مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 427-438

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم بلند تحت فشار داخلی دینامیکی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا

سیدعلی آذرپژو[1]، سیدروح‌الله کاظمی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی 3756، kazemi@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 خرداد 1396

پذیرش: 20 مرداد 1396

ارائه در سایت: 31 شهریور 1396

کلید واژگان:

استوانه جدار ضخیم

پاسخ دینامیکی

بارگذاری دینامیکی

تئوری مرتبه بالا

چکیده

طراحی لوله‌های انتقال گاز، لوله‌های تفنگ، لوله‌های موتور انفجار در جت و غیره همگی مرتبط با مسأله لوله تحت بارگذاری داخلی دینامیکی می‌باشند. در مقاله حاضر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم، تحت بارگذاری داخلی دینامیکی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و مقایسه آن با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میرسکی- هرمان مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است و اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی عرضی در معادله‌های حاکم بر سامانه دینامیکی در نظر گرفته شده است. بدین منظور ابتدا معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای توسط اصل همیلتون به‌دست می‌آیند سپس معادله‌های حرکت پاره‌ای به دست آمده، با تغییر متغیر به معادله‌های دیفرانسیلی معمولی تبدیل می‌شوند که با این روش، مسأله به صورت تحلیلی تحت انواع بارگذاری‌های دینامیکی بدون در نظر گرفتن اثر شرایط مرزی دو سر استوانه با فرض بلند بودن طول آن قابل حل است. همچنین مسأله موردنظر توسط روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مدل سازی و سابروتین نویسی شده و با نتایج حل تحلیلی صحه‌گذاری شده است. مقایسه نتایج روش تحلیلی مرتبه بالا و مرتبه اول با روش اجزا محدود نشان می‌دهد که تئوری مرتبه بالای استفاده شده برای محاسبه پاسخ دینامیکی استوانه جدار ضخیم در نواحی دورتر از لایه میانی دقیق‌تر و مطلوب‌تر است.

Dynamic analysis of long thick cylindrical shell subjected to dynamic internal pressure using high order shear deformation theory

Sayyed Ali Azarpazhoo, Sayyed Roohollah Kazemi*

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Guilan, Iran
* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, kazemi@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 June 2017
Accepted 11 August 2017
Available Online 22 September 2017

Keywords:
Thick Cylindrical Shell
Dynamic Response
Dynamic Load
High Order Deformation Theory

ABSTRACT

Designing explosion of gas pipelines, gun tubes, pulse detonation engine tubes, etc are all related to the problem of cylindrical shell subjected to dynamic internal loads. In this paper, dynamic response of the thick cylindrical shell subjected to dynamic internal load with considering the high order shear deformation theory (HODT) is investigated and compared with the first order shear deformation theory of Mirsky- Hermann (FSDT). The effects of transverse shear deformation and rotatory inertia were included in the governing equations of the dynamic system. First, the equations of motion have been derived by using Hamilton's principle then by changing variables the obtained partial differential equations have been converted to ordinary differential equations. With this method, the problem can be solved for various mechanical moving pressure loads without considering the effect of boundary conditions with long length assumption. The results of the present analytical method have been verified by comparing with finite element results, using software. The comparison of the results with the finite element method shows that the high order theory and first order Mirsky-Hermann theory can predict the dynamic response of the thick cylindrical shell and the high order theory in areas away from the middle layer is more successful.

1- مقدمه

پوسته‌ها به‌طور کلی، سازه‌های خمیده‌ای هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، مقاومت مطلوب ویژه‌ای دارند. بالا بودن ظرفیت تحمل بار در پوسته‌ها موجب توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته است، اما پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز قابل توجه است به‌طوری که تاکنون هیچ حل دقیقی برای تحلیل این سازه‌ها تحت بارگذاری عمومی ارائه نشده و حل‌های تقریبی- تحلیلی موجود، تنها براساس فرضیاتی خاص است که تئوری‌های پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. در تئوری پوسته‌ها، جابجایی پوسته با یک چند جمله‌ای برحسب z تقریب زده می‌شود که z فاصله نقطه موردنظر در مقطع پوسته از سطح میانی است. در پوسته‌های ضخیم، نسبت ضخامت پوسته (h) به شعاع

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. A. Azarpazhoo, S. R. Kazemi, Dynamic analysis of long thick cylindrical shell subjected to dynamic internal pressure using high order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 427-438, 2017 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

میانی (R) بیشتر از 0.05 می‌باشد [1]. تئوری این دسته از پوسته‌ها برمبنای تئوری الاستیسیته خطی[1] بنا شده است. به‌طور کلی به دلیل کوچک نبودن ضخامت نسبت به ابعاد دیگر، نمی‌توان از تئوری‌های پوسته‌های جدار نازک استفاده نمود و باید از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی استفاده کرد ولی به دلیل پیچیدگی تحلیل، با فرضیاتی می‌توان از تئوری الاستیسیته دوبعدی یا تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل استوانه‌های ضخیم استفاده کرد. از جمله کسانی‌که تئوری دوبعدی پوسته‌های استوانه‌ای را ارائه کردند، ولاسو [2] و گلدنوایزر [3] بودند. آن‌ها عبارت $1 + z/R$ اثر شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته[2] را معرفی کردند و میدان جابجایی را کلاسیک در نظر گرفتند. مطالعه رفتار دینامیکی استوانه‌های جدار ضخیم در شرایط و هندسه‌های مختلف و در کاربردهای گوناگون مانند تجهیزات و مخازن تحت فشار [4]، پدیده‌های انفجار [5] و غیره همواره مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است.

میرسکی- هرمان با به‌کارگیری تئوری تغیر شکل برشی مرتبه اول، پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [6]. در این تئوری، جابجایی‌های هر نقطه از پوسته با جابجایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابجایی سطح میانی و جابجایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. در تئوری‌های خمشی و غشایی، تأکید بر جابجایی صفحه میانی بوده ولی در تئوری تغییر شکل برشی، علاوه بر جابجایی صفحه میانی، شیب المان پوسته را نیز به علت جدار ضخیم بودن در نظر می‌گیرند.

زمینه‌های تحقیقاتی مرتبط با بارگذاری متحرک عبارت است از خطوط راه آهن (نسبت به حرکت واگن)، لوله‌های توپ و تفنگ در حین شلیک، در خودروها در اثر حرکت و غیره. اولین تئوری جامع برای پاسخ الاستیک لوله به بار متحرک توسط تانگ 7][در سال 1965 صورت گرفت. تانگ مدلی برای پیش‌بینی رفتار پوسته جدار نازک به شاک[3] داخلی را ارائه کرد. وی فرض کرد که طول پوسته بی‌نهایت می‌باشد و مسأله را به حالت پایا[4] تبدیل کرد. با این فرضیات جواب مسأله مستقل از مکان، به‌دست می‌آید. با این مدل وجود سرعت بحرانی اثبات می‌شود. طبق این مدل در سرعت‌های بحرانی دامنه حرکت پوسته بی‌نهایت می‌شود که در واقعیت وجود خواص دمپینگ، ویژگی‌های غیرخطی و تغییر شکل پلاستیک باعث جلوگیری از تغییر شکل بیش از حد پوسته می‌شوند. در مدل تانگ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی لحاظ شده بود. رایزمن [8] نیز در همان سال مدلی برای توضیح پاسخ سازه‌ای پوسته‌های جدار نازک تحت پیش تنش ارائه داد.

سیمکینز [9] در سال 1992 پاسخ پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم را در اثر بارگذاری متحرک ثابت در لوله‌های طویل به‌دست آورد. در سال 1994 موکوید [10] مدلی را براساس تئوری الاستیسیته برای پوسته‌های جدار ضخیم با فرض متقارن محوری بودن ارائه کرد و پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای به بارگذاری ضربه‌ای را با استفاده از روش تفاضل محدود به دست آورد. بلتمن [11] پاسخ یک لوله به انفجار گازهای داخلی را در سال 2002 بررسی کرد. وی اولین بار، بارگذاری را به‌صورت انفجاری در نظر گرفت. مظاهری و همکاران [12] مدل حالت گذرا، با طول محدود و با در نظر گرفتن اثر برشی و اینرسی دورانی را در سال 2005 معرفی کردند. میرزایی و همکاران [13] در سال 2006 مدلی برای لوله جدار نازک با در نظر گرفتن اثر برشی و اینرسی دورانی وانعکاس امواج ناشی از بارگذاری الاستو- دینامیک[5] ارائه دادند. میرزایی [14] در سال 2012 مجموعه‌ای از روش‌های تحلیلی را برای رفتار ارتعاشی استوانه جدار نازک تحت فشار متحرک داخلی که به صورت متوالی اعمال می‌شوند را ارائه نمود. میرزایی و همکاران [15] در سال 2015 مجموعه ای از راه حل‌های تحلیلی برای پاسخ الاستو- دینامیک گذرا از لوله‌های استوانه‌ای ناهمسانگرد تحت فشار در حال حرکت با پروفیل خاص را مورد بررسی قرار دادند.

در این راستا دستیابی به مدل تحلیلی در تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم با بارگذاری داخلی متحرک با توجه به اهمیت کاربردی آن‌ها در صنایع مختلف حائز اهمیت است. از این‌رو در این مقاله، برای اولین بار به منظور افزایش دقت و اهمیت در نظر گرفتن ترم‌های مرتبه بالاتر میدان جابجایی در تئوری‌های دو بعدی و اثر گذاری آن در نتایج به‌دست آمده، از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی، در تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی دینامیکی متحرک با فرض بی‌نهایت بودن طول استوانه و مقایسه آن با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میرسکی- هرمان انجام شده است. در این تئوری علاوه بر در نظر گرفتن میدان جابجایی مرتبه بالا، کرنش‌های نرمال عرضی تا مرتبه دوم در نظر گرفته شده است و اثر عبارت $1 + z/R$ نیز به‌طور دقیق در نظر گرفته شده است. اینرسی و تغییر شکل‌های برشی و نرمال عرضی نیز در نظر گرفته شده است.

2- روابط حاکم بر پوسته استوانه‌ای

"شکل 1" یک پوسته استوانه‌ای متقارن محوری با شعاع متوسط R، ضخامت h و طول L را به همراه مبدأ مختصات (جهت‌های مثبت قراردادی) نشان می‌دهد. سطح میانی پوسته به‌عنوان سطح مرجع در نظر گرفته شده، دستگاه مختصات x, z روی آن قرار داده شده است. فرضیات استفاده شده برای به‌دست آوردن معادلات حرکت عبارت‌اند از: الف) هندسه و بارگذاری متقارن است. ب) پوسته ایزوتروپیک[6] و همگن[7] بوده. ج) تغییر شکل‌های پوسته کوچک در نظر گرفته شده‌اند و ماده در محدود الاستیک خطی قرار دارد. د) از اثر تنش اولیه صرف‌نظر شده است. بسط سری تیلور[8] برای توسعه یک فرمولاسیون دو بعدی از یک مسأله الاستیسیته سه بعدی مورد استفاده قرار گرفته است. روابط زیر، با بسط مؤلفه‌های جابجایی $u(x,z,t)$ و $w(x,z,t)$ به ترتیب در دو جهت x و z، برحسب مختصه ضخامت (z) به‌دست آمده‌اند [16,17]:

$$u(x,z,t) = u_o(x,t) + z\,\theta_x(x,t) + C_3\,z^2\,\bar{u}_o(x,t) + C_4\,z^3\,\bar{\theta}_x(x,t) \quad \text{(1- الف)}$$

$$w(x,z,t) = w_o(x,t) + C_0\,z\,\theta_z(x,t) + C_1\,z^2\,\bar{w}_o(x,t) + C_2\,z^3\,\bar{\theta}_z(x,t) \quad \text{(1- ب)}$$

در روابط (1) عبارت‌های C_0 تا C_4 ضرایب تعیین کننده نوع تئوری به کار رفته هستند. هر یک از این ضرایب، متناسب با دقت تئوری و نسبت ضخامت پوسته، مقادیر صفر یا یک را اتخاذ می‌کنند که در این مقاله برای تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان C_1 تا C_4 را برابر صفر در نظر گرفته شده و برای تئوری مرتبه بالا C_0 تا C_4 برابر یک در نظر می‌گیریم.

عبارت‌های u و w جابجایی‌های یک نقطه دلخواه (x, z) و به ترتیب در جهات x و z هستند و به علت فرض متقارن محوری در راستای محیطی (ϕ) جابجایی نداریم و t زمان است. پارامترهای u_o جابجایی در راستای x و w_o جابجایی شعاعی در راستای z بر روی سطح میانی است. تابع θ_xچرخش عمود بر سطح میانی المان پوسته در صفحه‌ی x-z است. در تئوری کلاسیک،

[1] Linear elasticity theory
[2] Trapezoidal shape of shell's cross-section
[3] Shock
[4] Steady state
[5] Elsato- Dynamic
[6] Isotropic
[7] homogeneous
[8] Taylor series expansion

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

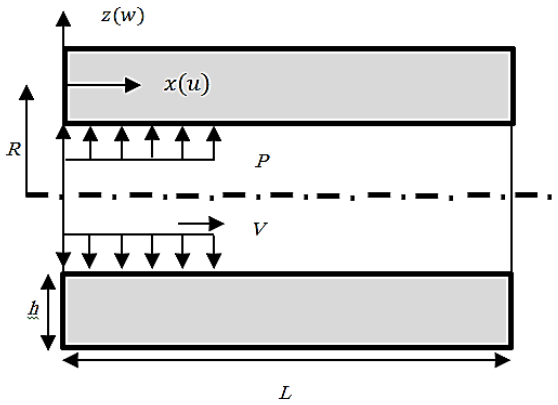

Fig.1 Cylindrical shell (Axial symmetry)

شکل 1 پوسته استوانه‌ای (حالت متقارن محوری)

خط راست و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، راست و عمود بر سطح میانی باقی می‌ماند اما در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، خط راست و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی مانده ولی نسبت به سطح میانی عمود نیست. در تئوری تغییر شکل مرتبه بالا، خط راست و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی نمانده و نسبت به سطح میانی عمود نیست [18]. همچنین پارامترهای $\bar{u}_o$، $\bar{w}_o$، $\bar{\theta}_x$ و $\bar{\theta}_z$ عبارت‌های مرتبه بالا در بسط تیلور هستند و نماینده مودهای تغییر شکل عرضی[1] مقطع پوسته هستند و به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\theta_X = \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} \quad \bar{u}_o = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=0} \quad \bar{\theta}_x = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}|_{z=0}$$
$$\theta_z = \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} \quad \bar{w}_o = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=0} \quad \bar{\theta}_z = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}|_{z=0} \tag{2}$$

با تعریف کرنش‌ها از تئوری الاستیسیته خطی برای پوسته‌های استوانه‌ای، روابط کرنش- جابجایی عمومی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد [19.20]:

$$\epsilon_x = \partial_x u(x,z,t) \qquad \epsilon_z = \partial_z w(x,z,t)$$
$$\epsilon_\phi = \frac{w(x,z,t)}{R+z} \qquad \gamma_{xz} = \partial_z u(x,z,t) + \partial_x w(x,z,t) \tag{3}$$

در رابطه (3) کرنش‌های برشی $\epsilon_{\phi x}$، $\epsilon_{x\phi}$، $\gamma_{x\phi} = \epsilon_{x\phi} + \epsilon_{\phi x}$ و $\gamma_{\phi z}$ با فرض تقارن محوری برابر صفر می‌باشند. با جایگذاری عبارت‌های مربوط به جابجایی در هر نقطه که در روابط (1) داده شده است در روابط (3)، کرنش‌های خطی برحسب جابجایی‌های سطح میانی، برای هر مدل جابجایی را می‌توان به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\epsilon_x = \epsilon_{x0} + z\,\chi_x + z^2\,\bar{\epsilon}_{x0} + z^3\,\bar{\chi}_x$$
$$\epsilon_\phi = \frac{\epsilon_{\phi 0} + z\,\chi_\phi + z^2\,\bar{\epsilon}_{\phi 0} + z^3\,\bar{\chi}_\phi}{1+\frac{z}{R}}$$
$$\epsilon_z = \epsilon_{z0} + z\,\chi_z + z^2\,\bar{\epsilon}_{z0}$$
$$\gamma_{xz} = \beta_x + z\,\chi_{xz} + z^2\,\bar{\beta}_x + z^3\,\bar{\chi}_{xz} \tag{4}$$

همچنین در روابط (4) عبارت‌های داخل پرانتز به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\epsilon_{x0} = \partial_x u_o(x,t) \qquad \chi_x = \partial_x \theta_x(x,t)$$
$$\bar{\epsilon}_{x0} = C_3\,\partial_x \bar{u}_o(x,t) \qquad \bar{\chi}_x = C_4\,\partial_x \bar{\theta}_x(x,t)$$
$$\epsilon_{\phi 0} = \frac{w_o(x,t)}{R} \qquad \chi_\phi = \frac{C_o\,\theta_z(x,t)}{R}$$
$$\bar{\epsilon}_{\phi 0} = \frac{C_1\,\bar{w}_o(x,t)}{R} \qquad \bar{\chi}_\phi = \frac{C_2\,\bar{\theta}_z(x,t)}{R}$$
$$\epsilon_{z0} = C_o\,\theta_z(x,t) \qquad \chi_z = 2C_1\,\bar{w}_o(x,t)$$

[1] Transverse shear deformation

$$\bar{\epsilon}_{z0} = 3C_2\,\bar{\theta}_z(x,t) \qquad \beta_x = \theta_x(x,t) + \partial_x w_o(x,t)$$
$$\bar{\beta}_x = 3C_4\,\bar{\theta}_x(x,t) + C_1\,\partial_x \bar{w}_o(x,t)$$
$$\chi_{xz} = 2C_3\,\bar{u}_o(x,t) + C_o\,\partial_x \theta_z(x,t)$$
$$\bar{\chi}_{xz} = C_2\,\partial_x \bar{\theta}_z(x,t) \tag{5}$$

روابط تنش- کرنش برای مواد ایزوتروپیک و همگن طبق قانون هوک[2] عبارت‌اند از [21]:

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\phi\\ \sigma_z\\ \sigma_{x\phi}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{\phi z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_\phi\\ \epsilon_z\\ \gamma_{x\phi}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{\phi z}\end{pmatrix} \tag{6}$$

که ضرایب C_{ij} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{11} = \mu + 2G \qquad \mu = \frac{\nu\,E}{(1-\nu)(1-2\nu)}$$
$$C_{12} = \mu$$
$$C_{44} = G \qquad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{7}$$

که در رابطه (6) تنش‌های $\sigma_{x\phi}$ و $\sigma_{\phi z}$ صفر می‌باشند و E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، G مدول برشی و μ ثابت لامه[3] است. با جایگذاری روابط کرنش سطح میانی (5) در رابطه‌ی (6) و انتگرال گیری در جهت ضخامت، به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\bar{\sigma} = D\,\bar{\epsilon} \tag{8}$$

که ماتریس D به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \begin{pmatrix} D_f & 0\\ 0 & k_o D_s\end{pmatrix} \tag{9}$$

که ماتریس‌های D_f و D_s در پیوست الف و نحوه‌ی محاسبه انتگرال‌های مربوطه، شامل عبارات $1+\frac{z}{R}$ در مخرج کسر، در پیوست ب آورده شده است. همچنین k_o ضریب تصحیح برشی است که در ماتریس سفتی برشی D_s ضرب شده است. معمولا براساس تئوری میندلین[4]، فرض می‌شود $k_o = \pi^2/12$ باشد. که در این‌جا برای تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان آن را برابر مقدار فرض شده در تئوری میندلین در نظر گرفته شده ولی برای تئوری مرتبه بالا نیاز به ضریب تصحیح برشی نیست و برابر یک فرض شده است [22].

در معادله (8) مؤلفه‌های بردار منتجه تنش $\bar{\sigma}$ و مؤلفه‌های بردار کرنش سطح میانی $\bar{\epsilon}$ مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\sigma} = (N_x, N_\phi, \bar{N}_x, \bar{N}_\phi, N_z, \bar{N}_z, M_x, M_\phi, \bar{M}_x, \bar{M}_\phi, M_z, Q_x, \bar{Q}_x, S_x, \bar{S}_x) \tag{10}$$

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon_{x0}, \epsilon_{\phi 0}, \bar{\epsilon}_{x0}, \bar{\epsilon}_{\phi 0}, \epsilon_{z0}, \bar{\epsilon}_{z0}, \chi_x, \chi_\phi, \bar{\chi}_x, \bar{\chi}_\phi, \chi_z, \beta_x, \bar{\beta}_x, \chi_{xz}, \bar{\chi}_{xz}) \tag{11}$$

که در رابطه (10) بردار منتجه تنش[5] برای پوسته ایزوتروپیک به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{pmatrix} N_x & M_x & \bar{N}_x & \bar{M}_x\\ Q_x & S_x & \bar{Q}_x & \bar{S}_x\end{pmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix}\sigma_X\\ \sigma_{XZ}\end{pmatrix}.(1, z, z^2, z^3)\,(1+\frac{z}{R})\,dz$$

$$(N_\phi \quad M_\phi \quad \bar{N}_\phi \quad \bar{M}_\phi) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_\phi).(1 \quad z \quad z^2 \quad z^3)\,dz$$

$$(N_z \quad M_z \quad \bar{N}_z) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_z).(1 \quad z \quad z^2)\,(1+\frac{z}{R})\,dz \tag{12}$$

[2] Hook law
[3] Lame
[4] Mindlin
[5] Resultant stress

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

3- معادلات حرکت

برای تعیین معادلات حرکت استوانه از اصل همیلتون[1] استفاده می‌شود. حالت کلی اصل همیلتون به طریق زیر بیان می‌شود [20]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - W - K)\, dt = 0 \tag{13}$$

U در رابطه (13) عبارت است از انرژی کرنشی کل ناشی از تغییر شکل و به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$U = \frac{1}{2}\iiint U\sigma_{ij}\epsilon_{ij}\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x\epsilon_x + \sigma_\phi\epsilon_\phi + \sigma_z\epsilon_z + \sigma_{x\phi}\epsilon_{x\phi} + \sigma_{\phi x}\epsilon_{\phi x} + \sigma_{xz}\epsilon_{xz} + \sigma_{\phi z}\epsilon_{\phi z})\, dA\, dz \tag{14}$$

که در رابطه (14)، تعریف المان سطح پوسته به‌صورت زیر است:

$$dA = R(1 + \frac{z}{R})\, dx d\phi \tag{15}$$

W در رابطه (13) عبارت است از انرژی پتانسیل ناشی از نیروی خارجی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W = \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_t(z = \frac{h}{2}) + q_b(z = \frac{-h}{2}))\, dA \tag{16}$$

q_t و q_b فشارهای گسترده وارد بر سطوح به ترتیب خارجی و داخلی پوسته هستند که در این مقاله q_t برابر صفر در نظر گرفته شده است.

K در رابطه (13) عبارت است از انرژی جنبشی و به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$K = \frac{1}{2}\iiint \rho\, (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\, (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dA\, dz \tag{17}$$

که در رابطه (17)، ρ معرف چگالی است و در انرژی جنبشی بالانویس نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است.

4- استخراج معادلات حاکم

پس از محاسبه عبارت‌های مربوط به کار و انرژی در اصل همیلتون، رابطه (13)، امکان استخراج معادلات تعادل پوسته را فراهم می‌سازد. بدین نحو که برمبنای قضیه اساسی حساب تغییرات، مجموع کل ضرایب عبارت‌های δu_o، $\delta\bar{u}_o$، δw_o، $\delta\bar{w}_o$، $\delta\theta_x$، $\delta\bar{\theta}_x$، $\delta\theta_z$ و $\delta\bar{\theta}_z$ در عبارات زیر انتگرال‌های دوگانه بایستی برابر صفر قرار داده شوند. با انجام این کار، پس از مرتب‌سازی، معادلات تعادل به‌صورت زیر به‌دست آمده‌اند:

$$\delta u_o : \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2}\bar{I}_0 - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\bar{I}_1 - \frac{\partial^2 \bar{u}_o}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial t^2}\bar{I}_3 = 0 \tag{18- الف}$$

$$\delta w_o : \frac{-1}{R}N_\phi + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}\bar{I}_0 - \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2}\bar{I}_1 - \frac{\partial^2 \bar{w}_o}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_z}{\partial t^2}\bar{I}_3 - q_t - q_b = 0 \tag{18- ب}$$

$$\delta\theta_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x - \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2}\bar{I}_1 - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \bar{u}_o}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial t^2}\bar{I}_4 = 0 \tag{18- پ}$$

$$\delta\theta_z : \frac{-1}{R}M_\phi - N_z + \frac{\partial S_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}\bar{I}_1 - \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \bar{w}_o}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_z}{\partial t^2}\bar{I}_4 - \frac{h}{2}(q_t - q_b) = 0 \tag{18- ت}$$

$$\delta\bar{u}_o : \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} - 2\, S_X - \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \bar{u}_o}{\partial t^2}\bar{I}_4 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial t^2}\bar{I}_5 = 0 \tag{18- ج}$$

$$\delta\bar{w}_o : \frac{-1}{R}\bar{N}_\phi - 2M_z + \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}\bar{I}_2 - \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \bar{w}_o}{\partial t^2}\bar{I}_4 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2}\bar{I}_5 - \frac{h^2}{4}(q_t - q_b) = 0 \tag{18- چ}$$

$$\delta\bar{\theta}_x : \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} - 3\bar{Q}_x - \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\bar{I}_4 - \frac{\partial^2 \bar{u}_o}{\partial t^2}\bar{I}_5 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial t^2}\bar{I}_6 = 0 \tag{18- خ}$$

$$\delta\bar{\theta}_Z : \frac{-1}{R}\bar{M}_\phi - 3\bar{N}_z + \frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}\bar{I}_3 - \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2}\bar{I}_4 - \frac{\partial^2 \bar{w}_o}{\partial t^2}\bar{I}_5 - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_z}{\partial t^2}\bar{I}_6 - \frac{h^3}{8}(q_t - q_b) = 0 \tag{18- د}$$

در روابط (18) اینرسی‌های جرمی به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(\bar{I}_0 \quad \bar{I}_1 \quad \bar{I}_2 \quad \bar{I}_3 \quad \bar{I}_4 \quad \bar{I}_5 \quad \bar{I}_6) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\, (1 \quad z \quad z^2 \quad z^3 \quad z^4 \quad z^5 \quad z^6)(1 + \frac{z}{R})\, dz \tag{19}$$

5- مدل تحلیلی

با قرار دادن منتجه‌های تنش از رابطه‌ی (10) در روابط (18) معادلات حرکت استوانه، به‌صورت ماتریسی برحسب مؤلفه‌های جابجایی به شرح زیر بیان می‌شود:

$$L_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + L_2 \frac{\partial y}{\partial x} + L_3\, y + L_4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F = 0 \tag{20}$$

که در رابطه (20)، ضرایب L_1، L_2، L_3 و L_4 ماتریس‌های 8×8 و ثابت بوده و تابعی از خواص مکانیکی، فیزیکی و مشخصات هندسی‌اند و در پیوست ج آورده شده‌اند. همچنین y بردار جابجایی بوده و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y = (u_o\, , w_o\, , \theta_x\, , \theta_z\, , \bar{u}_o\, , \bar{w}_o\, , \bar{\theta}_x\, , \bar{\theta}_z\,)^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

همچنین F بردار نیرو بوده که شامل مؤلفه فشار به‌صورت زیر است:

$$F = q_b\, (0\, ,1\, ,0\, , -\frac{h}{2}\, ,0\, , \frac{h^2}{4}\, ,0\, , -\frac{h^3}{8})^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

$$q_b = P(1 - \frac{h}{2R}) \tag{23}$$

در رابطه (23)، P پروفیل فشار، وارد بر جداره‌ی داخلی پوسته استوانه‌ای می‌باشد که می‌توان وابسته به نوع بارگذاری و کاربرد آن، پروفیل‌های متفاوتی را در نظر گرفت. در این مقاله پروفیل بارگذاری را به‌صورت متحرک و فشاری، بر سطح داخلی استوانه و به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$P(x,t) = \begin{pmatrix} P_1 + (P_o - P_1)e^{-(x-Vt)}, & x - Vt \le 0 \\ 0 & , x - Vt \ge 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

که در رابطه (24) که در این رابطه $P(x,t)$ فشارداخلی وارد شده بر استوانه است. پارامتر V، سرعت بارگذاری فشاری بوده، P_o، P_1 مقادیر ثابت فشار هستند. توزیع فشار داخلی در این حالت نسبت به مکان و زمان به صورت نمایی تغییر کرده و در طول استوانه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

توابع میدان جابجایی در پوسته استوانه‌ای طویل به‌صورت زیر تعریف می‌شود [6]:

$$y = D\, e^{-i\alpha(x-Vt)} \qquad D = (D_1\, D_2\, D_3\, D_4\, D_5\, D_6\, D_7)^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

به طوری که i عدد مختلط، α عدد موج و V سرعت حرکت جبهه‌ی موج[2] است. برای حل معادلات، ابتدا با تغییر متغیر $\bar{\eta} = x - \mathrm{Vt}$ معادلات حاکم برحسب $\bar{\eta}$ به‌دست می‌آیند. تغییر متغیر $\bar{\eta} = x - \mathrm{Vt}$، در واقع دو

[1] Hamilton's principle

[2] Pressure front

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

متغیر مکان و زمان را در یک متغیر مستتر می‌نماید و باعث می‌شود مختصات مرجع بر روی جبهه‌ی موج سوار شود و همراه جبهه موج که در $\bar{\eta}=0$ قرار دارد در طول استوانه حرکت کنیم و مسأله به حالت پایا تبدیل شود.

بدین ترتیب هشت معادله دیفرانسیل جزئی در رابطه (20)، به هشت معادله دیفرانسیل معمولی زیر برحسب $\bar{\eta}$ تبدیل می‌شود:

$$L_1\,\frac{\partial^2 y}{\partial\bar{\eta}^2}+L_2\,\frac{\partial y}{\partial\bar{\eta}}+L_3\,y+L_4\,V^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial\bar{\eta}^2}+F=0 \qquad (26)$$

در رابطه (26)، ضرایب جابجایی u_o در تمامی هشت معادله حاکم برابر صفر است و تنها مشتق مرتبه اول و دوم آن در روابط ظاهر می‌شود. از این‌رو با توجه به معادله اول رابطه (26)، $\partial u_o/\partial\bar{\eta}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_o}{\partial\bar{\eta}}=&\Big(\frac{1}{R(V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1)}(\mu H_1 w_o(\bar{\eta})+R\,\mu\,\hat{H}_1\theta_z(\bar{\eta})\\&+(\mu\,H_3+2R\,\mu\,\hat{H}_2)\bar{w}_o(\bar{\eta})+3R\,\mu\,\hat{H}_3\bar{\theta}_z(\bar{\eta})\\&+(-R\,V^2\,\bar{I}_1+2G\,R\,\hat{H}_2+R\,\mu\,\hat{H}_2)\theta_x{}'(\bar{\eta})\\&+(-R\,V^2\,\bar{I}_2+2G\,R\,\hat{H}_3+R\,\mu\,\hat{H}_3)\bar{u}_o{}'(\bar{\eta})\\&+(-R\,V^2\,\bar{I}_3+2G\,R\,\hat{H}_4+R\,\mu\,\hat{H}_4)\bar{\theta}_x{}'(\bar{\eta})\,)\end{aligned} \qquad (27)$$

با جایگذاری رابطه (27) در رابطه (26) دستگاه به هفت معادله و هفت مجهول کاهش می‌یابد:

$$L_5\,\frac{\partial^2 y}{\partial\bar{\eta}^2}+L_6\,\frac{\partial y}{\partial\bar{\eta}}+L_7\,y+L_8\,V^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial\bar{\eta}^2}+F=0 \qquad (28)$$

که در رابطه (28)،ضرایب L_5، L_6، L_7 و L_8 ماتریس‌های 7×7 و ثابتی هستند که در پیوست ج آورده شده‌اند. پس از کاهش معادلات، مؤلفه‌های بردار جابجایی y و F که در روابط (21) و (22) ذکر شده‌اند، به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$y=(w_o\,,\theta_x\,,\theta_z\,,\bar{u}_o\,,\bar{w}_o\,,\bar{\theta}_x\,,\bar{\theta}_z\,)^{\mathrm{T}} \qquad (29)$$

$$F=P(1-\frac{h}{2R})\,(1\,,0\,,-\frac{h}{2}\,,0\,,\frac{h^2}{4}\,,0\,,-\frac{h^3}{8}\,)^{\mathrm{T}} \qquad (30)$$

با قرار دادن رابطه (25) و (29) در فرم همگن رابطه (28)، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$(-\alpha^2\,L_5-i\,\alpha\,L_6+L_7-\alpha^2\,L_8\,V^2)\,D\,e^{-i\alpha\bar{\eta}}=0 \qquad (31)$$

در رابطه (31) با مساوی صفر قرار دادن ماتریس ضرایب $D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\bar{\eta}}$، معادله مشخصه سامانه به فرم کلی زیر به‌دست می‌آید.

$$\delta_1\alpha^{14}+\delta_2\alpha^{12}+\delta_3\alpha^{10}\delta_4\alpha^8+\delta_5\alpha^6+\delta_6\alpha^4+\delta_7\alpha^2+\delta_8=0 \qquad (32)$$

که δ_i ضرایبی ثابت می‌باشند و با حل رابطه (32) به روش نیوتن-رافسون[1]، چهارده ریشه مختلط و مزدوج به‌دست می‌آید. باجایگذاری در معادلات همگن، بردارهای ویژه به‌ازای هر مقدار α محاسبه می‌گردد.

با توجه به معرفی متغیر $\bar{\eta}$ مطابق "شکل 2" دو منطقه به‌وجود می‌آید. در منطقه I، $\bar{\eta}$ منفی می‌باشد و موج از آن مناطق رد شده است. در منطقه II، $\bar{\eta}$ مثبت می‌باشد و موج هنوز به آن مناطق نرسیده است. در نتیجه برای به‌دست آوردن جواب‌های فیزیکی قابل قبول، ما نیازمند آن هستیم که تمام جابجایی‌ها از $\bar{\eta}\to\mp\infty$ پیوسته باشند. به همین دلیل زمانی‌که $\bar{\eta}\to-\infty$ میل می‌کند، تنها هفت ریشه از چهارده ریشه معادله مشخصه که باعث می‌شوند جابجایی‌ها، قبل از جبهه موج پیوسته باشند را می‌توان به‌عنوان پاسخ برای ناحیه $\bar{\eta}<0$ در نظر گرفت و زمانی‌که $\bar{\eta}\to+\infty$ میل می‌کند، تنها هفت ریشه از چهارده ریشه معادله مشخصه که باعث می‌شوند جابجایی‌ها، بعد از جبهه موج پیوسته باشند را می‌توان به‌عنوان پاسخ برای ناحیه $\bar{\eta}>0$ در نظر گرفت.

[1] Newton- Raphson

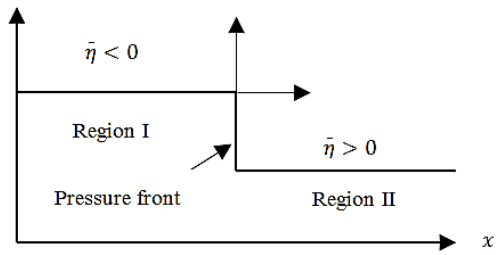

Fig.2 Pressure front- Dimensionless variable of $\bar{\eta}$

شکل 2 جبهه موج- متغیر بی‌بعد $\bar{\eta}$

پس $\alpha_{j=1,\dots,7}$ مرتبط با منطقه I، $\bar{\eta}<0$ و $\alpha_{j=8,\dots,14}$ مرتبط با منطقه II، $\bar{\eta}>0$ می‌باشد، بنابراین پاسخ همگن برای هر دو منطقه به‌صورت زیر خواهد بود

$$y_g{}^{I}=\left(w_o\;\theta_x\;\theta_z\;\bar{u}_o\;\bar{w}_o\;\bar{\theta}_x\;\bar{\theta}_z\right)_I^{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{7}K_j\;D_j\;e^{-i\alpha_j\bar{\eta}} \qquad (33)$$

$$y_g{}^{II}=\left(w_o\;\theta_x\;\theta_z\;\bar{u}_o\;\bar{w}_o\;\bar{\theta}_x\;\bar{\theta}_z\right)_{II}^{\mathrm{T}}=\sum_{j=8}^{14}K_j\;D_j\;e^{-i\alpha_j\bar{\eta}} \qquad (34)$$

حل خصوصی معادله به توزیع بارگذاری بستگی دارد که در رابطه (24) به آن اشاره شده است. بنابراین حل خصوصی را به شکل $y_P=K_1\,\mathrm{e}^{-\bar{\eta}}+K_2$ در نظر گرفته و با قرار دادن در معادله (28) بردارهای K_1 و K_2 تعیین می‌شود. نکته قابل توجه در تعیین جواب خصوصی برای منطقه II، این است که چون در این ناحیه هنوز جبهه‌ی موج، منطقه را در بر نگرفته است پس در نتیجه بارگذاری‌ای به استوانه وارد نمی‌شود و جواب خصوصی برای این ناحیه صفر خواهد بود. بنابراین فرم کلی جواب‌ها در هر دو ناحیه را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$y_g{}^{I}=\sum_{j=1}^{7}K_j\;D_j\;e^{-i\alpha_j\bar{\eta}}+\left(w_o\;\theta_x\;\theta_z\;\bar{u}_o\;\bar{w}_o\;\bar{\theta}_x\;\bar{\theta}_z\right)_p^{\mathrm{T}} \qquad (35)$$

$$y_g{}^{II}=\sum_{j=8}^{14}K_j\;D_j\;e^{-i\alpha_j\bar{\eta}} \qquad (36)$$

که ثابت‌های K_j با اعمال شرایط پیوستگی مسأله در $\bar{\eta}=0$ به‌دست می‌آیند. شرایط پیوستگی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&w_1=w_2 && \partial_x w_1=\partial_x w_2\\&\theta_{x_1}=\theta_{x_2} && \partial_x\theta_{x_1}=\partial_x\theta_{x_2}\\&\theta_{z_1}=\theta_{z_2} && \partial_x\theta_{z_1}=\partial_x\theta_{z_2}\\&\bar{u}_{o_1}=\bar{u}_{o_2} && \partial_x\bar{u}_{o_1}=\partial_x\bar{u}_{o_2}\\&\bar{w}_1=\bar{w}_2 && \partial_x\bar{w}_1=\partial_x\bar{w}_2\\&\bar{\theta}_{x_1}=\bar{\theta}_{x_2} && \partial_x\bar{\theta}_{x_1}=\partial_x\bar{\theta}_{x_2}\\&\boldsymbol{\bar{\theta}_{z_1}=\bar{\theta}_{z_2}} && \partial_x\bar{\theta}_{z_1}=\partial_x\bar{\theta}_{z_2}\end{aligned} \qquad (37)$$

برای محاسبه u در رابطه (26) از دو شرط پیوستگی استفاده می‌شود:

$$u_{o_1}=u_{o_2} \qquad \partial_x u_{o_1}=\partial_x u_{o_2} \qquad (38)$$

که اندیس یک در رابطه‌های (37) و (38) مربوط به منطقه I، که بارگذاری وارد می‌شود و اندیس دو مربوط به منطقه II، که بارگذاری برابر صفر می‌باشد.

6- روش المان محدود

برای این منظور از نرم‌افزار آباکوس[2] نسخه 6.14 جهت مدل‌سازی و تحلیل نتایج استفاده شده است. در مدل‌سازی، مقطع هندسی استوانه با فرض متقارن محوری به‌صورت مستطیل بوده و تحلیل مسأله دو بعدی است. مدل

[2] Abaqus

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

هندسی و شرایط مرزی در "شکل 3" نشان داده شده است. جنس و مشخصات هندسی پوسته در جدول 1 نشان داده شده است.

برای تحلیل بارگذاری فشاری متحرک از حلگر ضمنی[1]، در نرم‌افزار استفاده شده است. پوسته استوانه‌ای در $x=0$ گیردار و در $x=L$ آزاد است. برای اعمال پروفیل فشار در رابطه (24) از سابروتین نویسی[2] در نرم‌افزار آباکوس به زبان فرترن[3] استفاده شده است. نوع المان انتخابی با توجه به اینکه تحلیل تنش پوسته استوانه‌ای با فرض تقارن محوری مدنظر قرار گرفته است، از المان CAX8R استفاده شده است. این المان‌ها چهار ضلعی، متقارن محوری و مرتبه دوم (غیرخطی) بوده و تعداد گره‌ها در هر المان برابر هشت است. المان‌بندی در "شکل 4" نشان داده شده است.

7- نتایج

جابجایی شعاعی در لایه میانی در طول پوسته استوانه‌ای به سه روش المان محدود، تئوری مرتبه اول و تئوری مرتبه بالا در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 5" نشان داده شده است.

در "شکل 5" نتایج جابجایی شعاعی لایه میانی در نواحی دور از مرز برای هر سه روش تطابق بسیار خوبی با هم دارند بدین صورت که حد اکثر اختلاف بین روش‌ها در نواحی دور از مرز 2.5 درصد است.

جابجایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان ده میلی‌ثانیه در "شکل 6" نشان داده شده است.

نتایج حاصل از هر سه روش تطابق بسیار خوبی را در لایه میانی نشان

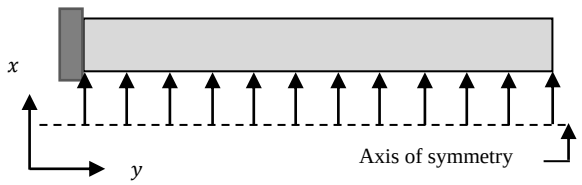

Fig.3 Model of geometry and boundary condition

شکل 3 مدل هندسی و شرایط مرزی

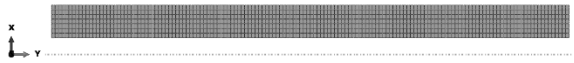

Fig.4 Meshed instance of axisymmetric cylindrical shell

شکل 4 المان‌بندی پوسته استوانه‌ای متقارن

جدول 1 جنس و مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای

Table 1 Material and geometric characteristic of shell

مشخصه هندسی	نماد	واحد	مقدار
طول	L	m	4.76
شعاع متوسط	R	m	0.1
ضخامت	h	m	0.1
چگالی	ρ	kg/m^3	7861
مدول یانگ	E	GPa	209
ضریب پواسون	ν	-	0.3
سرعت بارگذاری	V	m/s	405.45
فشار پیک	P_o	MPa	334
فشار اولیه	P_1	MPa	31.72

[1] Implicit solver
[2] Subroutine
[3] Fortran

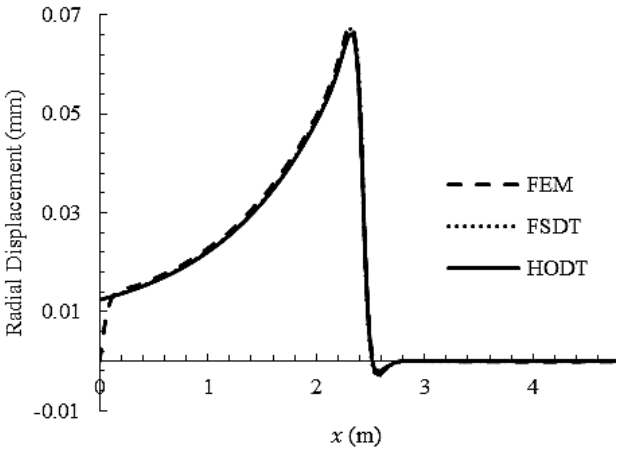

Fig. 5 Radial displacement of the middle layer along x at the time of 6 ms

شکل 5 جابجایی شعاعی لایه میانی در زمان 6 میلی‌ثانیه

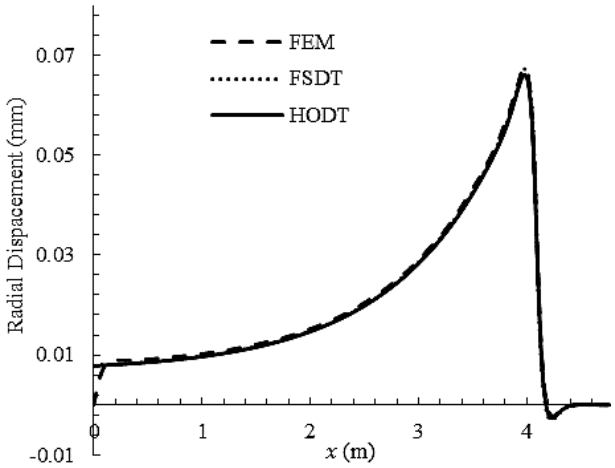

Fig. 6 Radial displacement of the middle layer along x at the time of 10 ms

شکل 6 جابجایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان 10 میلی‌ثانیه

می‌دهند. مطابق "شکل 5 و 6" شرط مرزی تأثیری بر نتایج در نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد. همان‌طور که از "شکل‌های 5 و 6" مشخص است جابجایی شعاعی بر روی لایه‌ی میانی با استفاده از تئوری مرتبه بالا و تئوری مرتبه پایین در زمان‌های متفاوت اختلاف بسیار کمی با هم دارند زیرا در هر دو تئوری، روی لایه میانی $z = 0$ است و این امر باعث می‌شود که ترم‌های مرتبه بالاتر میدان جابجایی اثرات خود را در جابجایی کل لحاظ نکنند و هر دو تئوری نتایج بسیار نزدیکی را در لایه‌ی میانی داشته باشند.

نحوه حرکت جبهه‌ی موج در طول پوسته در زمان‌های شش و ده میلی‌ثانیه در "شکل 7" نشان داده شده است.

جابجایی شعاعی جدار خارجی در طول پوسته با روش المان محدود، تئوری مرتبه بالا و تئوری مرتبه اول در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 8" نشان داده شده است.

مطابق "شکل 8" در نواحی دور از مرز حد اکثر اختلاف بین روش تئوری مرتبه بالا و المان محدود حدود 5 درصد است اما این اختلاف بین تئوری مرتبه اول و المان محدود، حدود 16 درصد می‌باشد که این امر نشان می‌دهد که در لایه‌های خارجی‌تر، دقت تئوری مرتبه بالا نسبت به تئوری مرتبه اول خطی به‌خصوص برای ضخامت‌های بالای پوسته، معتبرتر است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

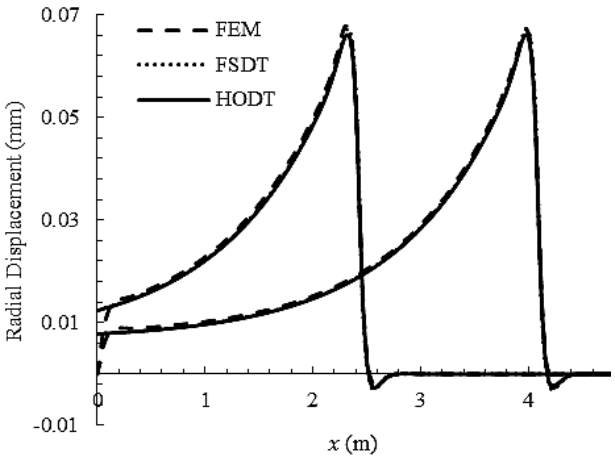

Fig.7 Radial displacement of the middle layer along *x* at the times of 6 and 10 ms

شکل 7 جابجایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان 6 و 10 میلی‌ثانیه

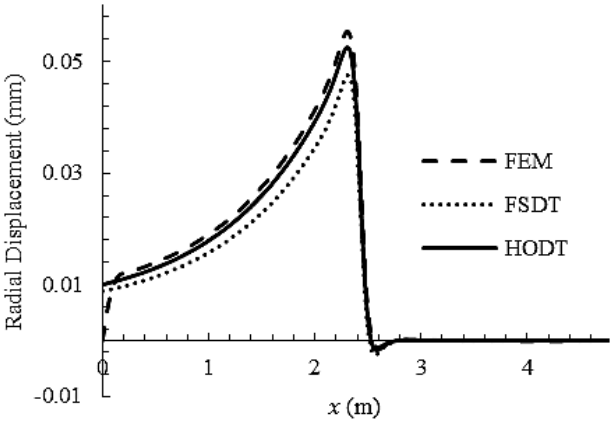

Fig.8 Radial displacement of the outter layer along *x* at the times of 6 ms

شکل 8 جابجایی شعاعی لایه خارجی در طول پوسته در زمان 6 میلی‌ثانیه

اثرات ترم‌های مرتبه بالای در نظر گرفته شده در تئوری مرتبه بالا نسبت به تئوری مرتبه اول و تاثیر آن بر کاهش اختلاف نتایج با روش المان محدود در لایه دور از لایه‌ی میانی کاملا محسوس است.

جابجایی شعاعی جدار داخلی در طول پوسته با استفاده روش المان محدود، تئوری مرتبه بالا و تئوری مرتبه اول در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 9" نشان داده شده است.

مطابق "شکل 9" در نواحی دور از مرز حد اکثر اختلاف بین روش تئوری مرتبه بالا و المان محدود حدود 9 درصد است اما این اختلاف بین تئوری مرتبه اول و المان محدود، حدود 28 درصد می‌باشد که این امر نشان می‌دهد که در لایه‌های داخلی‌تر، دقت تئوری مرتبه بالا نسب به تئوری مرتبه اول خطی برای نواحی دورتر از لایه‌ی میانی، معتبرتر است. اختلاف بین هر سه روش در لایه داخلی از این‌رو افزایش می‌یابد که این لایه تحت بارگذاری متحرک دینامیکی است و تغییرات جابجایی در این لایه نسبت به لایه‌های دورتر محسوس‌تر است.

جابجایی شعاعی در راستای ضخامت پوسته در مکان $x = L/3$ و در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 10" برای دو روش تحلیلی تئوری مرتبه بالا و مرتبه اول خطی و المان محدود نشان داده شده است.

با توجه به "شکل 10" توزیع جابجایی شعاعی در نواحی اطراف لایه میانی تقریبا خطی است اما هرچه از لایه‌ی میانی دورتر شده و به سمت

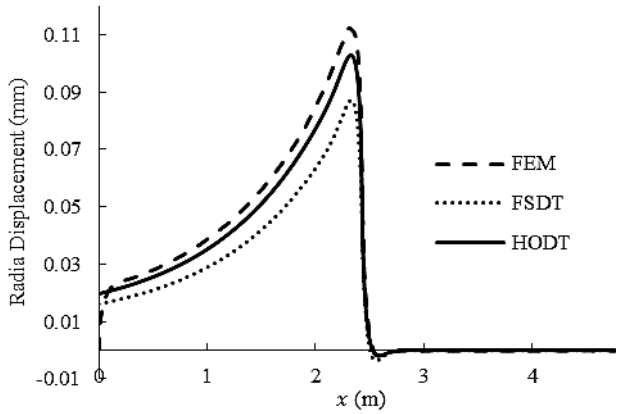

Fig.9 Radial displacement of the inner layer along *x* at the times of 6 ms

شکل 9 جابجایی شعاعی لایه داخلی در طول پوسته در زمان 6 میلی‌ثانیه

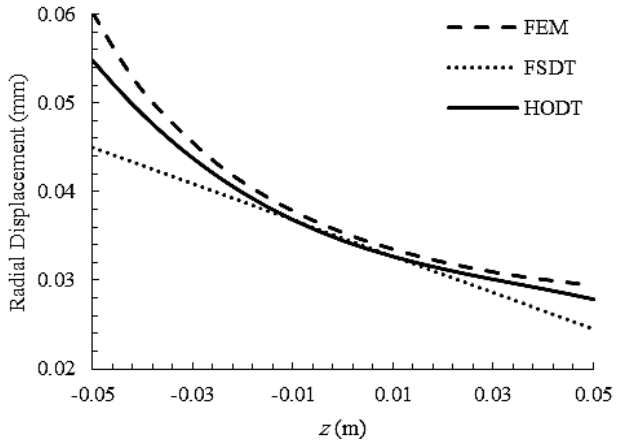

Fig.10 Radial displacement along *z*

شکل 10 جابجایی شعاعی در طول ضخامت پوسته

جدار داخلی و جدار خارجی حرکت کنیم، دیگر جابجایی شعاعی خطی تغییر نمی‌کند بلکه رفتار آن منحنی شکل خواهد بود. حد اکثر اختلاف بین روش المان محدود و تئوری مرتبه بالا در این حالت در جدار داخلی رخ می‌دهد و حدود 10 درصد است و حد اکثر اختلاف بین روش المان محدود و تئوری مرتبه اول خطی در این حالت در جدار داخلی، حدود 33 درصد است.

جابجایی محوری لایه داخلی، لایه میانی و لایه خارجی با استفاده از روش المان محدود در طول پوسته و در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 11" نشان داده شده است.

با توجه به "شکل 11" جابجایی محوری در طول پوسته استوانه‌ای به جزء درناحیه‌ی اطراف جبهه‌ی موج که فشار ماکزیمم است در هر سه لایه داخلی، میانی و خارجی نتایج تقریبا برهم منطبق‌اند زیرا پروفیل فشار وارد شده بر پوسته در راستای شعاعی پوسته اعمال می‌شود و مؤلفه‌ای در راستای محوری ندارد.

تنش شعاعی لایه داخلی، لایه میانی و لایه خارجی با استفاده از روش المان محدود در طول پوسته و در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 12" نشان داده شده است.

لایه داخلی چون تحت تاثیر بارگذاری می‌باشد، تغییرات تنش شعاعی آن نسبت به لایه میانی و لایه خارجی که در لایه‌های دورتری قرار دارند و مستقیماً بارگذاری بر روی این لایه‌ها صورت نمی‌گیرد، بیشتر است.

تنش محیطی لایه داخلی، لایه میانی و لایه خارجی با استفاده از روش

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

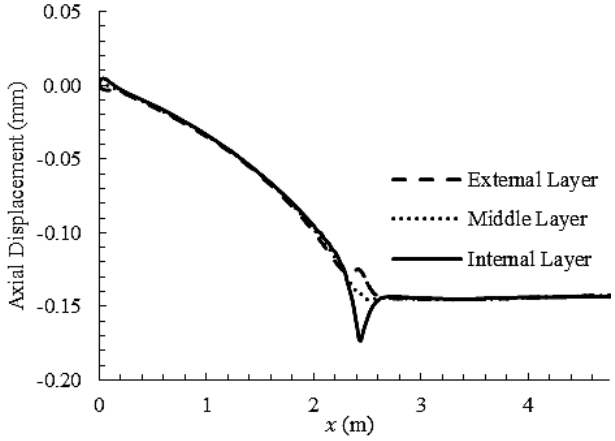

Fig.11 Axial displacement of the inner, middle and outter layer along *x* at the times of 6 ms with finite element method

شکل 11 جابجایی محوری لایه داخلی، میانی و خارجی در طول پوسته در زمان 6 میلی‌ثانیه با استفاده از روش المان محدود

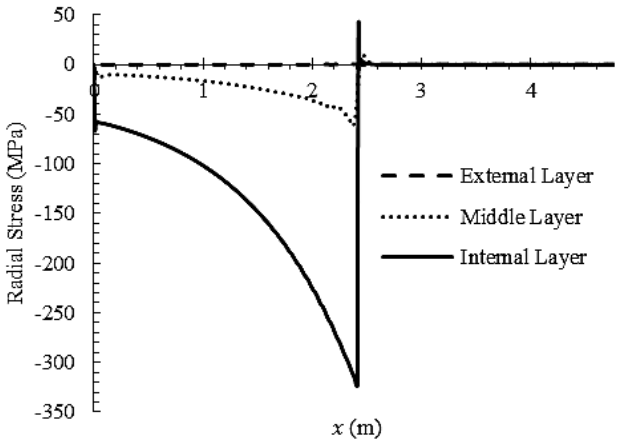

Fig. 12 Radial Stress of the inner, middle and outter layer along *x* at the times of 6 ms with finite element method

شکل 12 تنش شعاعی لایه داخلی، میانی و خارجی در طول پوسته در زمان 6 میلی ثانیه با استفاده از روش المان محدود

المان محدود در طول پوسته و در زمان شش میلی‌ثانیه در "شکل 13" نشان داده شده است.

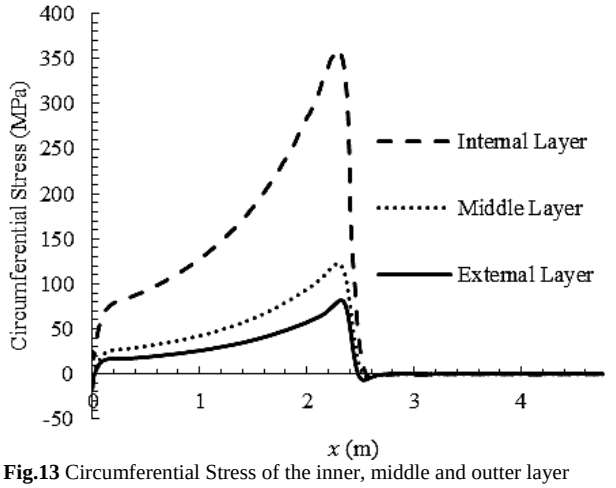

Fig.13 Circumferential Stress of the inner, middle and outter layer along x at the times of 6 ms with finite element method

شکل 13 تنش محیطی لایه داخلی، میانی و خارجی در طول پوسته در زمان 6 میلی‌ثانیه با استفاده از روش المان محدود

8- نتیجه‌گیری

با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالا پاسخ مدل به بارگذاری متحرک در حل تحلیلی با تقریب بسیار خوبی نسبت به نتایج روش المان محدود برای پیش بینی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای ضخیم به‌دست آمد و دقت تئوری مرتبه بالا نسبت به تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج حاصل از هر سه روش نشان می‌دهد که در لایه میانی و نزدیک آن فرض خطی بودن میدان جابجایی، قابل قبول است و تقریبا با نتایج تئوری مرتبه بالا برهم منطبق می‌باشند، اما هرچه از لایه میانی فاصله گرفته و به سمت جداره داخلی و یا خارجی نزدیک‌تر شویم دیگر فرض خطی بودن توزیع میدان جابجایی به ویژه برای پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم، که دارای ضخامتی قابل توجه نسبت به پوسته استوانه‌ای جدار نازک می‌باشد فرض منطقی تلقی نشده و شاهد آن هستیم که با خطای محسوسی نسبت به نتایج المان محدود مواجه خواهیم بود. لذا اهمیت فرض خطی بودن میدان جابجایی نسبت به ضخامت، در ضخامت‌های کم برای توصیف جابجایی شعاعی مناسب بوده ولی با افزایش ضخامت بهتر است از میدان جابجایی مرتبه بالا برای توصیف میدان جابجایی استفاده کرد.

بررسی نتایج تئوری تغییر شکل بالا و مرتبه اول با نتایج المان محدود در پوسته استوانه‌ای یک‌سر گیردار نشان می‌دهد که شرط مرزی تأثیری بر نتایج نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد و توصیف نتایج دینامیکی در نواحی دور از مرز مناسب است اما در نواحی مرزی با مدل تحلیلی بیان شده در این مقاله قابل بررسی نمی‌باشد.

9- پیوست الف

9-1- تعریف ماتریس $D_{15\times15}$

ترم‌های H_j، $\hat{H}_j$ و $\bar{H}_j$ که $(j=1,2,\ldots,7)$ در ماتریس‌های D_f و D_s تعریف شده اند، در پیوست ب آورده شده است.

درایه‌های ماتریس $D_{f_{11\times11}}$ عبارت‌اند از:

$$D_{f_{11}}=(2G+\mu)\hat{H}_1,\ D_{f_{12}}=\mu H_1,\ D_{f_{13}}=(2G+\mu)\hat{H}_3$$
$$D_{f_{14}}=\mu H_3,\ D_{f_{15}}=\mu\hat{H}_1,\ D_{f_{16}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{17}}=(2G+\mu)\hat{H}_2$$
$$D_{f_{18}}=0,\ D_{f_{19}}=(2G+\mu)\hat{H}_4,\ D_{f_{110}}=0,\ D_{f_{111}}=\mu\hat{H}_2$$
$$D_{f_{21}}=\mu H_1,\ D_{f_{22}}=(2G+\mu)\bar{H}_1,\ D_{f_{23}}=\mu H_3$$
$$D_{f_{24}}=(2G+\mu)\bar{H}_3,\ D_{f_{25}}=\mu H_1,\ D_{f_{26}}=\mu H_3,\ D_{f_{27}}=0$$
$$D_{f_{28}}=(2G+\mu)\bar{H}_2,\ D_{f_{29}}=0,\ D_{f_{210}}=(2G+\mu)\bar{H}_4$$
$$D_{f_{211}}=0,\ D_{f_{31}}=(2G+\mu)\hat{H}_3,\ D_{f_{32}}=\mu H_3$$
$$D_{f_{33}}=(2G+\mu)\hat{H}_5,\ D_{f_{34}}=\mu H_5,\ D_{f_{35}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{36}}=\mu\hat{H}_5$$
$$D_{f_{37}}=(2G+\mu)\hat{H}_4,\ D_{f_{38}}=0,\ D_{f_{39}}=(2G+\mu)\hat{H}_6$$
$$D_{f_{310}}=0,\ D_{f_{311}}=\mu\hat{H}_4,\ D_{f_{41}}=\mu H_3,\ D_{f_{42}}=(2G+\mu)\bar{H}_3$$
$$D_{f_{43}}=\mu H_5,\ D_{f_{44}}=(2G+\mu)\bar{H}_5,\ D_{f_{45}}=\mu H_3$$
$$D_{f_{46}}=\mu H_5,\ D_{f_{47}}=0,\ D_{f_{48}}=(2G+\mu)\bar{H}_4,\ D_{f_{49}}=0$$
$$D_{f_{410}}=(2G+\mu)\bar{H}_6,\ D_{f_{411}}=0,\ D_{f_{51}}=\mu\hat{H}_1,\ D_{f_{52}}=\mu\hat{H}_1$$
$$D_{f_{53}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{54}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{55}}=(2G+\mu)\hat{H}_1$$
$$D_{f_{56}}=(2G+\mu)\hat{H}_3,\ D_{f_{57}}=\mu\hat{H}_2,\ D_{f_{58}}=\mu\hat{H}_2$$
$$D_{f_{59}}=\mu\hat{H}_4,\ D_{f_{510}}=\mu\hat{H}_4,\ D_{f_{511}}=(2G+\mu)\hat{H}_2$$
$$D_{f_{61}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{62}}=\mu\hat{H}_3,\ D_{f_{63}}=\mu\hat{H}_5,\ D_{f_{64}}=\mu\hat{H}_5$$
$$D_{f_{65}}=(2G+\mu)\hat{H}_3,\ D_{f_{66}}=(2G+\mu)\hat{H}_5,\ D_{f_{67}}=\mu\hat{H}_4$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

$D_{f_{68}} = \mu\hat{H}_4, D_{f_{69}} = \mu\hat{H}_6,\ D_{f_{610}} = \mu\hat{H}_6,\ D_{f_{611}} = (2G+\mu)\hat{H}_4$
$D_{f_{71}} = (2G+\mu)\hat{H}_2, D_{f_{72}} = 0,\ D_{f_{73}} = (2G+\mu)\hat{H}_4$
$D_{f_{74}} = 0, D_{f_{75}} = \mu\hat{H}_2,\ D_{f_{76}} = \mu\hat{H}_4, D_{f_{77}} = (2G+\mu)\hat{H}_3$
$D_{f_{78}} = \mu H_3, D_{f_{79}} = (2G+\mu)\hat{H}_5,\ D_{f_{710}} = \mu H_5, D_{f_{711}} = \mu\hat{H}_3$
$D_{f_{81}} = 0, D_{f_{82}} = (2G+\mu)\bar{H}_2,\ D_{f_{83}} = 0, D_{f_{84}} = (2G+\mu)\bar{H}_4$
$D_{f_{85}} = 0, D_{f_{86}} = 0,\ D_{f_{87}} = \mu H_3, D_{f_{88}}(2G+\mu)\bar{H}_3$
$D_{f_{89}} = \mu H_5, D_{f_{810}} = (2G+\mu)\bar{H}_5,\ D_{f_{811}} = \mu H_3$
$D_{f_{91}} = (2G+\mu)\hat{H}_4, D_{f_{92}} = 0,\ D_{f_{93}} = (2G+\mu)\hat{H}_6$
$D_{f_{94}} = 0, D_{f_{95}} = \mu\hat{H}_4,\ D_{f_{96}} = \mu\hat{H}_6, D_{f_{97}} = (2G+\mu)\hat{H}_5$
$D_{f_{98}} = \mu H_5, D_{f_{99}} = (2G+\mu)\hat{H}_7,\ D_{f_{910}} = \mu H_7,\ D_{f_{910}} = \mu\hat{H}_5$
$D_{f_{101}} = 0, D_{f_{102}} = (2G+\mu)\bar{H}_4,\ D_{f_{103}} = 0$
$D_{f_{104}} = (2G+\mu)\bar{H}_6,\ D_{f_{105}} = 0, D_{f_{106}} = 0,\ D_{f_{107}} = \mu H_5$
$D_{f_{108}} = (2G+\mu)\bar{H}_5,\ D_{f_{109}} = \mu H_7, D_{f_{1010}} = (2G+\mu)\bar{H}_7$
$D_{f_{1011}} = \mu H_5,\ D_{f_{111}} = \mu\hat{H}_2,\ D_{f_{112}} = \mu\hat{H}_2, D_{f_{113}} = \mu\hat{H}_4$
$D_{f_{114}} = \mu\hat{H}_4,\ D_{f_{115}} = (2G+\mu)\hat{H}_2,\ D_{f_{116}} = (2G+\mu)\hat{H}_4$
$D_{f_{117}} = \mu\hat{H}_3,\ D_{f_{118}} = \mu\hat{H}_3, D_{f_{119}} = \mu H_5,\ D_{f_{1110}} = \mu\hat{H}_5$
$D_{f_{1111}} = (2G+\mu)\hat{H}_3$

درایه‌های ماتریس $D_{s_{11\times 11}}$ عبارت‌اند از:

$D_{s_{11}} = G\hat{H}_1, D_{s_{12}} = G\hat{H}_3, D_{s_{13}} = G\hat{H}_2, D_{s_{14}} = G\hat{H}_4, D_{s_{21}} = G\hat{H}_3$
$D_{s_{22}} = G\hat{H}_5, D_{s_{23}} = G\hat{H}_4, D_{s_{24}} = G\hat{H}_6, D_{s_{31}} = G\hat{H}_2, D_{s_{32}} = G\hat{H}_4$
$D_{s_{33}} = G\hat{H}_3, D_{s_{34}} = G\hat{H}_5, D_{s_{41}} = G\hat{H}_4, D_{s_{42}} = G\hat{H}_6 D_{s_{43}} = G\hat{H}_5$
$D_{s_{44}} = G\hat{H}_7$

10- پیوست ب

ترم‌های H_j، $\hat{H}_j$ و $\bar{H}_j$ که $(j = 1,2,\ldots,7)$ در ماتریس‌های D_f و D_s به صورت زیر تعریف شده اند:

$$H_j = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^{j-1}\,dz = \left(\frac{h}{2}\right)^j \frac{(1-(-1)^j)}{j}, j = 1,2,\ldots,8$$
$$H_2 = H_4 = H_6 = H_8 = 0$$
$$H_1 = h;\ H_3 = \frac{h^3}{12};\ H_5 = \frac{h^5}{80};\ H_7 = \frac{h^7}{448}$$
$$\hat{H}_j = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^{j-1}(1+\frac{z}{R})\,dz = H_j + \frac{1}{R}H_{j+1}, j = 1,2,\ldots,7$$
$$\bar{H}_j = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^{j-1}}{1+\frac{z}{R}}\,dz, j = 1,2,\ldots,7$$
$$\bar{H}_1 = R\ln(1-\frac{2h}{h-2R})$$
$$\bar{H}_2 = R(h - R\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$
$$\bar{H}_3 = R(-Rh + R^2\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$
$$\bar{H}_4 = R(\frac{h^3}{12} + R^2h - R^3\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$
$$\bar{H}_5 = R(-R\frac{h^3}{12} - R^3h + R^4\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$
$$\bar{H}_6 = R(\frac{h^5}{80} + R^2\frac{h^3}{12} + R^4h - R^5\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$
$$\bar{H}_7 = R(-R\frac{h^5}{80} - R^3\frac{h^3}{12} - R^5h + R^6\ln(1-\frac{2h}{h-2R}))$$

11- پیوست ج

درایه‌های ماتریس L_{ij} عبارت‌اند از:

$$L_{1_{2i-1,2j}} = L_{1_{2i,2j-1}} = 0, (i,1,\ldots,4), (j,1,\ldots,4)$$
$$L_{1_{11}} = (2G+\mu)\hat{H}_1, L_{1_{13}} = (2G+\mu)\hat{H}_2, L_{1_{15}} = (2G+\mu)C_3\hat{H}_3$$
$$L_{1_{17}} = (2G+\mu)C_4\hat{H}_4, L_{1_{22}} = G\hat{H}_1, L_{1_{24}} = GC_o\hat{H}_2$$
$$L_{1_{26}} = GC_1\hat{H}_3, L_{1_{28}} = GC_2\hat{H}_4, L_{1_{31}} = (2G+\mu)\hat{H}_2$$
$$L_{1_{33}} = (2G+\mu)\hat{H}_3, L_{1_{35}} = (2G+\mu)C_3\hat{H}_4$$
$$L_{1_{37}} = (2G+\mu)C_4\hat{H}_5, L_{1_{42}} = G\hat{H}_2, L_{1_{44}} = GC_o\hat{H}_3$$
$$L_{1_{46}} = GC_1\hat{H}_4, L_{1_{48}} = GC_2\hat{H}_5, L_{1_{51}} = (2G+\mu)\hat{H}_3$$
$$L_{1_{53}} = (2G+\mu)\hat{H}_4, L_{1_{55}} = (2G+\mu)C_3\hat{H}_5$$
$$L_{1_{57}} = (2G+\mu)C_4\hat{H}_6, L_{1_{62}} = G\hat{H}_3, L_{1_{64}} = GC_o\hat{H}_4$$
$$L_{1_{66}} = GC_1\hat{H}_5, L_{1_{68}} = GC_2\hat{H}_6, L_{1_{71}} = (2G+\mu)\hat{H}_4$$
$$L_{1_{73}} = (2G+\mu)\hat{H}_5, L_{1_{75}} = (2G+\mu)C_3\hat{H}_6$$
$$L_{1_{77}} = (2G+\mu)C_4\hat{H}_7, L_{1_{82}} = G\hat{H}_4, L_{1_{84}} = GC_o\hat{H}_5$$
$$L_{1_{86}} = GC_1\hat{H}_6, L_{1_{88}} = GC_2\hat{H}_7$$
$$L_{2_{2i-1,2j-1}} = L_{2_{2i,2j}} = 0, (i,1,\ldots,4), (j,1,\ldots,4)$$
$$L_{2_{12}} = \frac{\mu H_1}{R}, L_{2_{14}} = \mu C_o\hat{H}_1, L_{2_{16}} = \frac{\mu C_1H_3}{R} + 2\mu C_1\hat{H}_2$$
$$L_{2_{18}} = 3\mu C_2\hat{H}_3, L_{2_{21}} = -\frac{\mu H_1}{R}, L_{2_{23}} = G\hat{H}_1, L_{2_{27}} = 3GC_4\hat{H}_3$$
$$L_{2_{25}} = -\frac{\mu C_3H_3}{R} + 2GC_3\hat{H}_2, L_{2_{32}} = -G\hat{H}_1$$
$$L_{2_{34}} = \frac{\mu C_oH_3}{R} - GC_o\hat{H}_2 + \mu C_o\hat{H}_2, L_{2_{36}} = -GC_1\hat{H}_3 + 2\mu C_1\hat{H}_3$$
$$L_{2_{38}} = \frac{\mu C_2H_5}{R} - GC_2\hat{H}_4 + 3\mu C_2\hat{H}_4, L_{2_{41}} = -\mu\hat{H}_1$$
$$L_{2_{43}} = -\frac{\mu H_3}{R} + G\hat{H}_2 - \mu\hat{H}_2, L_{2_{45}} = 2GC_3\hat{H}_3 - \mu C_3\hat{H}_3$$
$$L_{2_{47}} = -\frac{\mu C_4H_5}{R} + 3GC_4\hat{H}_4 - \mu C_4\hat{H}_4, L_{2_{52}} = \frac{\mu H_3}{R} - 2G\hat{H}_2$$
$$L_{2_{54}} = -2GC_o\hat{H}_3 + \mu C_o\hat{H}_3, L_{2_{58}} = -2GC_2\hat{H}_5 + 3\mu C_2\hat{H}_5$$
$$L_{2_{56}} = \frac{\mu C_1H_5}{R} - 2GC_1\hat{H}_4 + 2\mu C_1\hat{H}_4$$
$$L_{2_{61}} = -\frac{\mu H_3}{R} - 2\mu\hat{H}_2, L_{1_{63}} = G\hat{H}_3 - 2\mu\hat{H}_3$$
$$L_{2_{65}} = -\frac{\mu C_3H_5}{R} + 2GC_3\hat{H}_4 - 2\mu C_3\hat{H}_4, L_{2_{72}} = -3G\hat{H}_3$$
$$L_{2_{67}} = 3GC_4\hat{H}_5 - 2\mu C_4\hat{H}_5, L_{2_{74}} = \frac{\mu C_oH_5}{R} - 3GC_o\hat{H}_4 + \mu C_o\hat{H}_4$$
$$L_{2_{76}} = -3GC_1\hat{H}_5 + 2\mu C_1\hat{H}_5$$
$$L_{2_{78}} = \frac{\mu C_2H_7}{R} - 3GC_2\hat{H}_6 + 3\mu C_2\hat{H}_6, L_{2_{81}} = -3\mu\hat{H}_3$$
$$L_{2_{83}} = -\frac{\mu H_5}{R} + G\hat{H}_4 - 3\mu\hat{H}_4, L_{2_{85}} = 2GC_3\hat{H}_5 - 3\mu C_3\hat{H}_5$$
$$L_{2_{87}} = -\frac{\mu C_4H_7}{R} + 3GC_4\hat{H}_6 - 3\mu C_4\hat{H}_6$$
$$L_{3_{11}} = L_{3_{12}} = L_{3_{13}} = L_{3_{14}} = L_{3_{15}} = L_{3_{16}} = L_{3_{17}} = L_{3_{18}} = L_{3_{21}}$$
$$L_{3_{31}} = L_{3_{41}} = L_{3_{51}} = L_{3_{61}} = L_{3_{71}} = L_{3_{81}} = L_{3_{2i-1,2j}} = L_{3_{2i,2j-1}} = 0, (i,2,\ldots,4), (j,2,\ldots,4)$$
$$L_{3_{22}} = -\frac{(2G+\mu)\bar{H}_1}{R^2}, L_{3_{24}} = -\frac{\mu C_oH_1}{R} - \frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_2}{R^2}$$
$$L_{3_{26}} = -\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_3}{R^2}, L_{3_{28}} = -\frac{3\mu C_2H_3}{R} - \frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_4}{R^2}$$
$$L_{3_{33}} = -G\hat{H}_1, L_{3_{35}} = -2GC_3\hat{H}_2, L_{3_{37}} = -3GC_4\hat{H}_3$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

$$L_{5_{46}}=\frac{(V^2\bar{I}_2-(2G+\mu)\hat{H}_3)(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)C_4\hat{H}_4)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_4\hat{H}_6$$
$$L_{5_{51}}=G\hat{H}_3, L_{5_{53}}=GC_o\hat{H}_4, L_{5_{55}}=GC_1\hat{H}_5, L_{5_{57}}=GC_2\hat{H}_6$$
$$L_{5_{62}}=\frac{(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)\hat{H}_4)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)\hat{H}_5$$
$$L_{5_{64}}=\frac{(V^2\bar{I}_2-(2G+\mu)C_3\hat{H}_3)(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)\hat{H}_4)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_3\hat{H}_6$$
$$L_{5_{66}}=\frac{V^4\bar{I}_3^2-V^2(2G+\mu)(1+C_4)\bar{I}_3\hat{H}_4+(2G+\mu)^2C_4\hat{H}_4^2}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_4\hat{H}_7, L_{5_{71}}=G\hat{H}_4, L_{5_{73}}=GC_o\hat{H}_5, L_{5_{75}}=GC_1\hat{H}_6$$
$$L_{5_{77}}=GC_2\hat{H}_7, L_{6_{2i-1,2j-1}}=0, (i,1,\dots,4), (j,1,\dots,4)$$
$$L_{6_{2i,2j}}=0, (i,1,\dots,3), (j,1,\dots,3)$$
$$L_{6_{12}}=G\hat{H}_1+\frac{\mu H_1(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{14}}=2GC_3\hat{H}_2+$$
$$\frac{\mu(V^2H_1\bar{I}_2+C_3(H_3(-V^2\bar{I}_0+(2G+\mu)\hat{H}_1)-(2G+\mu)H_1\hat{H}_3))}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{6_{16}}=+3GC_4\hat{H}_3+\frac{\mu H_1(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)C_4\hat{H}_4)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{6_{21}}=-G\hat{H}_1+\frac{\mu H_1(-V^2\bar{I}_1+(2G+\mu)\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{6_{23}}=+\frac{\mu C_o\hat{H}_1(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)}{-V^2\bar{I}_0+(2G+\mu)\hat{H}_1}-GC_o\hat{H}_2+\mu C_o\hat{H}_2$$
$$+\frac{\mu C_oH_3}{R}, L_{6_{25}}=+\frac{\mu C_1(H_3+2R\hat{H}_2)(-V^2\bar{I}_1+(2G+\mu)\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$-GC_1\hat{H}_3+2\mu C_1\hat{H}_3, L_{6_{27}}=-\frac{3\mu C_2(-V^2\bar{I}_1+(2G+\mu)\hat{H}_2)\hat{H}_3}{-V^2\bar{I}_0+(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$-GC_2\hat{H}_4+3\mu C_2\hat{H}_4+\frac{\mu C_2H_5}{R}, L_{6_{32}}=-\frac{\mu H_3}{R}+G\hat{H}_2-\mu\hat{H}_2$$
$$+\frac{R\mu\hat{H}_1(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{34}}=2GC_3\hat{H}_3-\mu C_3\hat{H}_3$$
$$+\frac{R\mu\hat{H}_1(V^2\bar{I}_2-(2G+\mu)C_3\hat{H}_3)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{36}}=-\frac{\mu C_4H_5}{R}+3GC_4\hat{H}_4$$
$$-\mu C_4\hat{H}_4+\frac{R\mu\hat{H}_1(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)C_4\hat{H}_4)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{41}}$$
$$=\frac{\mu H_3}{R}-2G\hat{H}_2$$
$$+\frac{\mu H_1(-V^2\bar{I}_2+(2G+\mu)\hat{H}_3)}{RV^2\bar{I}_0-R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{43}}=-2GC_o\hat{H}_3+\mu C_o\hat{H}_3$$

$$L_{3_{42}}=-\frac{(2G+\mu)\bar{H}_2}{R^2}-\frac{\mu\hat{H}_1}{R}, L_{3_{44}}=-\frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_3}{R^2}$$
$$-(2G+\mu)C_o\hat{H}_1, -\frac{\mu C_o\hat{H}_2}{R}, L_{3_{46}}=-\frac{2\mu C_1H_3}{R}-\frac{\mu C_1\hat{H}_3}{R}$$
$$-\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_4}{R^2}-2(2G+\mu)C_1\hat{H}_2$$
$$L_{3_{48}}=-\frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_5}{R^2}-3(2G+\mu)C_2\hat{H}_3-\frac{\mu C_2\hat{H}_4}{R}$$
$$L_{3_{53}}=-2G\hat{H}_2, L_{3_{55}}=-4GC_3\hat{H}_3, L_{3_{57}}=-6GC_4\hat{H}_4$$
$$L_{3_{62}}=-\frac{(2G+\mu)\bar{H}_3}{R^2}-\frac{2\mu\hat{H}_2}{R}, L_{3_{64}}=-\frac{\mu C_oH_3}{R}-\frac{2\mu C_o\hat{H}_3}{R}$$
$$-\frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_4}{R^2}-2(2G+\mu)C_o\hat{H}_2$$
$$L_{3_{66}}=-\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_5}{R^2}-4(2G+\mu)C_1\hat{H}_3-\frac{2\mu C_1\hat{H}_4}{R}$$
$$L_{3_{84}}=-\frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_5}{R^2}-3(2G+\mu)C_o\hat{H}_3-\frac{3\mu C_o\hat{H}_4}{R}, L_{3_{86}}=$$
$$-\frac{2\mu C_1H_5}{R}-\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_6}{R^2}-6(2G+\mu)C_1\hat{H}_4-\frac{3\mu C_1\hat{H}_5}{R}$$
$$L_{3_{88}}=-\frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_7}{R^2}-9(2G+\mu)C_2\hat{H}_5-\frac{3\mu C_2\hat{H}_6}{R}$$
$$L_{4_{2i-1,2j}}=L_{4_{2i,2j-1}}=0, (i,1,\dots,4), (j,1,\dots,4)$$
$$L_{4_{11}}=-\bar{I}_0, L_{4_{13}}=-\bar{I}_1, L_{4_{15}}=-\bar{I}_2, L_{4_{17}}=-\bar{I}_3, L_{4_{22}}=-\bar{I}_0$$
$$L_{4_{24}}=-\bar{I}_1, L_{4_{26}}=-\bar{I}_2, L_{4_{28}}=-\bar{I}_3, L_{4_{31}}=-\bar{I}_1, L_{4_{33}}=-\bar{I}_2$$
$$L_{4_{35}}=-\bar{I}_3, L_{4_{37}}=-\bar{I}_4, L_{4_{42}}=-\bar{I}_1, L_{4_{44}}=-\bar{I}_2, L_{4_{46}}=-\bar{I}_3$$
$$L_{4_{48}}=-\bar{I}_4, L_{4_{51}}=-\bar{I}_2, L_{4_{53}}=-\bar{I}_3, L_{4_{55}}=-\bar{I}_4, L_{4_{57}}=-\bar{I}_5$$
$$L_{4_{62}}=-\bar{I}_2, L_{4_{64}}=-\bar{I}_3, L_{4_{66}}=-\bar{I}_4, L_{4_{68}}=-\bar{I}_5, L_{4_{71}}=-\bar{I}_3$$
$$L_{4_{73}}=-\bar{I}_4, L_{4_{75}}=-\bar{I}_5, L_{4_{77}}=-\bar{I}_6, L_{4_{82}}=-\bar{I}_3, L_{4_{84}}=-\bar{I}_4$$
$$L_{4_{86}}=-\bar{I}_5, L_{4_{88}}=-\bar{I}_6$$
$$L_{5_{2i-1,2j}}=0, (i,1,\dots,4), (j,1,\dots,3)$$
$$L_{5_{2i,2j-1}}=0, (i,1,\dots,3), (j,1,\dots,4)$$
$$L_{5_{11}}=G\hat{H}_1, L_{5_{13}}=GC_o\hat{H}_2, L_{5_{15}}=GC_1\hat{H}_3, L_{5_{17}}=GC_2\hat{H}_4$$
$$L_{5_{22}}=\frac{(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)^2}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}+(2G+\mu)\hat{H}_3$$
$$L_{5_{24}}=\frac{(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_2-(2G+\mu)C_3\hat{H}_3)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_3\hat{H}_4$$
$$L_{5_{26}}=\frac{(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_3-(2G+\mu)C_4\hat{H}_4)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_4\hat{H}_5$$
$$L_{5_{31}}=G\hat{H}_2, L_{5_{33}}=GC_o\hat{H}_3, L_{5_{35}}=GC_1\hat{H}_4, L_{5_{37}}=GC_2\hat{H}_5$$
$$L_{5_{42}}=\frac{(V^2\bar{I}_1-(2G+\mu)\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_2-(2G+\mu)\hat{H}_3)}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)\hat{H}_4$$
$$L_{5_{44}}=\frac{V^4\bar{I}_2^2-V^2(2G+\mu)(1+C_3)\bar{I}_2\hat{H}_3+(2G+\mu)^2C_3\hat{H}_3^2}{V^2\bar{I}_0-(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(2G+\mu)C_3\hat{H}_5$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

$$L_{7_{37}} = -\frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_5}{R^2} - 3(2G+\mu)C_2\hat{H}_3 - \frac{\mu C_2\hat{H}_4}{R}$$
$$-\frac{3R\mu^2C_2\hat{H}_1\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{7_{42}} = -2G\hat{H}_2, L_{7_{44}} = -4GC_3\hat{H}_3$$
$$L_{7_{46}} = -6GC_4\hat{H}_4, L_{7_{51}} = -\frac{(2G+\mu)\bar{H}_3}{R^2} - \frac{2\mu\hat{H}_2}{R}$$
$$-\frac{\mu^2H_1H_3}{R(RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1)} - \frac{2\mu^2H_1\hat{H}_2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{7_{53}} = -\frac{\mu C_oH_3}{R} - \frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_4}{R^2} - \frac{\mu^2C_oH_3\hat{H}_1}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$-2(2G+\mu)C_o\hat{H}_2 - \frac{2R\mu^2C_o\hat{H}_1\hat{H}_2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{2\mu C_o\hat{H}_3}{R}$$
$$L_{7_{55}} = -\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_5}{R^2} - \frac{\mu^2C_1H_3^2}{R(RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1)}$$
$$-\frac{4\mu^2C_1H_3\hat{H}_2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{4R\mu^2C_1\hat{H}_2^2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{2\mu C_1\hat{H}_4}{R}$$
$$-4(2G+\mu)C_1\hat{H}_3, L_{7_{57}} = -\frac{3\mu C_2H_5}{R} - \frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_6}{R^2}$$
$$-\frac{3\mu^2C_2H_3\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{6R\mu^2C_2\hat{H}_2\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{2\mu C_2\hat{H}_5}{R}$$
$$-6(2G+\mu)C_2\hat{H}_4, L_{7_{42}} = -3G\hat{H}_3, L_{7_{44}} = -6GC_3\hat{H}_4$$
$$L_{7_{46}} = -9GC_4\hat{H}_5, L_{7_{71}} = -\frac{3\mu^2H_1\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{3\mu\hat{H}_3}{R}$$
$$-\frac{(2G+\mu)\bar{H}_4}{R^2}, L_{7_{73}} = -\frac{3R\mu^2C_o\hat{H}_1\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{3\mu C_o\hat{H}_4}{R}$$
$$-\frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_5}{R^2} - 3(2G+\mu)C_o\hat{H}_3, L_{7_{75}} = -\frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_6}{R^2}$$
$$-\frac{2\mu C_1H_5}{R} - \frac{3\mu^2C_1(H_3+2R\hat{H}_2)\hat{H}_3}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - 6(2G+\mu)C_1\hat{H}_4$$
$$-\frac{3\mu C_1\hat{H}_5}{R}, L_{7_{77}} = -\frac{(2G+\mu)C_2\bar{H}_7}{R^2} - \frac{9R\mu^2C_2\hat{H}_3^2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$-9(2G+\mu)C_2\hat{H}_5 - \frac{3\mu C_2\hat{H}_6}{R},$$
$$L_{8_{2i-1,2j}} = 0, (i,1,\dots,4), (j,1,\dots,3)$$
$$L_{8_{2i,2j-1}} = 0, (i,1,\dots,3), (j,1,\dots,4)$$
$$L_{8_{11}} = -\bar{I}_0, L_{8_{13}} = -\bar{I}_1, L_{8_{15}} = -\bar{I}_2, L_{8_{17}} = -\bar{I}_3, L_{8_{22}} = -\bar{I}_2$$
$$L_{8_{24}} = -\bar{I}_3, L_{8_{26}} = -\bar{I}_4, L_{8_{31}} = -\bar{I}_1, L_{8_{33}} = -\bar{I}_2, L_{8_{35}} = -\bar{I}_3$$
$$L_{8_{37}} = -\bar{I}_4, L_{8_{42}} = -\bar{I}_3, L_{8_{44}} = -\bar{I}_4, L_{8_{46}} = -\bar{I}_5, L_{8_{51}} = -\bar{I}_2$$
$$L_{8_{53}} = -\bar{I}_3, L_{8_{55}} = -\bar{I}_4, L_{8_{57}} = -\bar{I}_5, L_{8_{22}} = -\bar{I}_4, L_{8_{64}} = -\bar{I}_5$$
$$L_{8_{66}} = -\bar{I}_6, L_{8_{71}} = -\bar{I}_3, L_{8_{73}} = -\bar{I}_4, L_{8_{75}} = -\bar{I}_5, L_{8_{77}} = -\bar{I}_6$$

12- مراجع

[1] A. Ugural, *Stresses in Plates and Shells*, pp. 198-200, Boston, McGraw-Hill, 1999.

[2] V. Z. Vlasov, *General Theory of Shells and its Applications in Engineering*, pp. 495-514, Moscow-Leningrad, National Aeronautics and Space Administration, 1964 .

[3] A. Goldenveizer, Theory of elastic thin shells, *Naval Engineers Journal*, Vol. 74, No. 3, pp. 582-582, 1962.

$$+\frac{\mu C_o\hat{H}_1(V^2\bar{I}_2 - (2G+\mu)\hat{H}_3)}{-V^2\bar{I}_0 + (2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{45}} = \frac{\mu C_1H_5}{R} - 2GC_1\hat{H}_4$$
$$+2\mu C_1\hat{H}_4 + \frac{\mu C_1(H_3+2R\hat{H}_2)(-V^2\bar{I}_2 + (2G+\mu)\hat{H}_3)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{6_{47}} = -\frac{3\mu C_2\hat{H}_3(-V^2\bar{I}_2 + (2G+\mu)\hat{H}_3)}{-V^2\bar{I}_0 + (2G+\mu)\hat{H}_1} - 2GC_2\hat{H}_5$$
$$+3\mu C_2\hat{H}_5, L_{6_{52}} = -\frac{\mu(H_3+2R\hat{H}_2)(-V^2\bar{I}_1 + (2G+\mu)\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(G-2\mu)\hat{H}_3, L_{6_{54}} = -\frac{\mu C_3H_5}{R} + 2(G-\mu)C_3\hat{H}_4$$
$$+\frac{\mu(H_3+2R\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_2 - (2G+\mu)C_3\hat{H}_3)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{6_{56}} = +\frac{\mu(H_3+2R\hat{H}_2)(V^2\bar{I}_3 - (2G+\mu)C_4\hat{H}_4)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$+(3G-2\mu)C_4\hat{H}_5, L_{6_{61}} = +\frac{\mu H_1(-V^2\bar{I}_3 + (2G+\mu)\hat{H}_4)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$-3G\hat{H}_3, L_{6_{63}} = +\frac{\mu C_o\hat{H}_1(V^2\bar{I}_3 - (2G+\mu)\hat{H}_4)}{-V^2\bar{I}_0 + (2G+\mu)\hat{H}_1} + \frac{\mu C_oH_5}{R}$$
$$+(-3G+\mu)C_o\hat{H}_4, L_{6_{65}} = +(-3G+2\mu)C_1\hat{H}_5$$
$$+\frac{\mu C_1(H_3+2R\hat{H}_2)(-V^2\bar{I}_3 + (2G+\mu)\hat{H}_4)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{6_{67}} = \frac{\mu C_2H_7}{R}$$
$$-3GC_2\hat{H}_6 + 3\mu C_2\hat{H}_6 - \frac{3\mu C_2\hat{H}_3(-V^2\bar{I}_3 + (2G+\mu)\hat{H}_4)}{-V^2\bar{I}_0 + (2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{7_{2i-1,2j}} = 0, (i,1,\dots,4), (j,1,\dots,3)$$
$$L_{7_{2i,2j-1}} = 0, (i,1,\dots,3), (j,1,\dots,4)$$
$$L_{7_{11}} = -\frac{\mu^2H_1^2}{R^2(V^2\bar{I}_0 - (2G+\mu)\hat{H}_1)} - \frac{(2G+\mu)\bar{H}_1}{R^2}$$
$$L_{7_{13}} = -\frac{\mu C_oH_1(V^2\bar{I}_0 - 2G\hat{H}_1)}{R(V^2\bar{I}_0 - (2G+\mu)\hat{H}_1)} - \frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_2}{R^2}$$
$$L_{7_{15}} = \frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_3}{R^2} - \frac{\mu^2C_1H_1(H_3+2R\hat{H}_2)}{R^2(V^2\bar{I}_0 - (2G+\mu)\hat{H}_1)}$$
$$L_{7_{17}} = -\frac{C_2(3R\mu H_3 + (2G+\mu)\bar{H}_4)}{R^2} - \frac{3\mu^2C_2H_1\hat{H}_3}{R(V^2\bar{I}_0 - (2G+\mu)\hat{H}_1)}$$
$$L_{7_{22}} = -G\hat{H}_1, L_{7_{24}} = -2GC_3\hat{H}_2, L_{7_{26}} = -3GC_4\hat{H}_3$$
$$L_{7_{31}} = -\frac{(2G+\mu)\bar{H}_2}{R^2} - \frac{\mu\hat{H}_1}{R} - \frac{\mu^2H_1\hat{H}_1}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}$$
$$L_{7_{33}} = -\frac{(2G+\mu)C_o\bar{H}_3}{R^2} + (-2G-\mu)C_o\hat{H}_1 - \frac{\mu C_o\hat{H}_2}{R}$$
$$-\frac{R\mu^2C_o\hat{H}_1^2}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1}, L_{7_{35}} = -\frac{2\mu C_1H_3}{R} - \frac{(2G+\mu)C_1\bar{H}_4}{R^2}$$
$$-2(2G+\mu)C_1\hat{H}_2 - \frac{\mu^2C_1\hat{H}_1(H_3+2R\hat{H}_2)}{RV^2\bar{I}_0 - R(2G+\mu)\hat{H}_1} - \frac{\mu C_1\hat{H}_3}{R}$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]

[4] J. Pearson, A fragmentation model for cylindrical warheads, DTIC Document, pp. 1990.
[5] S. Gardner, Analysis of fragmentation and resulting shrapnel penetration of naturally fragmenting cylindrical bombs, *Lawrence Livermore National Laboratory*, U.S. Department Energy, 2000.
[6] I. Mirsky, G. Hermann, Axially motions of thick cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, pp. 97-102, 1958.
[7] S. C. Tang, Dynamic response of a tube under moving pressure, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 91, No. 5, pp. 97-122, 1965.
[8] H. Reismann, Response of a pre-stressed cylindrical shell to moving pressure load, *Proceeding of Eighth Midwest Mechanics Conference*, *Pergamon*, New York, pp. 349-363, 1965.
[9] T. Simkins, Amplification of flexural waves in gun tubes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 2, pp. 145-154, 1994.
[10] A. Bezverkhii, V. Mukoid, Reaction of thick-walled cylindrical shell to a suddenly applied internal load, *International Applied Mechanics*, Vol. 30, No. 6, pp. 441-445, 1994.
[11] W. Beltman, J. Shepherd, Linear elastic response of tubes to internal detonation loading, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, No. 4, pp. 617-655, 2002.
[12] M. Mirzaei, K. Mazaheri, H. Biglari, Analytical modeling of the elastic structural response of tubes to internal detonation loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 12, pp. 883-895, 2005.
[13] M. Mirzaei, H. Biglari, M. Salavatian, Analytical and numerical modeling of the transient elasto-dynamic response of a cylindrical tube to internal gaseous detonation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, No. 7, pp. 531-539, 2006.
[14] M. Mirzaei, Vibrational response of thin tubes to sequential moving pressures, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 59, No. 1, pp. 44-54, 2012.
[15] M. Mirzaei, M. T. Asadi, R. Akbari, On vibrational behavior of pulse detonation engine tubes, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 47, pp. 177-190, 2015.
[16] C. Urn, A higher-order theory for vibration of doubly curved shallow shells, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 587, 1996.
[17] A. K. Garg, R. K. Khare, T. Kant, Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 205-235, 2006.
[18] J. Reddy, C. Liu, A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 23, No. 3, pp. 319-330, 1985.
[19] C. W. Bert, Structural theory for laminated anisotropic elastic shells, *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 414-423, 1967.
[20] A. Leissa, J. D. Chang, Elastic deformation of thick, laminated composite shells, *Composite Structures*, Vol. 35, No. 2, pp. 153-170, 1996.
[21] C. Loy, K. Lam, Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 4, pp. 719-737, 1999.
[22] S. Khalili, A. Davar, K. M. Fard, Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 56, No. 1, pp. 1-25, 2012.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.50.6]