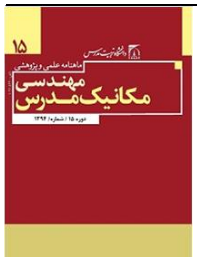


ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی جریان جابجایی آزاد همراه با تابش برای محیط داخل یک حفره مثلثی با استفاده از روش المان طبیعی (NEM)

حسن حدادی[1]، سیروس آقانجفی[2]، فرشاد ترابی[3*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، صندوق پستی 19395-1999، ftorabi@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 03 بهمن 1393
پذیرش: 27 اسفند 1393
ارائه در سایت: 05 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:
روش المان طبیعی
حفره مثلثی
تابش

چکیده

در این مقاله از روش المان طبیعی (NEM) برای بررسی انتقال حرارت هدایت، جابجایی و تابش برای جریان آرام در یک حفره مثلثی استفاده شد. روش المان طبیعی بر اساس روش گالرکین بوده و به‌عنوان یک روش بدون مش در نظر گرفته شده است. توابع شکل استفاده شده در روش المان طبیعی که بر اساس دیاگرام ورونی مجموعه‌ای از گره‌ها بوده، به‌دقت درون‌یابی کرده و می‌توان شرایط مرزی اساسی را به‌صورت مستقیم در ترم‌های مربوطه در سیستم معادلات، جایگزین کرد. در این مقاله برای حل معادله انتقال تابشی از تقریب P_1 استفاده شد. اثر پارامترهای مختلف مانند عدد رایلی برای حالت بدون تابش و عدد پلانک و دمای متوسط برای حالت تابش در نظر گرفته شد. نشان داده شد که افزایش عدد رایلی، سبب افزایش استحکام رژیم جابجایی آزاد و در نتیجه نرخ انتقال حرارت جابجایی می‌شود. همچنین نشان داده شد که کاهش عدد پلانک و دمای متوسط، سبب افزایش استحکام رژیم تابش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت تابشی می‌شود. نتایج روش المان طبیعی با دیگر مطالعات گزارش شده در منابع، مقایسه شد. با مقایسه نشان داده شد که روش المان طبیعی کارآمد، دقیق و پایدار است و از آن می‌توان برای انتقال حرارت و جریان سیال استفاده کرد.

The analysis of natural convection flow with radiation for a medium inside a triangular enclosure using natural element method

Hassan Hadadi, Cyrus Aghanajafi, Farschad Torabi*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, ftorabi@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 January 2015
Accepted 18 March 2015
Available Online 25 April 2015

Keywords:
Natural Element Method
Triangular Enclosure
Radiation

ABSTRACT

In this paper the natural element method is employed to study conductive, convective and radiative heat transfer for laminar flow in a triangular enclosure. The natural element method is referred to as natural neighbor Galerkin method and is considered as a meshless numerical method. The shape functions used in natural element method, which are based on the Voronoi diagram of a set of nodes, are attentively interpolant, and the essential boundary conditions can be imposed by directly substituting the corresponding terms in the system of equations. In this paper, for solving radiative transfer equation P_1 approximation is used. Effects of different parameters such as Rayleigh number for non-radiation and Planck number and mean temperature for radiation are considered. It is shown that increasing the Rayleigh number increases the strength of free convection regime and consequently increases the value of convective heat transfer rate. It is also revealed that decreasing the Planck number and mean temperature increases the strength of Radiation regime and consequently increases the value of radiative heat transfer rate. Results for natural element method are compared with the other studies reported in the literature. By comparison, it is shown that natural element method is efficient, accurate and stable, and can be used for heat transfer and fluid flow.

1- مقدمه

جریان جابجایی آزاد در یک حفره بسته در بسیاری از مسائل مهندسی کاربرد دارد، بویژه جریان جابجایی آزاد در یک حفره مثلثی که با توجه به کاربرد آن در طول سال‌های اخیر توجه خاصی به آن شده است. از موارد کاربرد این مدل حفره، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف- کاربردهای مربوط به انرژی، به‌عنوان مثال: عایق حرارتی ساختمان با استفاده از شکاف هوا، کلکتورهای[1] خورشیدی و کوره‌ها [1،2].
ب- کاربردهای ژئوفیزیکی، برای مثال اختلاف گرما در دریاچه‌ها، خنک‌کننده‌ها در دریاچه‌ها و انتشار آلاینده‌ها در دریاها [3].

1- collectors

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

H. Hadadi, C. Aghanajafi, F. Torabi, The analysis of natural convection flow with radiation for a medium inside a triangular enclosure using natural element method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 6, pp. 209-220, 2015 (In Persian)

در میان مطالعات قبلی، کاریاکین و همکارانش و هولتزمن و همکارانش جریان جابجایی آزاد آرام در یک حفره مثلثی که از زیر گرما داده می‌شد و از بالا خنک می‌شد را مورد بررسی قرار دادند [۴،5]. در کتاب بجان [6] این‌گونه مسائل به‌خوبی بررسی شده است. کنت جریان جابجایی آزاد در یک حفره مثلثی که دو دیواره مایل بالای آن گرم و دیواره کف آن خنک می‌شد را برای نسبت ابعاد مختلف بررسی کرد [7]. کالری و همکارانش جریان جابجایی آزاد در یک حفره مثلثی را برای شرایط مرزی دمایی مختلف، اعداد پرانتل مختلف و زاویه‌های مختلف بررسی کردند [8]. آن‌ها برای حل معادلات از روش المان محدود گالرکین استفاده کردند. باساک و همکارانش جریان سیال را در حفره مثلثی در حالتی که دیواره پایین سرد و دیواره‌های بالایی آن گرم بود را مورد بررسی قرار دادند [9]. کلیه مطالعات انجام شده بر روی جریان جابجایی آزاد و انتقال حرارت در حفره مثلثی برای ابعاد مختلف، شرایط مرزی مختلف، عددهای رایلی مختلف و عددهای پرانتل مختلف توسط ساها و خان جمع‌آوری شده است [10].

در بیشتر مطالعات از تابش صرف‌نظر می‌شود اما بسیاری از پدیده‌های فیزیکی وجود دارد که در تبادل حرارتی، تابش نقش مهمی ایفا می‌کند که برای مثال می‌توان به انتقال حرارت در کوره‌ها و محفظه‌های احتراق، شبیه‌سازی انرژی خورشیدی و استفاده از انرژی خورشیدی، جبه جریان زمین، جریان ذوب اکسید در طول تشکیل کریستال، تولید و فراوری شیشه مذاب، گیرنده‌های هوایی خورشیدی و کلکتورهای خورشیدی اشاره کرد. نشت حرارت در فضاهای تخلیه، اتلاف انرژی در لوله‌های خلاء، نقش آب و هوا به عنوان خنک کننده در نیروگاه‌های برق و خنک کننده دستگاه‌های الکترونیکی نیز شامل مبادله انرژی از طریق تابش هستند [11،12]. خلاصه‌ای از انواع مدل‌های تابشی موجود در متون، در کتاب سیگال و هاول [13] و مودست [14] بیان شده است.

در سال‌های اخیر به علت پیچیدگی ریاضی تابش در هندسه‌های دوبعدی، تجزیه و تحلیل تقریبی تابش توسعه یافته است. به نظر می‌رسد تکنیکی موفق برای بررسی انتقال حرارت تابشی چندبعدی، روش تقریبی P_1 باشد. در روش P_1 معادله انتقال تابشی با این فرض که شدت تابشی را می‌توان به مجموعه‌ای از سری‌های هارمونیک کروی تجزیه کرد، ساده می‌شود. روش P_1 در ابتدا توسط تروت [15] توسعه یافت. لاریت انتقال حرارت تابشی را در داخل محیط بین دو صفحه عمودی با استفاده از روش P_1 بررسی کرد [16]. وی انتقال حرارت را در داخل یک حفره مستطیلی با نسبت طول به عرض بزرگ‌تر از شش بررسی کرد. فیسجی و همکارانش انتقال حرارت تابشی را در یک مکعب که داخل آن پر از دوده و گاز بود، مورد بررسی قراردادند [17]. آن‌ها از روش P_1 برای بررسی انتقال حرارت تابشی استفاده کردند و اثر انتقال حرارت تابشی را بر محیط مکعب بررسی کردند. سلیم و همکارانش انتقال حرارت تابش، جابجایی و هدایت را در یک حفره مربعی باز مورد بررسی قرار دادند و از روش P_1 برای حل معادله انتقال تابشی استفاده کردند [12].

در منابع موجود تا به حال جریان سیال با جابجایی آزاد همراه با تابش محیط در داخل یک حفره مثلثی به طور کامل بررسی نشده است. اگرچه سیرس و همکارانش اثر تابش سطح دیواره بر جریان جابجایی آزاد در داخل یک حفره مثلثی را مورد بررسی قرار دادند [11] اما آن‌ها اثر تابش را فقط در مرزها در نظر گرفتند و اثر تابش را به عنوان یک شرط مرزی در معادلات اعمال کردند.

برای شبیه‌سازی هر پدیده فیزیکی ابتدا باید معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر آن پدیده را یافت و سپس به حل آن پرداخت. از آنجا که حل تحلیلی بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی سخت یا غیرممکن است، بنابراین برای حل آن‌ها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در مکانیک محاسباتی روش‌های عددی فراوانی برای تعیین جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل وجود دارد. در روش‌های المان محور بین نقاط ارتباط مشخص و از پیش تعریف شده‌ای وجود دارد و در گسسته‌سازی دامنه مسائل، به کیفیت مش از پیش تعریف شده به‌شدت بستگی دارند و در برخورد با مسائل با هندسه پیچیده و انحراف شدید، دچار مشکل می‌شوند. در سال‌های اخیر برای غلبه بر مشکل فوق، شاخه جدیدی در مکانیک محاسباتی به نام روش‌های بدون‌مش[1] پایه‌گذاری شده است. روش‌های بدون مش از مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده در دامنه مسأله و همچنین از مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده در مرزهای دامنه، برای نشان دادن دامنه مسأله و مرزهای آن، تشکیل شده است. در روش‌های بدون مش بر اساس فرم ضعیف[2]، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی مشتق با استفاده از تکنیک‌های مختلف به مجموعه‌ای که به‌اصطلاح معادلات انتگرال فرم ضعیف نامیده می‌شود، تبدیل می‌شوند. در روش فرم ضعیف برای استخراج مجموعه‌ای از سیستم معادلات جبری از طریق انتگرال‌گیری عددی، از مجموعه‌ای از سلول‌های پس‌زمینه که ممکن است به‌صورت کلی و یا به‌صورت محلی در دامنه مسأله ساخته شده باشد، استفاده می‌شود. در نتیجه روش‌های بدون مش بر اساس فرم ضعیف نیاز به یک مش زمینه دارند. یکی از روش‌های بدون مش بر اساس فرم ضعیف، روش المان طبیعی (NEM)[3] است. روش المان طبیعی بر اساس روش گالرکین می‌باشد که یک تکنیک جدید در مکانیک محاسباتی است. در چارچوب روش المان طبیعی دو درون‌یابی مختلف همسایه طبیعی پیشنهادشده است. نسخه اصلی درون‌یابی در روش المان طبیعی، درون‌یابی سیبسون[4] است. یکی از درون‌یابی‌های غیر سیبسونی که در ساختار روش المان طبیعی به‌طور مستقل استفاده می‌شود، درون‌یابی لاپلاس[5] توابع درونیاب یا توابع شکلی[6] که در روش المان طبیعی استفاده می‌شود بر اساس دیاگرام ورونی[7] مجموعه‌ای از گره‌ها است و برخلاف بسیاری از روش بدون‌مش که برای اعمال شرایط مرزی اساسی به تکنیک‌های خاصی نیاز دارند، در روش المان طبیعی شرایط مرزی اساسی را می‌توان به‌طور مستقیم و به آسانی در دستگاه معادلات اعمال کرد [18]. روش المان طبیعی ابتدا توسط براون و سمبریدج پیشنهاد داده شد و برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفت [19]. سیوکومار و همکارانش به بررسی استفاده از روش المان طبیعی برای حل مسائل مقدار مرزی بیضوی در مکانیک جامدات پرداختند [20]. آن‌ها از درون‌یابی سیبسون استفاده کردند و نشان دادند که روش المان طبیعی دقت بهتری نسبت به روش المان محدود دارد. بلیکاو و سمناو درون‌یابی لاپلاس را معرفی کردند [21]. هایوشی و سوگی‌هارا از درون‌یابی لاپلاس در روش المان طبیعی برای حل مسائل مکانیک شکست و تنش استفاده کردند [22]. آن‌ها نشان دادند که درون‌یابی لاپلاس دارای دقت مناسبی است و از درون‌یابی لاپلاس می‌توان به‌عنوان درون‌یابی مستقل در روش المان طبیعی استفاده کرد. سیوکومار به مقایسه درون‌یابی لاپلاس و درون‌یابی سیبسون در روش المان طبیعی برای حل مسائل الاستیته پرداخت [23]. وی نشان داد که درون‌یابی سیبسون

1- Meshless
2- Meshfree Methods Based On Weak-Form
3- Natural Element Method
4- Sibson
5- Laplace
6- Shape Function
7- Voronoi Diagram

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.12.8]

دقت بهتری نسبت به درون‌یابی لاپلاس دارد ولی از نظر هزینه محاسباتی و زمان محاسبات، درون‌یابی لاپلاس به‌صرفه‌تر است. مدهوکار و راجاگیپول از روش المان طبیعی برای آنالیز تنش صفحه استفاده کردند [24]. آن‌ها نتایج روش المان طبیعی را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند و نشان دادند که روش المان طبیعی دقت مناسبی دارد. وای دانگ و همکارانش از روش المان طبیعی در شبیه‌سازی عددی انتشار ترک استفاده کردند [25]. آن‌ها نشان دادند که آنالیز انتشار ترک با استفاده از روش المان طبیعی به‌صورت شگفت-انگیزی آسان شده است و دلیلش را عدم نیاز به شبکه در هر مرحله از آنالیز ترک بیان کردند. ژانگ و همکاران از روش المان طبیعی برای بررسی انتقال حرارت تابشی در یک محیط بسته نیمه شفاف دوبعدی مستطیلی‌شکل و سه بعدی مکعبی‌شکل، استفاده کردند [26،27]. آن‌ها مرزهای محیط را مات، دیفیوز[1] و خاکستری و فقط انتقال حرارت تابشی و هدایت را در نظر گرفتند و از انتقال حرارت جابجایی صرف‌نظر کردند و نتایج روش المان طبیعی را با نتایج روش المان محدود مقایسه کردند. در مقایسه، نشان دادند که روش المان طبیعی دقیق است و می‌توان از آن برای حل مسائل انتقال حرارت تابشی در هندسه دوبعدی و سه‌بعدی استفاده کرد.

مزایای این مطالعه به صورت زیر است:

1-1- مزایای این مطالعه

1- استفاده از روش بدون‌مش المان طبیعی که در منابع موجود تا به حال از آن در مسائل جریان سیال استفاده نشده است.

2- مشکلات مربوط به کیفیت مش را به خاطر بدون‌مش بودن، ندارد.

3- بررسی انتقال حرارت تابشی محیط داخل حفره مثلثی که در مطالعات موجود تا به حال به طور کامل بررسی نشده است.

2- بیان مسأله

هندسه‌ای از حفره مثلثی با شرایط مرزی در شکل 1 نشان داده شده است. دو دیواره مایل بالایی در دمای ثابت T_H و دیواره کف در دمای ثابت T_C نگه داشته می‌شود. علاوه بر این سرعت سیال در تمام دیواره‌ها برابر صفر است و فشار در گوشه پایین سمت چپ برابر مقدار ثابت صفر در هرزمانی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه در معادلات مومنتم ترم اختلاف فشار وجود دارد، بنابراین می‌توان مقدار فشار را در گوشه سمت چپ، مقداری دلخواه در نظر گرفت. گوشه‌های پایین مثلث (نقاط تکین) که بین دو دیواره دما ثابت با دمای متفاوت قرار دارد، نیاز به توجه خاصی دارد. معمولاً از دمای متوسط دو دیواره برای این نقاط استفاده می‌شود [۹،28].

فرض‌هایی که برای حل این مسأله استفاده شده، به‌صورت زیر است:

1- جریان توسعه‌یافته آرام است.

2- به‌جز چگالی، سایر خواص ثابت است.

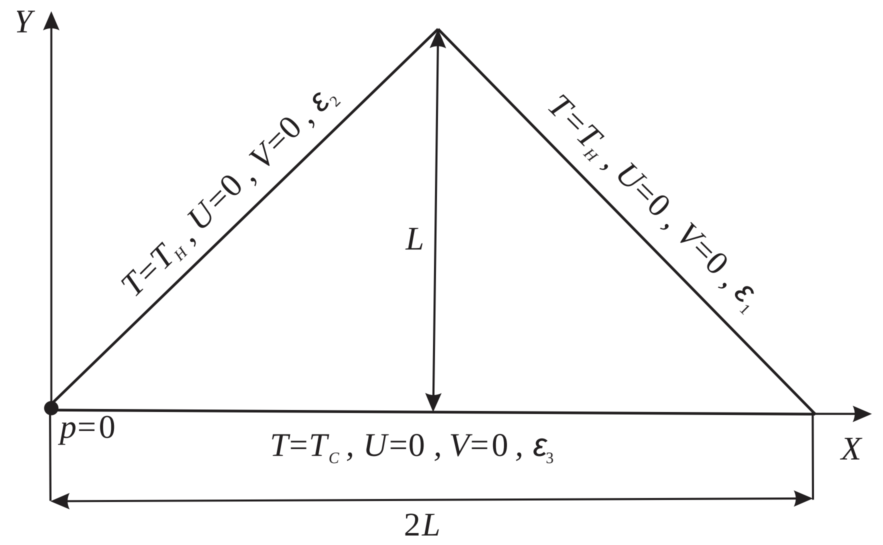
3- محیط نیمه شفاف، خاکستری، دارای جذب، صدور و عدم پراکندگی است.

4- تمام دیواره‌ها مات، دیفیوز و خاکستری است.

3- معادلات حاکم

پارامترهای استفاده شده برای بی‌بعد سازی معادلات حاکم، به‌صورت روابط (1) تعریف می‌شوند.

1- Diffuse



شکل 1 هندسه و شرایط مرزی برای حفره مثلثی

$$x=\frac{X}{L},\quad y=\frac{Y}{L},\quad u=\frac{UL}{\alpha},\quad v=\frac{VL}{\alpha},\quad P=\frac{pL^2}{\rho\alpha^2}$$
$$T_m=\frac{T_H+T_c}{2},\quad \theta=\frac{T-T_m}{T_H-T_c},\quad \tau=2KL$$
$$\Pr=\frac{\vartheta}{\alpha},\quad t=\frac{t'\alpha}{L^2},\quad N_{CR}=\frac{Kk\Delta T}{n^2\sigma {T_m}^4}$$
$$Ra=\frac{g\beta(T_H-T_L)L^3}{\mu\alpha},\ \theta_m=\frac{T_m}{T_H-T_c},$$
$$\Delta T=T_H-T_C,\quad K=a+\sigma_s, q_r=\frac{Q_R}{\sigma {T_m}^4} \tag{1}$$

در روابط (1)، Ra عدد بدون بعد رایلی، Pr عدد بدون بعد پرانتل، N_{CR} عدد پلانک (پارامتر هدایت به تابش)، T_m دمای متوسط، θ_m دمای متوسط بدون بعد، τ ضخامت نوری محیط، K ضریب خاموشی، a ضریب جذب و σ_s ضریب پراکندگی است. با استفاده از مقادیر بی‌بعد در روابط (1)، فرم بدون بعد معادلات حاکم به‌صورت روابط (2) تا (6) بدست می‌آید.

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2}$$

معادلات مومنتم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\Pr\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\Pr\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\Pr Ra(\theta+0.5) \tag{4}$$

معادله انرژی [12،16،17]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{3N_{CR}}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

معادله انتقال تابشی با استفاده از روش P_1 [12،16،17]:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right)=3\tau^2\left(I-\frac{4}{{\theta_m}^3}(\theta+\theta_m)^4\right) \tag{6}$$

شرایط مرزی بی‌بعد برای معادله مومنتم و انرژی با توجه به شکل 1 به‌صورت روابط (7) تا (9) نوشته می‌شود.

شرایط مرزی برای معادلات انرژی و مومنتم [۷،۹،11]:

$$u=v=0,\theta_H=+0.5 \qquad 1\le x\le 2, y=2-x \tag{7}$$
$$u=v=0,\theta_H=+0.5 \qquad 0\le x\le 1, y=x \tag{8}$$
$$u=v=0,\theta_C=-0.5 \qquad 0\le x\le 2, y=0 \tag{9}$$

در روش P_1، معادله انرژی با معادله انتقال تابشی کوپل است و به شرایط مرزی اضافی نیاز است. این شرایط مرزی اضافی توسط املین و کرپلا پیشنهاد

داده شده است [29] و از آن می‌توان در مرزهای دما ثابت در هر حفره‌ای با مختصات کارتزین استفاده کرد[17،16،12].

شرایط مرزی برای معادله انتقال تابشی[12،16،17]:

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial n} = 3\tau\gamma_1\left(\mathrm{I} - \frac{4(\theta_{\mathrm{H}} + \theta_{\mathrm{m}})^4}{{\theta_{\mathrm{m}}}^4}\right) \quad 1 \le x \le 2\,, y = 2 - x \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial n} = 3\tau\gamma_2\left(\mathrm{I} - \frac{4(\theta_{\mathrm{H}} + \theta_{\mathrm{m}})^4}{{\theta_{\mathrm{m}}}^4}\right) \quad 0 \le x \le 1\,, y = x \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{y}} = -3\tau\gamma_3\left(\mathrm{I} - \frac{4(\theta_{\mathrm{C}} + \theta_{\mathrm{m}})^4}{{\theta_{\mathrm{m}}}^4}\right) \quad 0 \le y \le 2\,, x = 0 \qquad (12)$$

در روابط (10) تا (12)، γ_i توصیفی از رنگ دیواره‌ها است و از رابطه (13) بدست می‌آید [17،16،12].

$$\gamma_i = \frac{\varepsilon_i}{2(2-\varepsilon_i)} \qquad (13)$$

در رابطه (13)، ε_i ضریب صدور نیم‌کروی دیواره‌ها است. در شکل 1 ضریب صدور هر دیواره مشخص شده است.

عدد بدون بعد ناسلت (Nu) بیانگر مقدار حرارت منتقل شده از دیواره حفره به سیال نسبت به حرارت هدایت شده در دیواره است. مقدار عدد ناسلت محلی کل در دیواره‌های دما ثابت از رابطه (14) بدست می‌آید.

$$\mathrm{Nu_t} = \mathrm{Nu_C} + \mathrm{Nu_R} \qquad (14)$$

در رابطه (14)، $\mathrm{Nu_t}$ عدد ناسلت محلی کل، $\mathrm{Nu_C}$ عدد ناسلت محلی همرفتی و $\mathrm{Nu_R}$ عدد ناسلت محلی تابشی است. ناسلت محلی همرفتی از رابطه (15) بدست می‌آید.

$$\mathrm{Nu_C} = \mp\frac{\partial \theta}{\partial n} \qquad (15)$$

ناسلت محلی تابشی از رابطه (16) بدست می‌آید [12،16،17].

$$\mathrm{Nu_R} = \mp\frac{1}{3\mathrm{N_{CR}}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial n} \qquad (16)$$

در روابط (15) و (16) علامت منفی نشانه انتقال حرارت از دیواره به سیال (برای دیواره گرم) و علامت مثبت نشانه انتقال حرارت از سیال به دیواره (برای دیواره سرد) و n بردار عمود بر سطح است. عدد ناسلت متوسط با انتگرال‌گیری از عدد ناسلت محلی حول طول هر دیواره به‌صورت روابط (17) تا (19) بدست می‌آید.

$$\mathrm{Nu_{av-C}} = \frac{1}{l}\int_l (\pm\frac{\partial \theta}{\partial n})\mathrm{d}l \qquad (17)$$

$$\mathrm{Nu_{av-R}} = \frac{1}{l}\int_l (\pm\frac{1}{3\mathrm{N_{CR}}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial n})\mathrm{d}l \qquad (18)$$

$$\mathrm{Nu_{av-t}} = \mathrm{Nu_{av-C}} + \mathrm{Nu_{av-R}} \qquad (19)$$

3- روش المان طبیعی

در این مطالعه از روش المان طبیعی برای حل معادلات حاکم استفاده می‌شود. روش المان طبیعی یکی از روش‌های بدون‌مش بر اساس فرم ضعیف است. در چارچوب روش المان طبیعی دو درون‌یابی مختلف همسایه طبیعی پیشنهادشده است. برای تعریف درون‌یابی‌های روش المان طبیعی باید به‌خوبی مفاهیم هندسی، همراه با نمودار ورونی و تقسیم ناحیه به مثلث‌های دلانی[1] یک توده گره بررسی شود.

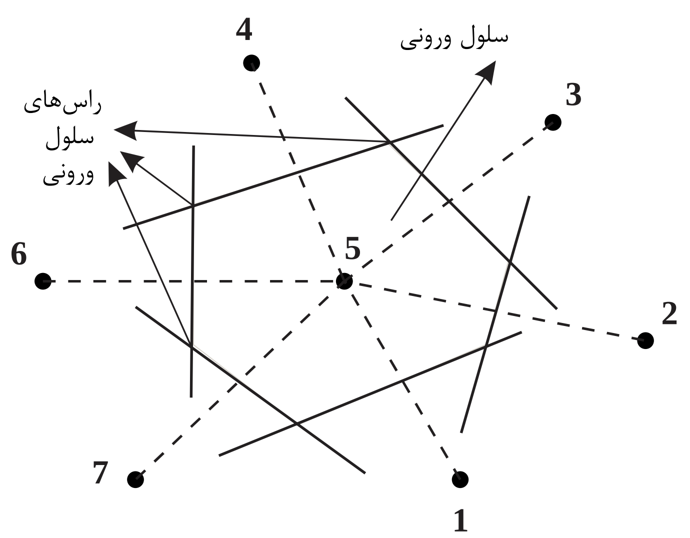
3-1- نمودار ورونی و مثلث‌بندی دلانی

نمودار ورونی و مفهوم همسایه طبیعی برای تعریف ارتباط گره‌ها روی یک شبکه نامنظم یا منظم در روش المان طبیعی بکار می‌رود. اگر مجموعه‌ای از گره‌های متمایز $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m\}$ در یک فضای R^d در نظر گرفته شود، نمودار مرتبه اول ورونی مجموعه N از تقسیم سطح به سلول‌های ورونی T_i که بسته و محدب هستند، بدست می‌آید. T_i سلول ورونی گره iام و d تعداد بعد فضا است. در نمودار ورونی هر سلول T_i با گره n_i مرتبط است به‌طوری‌که هر نقطه در سلول T_i، نزدیک‌تر به گره n_i (نزدیک‌ترین همسایه) نسبت به هر گره دیگر (n_j) است. این سلول از به اشتراک گذاشتن نیمی از فضا حاصل می‌شود و بنابراین یک‌چند ضلعی محدب نامیده می‌شود [20]. سلول ورونی به‌صورت رابطه (20) تعریف می‌شود.

$$T_i = \{x \in R^d : d(x, x_i) < d(x, x_j) \forall\, i \neq j\} \qquad (20)$$

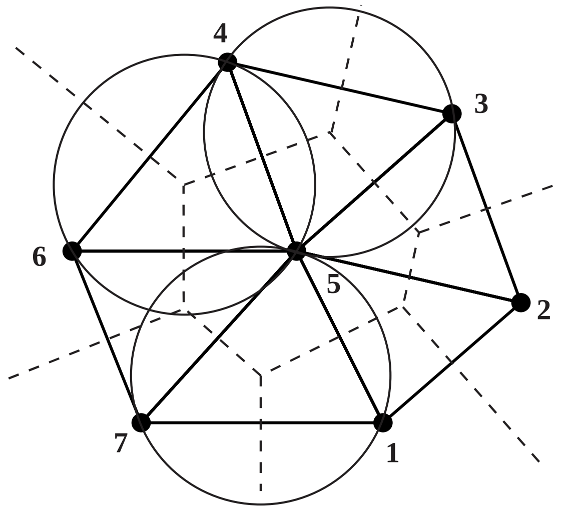
در رابطه (20)، $d(x, x_j)$ مسافت میان گره jام و نقطه x و $d(x, x_i)$ مسافت میان گره iام و نقطه x است. دو گره به اشتراک‌گذارنده یک ضلع سلول ورونی، همسایه‌های طبیعی نامیده می‌شوند و از این رو نام این تکنیک روش همسایه طبیعی نامیده می‌شود [20]. به‌عبارت دیگر سلول ورونی یک گره از اشتراک تمام نیم‌صفحه‌ها با مرز عمود منصف آن با سایر گره‌ها که شامل آن گره است، بدست می‌آید. برای مثال سلول ورونی برای گره 5 مطابق شکل 2 بدست می‌آید.

مثلث دلانی از نمودار ورونی بدست می‌آید، به‌طوری‌که این مثلث با ارتباط گره‌هایی ساخته می‌شود که با سلول‌های ورونی مرز مشترک دارند. نمودار ورونی برای یک نقطه در فضای R^d بی‌همتاست درصورتی‌که برای مثلث‌بندی دلانی این شرط لزوماً صادق نیست که به این حالت اصطلاحاً منحط گفته می‌شود که ممکن است دو یا چند مثلث دلانی به وجود آید [30]. خاصیت مهم مثلث‌بندی دلانی تعریف معیار دایره خالی است. دایره خالی از تمام رئوس مثلث می‌گذرد و نباید گره‌ای در داخل آن باشد و دلیل این خاصیت به حداکثر رساندن زاویه‌های داخلی مثلث است. از این خاصیت برای ایجاد مثلث‌های بهینه استفاده می‌شود. با استفاده از خاصیت معیار دایره خالی، مثلث‌بندی دلانی هفت گره به‌صورت شکل 3 بدست می‌آید. مثلث‌بندی شکل 3 مجاز است، زیرا همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می‌شود هیچ گره‌ای در دایره‌های همسایه طبیعی (دایره‌های خالی عبوری از رئوس مثلث‌ها) قرار نمی‌گیرد. همچنین مشاهده می‌شود که مرکز دایره‌های همسایه طبیعی و مرکز مثلث‌های دلانی، راس‌های نمودار ورونی است. تحت شرایط عمومی نسبی (فضای موردمطالعه فضایی واحد و محدب و به‌احتمال‌زیاد دارای بعد نامحدود بوده و در نتیجه تعداد بسیار نامحدودی گره در حالت عمومی وجود دارد.) سلول‌های ورونی دارای ماهیت پایدار معین خواهند بود و تغییر کوچکی در شکل گره‌ها، به‌عنوان‌مثال ایجاد تغییر توسط انتقال و یا تحریف، منجر به تغییر شکل سلول‌های ورونی می‌شود که این تغییر شکل به دلیل پایداری هندسی نمودار ورونی است [20].



شکل 2 نمودار ورونی برای گره 5

1- Delaunay Triangulation



شکل 3 مثلث‌بندی دلانی برای 7 گره

نمودار ورونی یک نمودار قابل بسط است، به‌طوری‌که نمودار ورونی مرتبه دوم مجموعه گره N، از تقسیم سطح به سلول‌های T_{ij} بدست می‌آید. جایی که در آن هر منطقه از سلول T_{ij} با هر دو گره n_i و n_j مرتبط است و T_{ij} کانون همه نقاطی است که دارای گره n_i به‌عنوان نزدیک‌ترین همسایه و گره n_j به‌عنوان نزدیک‌ترین همسایه دوم است [20]. سلول ورونی مرتبه دوم برای هر گره از رابطه (21) بدست می‌آید.

$$T_{ij} = \{x \in R^d : d(x, x_i) < d(x, x_j) < d(x, x_k) \forall k \neq i, j\} \quad (21)$$

با استفاده از رابطه (21)، نمودار ورونی مرتبه دوم مجموعه گره N برای نقطه دلخواه x، مطابق شکل 4 بدست می‌آید. در شکل 4 گره‌های 1، 2، 3، 4 و 5 همسایه‌های طبیعی نقطه x می‌باشند.

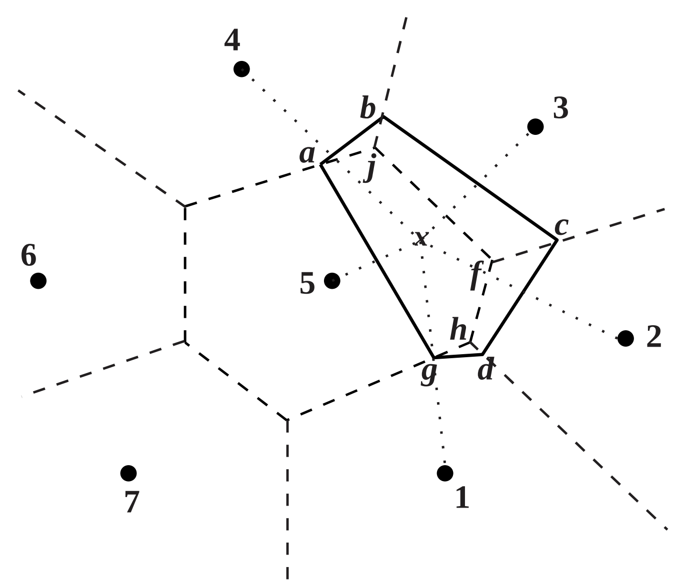
3-2- درون‌یابی لاپلاس

با توجه به مزایای درون‌یابی لاپلاس [22،23] در این مطالعه از درون‌یابی لاپلاس استفاده شده و فقط درون‌یابی لاپلاس شرح داده می‌شود. درون‌یابی لاپلاس بر اساس محاسبه طول‌های نمودار ورونی مرتبه دوم است. تابع شکل لاپلاس برای گره iاُم در نقطه x از رابطه (23) بدست می‌آید [21].

$$\alpha_i(x) = \frac{s_i(x)}{\frac{1}{2} d(x, x_i)} \quad (22)$$

$$\emptyset_i^{\mathrm{lap}}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)} \quad i = 1,2, \dots, n \quad (23)$$

در رابطه (22) و رابطه (23)، $\emptyset_i^{\mathrm{lap}}$ تابع شکل لاپلاس مربوط به گره iاُم، s_i نشان‌دهنده طول (منطقه) بخش ورونی مربوط به گره iاُم و n تعداد همسایه‌های طبیعی نقطه x است. به‌طور مثال تابع شکل لاپلاس مربوط به گره 3 در نقطه x، با توجه به شکل 5، از رابطه (24) بدست می‌آید.



شکل 4 نمودار ورونی مرتبه دوم برای نقطه دلخواه x

$$\emptyset_3^{\mathrm{lap}}(x) = \frac{s_3(x)/h_3(x)}{\sum_{j=1}^{5}[s_j(x)/h_j(x)]} \quad (24)$$

در روش المان طبیعی متغیرهای میدان در هر نقطه دلخواه $x = x(x, y, z)$ در دامنه مسأله، با استفاده از مقادیر تابع در گره‌های میدان در یک دامنه پشتیبانی محلی کوچک به‌صورت روابط (25) تا (29) درون‌یابی می‌شوند:

$$\mathrm{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \emptyset_i(x) \mathrm{u}_i \quad (25)$$

$$\mathrm{v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \emptyset_i(x) \mathrm{v}_i \quad (26)$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \emptyset_i(x) \theta_i \quad (27)$$

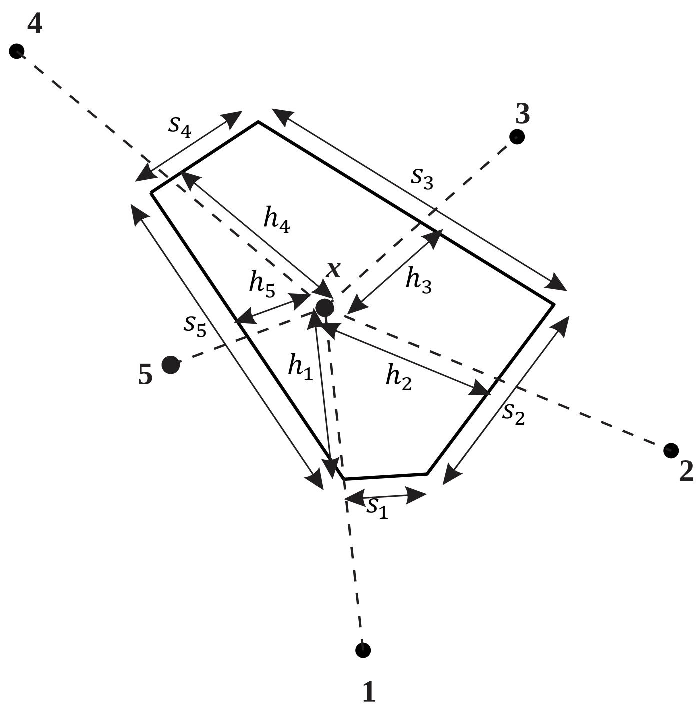
$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \emptyset_i(x) \mathrm{P}_i \quad (28)$$

$$\mathrm{I}(x) = \sum_{i=1}^{n} \emptyset_i(x) \mathrm{I}_i \quad (29)$$

توابع شکل روش المان طبیعی خاصیت تابع دلتای کرونکر را دارد. دارا بودن خاصیت تابع دلتای کرونکر به این معنی است که درون‌یابی روش المان طبیعی از میان مقادیر گره عبور کرده و به همین دلیل شرایط مرزی اساسی را می‌توان به‌طور مستقیم در معادلات اعمال کرد [26].

4- گسسته‌سازی معادلات

حل عددی معادلات شامل گسسته‌سازی معادلات و ایجاد یک دستگاه معادلات جبری برای مقادیر کمیت‌های مجهول در نقاط خاصی از میدان حل است. در روش المان طبیعی برای گسسته‌سازی معادلات از روش گالرکین استفاده می‌شود. روش گالرکین بر اساس روش باقی‌مانده وزنی است. با استفاده از روش گالرکین می‌توان بسیاری از معادلات را حل کرد و به جواب دقیق رسید، اما استفاده از روش گالرکین برای گسسته‌سازی ترم‌های جابجایی، منجر به نوسانی شدن جواب‌ها می‌شود [31]. یکی از روش‌های موجود در روش المان محدود برای مقابله با نوسانات فضایی، روش گالرکین توصیفی (CGS)[1] می‌باشد. با توجه به اینکه معادلات مومنتم به‌صورت برداری هستند، فرم مستقیم روش CGS برای حل معادلات مومنتم دشوار است. برای



شکل 5 نمودار ورونی مرتبه دوم برای نقطه دلخواه x

1- Characteristic Galerkin Scheme

رفع این مشکل از روش توصیفی بر اساس طرح جدا کردن (CBS)[1] استفاده می‌شود. در روش CBS برای حل معادلات مومنتم از دو مرحله استفاده می‌شود. در مرحله اول، ترم فشار از معادلات مومنتم حذف می‌شود و یک سرعت متوسط محاسبه می‌شود. در مرحله دوم سرعت متوسط اصلاح خواهد شد. با توجه به مشابه بودن روند حل روش المان محدود و روش المان طبیعی، در این تحقیق از روش CGS برای حل معادله انرژی و معادله انتقال تابشی و از روش CBS برای حل معادلات مومنتم و پیوستگی در روش المان طبیعی استفاده می‌شود. با اعمال روش CBS بر معادلات مومنتم و پیوستگی و روش CGS بر معادلات انرژی و انتقال تابشی، پنج مرحله نهایی حل معادلات بدست می‌آید که فرم ماتریسی آن برای کل گره‌ها به‌صورت روابط (30) تا (36) است.

مرحله اول: محاسبه سرعت متوسط

در جهت x:

$$[M]\frac{\{\tilde{u}\}-\{u\}^n}{\Delta t} = -[C]\{u\}^n - [K_m]\{u\}^n - [K_s]\{u\}^n + \{F_1\} \quad (30)$$

در جهت y:

$$[M]\frac{\{\tilde{v}\}-\{v\}^n}{\Delta t} = -[C]\{v\}^n - [K_m]\{v\}^n - [K_s]\{v\}^n + \{F_2\} - PrRa([K_{s\theta}]\{\theta\}^n) + PrRa([M]\{\theta\}^n + \{F_\theta\}) \quad (31)$$

مرحله دوم: محاسبه فشار

$$[K]\{P\}^n = -\frac{1}{\Delta t}\left[[G_1]\{\tilde{u}\} + [G_2]\{\tilde{v}\}\right] + \{F_3\} \quad (32)$$

مرحله سوم: اصلاح سرعت

در جهت x:

$$[M]\{u\}^{n+1} = [M]\{\tilde{u}\} - \Delta t[G_1]\{P\}^n \quad (33)$$

در جهت y:

$$[M]\{v\}^{n+1} = [M]\{\tilde{v}\} - \Delta t[G_2]\{P\}^n \quad (34)$$

مرحله چهارم: محاسبه دما

$$[M]\frac{\{\theta\}^{n+1}-\{\theta\}^n}{\Delta t} = -[C]\{\theta\}^n - [K_s]\{\theta\}^n - [K_t]\{\theta\}^n - \frac{1}{3N_{CR}}[K_P]\{I\}^n + \frac{1}{3N_{CR}}([F_{P1}]\{I\}^n + \{F_{P2}\}) + \{F_4\} \quad (35)$$

مرحله پنجم: محاسبه شدت تابشی

$$[K_P]\{I\}^{n+1} + 3\tau^2[M]\{I\}^{n+1} - [F_{P1}]\{I\}^{n+1} = 3\tau^2\{B\}^{n+1} + \{F_{P2}\} \quad (36)$$

با حل معادلات (30) تا (36) مقدار هر متغیر میدان در زمان $n+1$ بدست می‌آید. در روش المان طبیعی از تعدادی نقاط گوسی در داخل هر مثلث دلانی برای انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود و توابع شکل حول این نقاط گوسی بدست می‌آید. بنابراین با بدست آوردن ماتریس ضرایب برای هر نقطه گوسی و با جمع‌آوری برای کل نقاط گوسی، می‌توان ماتریس ضرایب کلی را برای هر ترم معادلات بدست آورد. ترم‌های معادلات (30) تا (36) برای هر نقطه گوسی به‌صورت روابط (37) تا (46) بدست می‌آید:

ترم جرم:

$$M_{g_{ij}} = \int_A (\phi_i\phi_j)dA \quad (37)$$

ترم جابجایی:

$$C_{g_{ij}} = \int_A (\phi_i(\sum_{k=1}^{n}\phi_k u_k{}^n)\frac{\partial\phi_j}{\partial x})dA + \int_A(\phi_i(\sum_{k=1}^{n}\phi_k v_k{}^n)\frac{\partial\phi_j}{\partial y})dA \quad (38)$$

ترم‌های پایداری:

$$K_{sg_{ij}} = \frac{\Delta t\bar{u}^n}{2}\int_A\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\phi_k u_k{}^n\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^{n}\phi_k v_k{}^n\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right]\right)dA + \frac{\Delta t\bar{v}^n}{2}\int_A\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\phi_k u_k{}^n\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^{n}\phi_k v_k{}^n\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right]\right)dA \quad (39)$$

$$K_{s\theta g_{ij}} = \Delta t\int_A(\phi_i(\sum_{k=1}^{n}\phi_k u_k{}^n)\frac{\partial\phi_j}{\partial x})dA + \Delta t\int_A(\phi_i(\sum_{k=1}^{n}\phi_k v_k{}^n)\frac{\partial\phi_j}{\partial y})dA \quad (40)$$

ترم‌های نفوذ:

$$K_{g_{ij}} = K_{tg_{ij}} = K_{Pg_{ij}} = \int_A(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y})dA \quad (41)$$

$$K_{mg_{ij}} = PrK_{g_{ij}} \quad (42)$$

ترم‌های گرادیان فشار:

$$G_{1g_{ij}} = \int_A(\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial x})dA \quad (43)$$

$$G_{2g_{ij}} = \int_A(\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial y})dA \quad (44)$$

سایر ترم‌ها:

$$F_{\theta g_i} = \frac{1}{2}\int_A \phi_i\, dA \quad (45)$$

$$B_{gi} = \frac{4}{\theta_m{}^4}\int_A \phi_i(\sum_{j=1}^{n}\phi_j(\theta_j{}^{n+1} + \theta_m)^4)\, dA \quad (46)$$

در معادلات (37) تا (46) اندیس g بیانگر نقطه گوسی، i=j=1,2,...,n و n تعداد همسایه‌های طبیعی نقطه گوسی g است. همچنین در رابطه (39)، $\bar{u}$ و $\bar{v}$ به ترتیب سرعت میانگین در جهت x و y است و از رابطه (47) بدست می‌آید:

$$\bar{u}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j}{n}, \qquad \bar{v}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_j}{n} \quad (47)$$

با اعمال قضیه گرین بر روی ترم‌های مشتق مرتبه دوم معادلات حاکم، ترم‌های نیرو ایجاد می‌شود. ترم‌های نیرو حاصل از گسسته‌سازی ترم‌های مشتق مرتبه دوم مهم بوده و باید اثر آن‌ها در معادلات در نظر گرفته شود [31]. ترم‌های نیرو به‌صورت روابط (48) تا (53) بدست می‌آید:

$$F_{1_i} = Pr\int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}u_j^n\right)n_1 d\Gamma + Pr\int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}u_j^n\right)n_2 d\Gamma \quad (48)$$

$$F_{2_i} = Pr\int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}v_j^n\right)n_1 d\Gamma + Pr\int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}v_j^n\right)n_2 d\Gamma \quad (49)$$

$$F_{3_i} = \int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}P_j^n\right)n_1 d\Gamma + \int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}P_j^n\right)n_2 d\Gamma \quad (50)$$

$$F_{4_i} = \int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\theta_j^n\right)n_1 d\Gamma + \int_\Gamma(\phi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\theta_j^n\right)n_2 d\Gamma \quad (51)$$

$$F_{P_{1ij}} = 3\tau\gamma_i\int_\Gamma \phi_i\phi_j(n_1+n_2)d\Gamma \quad (52)$$

1- Characteristic-based Split Scheme

$$F_{P_{2i}} = 12\tau\gamma_i \frac{(\theta_i + \theta_m)^4}{{\theta_m}^4} \int_\Gamma \emptyset_i d\Gamma(n_1 + n_2) \qquad (53)$$

در روابط (48) تا (53)، Γ فاصله بین دو گره مرزی i و j و اندیس i و j مربوط به دو گره مرزی است. همچنین باید توجه داشت که مقدار توابع وزنی ($\emptyset_i$) برای گره‌هایی که در مرز قرار ندارند، برابر با صفر است.

مراحل حل معادلات در روش المان طبیعی به‌صورت مراحل زیر است:

1- گسسته‌سازی دامنه مسأله با استفاده از تعدادی گره؛
2- مثلث‌بندی دلانی؛
3- پیدا کردن نقاط گوسی در داخل مثلث‌های دلانی؛
4- پیدا کردن همسایه‌های طبیعی نقاط گوسی؛
5- محاسبه توابع شکل و مشتقات آن برای نقاط گوسی؛
6- محاسبه عددی انتگرال‌های مربوط به ترم‌های معادلات برای هر نقطه گوسی و تشکیل ماتریس ضرایب کلی با جمع‌آوری ماتریس ضرایب برای کل نقاط گوسی در هر گام زمانی.

5- نتایج

در قسمت 3، 4 و 5 معادلات حاکم، شرایط مرزی و نحوه گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش المان طبیعی برای یک حفره مثلثی بیان شد. در این قسمت نتایج بدست‌آمده موردبررسی قرار می‌گیرد. در این مطالعه از توابع شکل لاپلاس با توجه به مزیت‌های آن، برای درون‌یابی متغیر میدان و از سه‌نقطه گوسی در هر مثلث دلانی برای حل عددی انتگرال ترم‌های معادلات استفاده شده است.

برنامه کامپیوتری حل معادلات در نرم‌افزار متلب ورژن 2011 در کامپیوتری به مشخصات زیر نوشته شده است:

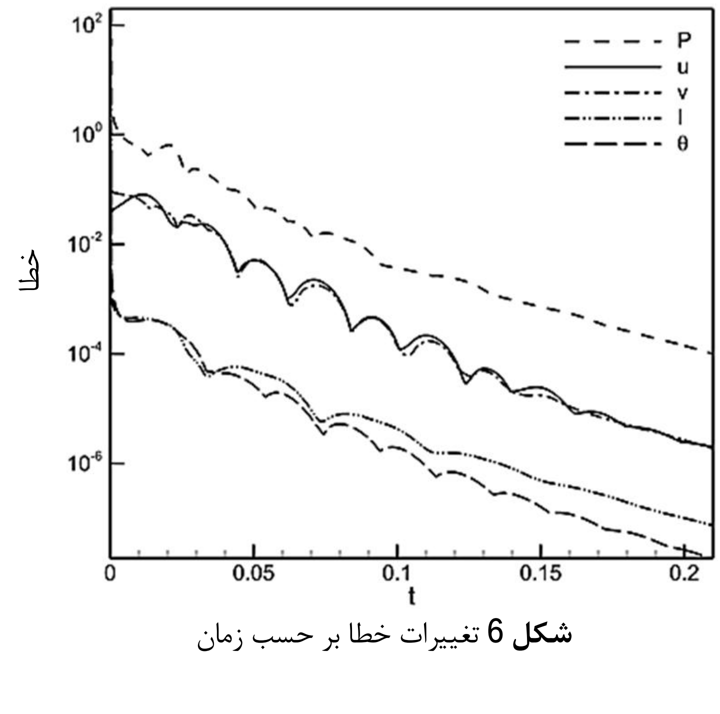
ویندوز 8، پردازنده اینتل 5 هسته‌ای با سرعت 2/5 گیگاهرتز و رم شش گیگ بایت

5-1- بررسی همگرایی روش المان طبیعی

هدف از این قسمت بررسی همگرایی و پایداری روش المان طبیعی است. مقدار خطا در هر مرحله زمانی از فرمول (54) بدست می‌آید [31]:

$$\text{خطا} = \sum_{i=1}^{N} \frac{{\Phi_i}^{n+1} - {\Phi_i}^{n}}{\Delta t} \qquad (54)$$

تا زمانی که مقدار خطا در رابطه (54) برای دو زمان متوالی و برای متغیرهای u، v، P، θ و I کمتر از 10^{-6} نشده است، حل ادامه پیدا می‌کند. همچنین گام زمانی در این مطالعه، 0/00001 در نظر گرفته شده است. در شکل 6 مقدار تغییرات خطا بر حسب زمان برای P، u، v، I و θ در حالتی که $Ra = 10^5$، $N_{CR} = 0.4$، $\theta_m = 2$، $\tau = 1$، $\varepsilon_i = 1$ و $Pr = 0.71$ باشد، نشان داده شده است.



شکل 6 تغییرات خطا بر حسب زمان

همان‌طور که در شکل 6 مشاهده می‌شود سرعت همگرایی فشار نسبت به سایر متغییرهای میدان پایین‌تر است. در کل مشاهده می‌شود که روش المان طبیعی دارای پایداری خوبی است.

5-2- بررسی استقلال نتایج نسبت به تعداد گره

همواره پایداری شبکه یکی از ارکان اصلی حل عددی مسائل در روش‌های المان محور است. هرگونه ناپایداری در شبکه حل، عامل انحراف نتایج از واقعیت است و ازاین‌رو همواره باید در نظر داشت که نتایج به‌دست آمده در حل عددی به شبکه حل وابسته نباشد. به‌عبارت‌دیگر با افزایش یا کاهش حجم شبکه و تغییر نوع ساختار شبکه‌بندی تغییری در نتایج حاصل نشود. در روش‌های بدون‌مش استقلال نتایج نسبت به تعداد گره بررسی می‌شود. از از میان نتایج، عدد ناسلت متوسط در دیواره سرد و گرم حفره مثلثی به‌عنوان نمونه برای بررسی تأثیر افزایش گره‌ها بر نتایج انتخاب شده است. در جدول 1 تغییرات عدد ناسلت متوسط همرفتی در دیواره سرد و گرم حفره مثلثی برای چهار مدل توزیع گره، $Ra = 10^5$، $Pr = 0.71$ و حالت بدون تابش ($q_r = 0$)، برای تست و بررسی استقلال نتایج از تعداد گره ارائه شده است.

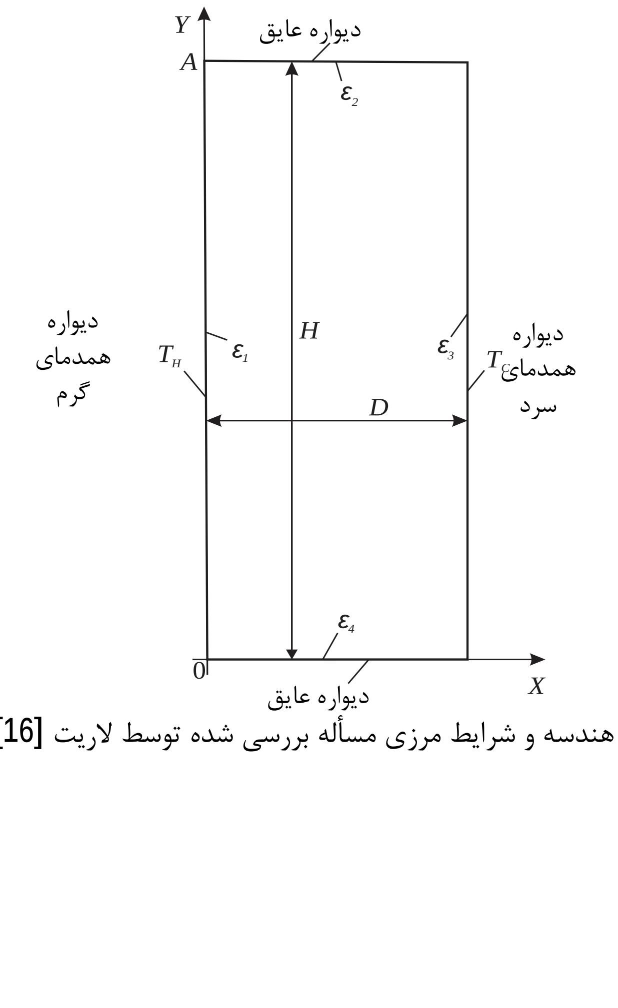
همان‌طور که در جدول 1 مشاهده می‌شود، عدد ناسلت متوسط همرفتی در دیواره سرد و گرم تقریباً تا 2145 گره، به تعداد گره وابسته است و از 2145 گره به بعد، تغییرات در نتایج بسیار کم است. در این مطالعه برای بررسی نتایج در حفره مثلثی، از 2145 گره با توزیع نامنظم استفاده می‌شود.

5-3- اعتبارسنجی نتایج با مطالعات پیشین

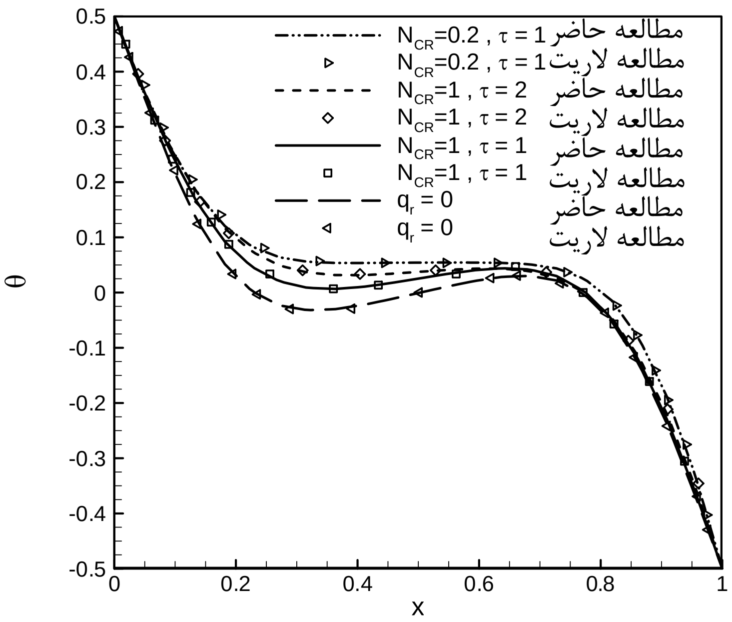
در این قسمت برای اعتبارسنجی نتایج در حالت تابش، نتایج مطالعه حاضر با مطالعه لاریت [16] مقایسه می‌شود. لاریت هر سه حالت انتقال حرارت را در یک حفره مستطیلی مطابق با شکل (7) که دیواره‌های افقی آن عایق، دیواره‌های عمودی آن هم‌دما و نسبت طول به عرض (H/D) آن بزرگ‌تر از 6 بود، مورد بررسی قرارداد و از روش P_1 برای حل معادله انتقال تابشی استفاده کرد.

جدول 1 بررسی تغییرات عدد ناسلت متوسط نسبت به تعداد گره

تعداد گره	715 گره با توزیع نامنظم	1535 گره با توزیع نامنظم	2145 گره با توزیع نامنظم	2610 گره با توزیع نامنظم
Nu_{av-C} (دیواره سرد)	4/561	5/216	5/342	5/371
Nu_{av-C} (دیواره گرم)	3/021	3/745	3/836	3/854



شکل 7 هندسه و شرایط مرزی مسأله بررسی شده توسط لاریت [16]



شکل 8 مقایسه پروفیل دما در خط افقی در وسط حفره (y=0.5)

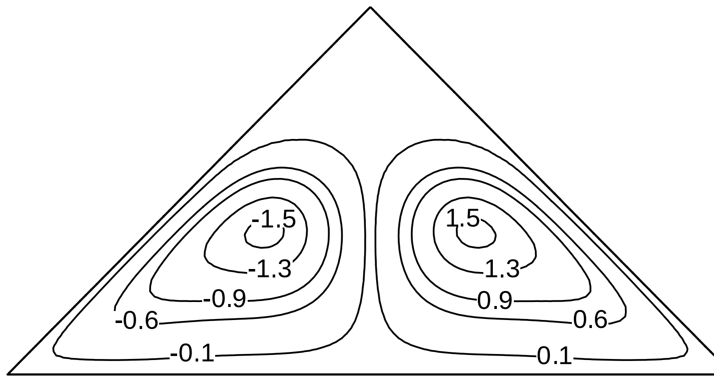
در شکل 8 مقایسه پروفیل دما در خط افقی در وسط حفره برای مطالعه حاضر با استفاده از روش المان طبیعی و مطالعه لاریت [16]، در حالتی که $H/D = 6$، $Pr = 0.71$، $Ra = 10^5$، $\varepsilon_i = 1$ و $\theta_m = 5$ باشد، نشان داده شده است.

کار باساک و همکارانش [9] در حفره مثلثی مشابه مطالعه حاضر است با این تفاوت که از انتقال حرارت تابشی در آن صرف‌نظر شده است. در شکل 9 کانتور خطوط جریان برای حفره مثلثی در حالت بدون تابش ($q_r = 0$) و در حالتی‌که $Ra = 10^5$ و $Pr = 0.0261$ باشد، برای الف- مطالعه حاضر با استفاده از روش المان طبیعی و ب- مطالعه باساک ارائه شده است.

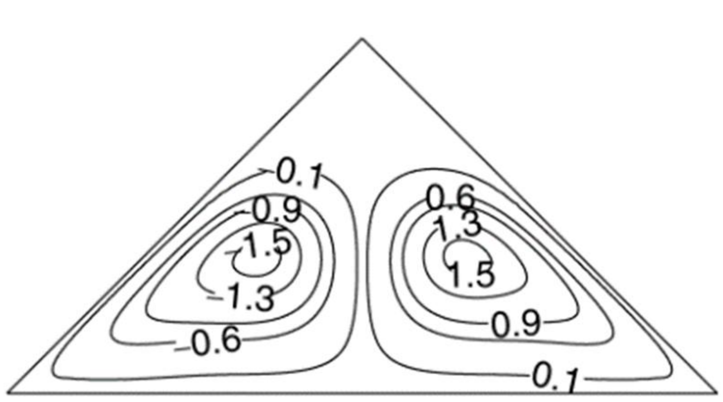
همان‌طور که در شکل‌های 8 و 9 مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج روش المان طبیعی با نتایج لاریت و باساک وجود دارد. مقایسه شکل 8 نشان می‌دهد که روش المان طبیعی دارای دقت مناسب و خوبی است و از آن می‌توان در حل مسائل جریان سیال و انتقال حرارت استفاده کرد.

5-4- بررسی نتایج

در این قسمت رفتار جریان سیال و انتقال حرارت داخل حفره مثلثی در حالت بدون تابش و همچنین در حالت تابش برای عددهای پلانک و دماهای متوسط بدون بعد مختلف بررسی می‌شود.



الف- مطالعه حاضر



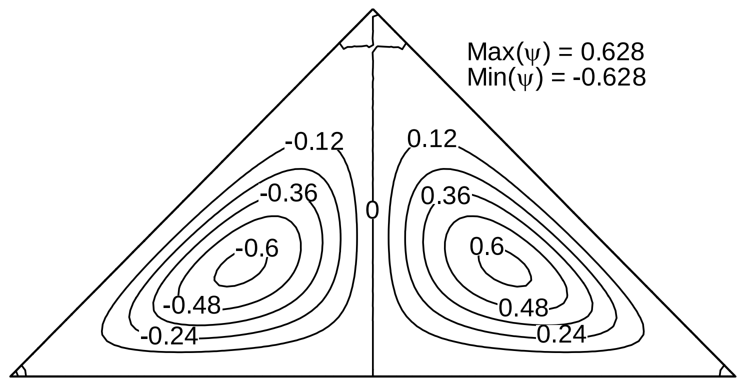
ب- مطالعه باساک

شکل 9 کانتور خطوط جریان [9]

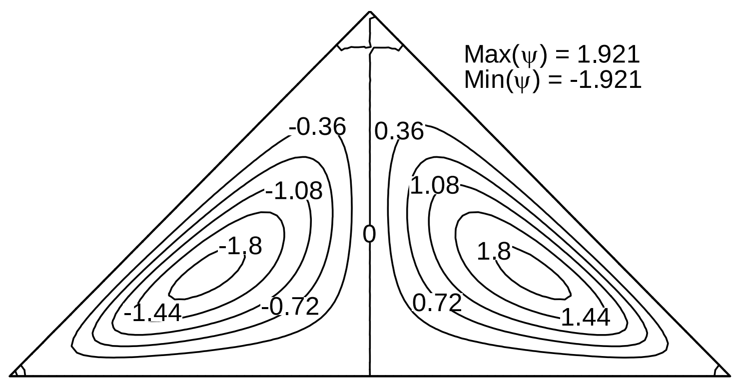
5-4-1- بررسی رفتار جریان و انتقال حرارت داخل حفره در حالت بدون تابش

در شکل‌های 10 و 11 به ترتیب کانتور خطوط جریان و دما در حالتی که $Pr = 0.71$ و $q_r = 0$ باشد، برای الف- $Ra = 10^4$، ب- $Ra = 10^5$ و ج- $Ra = 10^6$ نشان داده شده است.

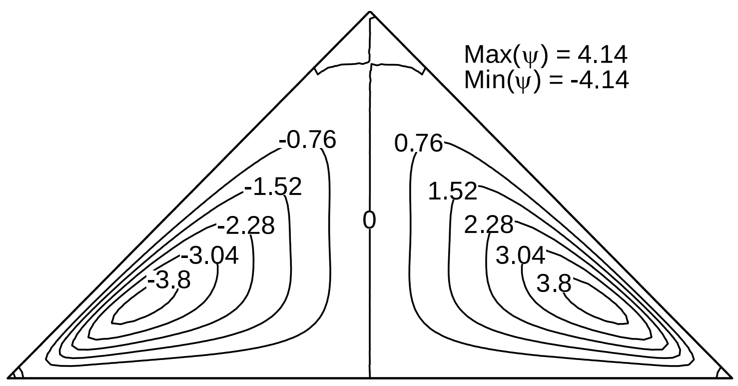
همان‌طور که در شکل 10 مشاهده می‌شود، در اثر جابجایی آزاد در داخل حفره دو گردابه چرخشی غیر هم‌جهت ایجاد می‌شود که جهت گردش گردابه سمت چپ، ساعت‌گرد و گردابه سمت راست، پادساعت‌گرد است. در مسأله حفره با جابجایی آزاد دو رفتار جریان مجزا وجود دارد: 1- رشد لایه مرزی در دیواره‌ها و 2- حرکت چرخشی در مرکز حفره. این رفتار جریان به‌وسیله نیروی شناوری یا همان عدد رایلی تغییر می‌کند [32]. رفتار جریان در عددهای رایلی پایین ($Ra \ll 10^5$) تحت تأثیر حرکت چرخشی در مرکز حفره و در عددهای رایلی بالا ($10^5 \ll Ra$) تحت تأثیر لایه مرزی در دیواره‌ها است. در عددهای رایلی متوسط، هر دو رفتار بر جریان تأثیر دارد. این ویژگی‌ها در خطوط جریان در شکل 10 نشان داده شده است. در عددهای رایلی پایین مقدار تابع جریان بسیار کوچک است و مرکز گردابه‌های چرخشی در مرکز هر نصف سطح مقطع قرار دارد. با افزایش عدد رایلی، مقدار نیروی شناوری افزایش می‌یابد و سبب افزایش مقدار مطلق تابع جریان و تغییر شکل خطوط جریان می‌شود و مرکز هر گردابه چرخشی به سمت گوشه پایین حفره متمایل می‌شود. همچنین در نزدیکی گوشه بالا، اختلاف دما بسیار کم بوده و در نتیجه هیچ گردش جریانی در این ناحیه وجود ندارد.



الف- $Ra = 10^4$



ب- $Ra = 10^5$



ج- $Ra = 10^6$

شکل 10 کانتور خطوط جریان در حالت بدون تابش برای عددهای رایلی مختلف

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.12.8]

با مقایسه خطوط هم‌دما در شکل 11 مشاهده می‌شود که در عددهای رایلی پایین خطوط هم‌دما صاف و به‌صورت یکنواخت در طول حفره توزیع شده‌اند. این پدیده نشان می‌دهد که در حالت بدون تابش و عددهای رایلی پایین، انتقال حرارت هدایتی بر جریان غالب است. خطوط هم‌دما با افزایش عدد رایلی، به سمت دیواره سرد فشرده می‌شوند و لایه مرزی حرارتی در دیواره سرد کاهش می‌یابد.

5-4-2- بررسی رفتار جریان و انتقال حرارت داخل حفره در حالت تابش

در این قسمت تأثیر عدد پلانک، و دمای متوسط در داخل حفره بررسی می‌شود.

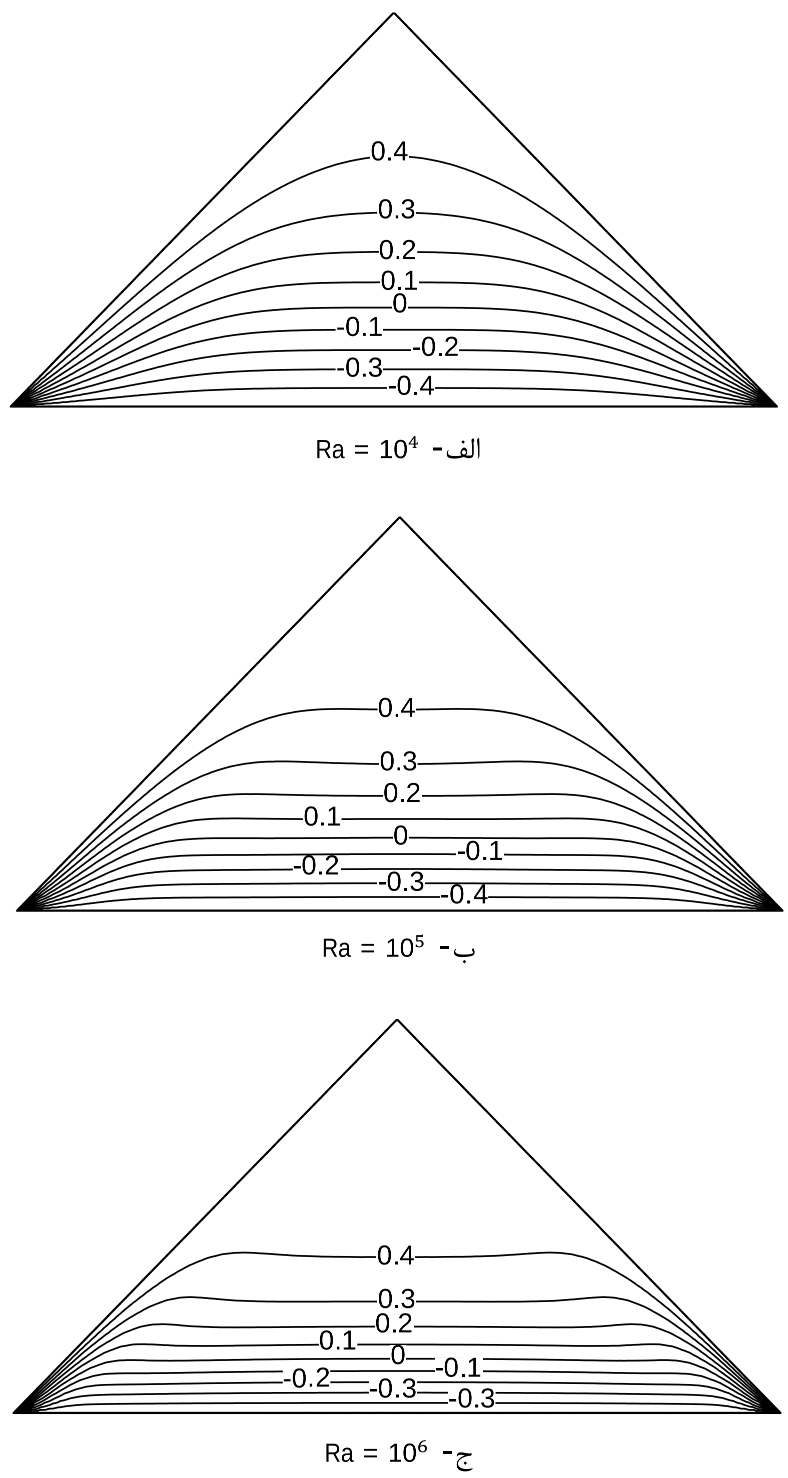
5-4-2-1- بررسی عدد پلانک

در شکل‌های 12 و 13 به ترتیب کانتور خطوط جریان و دما در حالتی که $Ra = 10^5$، $\theta_m = 2$، $\tau = 1$، $\varepsilon_i = 1$ و $Pr = 0.71$ باشد، برای الف- $q_r = 0$، ب- $N_{CR} = 10$، ج- $N_{CR} = 0.4$ و د- $N_{CR} = 0.1$ نشان داده شده است.

با مقایسه خطوط جریان در شکل 12 مشاهده می‌شود که با کاهش N_{CR}، مقدار مطلق تابع جریان در مرکز هر گردابه چرخشی افزایش می‌یابد و مرکز هر گردابه به مرکز هر نصف سطح مقطع نزدیک می‌شود. این رفتار جریان با کاهش N_{CR}، نشان می‌دهد که جریان در داخل حفره تحت تأثیر انتقال حرارت تابشی قرار گرفته است و سهم انتقال حرارت تابشی افزایش و سهم انتقال حرارت همرفتی کاهش‌یافته است.

با مقایسه خطوط هم‌دما در شکل 13 مشاهده می‌شود که با کاهش N_{CR}، خطوط هم‌دما در نزدیک دیواره سرد فشرده‌تر می‌شوند و لایه مرزی حرارتی در دیواره سرد به دلیل گرم شدن سیال در اطراف آن، همواره کاهش می‌یابد. با کاهش N_{CR}، خطوط هم‌دما به گوشه بالای حفره نزدیک می‌شوند و اختلاف دما در این ناحیه بیشتر می‌شود. این پدیده نشان می‌دهد تأثیر جریان بر این ناحیه با کاهش N_{CR}، افزایش می‌یابد.

در شکل 14 تغییرات عدد ناسلت برحسب N_{CR}، در حالتی که $Ra = 10^5$، $\tau = 1$، $\theta_m = 2$، $\varepsilon_i = 1$ و $Pr = 0.71$ باشد، نشان داده شده است.

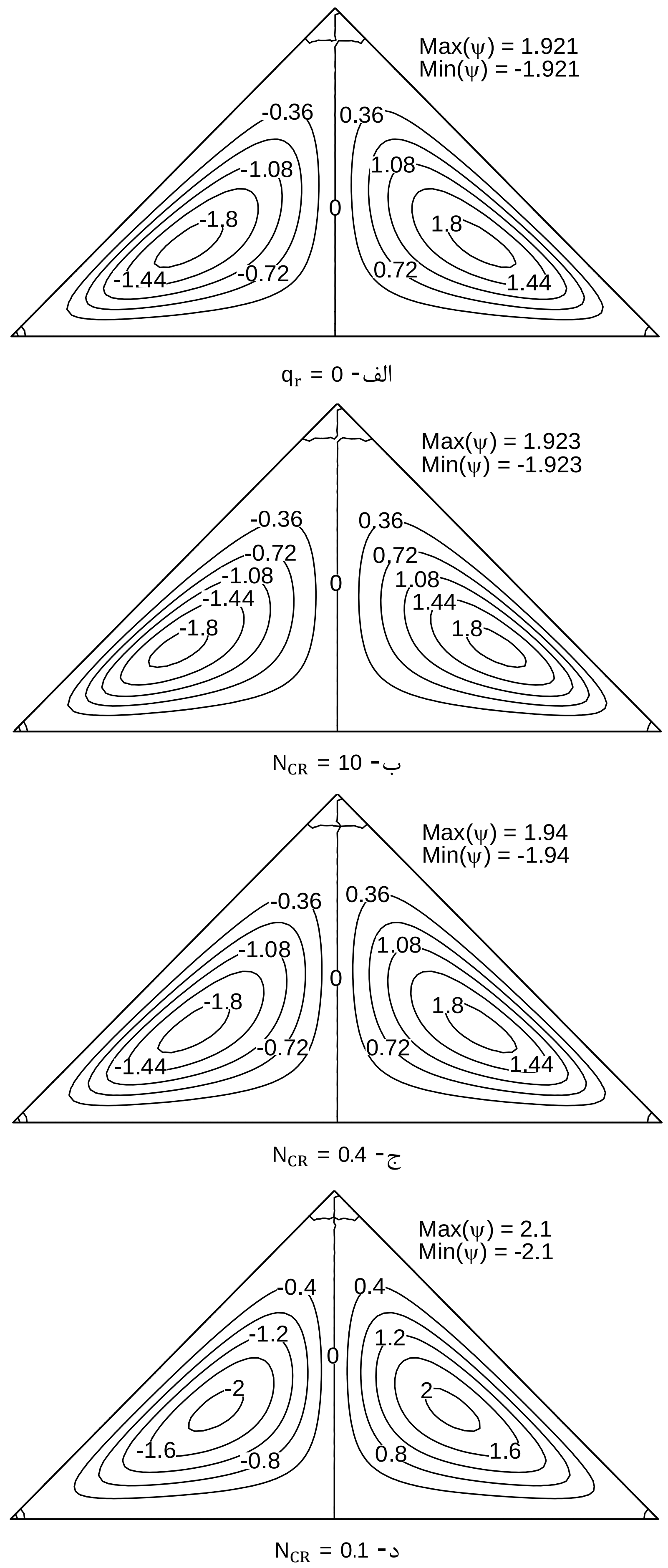


الف- $Ra = 10^4$

ب- $Ra = 10^5$

ج- $Ra = 10^6$

شکل 11 کانتور خطوط هم‌دما در حالت بدون تابش برای عددهای رایلی مختلف



الف- $q_r = 0$

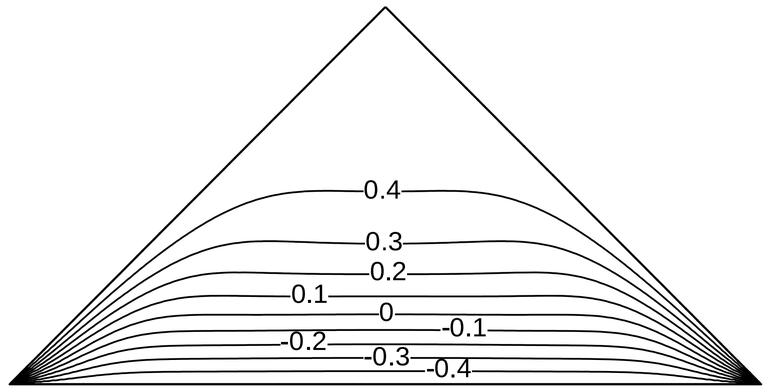
ب- $N_{CR} = 10$

ج- $N_{CR} = 0.4$

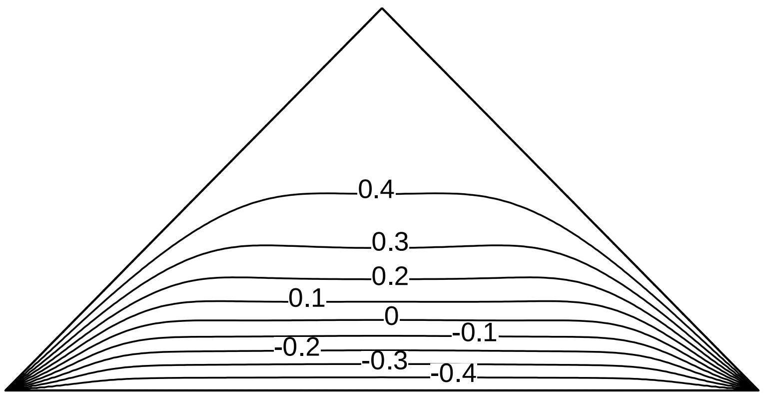
د- $N_{CR} = 0.1$

شکل 12 کانتور خطوط جریان برای عددهای پلانک مختلف

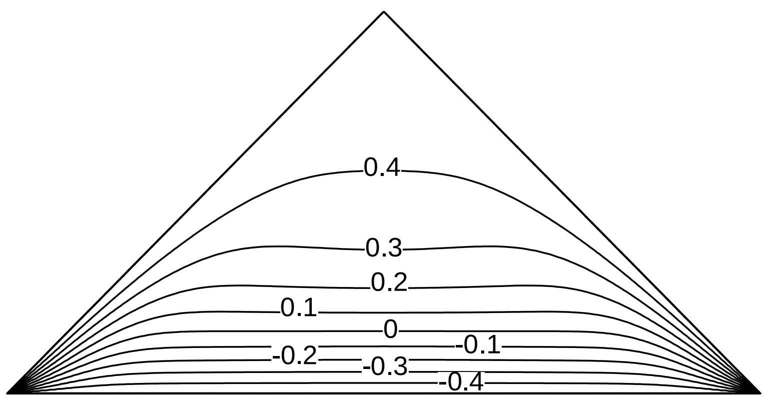
در شکل 14- الف و ب مشاهده می‌شود که نرخ انتقال حرارت در گوشه‌های پایین حفره به دلیل ناپیوستگی در شرط مرزی دما، بسیار بالا است و در هر عدد پلانکی ناسلت محلی همرفتی و تابشی در گوشه‌های پایین حفره بیشترین مقدار را دارد. همچنین ناسلت محلی همرفتی و تابشی در دیواره سرد در وسط آن و در دیواره گرم در گوشه بالای حفره کمترین مقدار را دارند. در شکل 14- ج مشاهده می‌شود که در $N_{CR} > 10$، انتقال حرارت تابشی هیچ تأثیری بر انتقال حرارت داخل حفره ندارد. با کاهش N_{CR}، ناسلت متوسط تابشی در هر دو دیواره سرد و گرم افزایش می‌یابد و ناسلت متوسط همرفتی در دیواره سرد افزایش و در دیواره گرم تقریباً ثابت باقی می‌ماند، با کاهش N_{CR}، اثر تابش بر محیط افزایش‌یافته و سبب گرم شدن سیال در اطراف دیواره سرد و فشرده شدن خطوط هم‌دما در این ناحیه می‌شود، این پدیده باعث افزایش اختلاف چگالی بیشتر در نزدیک دیواره سرد شده و در نتیجه نرخ انتقال حرارت همرفتی در دیواره سرد افزایش می‌یابد.



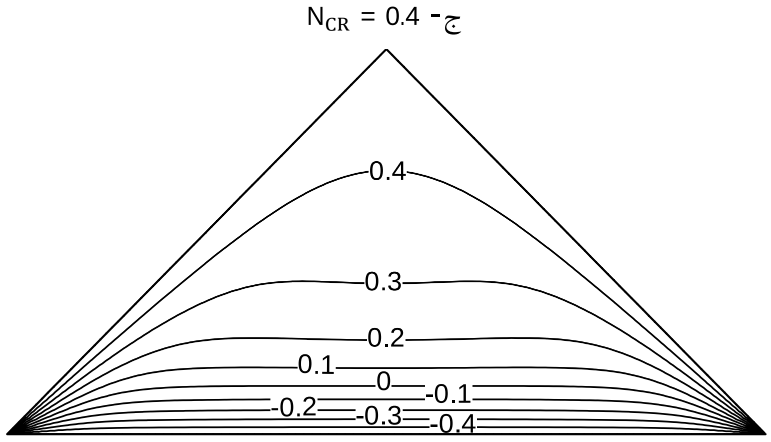
الف- $q_r = 0$



ب- $N_{CR} = 10$

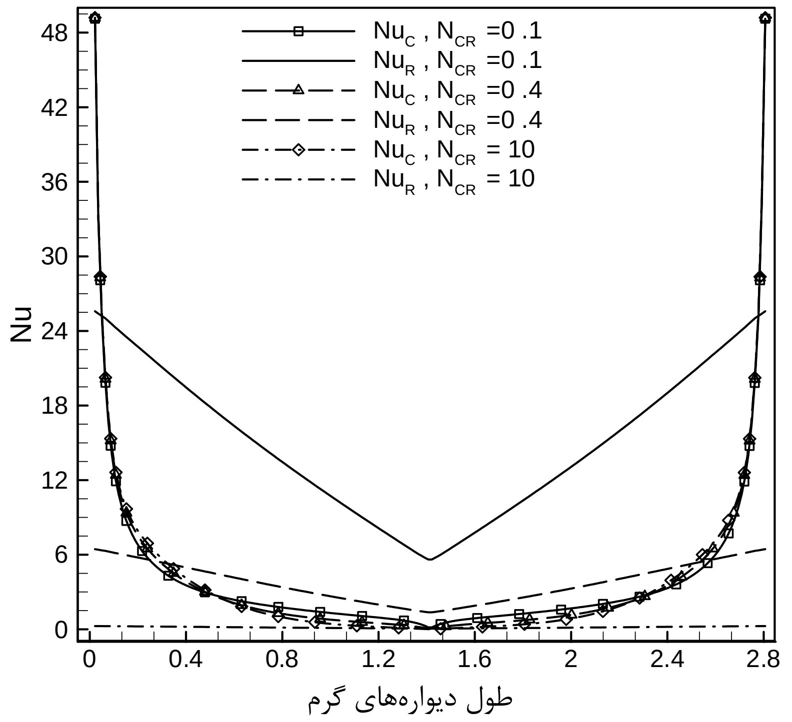


ج- $N_{CR} = 0.4$

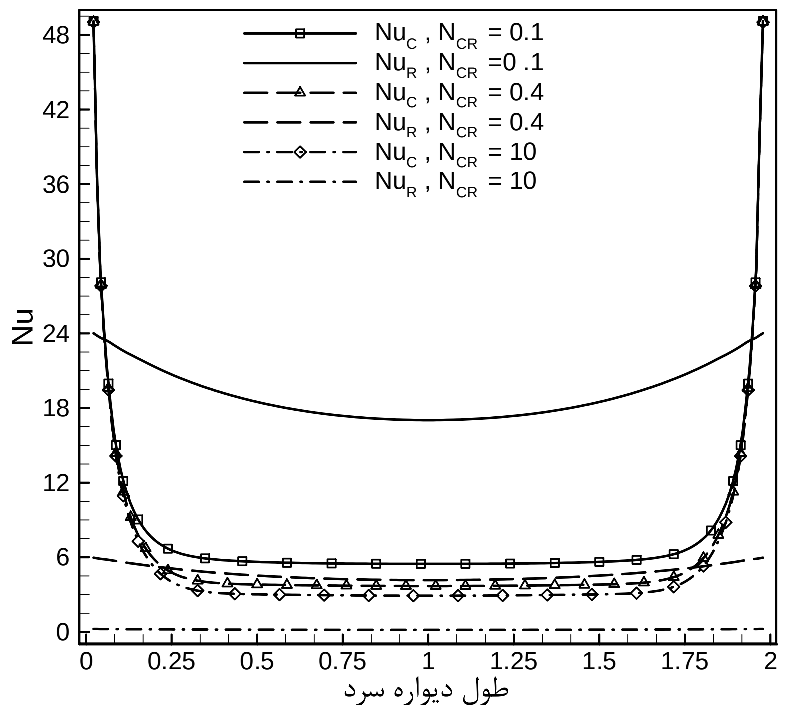


د- $N_{CR} = 0.1$

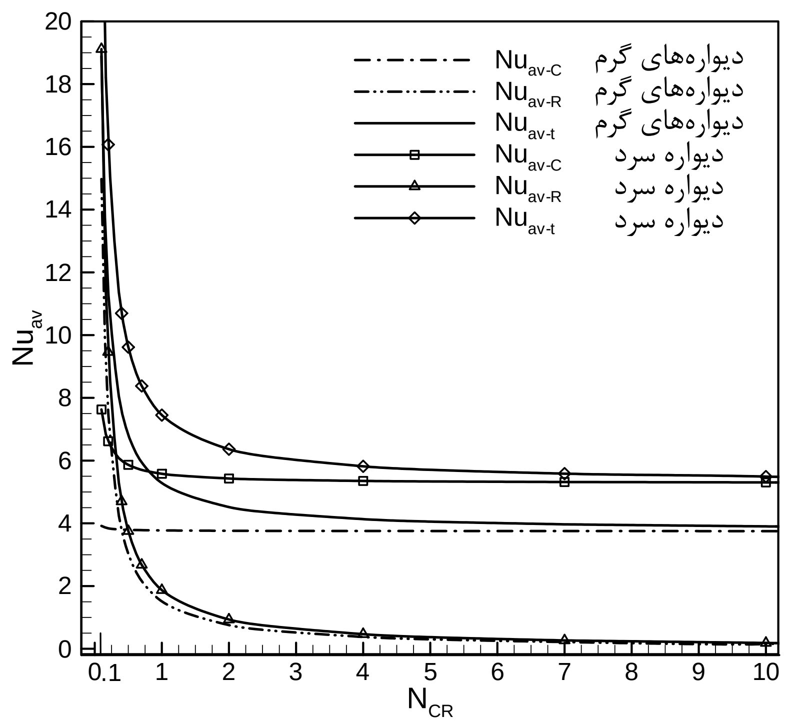
شکل 13 کانتور خطوط هم‌دما برای عددهای پلانک مختلف



الف- ناسلت محلی در دیواره‌های گرم



ب- ناسلت محلی در دیواره سرد



ج- ناسلت متوسط

شکل 14 تغییرات عدد ناسلت برحسب عدد پلانک

5-4-2-2- بررسی دمای متوسط

در شکل 15 تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب θ_m، در حالتی که

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.12.8]

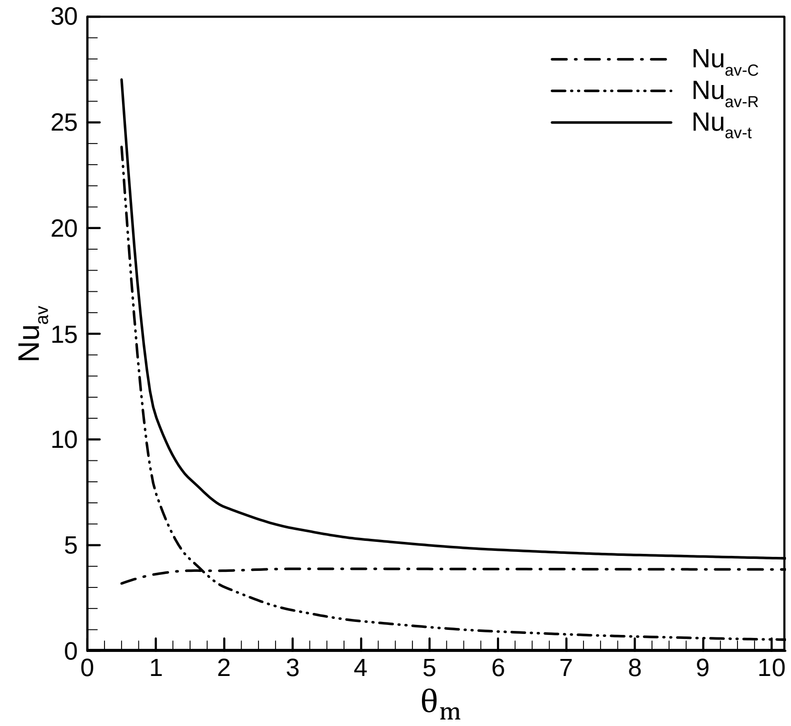
$Ra = 10^5$، $\tau = 1$، $N_{CR} = 0.5$، $\varepsilon_i = 1$ و $Pr = 0.71$ باشد، برای الف- دیواره گرم و ب- دیواره سرد نشان داده‌شده است.

در شکل 15 مشاهده می‌شود که با افزایش θ_m، ناسلت متوسط تابشی در هر دو دیواره به‌شدت کاهش می‌یابد. همچنین ناسلت متوسط همرفتی در دیواره سرد کاهش و در دیواره گرم تقریباً ثابت باقی می‌ماند. برای $\theta_m > 2$، ناسلت متوسط همرفتی در دیواره سرد تقریباً ثابت است و ناسلت متوسط تابشی در هر دو دیواره به آهستگی کاهش می‌یابد و به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین می‌توان گفت تابش زمانی بر انتقال حرارت تأثیر دارد که $\theta_m < 10$ است. تابش برای $\theta_m > 10$ تأثیر کمی بر انتقال حرارت کل دارد مگر آن‌که عدد پلانک محیط خیلی کوچک باشد. همان‌طور که در شکل 14-ج مشاهده شد در عددهای پلانک کوچک نرخ انتقال حرارت تابش بسیار بیشتر از انتقال حرارت جابجایی و هدایت است و در عددهای پلانک کوچک انتقال حرارت جابجایی و هدایت تأثیر کمی بر انتقال حرارت کل دارند.

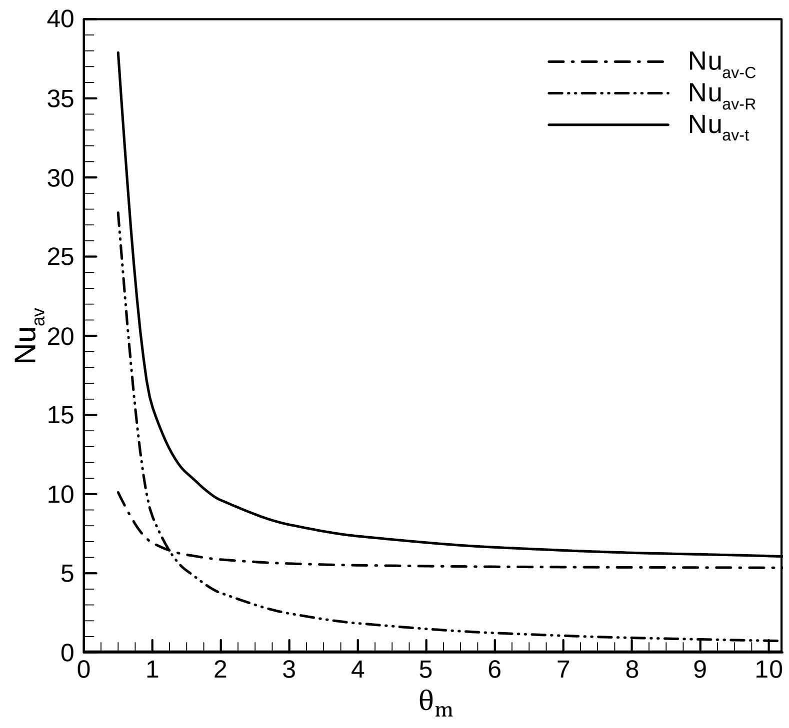
6- نتیجه‌گیری کلی

روش المان طبیعی هر دو مزایای روش المان محدود و روش‌های بدون‌مش را دارد و یک روش عددی امیدوارکننده در مسائل پیچیده مهندسی است. در روش المان طبیعی از درون‌یابی همسایه طبیعی برای ساخت شکل استفاده می‌شود. درون‌یابی همسایه طبیعی بر اساس نمودار ورونی و مثلث‌بندی دلانی است که یک جز کاملاً پایدار ایجاد می‌کند. در روش المان طبیعی، دو درون‌یابی همسایه طبیعی سیبسون و لاپلاس وجود دارد، با توجه مزایای درون‌یابی لاپلاس در این مطالعه از آن برای درون‌یابی متغیر میدان استفاده شد.

در مطالعات موجود جریان سیال با جابجایی آزاد همراه با تابش در یک حفره مثلثی به طور کامل بررسی نشده بود و از معادله انتقال تابشی برای بررسی تابش استفاده نشده بود. در این مطالعه به بررسی جریان جابجایی آزاد همراه با تابش در یک حفره مثلثی با استفاده از روش المان طبیعی پرداخته شد. معادلات مومنتم و پیوستگی با استفاده از روش CBS و معادلات انرژی و انتقال تابشی با استفاده از روش CGS گسسته‌سازی شد. اثر عدد رایلی در حالت بدون تابش و عدد پلانک و دمای متوسط در حالت تابش بر انتقال حرارت و جریان سیال داخل حفره که محیط آن نیمه شفاف، دارای جذب و صدور بود، بررسی شد. افزایش عدد رایلی در حالت بدون تابش سبب افزایش تأثیر انتقال حرارت همرفتی و کاهش تأثیر انتقال حرارت هدایت شد. کاهش عدد پلانک، سبب افزایش سهم انتقال حرارت تابش و گرم‌تر شدن محیط داخل حفره شد. در نتیجه سبب افزایش گرادیان دما در دیواره سرد و افزایش انتقال حرارت همرفتی در آن شد. افزایش دمای متوسط بدون بعد سبب کاهش سهم انتقال حرارت تابشی شد. نتایج روش المان طبیعی با نتایج لاریت و باساک مقایسه شد و نشان داده شد که تطابق خوبی بین نتایج روش المان طبیعی با دیگر روش‌های عددی وجود دارد. مقایسه نشان داد که روش المان طبیعی کارآمد، دقیق و پایدار است و از آن می‌توان در حل مسائل جریان سیال و انتقال حرارت استفاده کرد.



الف- دیواره گرم



ب- دیواره سرد

شکل 15 تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب دمای متوسط بدون بعد

7- فهرست علایم

a	ضریب جذب (m^{-1})
g	شتاب گرانشی (ms^{-2})
I	شدت
K	ضریب خاموشی (m^{-1})
k	ضریب هدایت گرمایی ($Wm^{-1}K^{-1}$)
N	تعداد کل گره‌ها
N_{av-C}	عدد ناسلت متوسط همرفتی
N_{av-R}	عدد ناسلت متوسط تابشی
N_{av-t}	عدد ناسلت متوسط کل
N_{CR}	عدد پلانک
P	فشار
Pr	عدد پرانتل
q_r	بردار شار تابشی
Ra	عدد رایلی
T_m	دما متوسط (K)
t	زمان بدون بعد
u	سرعت افقی
v	سرعت عمودی

علایم یونانی

α	ضریب نفوذ (m^2s^{-1})
β	ضریب انبساط گرمایی (K^{-1})
ε	ضریب صدور دیواره

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.12.8]

θ دمای بدون بعد

θ_m دمای متوسط بدون بعد

σ ضریب استفان-بولتزمن ($5.67\times10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$)

σ_s ضریب پراکندگی ($\mathrm{m^{-1}}$)

$\emptyset$ تابع شکل

ψ تابع جریان

8- مراجع

[1] K.A. Joudi, I.A. Hussein, and A.A. Farhan, Computational model for a prism shaped storage solar collector with a right triangular cross-section, *Energy Convers and Management*, Vol. 45, No. 3, pp. 391-409, 2004.

[2] D.A. Kontogeorgos, E.P. Keramida, M.A. Founti, Assessment of simplified thermal radiation models for engineering calculations in natural gas-fired furnace, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volu. 50, pp. 5260–5268, 2007

[3] C. Lei, and J.C. Patterson, Natural convection in a reservoir sidearm subject to solar radiation: experimental observations, *Exp. Fluid,* Vol. 32, No. 5, pp. 590-599, 2002.

[4] Yu.E. Karyakin, Yu.A. Sokovishin, and O.G. Martynenko, Transient natural convectionin triangular enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer,* Vol. 31, No. 9, pp. 1759-1766, 1998.

[5] G.A. Holtzman, R.W. Hill, and K.S. Ball, Laminar natural convection in isosceles triangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from above, *J. Heat Transfer,* Vol. 122, No. 3, pp. 485, 2000.

[6] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, third ed. Wiley, Hoboken, NJU, 2004.

[7] E.F. Kent, Numerical analysis of laminar natural convection in isosceles triangular enclosures for cold base and hot inclined walls*, Mechanics Research Communications,* Vol. 223, No. 5, pp. 1157, 1169, 2009

[8] R.S. Kaluri, R. Anandalakshmi, T. Basak, Bejan's heatline analysis of natural convection in right-angled triangular enclosures: effects of aspect-ratio and thermal boundary conditions, *International Journal of Thermal Science,,* Vol. 49, No. 9, pp. 1576, 1592, 2010

[9] T. Basak, S. Roy, S. Krishna Babu, and A.R. Balakrishnan, Finite element analysis of natural convection flow in a isosceles triangular enclosure due to uniform and non-uniform heating at the side walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 51, No.17-18, pp. 4496-4505, 2008.

[10] S.C. Saha, M.M.K. Khan, A Review of Natural Convection and Heat Transfer in Attic-Shaped Space, *Energy and Buildings,* Vol. 43, No.10, pp. 2564-2571, 2011

[11] J. Sieres, A. Campo, E.H. Ridouane, , J. Fernández-Seara, Effect of Surface Radiation on Buoyant Convection in Vertical Triangular Cavities with Variable Aperture Angles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50., No. 25-26, pp. 5139-5149, 2007.

[12] M. Saleem, M. A. Hossain, C. Saha and , Y. T. Gu, Heat Transfer Analysis of Viscous Incompressible Fluid by Combined Natural Convection and Radiation in an Open Cavity, *Mathematical Problems in Engineering.*, Vol. 2014, pp1-14, 2014.

[13] R. Siegel and J. R. Howell*, Thermal Radiation Heat Transfer*, Hemisphere, Washington, Wash, USA, 3rd edition, 1992.

[14] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer,* Academic Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2003.

[15] S. C. Traugott, Radiative Heat-Flux Potential for a Nongrey Gas, *AIAA Journal,* Vol. 4, pp. 541-542, 1966.

[16] G. Lauriat, A Numerical Study of a Thermal Insulation Enclosure: Influence of the Radiative Transfer, *ASME HTD,* pp. 63-71, 1980.

[17] T. Fusegi, B. Farouk, and K. Kuwahara , 3-d Natural Convection-radiation Interactions In A Cube Filled With Gas-soot Mixtures", *Fire Safety Science*., Vol. 3, pp. 365-374, 1991.

[18] N. Sukumar, and B. Moran, and T. Belytschko, The natural element method in solid mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng,* Vol. 43, No. 5, pp. 839–887, 1998.

[19] J. Braun, and M. Sambridge, A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids, *Nature,* Vol.6542, pp.655-660, 1995.

[20] N. Sukumar, and B. Moran, and T. Belytschko, The natural element method in solid mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng,* Vol. 43, No. 5, pp. 839–887, 1998.

[21] V. V. Belikov, and A. Yu Semenov, The Non-Sibsonian Interpolation: A New Method of Interpolation of the Values of a Function on an Arbitrary Set of Points, *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* Vol. 37, No. 1, pp. 9-15, 1997.

[22] H. Hiyoshi, and K. Sugihara, Two Generalizations of an Interpolant Based on Voronoi Diagrams, *International Journal of Shape Modeling*. Vol. 5, No. 2, pp. 219-231, 1999.

[23] N. Sukumar, Voronoi cell finite difference method for the diffusion operator on arbitrary unstructured grids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* Vol. 57, No. 1, pp. 1-34, 2003.

[24] S. Madhukar, and A. Rajagopal, Meshless natural neighbor Galerkin method for the bending and vibration analysis of composite plates, *Composite Structures.,* Vol. 111, pp. 138-146, 2012.

[25] W. Weidong, and G. Cheng, Application of Natural Element Method in Numerical Simulation of Crack Propagation, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 2013, pp. 1-6, 2013.

[26] Y. Zhang, and H.L. Yi, and H.P. Tan, Natural element method for radiative heat transfer in two-dimensional semitransparent medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 56, No. 1-2, pp. 411-423, 2013.

[27] Y. Zhang, and H.L. Yi, and H.P. Tan, Natural element method for radiative heat transfer in a semitransparent medium with irregular geometries, *Journal of Computational Physics*., Vol. 241, pp. 18-34, 2013.

[28] T. Basak, S. Roy, S. Krishna Babu, and A.R. Balakrishnan, Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 49, No. 23-24, pp. 4525–4535, 2006.

[29] D. W. Amlin, and S. A. Korpela, Influence of Thermal Radiation on the Temperature Distribution in a Semitransparent Solid, *ASME Journal oF Heat Transfer*. Vol. 101, pp. 76-80, 1979.

[30] D. Gonzalez, and E. Cueto, and et al. A natural element updated Lagrangian strategy for free-bsurface fluid dynamics, *J. Computational Physics,* Vol. 223, No. 1, pp. 127-150*,* 2007.

[31] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, and K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow,* John Wiley & Sons Ltd, 2004.

[32] D. C. Wan, B. S. V. Patnaik and G. W. A. Wei, new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals,* Vol. 40, No. 3, pp. 199-228, 2001.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.12.8]