou, J. L. L. Salazar, Inverse hyperbolic thermoelastic analysis of a functionally graded hollow circular cylinder in estimating surface heat flux and thermal stresses, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 60, No. 0, pp. 125-133, 2013.

[13] A. Nayebe, S. Ansari Sadrabadi, FGM Elastoplastic analysis under thermo mechanical loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111-112, No. 1, pp. 12-20, 2013.

[14] M. Ghanbari Mobarakeh, F. Farhatnia, Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 211-218, 2014. (in Persian)

[15] C. Ray Wylie, LC. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, pp. 100-170, US: McGraw-Hill, 1985.

پارامتر توانی مربوط به ضریب هدایت	$m_1$
پارامتر توانی مربوط به مدول الاستیسیته	$m_2$
پارامتر توانی مربوط به ضریب انبساط گرمایی	$m_3$
پارامتر توانی مربوط به تنش تسلیم	$m_4$
پارامتر توانی مربوط به ضریب پراگر	$m_5$
شعاع (m)	$r$
تغییرات دما ( $^{\circ}\text{C}$ )	$T$
تنش جابجایی انحرافی	$X'$

#### علائم یونانی

ضریب انبساط گرمایی ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$\alpha$
پارامتر مثبت قانون جریان	$\lambda$
گرش	$\varepsilon$
تنش (Pa)	$\sigma$
تنش انحرافی	$\sigma'$
نسبت پواسون	$\nu$

#### زیرنویس‌ها

مقادیر در شعاع درونی	$a$
مقادیر در شعاع بیرونی	$b$
جهت	$i, j$
در راستای شعاع	$r$
موقعیت تسلیم	$y$
در جهت مماسی	$\theta$
مقدار اولیه	$0$

#### بالانویس‌ها

حالت پلاستیک	$P$
--------------	-----

#### 6- مراجع

[1] U. Gamer, The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening, *International Journal of Mechanic Science*, Vol. 30, No. 6, pp. 415-426, 1988.

[2] C. O. Horgan, A. M. Chan, The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *International Journal of Elasticity*, Vol. 55, No. 1, pp. 43-59, 1999.