مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ٤، ص‌ص ۱۱۱-۱۲۱

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل غیر خطی خمش صفحات گرد ساندویچی مدرج تابعی

محمداسماعیل گلمکانی[1*]، علیرضا یوسفیان ثقی[2]

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

*مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۰ شهریور ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۴ مهر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۱۰ خرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

صفحات ساندویچی مدرج تابعی

روش رهایی پویا

خمش غیر خطی

چکیده

در این مقاله تحلیل غیر خطی خمش صفحات ساندویچی دایره‌ای شکل متقارن محوری با پوسته‌های مدرج تابعی تحت بار مکانیکی عرضی بررسی شده است. معادلات حاکم براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیر خطی کرنش ون کارمن می‌باشند و دستگاه معادلات تعادل غیر خطی به‌دست آمده توسط ترکیب روش عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل گردیده‌اند. به‌منظور بررسی صحت و دقت تحقیق نتایج به‌دست آمده با برخی مراجع و همچنین روش المان محدود مقایسه شده است. در نهایت به‌بررسی اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی و تغییر در خواص مواد مدرج تابعی بر روی خمش غیر خطی پرداخته می‌شود.

Nonlinear bending analysis of circular functionally graded sandwich plates

Mohammad Esmael Golmakani[1*], Alireza Yoosefian Saghi[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Mashhad branch, Mashhad, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Mashhad branch, Mashhad, Iran

*P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran, m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 01 September 2013
Accepted 16 October 2013
Available Online 31 May 2014

Keywords:
Functionally Graded Sandwich Plates
Dr Method
Nonlinear Bending

ABSTRACT

In this article, nonlinear bending analysis of axisymmetric sandwich circular plates with functionally graded face sheets subjected to transverse mechanical load is presented. The formulations are based on First-Order Shear Deformation Plate Theory (FSDPT) and large deflection von Karman equations and nonlinear equilibrium equations solved by the Dynamic Relaxation (DR) method combined with the finite difference discretization technique. In order to verify the current work some obtained results are compared with the solutions reported in the literature and abaqus finite element method. Finally, the influences of material constant k, boundary conditions, core-to-face sheets thickness ratio on the results are studied in detail.

۱- مقدمه

صفحات ساندویچی تقریبا پنجاه سال است که به‌دلیل مقاومت در برابر خمش، وزن کم، کیفیت ساختاری و مشخصات ارتعاشاتی خوب، مورد استفاده قرار می‌گیرند. سازه‌های ساندویچی درحال حاضر در ساخت فضا پیماها استفاده می‌شوند. یک ساختار ساندویچی اصولاً از دو ورق نازک با استحکام کششی و فشاری مناسب و یک لایه میانی نسبتاً ضخیم و مقاوم در برابر تنش‌های برشی تشکیل می‌شود. در این نوع ساختاها، ورق‌ها معمولاً با استفاده از چسب یا فرایند جوشکاری به لایه میانی متصل می‌شوند.

استفاده از این مواد در فضاپیماها، این سازه‌ها را سبک‌تر، مقاوم‌تر و سریع‌تر می‌کند و همچنین مصرف سوخت را کاهش می‌دهد. صفحات ساندویچی از دو بخش هسته و پوسته تشکیل شده‌اند. هسته در وسط و پوسته‌ها در دو طرف هسته قرار گرفته‌اند. پوسته می‌تواند از یک یا چندین لایه تشکیل شده باشد. کارکرد اصلی هسته، انتقال بارهای برشی عرضی از یک لایه به لایه دیگر است. پوسته‌ها در این مقاله از جنس مواد مدرج تابعی انتخاب شده‌اند. این مواد از دید ماکروسکوپی، مواد مرکب غیرهمگنی هستند که ترکیبی از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشند. سرامیک در برابر حرارت و خوردگی مقاومت دارد و فلز در برابر شکست استحکام بالایی دارد. این مواد توسط روش‌هایی مانند متالوژی پودر و ... ساخته می‌شوند. مواد مدرج تابعی، موادی هستند که خواص آن‌ها به‌صورت پیوسته و آرام از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر پیدا می کند که این، به‌دلیل تفاوت درصد حجمی ترکیبات تشکیل دهنده در آن نقاط است. در مواد مدرج تابعی، تغییر تنش در لایه‌ها به‌صورت آرام و آهسته صورت می‌گیرد که این قضیه احتمال جدایش لایه‌ها را کم می‌کند. خواص مهندسی این مواد همچون چگالی و مدول یانگ در جهت ضخامت تغییر می‌کند. از این مواد برای اولین بار در ژاپن در سال ۱۹۸۴ درطول یک پروژه فضایی استفاده گردید. فلز موجود در مواد مدرج تابعی می‌تواند تیتانیوم یا استینلس استیل و ... باشد و سرامیک آن می‌تواند

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M.E. Golmakani, A.R. Yoosefian Saghi, Nonlinear bending analysis of circular functionally graded sandwich plates, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 111-121, 2014 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.4.4.9]

زیرکونیا یا سیلیکون نیترید درنظر گرفته شود. مطالعات زیادی بر روی خمش خطی، ارتعاشات آزاد و تحلیل کمانش صفحات ساندویچی با پوسته‌های مدرج تابعی انجام شده است. در بین آن‌ها، در سال ۱۹۵۴ زید[۱] خمش متقارن صفحات ساندویچی دایره‌ای شکل را با استفاده از روش پرتوبیشن بررسی کرد. در سال ۱۹۶۳ بران[۲] تغییر شکل حرارتی صفحات ساندویچی دایره‌ای شکل را با استفاده از روش پرتوبیشن مورد مطالعه قرار داد. در سال۲۰۰۷ زنکور و همکارانش[۳] تحلیل خمش خطی صفحات ساندویچی مدرج تابعی را براساس تئوری برشی مراتب بالا و روش حل ناویر ارائه کردند. در سال ۲۰۰۷ شودجا[۴] حل ترموالاستیک چند لایه‌های ساندویچی مدرج تابعی را با استفاده از روش سری فوریه ارائه داد. در سال ۲۰۰۸ لیکیو[۵] ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی مدرج تابعی را به‌وسیله تئوری خطی الاستیسیته بیان کرد. در سال ۲۰۰۸ شن[۶] رفتار پس کمانش حرارتی و فشاری صفحات ساندویچی مدرج تابعی را با استفاده از روش پرتوبیشن زیر شرایط حرارتی محیطی مطالعه کرد.

درسال ۲۰۰۸ اکسیا و شن[۷] ارتعاشات حاصل از پس کمانش حرارتی و فشاری صفحات ساندویچی مدرج تابعی را بررسی کردند و دریافتند که نسبت ضخامت هسته به پوسته و توزیع درصد حجمی مواد مدرج تابعی تاثیرات مهمی روی فرکانس، کمانش و پس کمانش دارد ولی تاثیرات کمی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و خمش غیر خطی را داراست. در سال ۲۰۱۰ شرعیات[۸] تحلیل غیر خطی خمش و کمانش صفحات ساندویچی مدرج تابعی را تحت بار ترمو مکانیکی انجام داد. در سال۲۰۱۱ تونسی[۹] تحلیل خمش ترموالاستیک صفحات ساندویچی مدرج تابعی را توسط تئوری برشی مثلثاتی و روش حل ناویر بررسی کرد. وی صفحه ساندویچی خود را این گونه درنظر گرفت که هسته را تابعی فرض کرد و پوسته بالایی را از سرامیک و پوسته پایینی را فلز درنظر گرفت. در سال ۲۰۱۱ شن[۱۰] تحلیل غیر خطی خمش، ارتعاشات و پس کمانش صفحات ساندویچی مدرج تابعی مستطیلی را براساس تئوری برشی مراتب بالا و معادلات ون کارمن و تکنیک پرتوبیشن انجام داد. درسال ۲۰۱۰ جلالی[۱۱] تحلیل کمانش حرارتی صفحه ساندویچی مدرج تابعی دایره‌ای شکل با ضخامت‌های گوناگون را با تئوری برشی مرتبه اول و روش حل شوتینگ انجام داد. وی اثبات کرد که کمانش حرارتی از نسبت ضخامت هسته به پوسته، ایندکس درصد حجمی ماده تابعی و تغییر ضخامت کل تاثیر می‌پذیرد. در سال ۲۰۱۰ لوئیس کاسترو و همکارانش[۱۲] تحلیل استاتیکی صفحه ساندویچی را با تئوری لیروایس[1] و روش حل مرتب‌سازی موجی انجام دادند. آن‌ها خیز و تنش را زیر بار یکنواخت برای یک صفحه براساس تئوری کلا سیک و تئوری برشی مرتبه اول و سوم و لیروایس به‌دست آوردند و آن‌ها را با هم مقایسه کردند. در سال ۲۰۱۰ پیلیپچوک و همکارانش[۱۳] کوپل ترمو مکانیک در خمش استوانه ای صفحات ساندویچی را به‌وسیله تئوری خطی الاستیسیته بررسی کردند. آن‌ها این تحقیق را برای شرایط مرزی مختلف صفحه انجام دادند. در سال ۲۰۱۲ خلیلی و همکارانش[۱۴] تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی مدرج تابعی وابسته به دما را با استفاده از تئوری برشی مراتب بالا و اصل همیلتون انجام دادند. در سال ۲۰۱۱ سلیمان مرداسی و همکارانش[۱۵] تحلیل خمش صفحات ساندویچی مدرج تابعی را توسط دو تئوری تغییر شکل برشی تصحیح شده[2] انجام دادند. در سال ۲۰۱۰ استارویتو و همکارانش[۱۶] خمش استوانه‌ای صفحه ساندویچی مستطیلی شکل ایستاده بر روی پایه الاستیک را بررسی کردند. عکس‌العمل پایه براساس مدل وینکلر[3] توصیف شده بود. طبق مطالعاتی که بر روی پژوهش‌ها در زمینه صفحات ساندویچی صورت گرفته، مشاهده می‌شود که تاکنون تحلیلی در زمینه خمش غیرخطی صفحه ساندویچی مدرج تابعی دایره‌ای شکل تحت بار مکانیکی توسط روش رهایی پویا انجام نشده است. لذا در این تحقیق به‌بررسی رفتار خمش غیرخطی الاستیک صفحات ساندویچی مدرج تابعی متقارن محوری دایره‌ای و حلقوی پرداخته می‌شود. فرمولاسیون غیرخطی براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیرخطی کرنش ون کارمن می‌باشد و دستگاه معادلات تعادل غیرخطی به‌دست آمده توسط ترکیب روش عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل می‌گردد. به‌منظور بررسی صحت و دقت تحقیق انجام شده به مقایسه نتایج به‌دست آمده با برخی مراجع و همچنین روش المان محدود پرداخته شده است. در نهایت به‌بررسی اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی و شاخص مدرج تابعی بر روی خمش غیرخطی پرداخته می‌شود.

۲- معادلات حاکم

در ابتدا به‌بررسی روابط حاکم بر توزیع مواد در لایه‌های مدرج تابعی صفحه ساندویچی پرداخته می‌شود. همان‌طوری که گفته شد این مواد از دید ماکروسکوپی، مواد مرکب غیر همگنی هستند که ترکیبی از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشند. ضریب ترکیب این دو ماده با استفاده از قانون اختلاط ساده نوشته شده است. شکل ۱ نمای کلی صفحه ساندویچی دایره‌ای با پوسته‌های مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

برای تعیین مدول یانگ E_F، ضریب حرارتی α_F، خصوصیت موثر ماده P_F از مدل خطی ویت استفاده می‌گردد[۱۷]:

$$P_F = P_C V_C + P_M V_M \tag{۱}$$

اندیس C به معنای سرامیک و اندیس M به معنای فلز می‌باشد. درصد حجمی سرامیک برای پوسته بالایی به شکل زیر تعریف می‌شود[۱۸]:

$$V_C = \left(\frac{t_1 - Z}{t_1 - t_0}\right)^k \tag{۲}$$

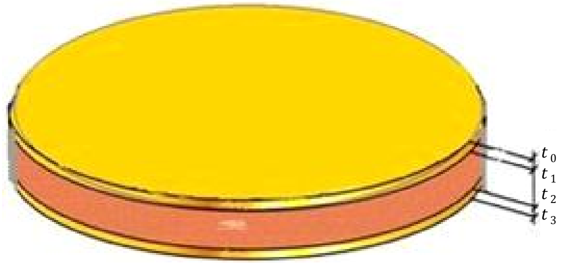
به‌طور مشابه، درصد حجمی سرامیک برای پوسته پایینی عبارت است از:

$$V_C = \left(\frac{Z - t_2}{t_3 - t_2}\right)^k \tag{۳}$$

همچنین می‌دانیم که $V_M + V_C = 1$ می‌باشد. در اینجا اندیس k شاخص مدرج تابعی است و میزان تغییرات خواص را در طول ضخامت لایه مدرج تابعی تعیین می‌کند. مدول یانگ برای هر نقطه در پوسته بالایی به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$E_F(Z) = [E_C - E_M]\left(\frac{t_1 - Z}{t_1 - t_0}\right)^k + E_M \tag{۴}$$

مدول یانگ برای پوسته پایینی نیز مشابه روابط بالاست با این تفاوت که درصد حجمی مربوط به خودش در روابط جایگزین می‌شود



شکل ۱ نمای کلی صفحه ساندویچی دایره‌ای

1- Layer Wise
2- Refined shear deformation plate theory
3. Winkler's model

با توجه به دایره‌ای شکل بودن هندسه صفحه از مختصات قطبی برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. لذا با توجه به تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان تغییر مکان برای هر نقطه درون صفحه در حالت کلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(r,z)=u_\circ(r)+z\,\varphi_r \quad u_z(r,z)=w_\circ(r) \qquad (۵)$$

که در رابطه بالا $u_\circ$ جابه‌جایی تار خنثی در جهت شعاع و $w_\circ$ جابه‌جایی تار خنثی در جهت ضخامت و چرخش حول محور شعاع φ_r می‌باشد. شایان ذکر است که ضخامت هسته h، ضخامت پوسته بالا h_2 و ضخامت پوسته پایین h_1 است و ضخامت کل H می‌باشد. با توجه به رابطه (۵)، میدان جابه-جایی برای هسته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(r,z)=u_\circ(r)+z\,\varphi_r,\ u_z(r,z)=w_\circ(r), \qquad \frac{-h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \qquad (۶)$$

همچنین میدان جابه‌جایی برای پوسته پایین به‌صورت ذیل می‌باشد:

$$u_r(r,z)=u_\circ(r)+z\,\varphi_r,\ u_z(r,z)=w_\circ(r), \qquad \frac{-h}{2}-h_1\le z\le\frac{-h}{2} \qquad (۷)$$

میدان جابه‌جایی برای پوسته بالا نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(r,z)=u_\circ(r)+z\,\varphi_r,\ u_z(r,z)=w_\circ(r), \qquad \frac{h}{2} \qquad (۸)$$

معادلات کرنش نیز با درنظرگرفتن فرضیات تغییر شکل‌های بزرگ ون کارمن در ادامه برای سه‌لایه هسته، پوسته بالا و پوسته پایین بیان می‌شود. میدان کرنش برای هسته به‌صورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\varepsilon_r^\circ+z\,k_r\\
&\varepsilon_r^\circ=\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)\ \&\ k_r=\frac{d\varphi_r}{dr}\\
&\varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^\circ+z\,k_\theta\ \ \varepsilon_\theta^\circ=\frac{u_\circ}{r}\ \&\ k_\theta=\frac{\varphi_r}{r} \qquad \frac{-h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\\
&\varepsilon_z=\frac{dw_\circ}{dz}=0\\
&\gamma_{rz}=\varphi_r+\frac{dw_\circ}{dr}\\
&\gamma_{r\theta}=\gamma_{r\theta}^\circ+z\,k_{r\theta}=0\\
&\gamma_{\theta z}=k_{\theta z}=0
\end{aligned} \qquad (۹)$$

میدان کرنش برای پوسته پایین و بالا همانند رابطه بالاست با این تفاوت که مقادیر ضخامت مربوط به خودشان در روابط جایگزین می‌شود. با توجه به روابط هوک، میدان تنش برای پوسته‌ها به شکل ذیل قابل محاسبه است:

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=\sigma_z=0 \qquad (۱۰)$$

که در روابط بالا ضرایب به‌صورت زیر می‌باشند:

$$Q_{11}=E/1\text{-}\vartheta^2,\ Q_{22}=E/1\text{-}\vartheta^2,\ Q_{12}=E\vartheta/1\text{-}\vartheta^2,\ E=E(Z) \qquad (۱۱)$$

میدان تنش برای هسته نیز به شکل ذیل است:

$$\tau_{rz}=\frac{E}{2(1+\vartheta)}\gamma_{rz},\ \ \sigma_z=\tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=0 \qquad (۱۲)$$

بنابراین میدان تنش در حالت متقارن محوری برای لایه‌ها به شکل ذیل می-باشد:

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{bmatrix}^{(n)}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0\\ 0&0&Q_{66}\end{bmatrix}^{(n)}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{bmatrix}^{(n)} \qquad n=1,2,3 \qquad (۱۳)$$

که در روابط n شماره لایه است به‌طوری که از بالا به پایین نامگذاری شده است. بنابراین پوسته بالا، هسته و پوسته پایین به‌ترتیب با لایه‌های شماره ۱، ۲ و ۳ نامگذاری شده‌اند و چون مدول یانگ در طول ضخامت پوسته‌ها تغییر می‌کند بایستی در هر رویه، خواص مربوط به خودش در روابط جایگزین شود. با انتگرال‌گیری از میدان تنش در راستای ضخامت صفحه، منتجه‌های تنش و گشتاور به‌شکل روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_r,N_\theta,Q_r)=\int_{-H/2}^{+H/2}(\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{rz})dz \qquad (۱۴)$$

$$(M_r,M_\theta)=\int_{-H/2}^{+H/2}(\sigma_r,\sigma_\theta)z\,dz \qquad (۱۵)$$

با جایگذاری روابط (۹) در (۱۳) می‌توان منتجه‌های تنش و گشتاور برحسب جابه‌جایی‌ها را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
N_r&=A_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+A_{12}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)+B_{11}\left(\frac{d\varphi_r}{dr}\right)+B_{12}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\\
N_\theta&=A_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+A_{22}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)+B_{12}\left(\frac{d\varphi_r}{dr}\right)+B_{22}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\\
M_r&=B_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+B_{12}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)+D_{11}\left(\frac{d\varphi_r}{dr}\right)+D_{12}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\\
M_\theta&=B_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+B_{22}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)+D_{12}\left(\frac{d\varphi_r}{dr}\right)+D_{22}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\\
Q_r&=F_{66}\left(\varphi_r+\frac{dw_\circ}{dr}\right)
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در روابط (۱۶) N_r و N_θ منتجه تنش‌های درون صفحه‌ای و M_r و M_θ لنگرهای خمشی و Q_r منتجه تنش برشی می‌باشند. همچنین، ماتریس‌های سفتی A،B و D در روابط (۱۶) توسط روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$A_{ij}=\int_{\frac{-h}{2}-h_1}^{\frac{-h}{2}}Q_{ij}^{(3)}\,dz+\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{ij}^{(2)}\,dz+\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2}Q_{ij}^{(1)}\,dz$$

$$B_{ij}=\int_{\frac{-h}{2}-h_1}^{\frac{-h}{2}}Q_{ij}^{(3)}\,zdz+\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{ij}^{(2)}\,zdz+\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2}Q_{ij}^{(1)}\,zdz$$

$$D_{ij}=\int_{\frac{-h}{2}-h_1}^{\frac{-h}{2}}Q_{ij}^{(3)}\,z^2dz+\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{ij}^{(2)}\,z^2dz+\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2}Q_{ij}^{(1)}\,z^2dz$$

i,j=1,2,6

$$F_{66}=0.833\left(\int_{\frac{-h}{2}-h_1}^{\frac{-h}{2}}\frac{E(Z)}{2(1+\vartheta)}\,dz+\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{E}{2(1+\vartheta)}\,dz+\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2}\frac{E(Z)}{2(1+\vartheta)}\,dz\right) \qquad (۱۷)$$

که در روابط قبل داریم:

$$Q_{ij}^{(n)}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0\\ 0&0&Q_{66}\end{bmatrix}^{(n)} \qquad (۱۸)$$

در این روابط Z فاصله لایه n ام از تار خنثی است و n شماره لایه است. معادلات تعادل را می‌توان از طریق مینیمم‌سازی انرژی و یا تعادل المان به-دست آورد. معادلات تعادل براساس تئوری برشی مرتبه اول توسط روابط زیر تعریف می‌شود[۱۹]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dN_r}{dr}+\frac{N_r-N_\theta}{r}=0\\
&\frac{dQ_r}{dr}+\frac{Q_r}{r}+N_r\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{N_\theta}{r}\frac{dw}{dr}+q=0\\
&\frac{dM_r}{dr}+\frac{M_r-M_\theta}{r}-Q_r=0
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با نوشتن معادلات تعادل برحسب میدان جابه‌جایی خواهیم داشت:

از آنجایی که آرایش خواص در راستای ضخامت کاملاً متقارن است این امر باعث خواهد شد که تمام جملات ماتریس سفتی کوپلینگ کشش-خمش B صفر شوند که این منجر به ساده‌تر شدن معادلات خواهد شد. به‌منظورکامل کردن فرمولاسیون، معادلات تعادل با شرایط مرزی همراه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&A_{11}\left(\frac{d^2u_\circ}{dr^2}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+A_{12}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)\right)+B_{11}\frac{d^2\varphi_r}{dr^2}+B_{12}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\right)\\
&+\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)(A_{11}-A_{12})+\frac{u_\circ}{r}(A_{12}-A_{22})+\frac{d\varphi_r}{dr}(B_{11}-B_{12})+\frac{\varphi_r}{r}(B_{12}-B_{22})\right\}=0
\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.4.4.9]

$$F_{66}\left(\frac{d\,\varphi_r}{dr}+\frac{d^{\,2}w_\circ}{dr^{\,2}}\right)+F_{66}\left(\frac{\varphi_r}{r}+\frac{dw_\circ}{rdr}\right)+\frac{d^{\,2}w_\circ}{dr^{\,2}}\left(A_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+A_{12}\frac{u_\circ}{r}+B_{11}\frac{d\,\varphi_r}{dr}+{}_{12}\frac{\varphi_r}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{dw_\circ}{dr}\left(A_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+A_{22}\frac{u_\circ}{r}+B_{12}\frac{d\,\varphi_r}{dr}+B_{22}\frac{\varphi_r}{r}\right)+q=0$$

$$B_{11}\left(\frac{d^{\,2}u_\circ}{dr^{\,2}}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)+B_{12}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)\right)+D_{11}\frac{d^2\,\varphi_r}{dr^2}+D_{12}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)\right)+\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{du_\circ}{dr}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)(B_{11}-B_{12})+\frac{u_\circ}{r}(B_{12}-B_{22})+\frac{d\,\varphi_r}{dr}(D_{11}-D_{12})+\frac{\varphi_r}{r}(D_{12}-D_{22})\right\}-F_{66}\left(\varphi_r+\frac{dw_\circ}{dr}\right)=0 \qquad (۲۰)$$

شرایط مرزی برای دو تکیه‌گاه ساده و گیردار برای دو صفحه دایره‌ای و حلقوی در زیر بررسی شده‌اند. برای یک صفحه دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه ساده شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}&At\ r=0\,,\ u=0\,,\ \varphi_r=0\,,\ Q_r=0\\&At\ r=r_o\,,\ u=0,\ w=0\,,\ M_r=0\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

برای یک صفحه دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه گیردار نیز شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}&At\ r=0\,,\ u=0\,,\ \varphi_r=0\,,\ Q_r=0\\&At\ r=r_o\,,\ u=0\,,\ w=0\,,\ \varphi_r=0\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

برای یک صفحه حلقوی شکل نیز با تکیه‌گاه گیردار در لبه داخلی و خارجی شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}&At\ r=r_i\,,\ u=0,\ w=0\,,\ \varphi_r=0\\&At\ r=r_o\,,\ u=0,\ w=0,\ \varphi_r=0\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

همچنین برای یک صفحه حلقوی شکل با تکیه‌گاه ساده در لبه داخلی و خارجی شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}&At\ r=r_i\,,\ u=0,\ w=0\,,\ M_r=0\\&At\ r=r_o\,,\ u=0,\ w=0,\ M_r=0\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

۳- روش حل رهایی پویا

استفاده از روش رهایی پویا به دهه اول قرن بیستم باز می‌گردد. تاکنون مطالعات گسترده‌ای بر روی رفتار غیرخطی صفحات توسط این روش عددی به انجام رسیده است. صالحی و سبحانی[۲۰] تحلیل الاستیک خطی و غیرخطی قطاع چندلایه کامپوزیتی متقارن را با استفاده از ترکیب روش‌های رهایی پویا و تفاضل محدود انجام دادند. در پژوهشی دیگر توسط همین روش، فلاحتگر و صالحی[۲۱] تغییر شکل‌های بزرگ صفحات چندلایه حلقوی ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک را بررسی کردند. همچنین فلاحتگر و همکاران[۲۲] تحلیل غیرخطی خمش صفحات چندلایه متشکل از فاز ماتریس ویسکوالاستیک را براساس مدل ریز ساختار سه‌بعدی با استفاده از روش رهایی پویا انجام دادند. در تحقیقی دیگر، صالحی و آقایی[۲۳] به تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ صفحات ویسکوالاستیک نامتقارن محوری دایره‌ای شکل با به‌کارگیری روش عددی گفته شده پرداختند. تروی و صالحی[۲۴] پاسخ تغییر شکل‌های بزرگ الاستو-پلاستیک صفحات دایره‌ای تقویت شده را تحت بار گسترده بررسی کردند. در روش رهایی پویا یک سیستم استاتیکی با افزودن نیروهای فرضی اینرسی و میرایی به یک فضای ساختگی دینامیکی انتقال می‌یابد[۱۹]:

$$[M]\{\ddot{X}\}^n+[C]\{\dot{X}\}^n+[K]\{X\}^n=\{P(t^n)\} \qquad (۲۵)$$

در این رابطه $[C]$، $[M]$ و $[K]$ماتریس‌های میرایی، جرمی و سفتی هستند. همچنین$\{X\}^n$ بردار جابه‌جایی، $\{\dot{X}\}^n$ و $\{\ddot{X}\}^n$ بیانگر سرعت و شتاب می‌باشند. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب را می توان به‌صورت زیر نوشت[۱۹]:

$$\begin{aligned}&\{\ddot{X}\}^n=\frac{\{\dot{X}\}^{n+1/2}-\{\dot{X}\}^{n-1/2}}{\Delta t}\\&\{\dot{X}\}^{n-1/2}=\frac{\{X\}^n-\{X\}^{n-1}}{\Delta t}\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که Δt در این معادله گام زمانی ساختگی می‌باشد. طبق رابطه میانگین، سرعت را می‌توان به شکل زیر بیان کرد[۱۹]:

$$\{\dot{X}\}^n=\frac{\{\dot{X}\}^{n-1/2}+\{\dot{X}\}^{n+1/2}}{2} \qquad (۲۷)$$

با جایگذاری روابط سرعت و شتاب در رابطه (۲۵)، سرعت در گام (n+1/2) و جابه‌جایی در گام (n+1) به شکل زیر بیان می‌شوند[۱۹]:

$$\{\dot{X}\}^{n+1/2}=\frac{\left(\frac{[M]}{\Delta t}-\frac{[C]}{2}\right)}{\left(\frac{[M]}{\Delta t}+\frac{[C]}{2}\right)}\{\dot{X}\}^{n-1/2}+\frac{\left(\{P\}-[K]\{X\}\right)}{\left(\frac{[M]}{\Delta t}+\frac{[C]}{2}\right)} \qquad (۲۸)$$

$$\{X\}^{n+1}=\{X\}^n+\Delta t\{\dot{X}\}^{n+1/2} \qquad (۲۹)$$

برای ماتریس جرمی، ضریب میرایی، گام زمانی و بردار جابه‌جایی اولیه باید مقادیر مناسبی اختیار شود تا پایداری و همگرایی پروسه حاصل گردد. با توجه به تئوری گرشگورین ماتریس جرمی را می‌توان با رابطه زیر به‌دست آورد[۱۹]:

$$m_{ii}\geq\frac{1}{4}\Delta t^2\sum_{j=1}^{n}|K_{ij}| \qquad (۳۰)$$

برای محاسبه ماتریس سفتی $[K]$ نیز باید از رابطه زیر استفاده کرد:

$$K=\frac{\partial P}{\partial X} \qquad (۳۱)$$

که به‌منظور آشنایی بهتر از نحوه محاسبه ماتریس سفتی از رابطه بالا، در پیوست به‌طور کامل به توضیح نحوه استخراج ماتریس سفتی$[K]$ پرداخته شده است. ضریب میرایی نیز طبق ایده ارائه شده توسط ژانگ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید[۱۹]:

$$c_n=2\left\{\frac{\{X_n\}^{\mathrm{T}}\{P(X_n)\}}{\{X_n\}^{\mathrm{T}}[M_n]\{X_n\}}\right\}^{1/2} \qquad (۳۲)$$

همچنین ماتریس دمپینگ با رابطه زیر به ماتریس جرمی وابسته می‌باشد [۱۹]:

$$C=c[M] \qquad (۳۳)$$

با جایگذاری (۳۰) در (۲۸) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\left(2-\Delta tc\right)}{\left(2+\Delta tc\right)}\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}}\frac{2\Delta t}{\left(2+\Delta tc\right)}[M]^{-1}\{R\}^n \qquad (۳۴)$$

$$\{X\}^{n+1}=\{X\}^n+\Delta t\{\dot{X}\}^{n+1/2} \qquad (۳۵)$$

در اینجا $\{R\}^n$بردار نیروهای باقیمانده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{R\}^n=\{P\}^n-[K]\{X\} \qquad (۳۶)$$

۴- تبدیل به فرمت مقدار اولیه

معادلات حاکم از نوع مسائل با مقدار مرزی مشخص می‌باشند و باید آن‌ها را به فرمت مسائلی با مقدار اولیه معین در آورد. برای رسیدن به این هدف باید ترم‌های اینرسی و دمپینگ را به‌صورت زیر به‌سمت راست معادلات تعادل اضافه کنیم:

اگر در سمت راست روابط (۳۷) به جای مشتقات اول و دوم زمانی روابط (۲۶) و (۲۷) جایگذاری گردد و عبارت حاصله را برای به‌دست آوردن سرعت

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.4.4.9]

که در آن $X=u,w,\varphi_r$ می‌باشد ساده کنیم روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{u}_i^{n+1/2}=\frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n}(m_{ii}^n)^{-1}\left(\frac{dN_r}{dr}+\frac{N_r-N_\theta}{r}\right)_i^n+\frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n}\dot{u}_i^{n-1/2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{dN_r}{dr}+\frac{N_r-N_\theta}{r}=m_u\frac{d^2u}{dt^2}+c_u\frac{du}{dt}\\&\frac{dQ_r}{dr}+\frac{Q_r}{r}+N_r\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{N_\theta}{r}\frac{dw}{dr}+q=m_w\frac{d^2w}{dt^2}+c_w\frac{dw}{dt}\\&\frac{dM_r}{dr}+\frac{M_r-M_\theta}{r}-Q_r=m_{\varphi_r}\frac{d^2\varphi_r}{dt^2}+c_{\varphi_r}\frac{d\varphi_r}{dt}\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

$$\dot{w}_i^{n+1/2}=\frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n}(m_{ii}^n)^{-1}\left(\frac{dQ_r}{dr}+\frac{Q_r}{r}+N_r\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{N_\theta}{r}\frac{dw}{dr}+q\right)_i^n+\frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n}\dot{w}_i^{n-1/2}$$

$$\dot{\varphi}_{r\,i}^{n+1/2}=\frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n}(m_{ii}^n)^{-1}\left(\frac{dM_r}{dr}+\frac{M_r-M_\theta}{r}-Q_r\right)_i^n+\frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n}\dot{\varphi}_{r\,i}^{n-1/2} \qquad (۳۸)$$

پس از حل روابط بالا مقادیر سرعت‌ها به‌دست می‌آیند. حال با استفاده از رابطه زیر مقادیر جابه‌جایی و دوران در انتهای هر بازه زمانی محاسبه می‌شود:

$$X^{n+1}=X^n+\Delta t^{n+1}\dot{X}^{n+1/2} \qquad (۳۹)$$

در روابط بالا $X=u,w,\varphi_r$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از روابط (۳۸) و (۳۹) و روابط (۹) تا (۲۰) معادلات کامل مورد نظر برای الگوریتم رهایی پویا تشکیل می‌شوند. به‌منظور اعمال روش رهایی پویا برای حل دستگاه معادلات آورده شده باید تمامی روابط توسط روش تفاضل محدود گسسته گردند به‌طوری که برای محاسبه مشتقات بر روی مرزهای خارجی و داخلی به‌ترتیب از روش‌های تفاضل محدود پیشرو و پسرو استفاده شده است و برای تعیین مقادیر مشتق در بقیه نقاط داخل صفحه از تفاضل محدود مرکزی استفاده شده است. شایان ذکر است که با توجه به شرایط متقارن محوری در مساله، پس از تعیین ضرایب ماتریس سفتی که وابسته به خواص مواد در راستای ضخامت صفحه می‌باشند، معادلات تعادل تنها در راستای یک خط شعاعی گسسته-سازی شده‌اند. همچنین همان‌طور که از روابط پیداست، اعمال معادلات بر روی گره مرکزی امکان‌پذیر نمی‌باشد، لذا به‌منظور برطرف کردن مشکل نقطه تکین در مرکز صفحه از رابطه زیر که توسط کوبایاشی و تروی[۲۵] پیشنهاد شده است، استفاده گردیده است:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_0}{r}=\frac{du_0}{dr} \qquad (۴۰)$$

الگوریتم مورد نظر برای حل به‌ترتیب زیر می‌باشد[۲۶]:

۱. مقدار اولیه تمام متغیرها را صفر داده و بار q اعمال می‌شود.
۲. مقادیر M و C به‌دست می‌آیند.
۳. سرعت‌ها از روابط (۳۸) محاسبه می‌شوند.
۴. جابه‌جایی‌ها و دوران از رابطه (۳۹) تعیین می‌گردند.
۵. شرایط مرزی جابه‌جایی اعمال می‌شوند.
۶. کرنش‌ها و انحناهای صفحه به‌دست می‌آیند.
۷. منتجه‌های تنش و گشتاور صفحه محاسبه می‌شوند.
۸. همگرایی محاسبات بررسی می‌گردد. برای مثال سرعت‌ها کمتر از 10^{-7} حاصل شده باشند.
۹. اگر معیار همگرایی برقرار شود نتایج را چاپ کن در غیر این صورت به مرحله ۲ برگرد و محاسبات را دو باره انجام بده.

۵-نتایج و بحث

برای مطالعه رفتار غیرخطی خمش الاستیک صفحات ساندویچی مدرج تابعی از مثال‌هایی استفاده شده است. پارامترهای بدون بعد استفاده شده در مقاله مطابق روابط زیر هستند:

$$\begin{aligned}&\bar{q}=q\,r_o^{4}/E_M H^4\\&\overline{M}_r=M_r r_o^{2}/E_M H^4\\&\overline{N}_r=N_r r_o^{2}/E_M H^3\\&\bar{\sigma}_r=\sigma_r H^2/q\,r_o^2\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

صفحه ساندویچی دایره‌ای شکل با پوسته مواد مدرج تابعی و هسته همگن آلومنیومی تحت بار گسترده قرار گرفته است و مشخصات زیر را داراست.

$E_{\mathrm{CORE}}=E_{\mathrm{ALUMINUM}}=$ ۷۰ GPa, $\nu=$ ۰/۳

$E_{\mathrm{CERAMIC}}=$ ۳۸۰ GPa, $\nu=$ ۰/۳

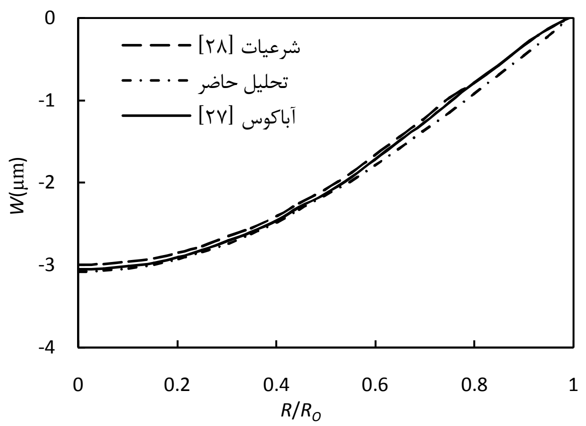
$E_{\mathrm{METAL}}=$ ۲۱۰ GPa, $\nu=$ ۰/۳

$h_{\mathrm{top}}=h_{\mathrm{bottom}}=$ ۰/۰۳۷۵ m, $h_{\mathrm{CORE}}=$ ۰/۰۷۵ m

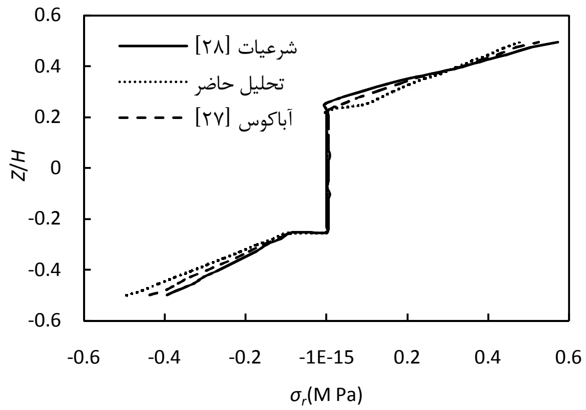
$\bar{q}=$ ۵۰۰ , $RADIUS=$ ۱ m

شکل ۲ تغییرات جابه‌جایی در راستای شعاع را برای بار مکانیکی ۱۰۰ کیلو پاسکال نشان می‌دهد. نتایج عددی به‌دست آمده توسط روش رهایی پویا با نتایج المان محدود حاصله از نرم‌افزار آباکوس[۲۷] و نتایج شرعیات[۲۸] مقایسه شده است. گفتنی است که شرعیات[۲۸] برای حل از ترکیب روش مرتبه چهارم رانگ کوتا و تغییر شکل تیلور استفاده کرده است. شکل۳ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای بار مکانیکی ۱۰۰ کیلو پاسکال نشان می دهد. نتایج عددی به دست آمده توسط روش رهایی پویا با نتایج المان محدود حاصله از نرم‌افزار آباکوس[۲۷] و نتایج شرعیات[۲۸] مقایسه شده است و نتایج به‌دست آمده از مقایسه، حاکی از دقت و صحت بالای تحلیل عددی صورت گرفته می‌باشد. صفحات ساندویچی براساس نسبت ضخامت هسته به پوسته تقسیم‌بندی شده‌اند. صفحه ساندویچی (۱-۱-۱) که از سه‌لایه مساوی تشکیل شده و متقارن می‌باشد. صفحه ساندویچی (۱-۲-۱) که در آن ضخامت هسته برابر مجموع ضخامت پوسته‌هاست و متقارن می‌باشد و ضخامت پوسته‌ها با هم برابر است. صفحه ساندویچی (۲-۱-۲) که در آن ضخامت هسته، نصف ضخامت پوسته می-باشد و ضخامت پوسته‌ها با هم برابر است و متقارن می‌باشد. صفحه ساندویچی (۱-۰-۱) که از دو پوسته مساوی تشکیل شده است و در آن هسته‌ای وجود ندارد و متقارن است شکل ۴ تغییرات درصد حجمی در راستای ضخامت صفحه را برای مقادیر مختلف شاخص مدرج تابعی و انواع مختلف صفحات ساندویچی نشان می‌دهد. در شکل ۴ هسته کاملا سرامیک درنظر گرفته شده است و سطوح خارجی پوسته‌ها کاملا فلز می‌باشد به-طوری که با آمدن به سمت هسته، درصد سرامیک آن‌ها افزایش می‌یابد. شکل ۵ به‌منظور صحت سنجی بیشتر به مقایسه نتایج تحلیل حاضر و نتایج المان محدود حاصل از نرم‌افزار آباکوس[۲۷] برای تغییر شکل‌های بزرگ در شاخص مدرج تابعی ۱ و دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار با ۶۰۰ = $\bar{q}$ می‌پردازد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در تغییر شکل‌های بزرگ نیز، نتایج تحلیل عددی صورت گرفته اختلاف چندانی با نتایج روش المان محدود ندارد. شکل ۶ تغییرات خیز به‌ازای مقادیر مختلف بار را برای نسبت ضخامت متفاوت در صفحه ساندویچی هدفمند گرد توپر با تکیه‌گاه گیردار برای مرکز دایره نشان می‌دهد. همچنین در این شکل دو تحلیل خطی و غیرخطی با هم مقایسه شده‌اند و شاخص مدرج تابعی، $k=$ ۰/۱ اختیار شده است. از این شکل پیداست که با افزایش بار، اختلاف دو تحلیل خطی و غیرخطی افزایش می-یابد و میزان اختلاف دو تحلیل خطی و غیرخطی در صفحه (۱-۰-۱) از صفحه(۱-۲-۱) بیشتر است.

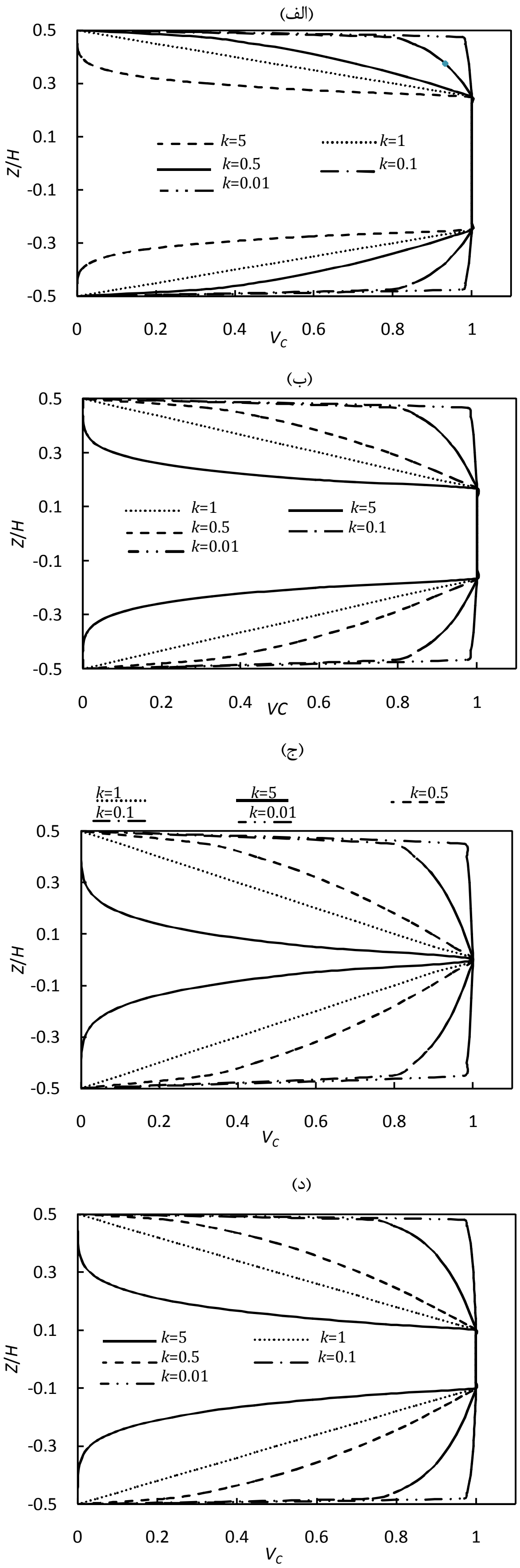


شکل۲ مقایسه مقادیر خیز به‌دست آمده از حل حاضر با مرجع [۲۸] و نرم‌افزار آباکوس[۲۷]



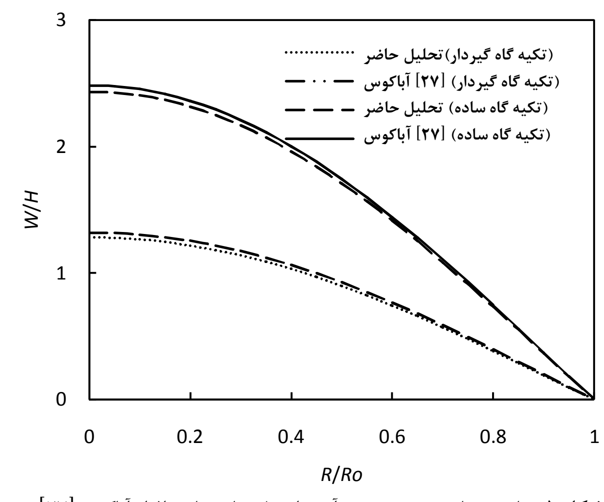
شکل۳ مقایسه توزیع تنش شعاعی در راستای ضخامت از حل حاضر با مرجع [۲۸] و نرم‌افزار آباکوس[۲۷]

شکل ۷ تغییرات خیز به‌ازای مقادیر مختلف بار را برای شرایط مرزی متفاوت در صفحه ساندویچی مدرج تابعی گرد توپر برای مرکز دایره نشان می‌دهد. در این شکل دو تحلیل خطی و غیرخطی با هم مقایسه شده‌اند و شاخص مدرج تابعی، k=۰/ ۱ اختیار شده است. همانطور که پیداست با افزایش بار، اختلاف دو تحلیل خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد و میزان اختلاف دو تحلیل خطی و غیرخطی در تکیه‌گاه ساده از تکیه‌گاه گیردار بیشتر است. با مقایسه شکل ۶ با شکل ۷ مشخص می‌شود که شرایط مرزی تاثیر بیشتری بر اختلاف دو تحلیل خطی و غیر خطی نسبت به چیدمان لایه‌ها دارد. شکل ۸ تغییرات خیز در راستای شعاع یک صفحه گرد ساندویچی بر روی لبه‌های گیردار را برای شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت نمایش می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش شاخص مدرج تابعی پوسته‌ها جابه‌جایی در جهت ضخامت افزایش می‌یابد. شکل ۹ تغییرات خیز در راستای شعاع را برای صفحات ساندویچی با پوسته‌های مدرج تابعی متفاوت نمایش می‌دهد. در این شکل شاخص مدرج تابعی، $k = 1$ درنظر گرفته شده است. با مشاهده شکل ۹ این نکته نمایان است که صفحه (۱-۲-۱) کمترین خیز را داراست و صفحه (۱-۰-۱) بیشترین خیز را به خود اختصاص داده است و با کاهش نسبت ضخامت هسته به پوسته، خیز افزایش می‌یابد. همچنین خیز صفحه (۱-۰-۱) به میزان ٪۱۲ از صفحه (۲-۱-۲) و به میزان ٪۲۶ از صفحه (۱-۱-۱) و به میزان ٪۴۶ از صفحه (۱-۲-۱) بیشتر است. شکل ۱۰ نیز خیز در راستای شعاع را برای شرایط مرزی متفاوت و شاخص مدرج تابعی مختلف نشان می‌دهد.

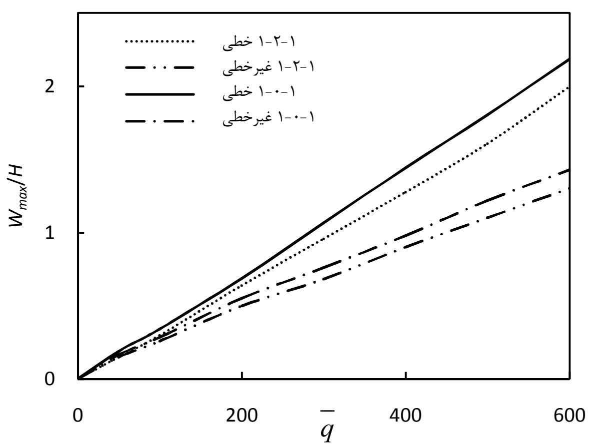


شکل ۴ تغییرات درصد حجمی در راستای ضخامت هسته برای صفحات الف (۱-۲-۱) ، ب (۱-۱-۱)، ج (۱-۰-۱) ،د (۲-۱-۲)

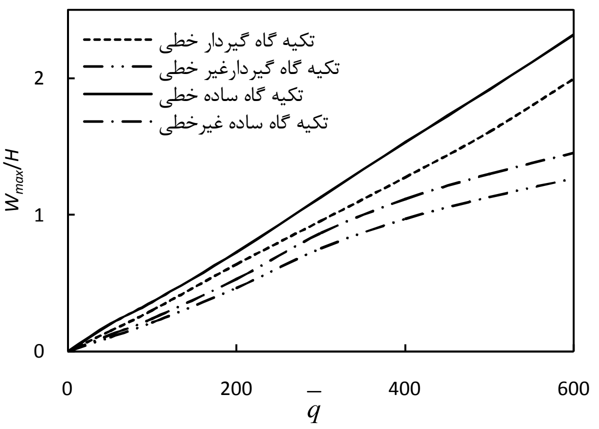
از این شکل می‌توان نتیجه گرفت که در صفحه ساندویچی هدفمند با $k = 1$، جابه‌جایی در مرکز دایره در تکیه‌گاه ساده به میزان ۵۶٪ از جابه‌جایی در تکیه‌گاه گیردار بیشتر است. همچنین در حالت تکیه‌گاه ساده، اختلاف خیز بین شاخص‌های هدفمندی ۰/۵ و ۱ به میزان ۱۷٪ و در تکیه‌گاه گیردار، به میزان ۱۰٪ می‌باشد شکل ۱۱ چرخش در راستای شعاع را برای شاخص مدرج تابعی متفاوت نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص مدرج تابعی ، چرخش در راستای شعاع افزایش می‌یابد و ماکزیمم چرخش، در $\bar{r} = ۰/۶$ رخ می‌دهد. در $\bar{r} = ۰/۶$، چرخش حول محور شعاع در شاخص مدرج تابعی ۱، به میزان ۷/۷٪ از چرخش در شاخص مدرج تابعی ۰/۵ بیشتر و به میزان ۹/۳٪ از چرخش در شاخص مدرج تابعی ۲ کمتر است. شکل ۱۲ تغییرات لنگر در راستای شعاع را در صفحه ساندویچی دایره‌ای مدرج تابعی با شاخص مدرج تابعی $k = 1$ برای تکیه‌گاه گیردار و ساده نشان می‌دهد. در این شکل لنگر در جهت شعاعی و مماسی با هم مقایسه شده‌اند. همان‌طور که پیداست با افزایش شعاع، دو لنگر به تدریج از هم فاصله می‌گیرند و در $\bar{r} = 1$ به بیشترین اختلاف می‌رسند. در تکیه‌گاه گیردار، لنگر شعاعی در $\bar{r} = ۰/۶۲۸$ و لنگر مماسی در $\bar{r} = ۰/۸۲۷$ برابر صفر می‌شوند و تنش‌های متناظر آن‌ها نیز در این نقاط برابر صفر هستند. رفتار تنش‌های شعاعی و مماسی همانند رفتار لنگرهای شعاعی و مماسی می‌باشد. در تکیه‌گاه گیردار ماکزیمم لنگر، در جهت شعاعی و در $\bar{r} = 1$ رخ می‌دهد. شکل ۱۳ تغییرات منتجه تنش را در صفحه ساندویچی دایره‌ای مدرج تابعی با $k = 1$ برای تکیه‌گاه ساده بررسی می‌کند. در این شکل منتجه در جهت شعاعی و مماسی با هم مقایسه شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش شعاع، دو منتجه به تدریج از هم فاصله می‌گیرند تا در $\bar{r} = 1$ به بیشترین اختلاف می‌رسند. شکل ۱۴ نیز تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای صفحه ساندویچی مدرج تابعی (۱-۲-۱) در شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت نمایش می‌دهد. از این شکل نتیجه می‌شود که در صفحه ساندویچی دایره‌ای مدرج تابعی با افزایش شاخص مدرج تابعی و ثابت ماندن بقیه پارامترها تنش شعاعی افزایش می‌یابد. شکل ۱۵ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای صفحه ساندویچی مدرج تابعی (۱-۱-۱) در شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت نمایش می‌دهد. از این شکل نتیجه می‌شود که در صفحه ساندویچی دایره‌ای مدرج تابعی با افزایش شاخص مدرج تابعی و ثابت ماندن بقیه پارامترها تنش شعاعی افزایش می‌یابد. با افزایش شاخص مدرج تابعی، میزان افزایش تنش در صفحه (۱-۱-۱) بیشتر از افزایش تنش در صفحه (۱-۲-۱) است.



شکل ۵ مقایسه مقادیر خیز به‌دست آمده از حل حاضر با نرم‌افزار آباکوس[۲۷] در تغییر شکل‌های بزرگ



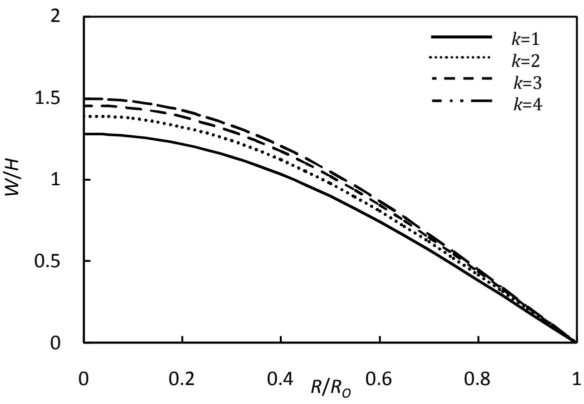
شکل ۶ خیز برحسب مقادیر مختلف بار برای نسبت ضخامت متفاوت



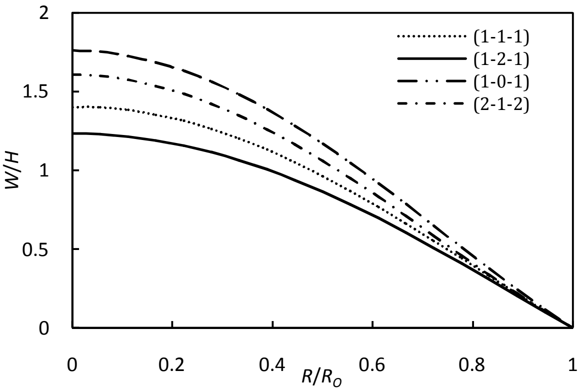
شکل ۷ خیز برحسب مقادیر مختلف بار برای شرایط مرزی متفاوت

شکل ۱۶ نیز تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای $k = 1$ در صفحه‌های ساندویچی مدرج تابعی (۱-۱-۱)، (۱-۲-۱) و (۲-۱-۲) نشان می‌دهد. با بررسی شکل مشخص می‌شود که در هر صفحه، تنش شعاعی در هسته برا بر صفر می‌باشد و همچنین این نکته نیز نمایان است که ماکزیمم مقادیر تنش در صفحه (۱-۲-۱) و مینیمم مقادیر تنش در صفحه (۲-۱-۲) رخ می‌دهد و با افزایش نسبت ضخامت هسته به پوسته، به میزان مقادیر تنش افزوده می‌شود. شکل ۱۷ تغییرات جابه‌جایی در راستای ضخامت را برای شاخص‌های تابعی متفاوت دایره‌ای در تکیه‌گاه ساده شکل نشان می‌دهد. همان‌طور که پیداست گستره تغییرات مقادیر جابه‌جایی در پوسته به مراتب از هسته بیشتر است. شکل ۱۸ جابه‌جایی مرکز دایره را به‌ازای مقادیر مختلف تعداد گره‌های به‌کار رفته در راستای شعاعی برای آنالیز حساسیت مش در تفاضل محدود با تکیه‌گاه‌های متفاوت نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که برای تعداد ۲۰ گره به بعد جابه‌جایی مرکز دایره به سمت یک مجانب همگرا می‌شود. بنابراین برای استخراج نتایج از ۲۰ عدد گره در راستای شعاع استفاده گردیده است.

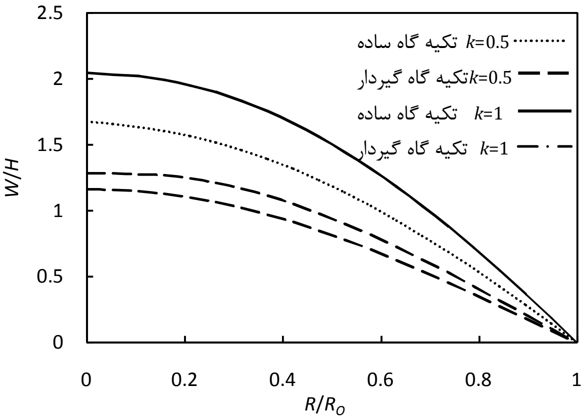
در ادامه به تحلیل رفتار خمش صفحه ساندویچی مدرج تابعی حلقوی پرداخته می‌شود. شکل ۱۹ تغییرات خیز را در راستای شعاع در صفحه حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار برای شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت نمایش می‌دهد. مشابه نتایج به‌دست آمده برای صفحات توپر، از این شکل پیداست که در صفحه ساندویچی حلقوی مدرج تابعی نیز، با افزایش شاخص مدرج تابعی پوسته‌ها و ثابت ماندن بقیه پارامترها جابه‌جایی در جهت ضخامت افزایش می‌یابد.



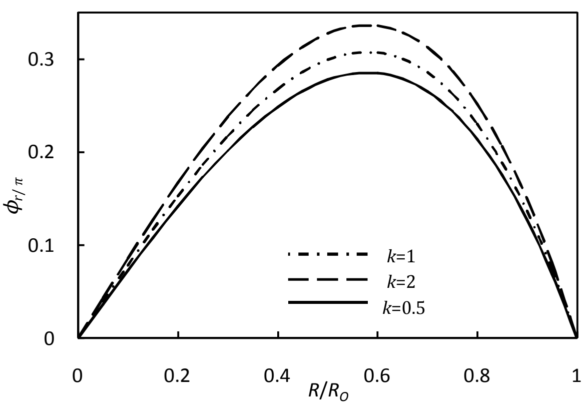
شکل ۸ تغییرات خیز با شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت



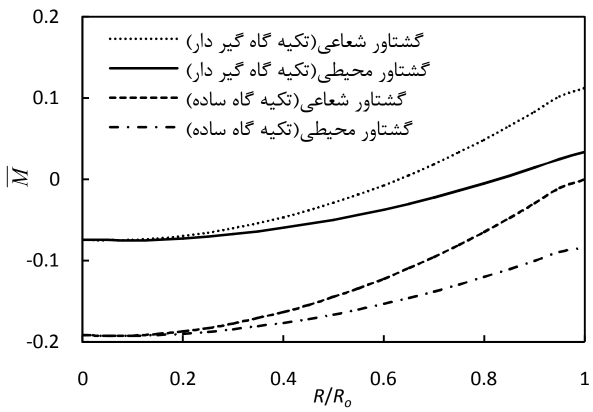
شکل ۹ تغییرات خیز در راستای شعاع برای انواع صفحات ساندویچی



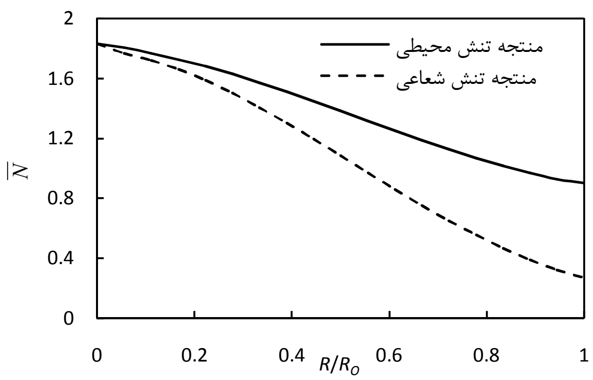
شکل ۱۰ تغییرات خیز در راستای شعاع در شرایط مرزی مختلف



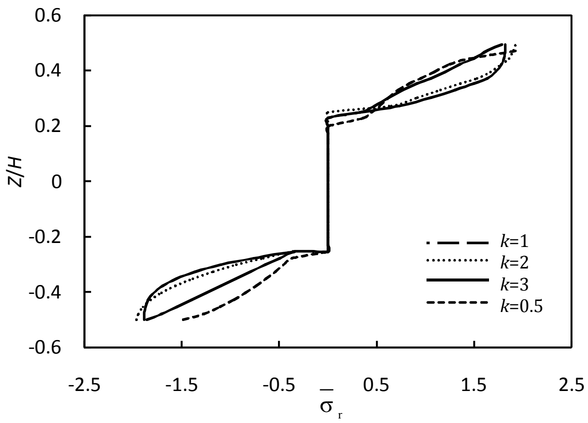
شکل ۱۱ چرخش شعاعی برای شاخص‌های مدرج تابعی متفاوت



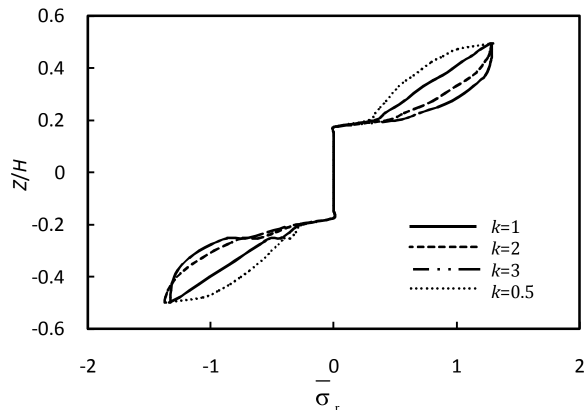
شکل ۱۲ توزیع لنگر در راستای شعاع برای تکیه‌گاه گیردار و ساده



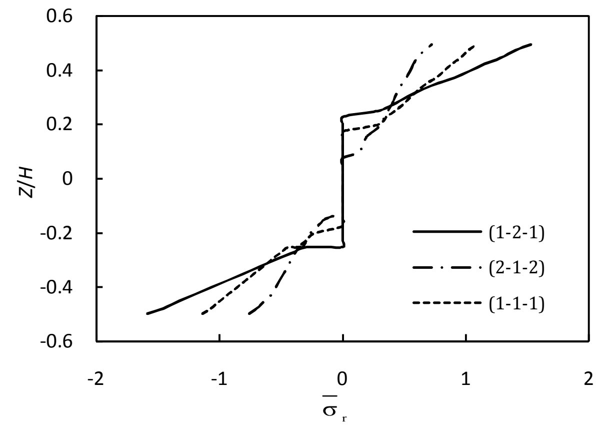
شکل ۱۳ تغییرات منتجه تنش در راستای شعاع برای تکیه‌گاه ساده



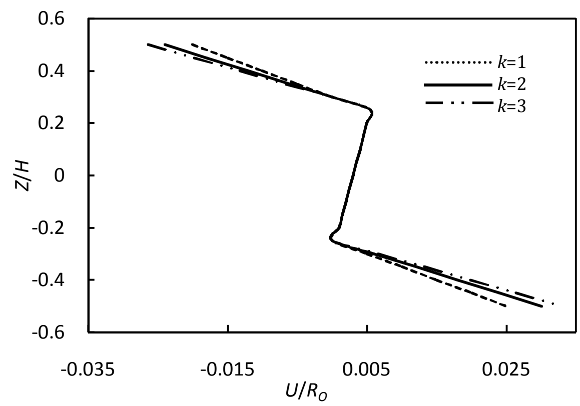
شکل ۱۴ توزیع تنش در راستای ضخامت برای صفحه (۱-۲-۱)



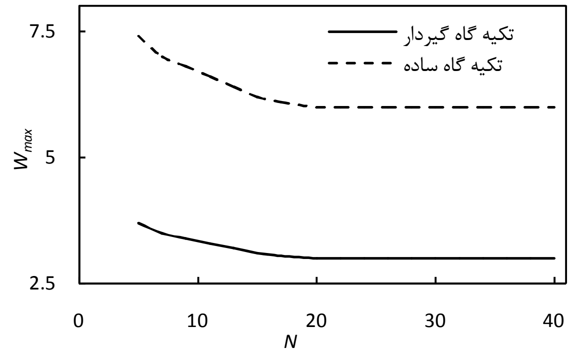
شکل ۱۵ توزیع تنش در راستای ضخامت برای صفحه (۱-۱-۱)



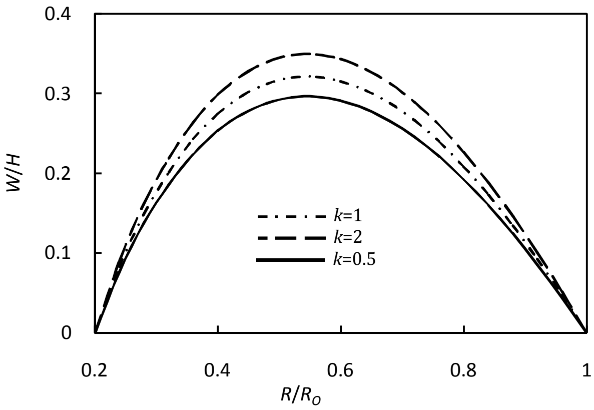
شکل ۱۶ توزیع تنش در راستای ضخامت برای انواع چیدمان صفحه



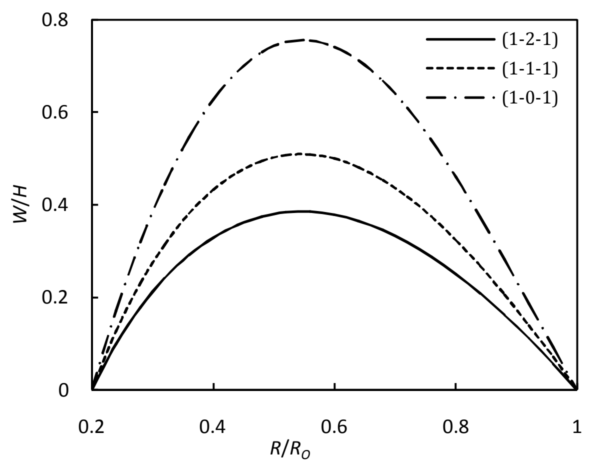
شکل ۱۷ تغییرات جابه‌جایی در راستای ضخامت برای شاخص‌های تابعی متفاوت



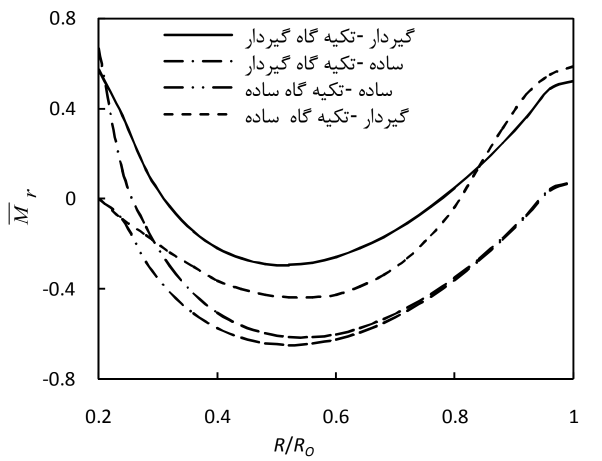
شکل ۱۸ جابه‌جایی مرکز صفحه به‌ازای مقادیر مختلف تعداد گره‌های به‌کار رفته برای آنالیز حساسیت مش



شکل ۱۹ تغییرات خیز در صفحه ساندویچی حلقوی گیردار-گیردار



شکل ۲۰ تغییرات خیز برای صفحه حلقوی گیردار-گیردار با نسبت ضخامت پوسته به هسته متفاوت



شکل ۲۱ لنگر شعاعی در صفحه حلقوی برای تکیه‌گاه مختلف

شکل ۲۰ نیز تغییرات خیز را در راستای شعاع صفحات ساندویچی حلقوی با نسبت ضخامت متفاوت پوسته به هسته برای شرایط مرزی گیردار-گیردار در شاخص مدرج تابعی ۳ نمایش می‌دهد. با مشاهده شکل ۲۰ این نکته نمایان است که صفحه (۱-۲-۱) کمترین خیز را داراست و صفحه (۱-۰-۱) بیشترین خیز را به خود اختصاص داده است. همچنین خیز صفحه (۱-۰-۱) به میزان ٪۶۴ از صفحه (۱-۱-۱) و به میزان ٪۱۱۷ از صفحه (۱-۲-۱) بیشتر است. با مقایسه شکل ۲۰ با شکل ۹ مشخص می‌شود که تغییرات نسبت ضخامت هسته به پوسته در صفحه حلقوی، تاثیر بیشتری بر مقادیر جابه‌جایی نسبت به صفحه دایره‌ای دارد. شکل ۲۱ تغییرات لنگر شعاعی در راستای شعاع را در صفحه ساندویچی حلقوی مدرج تابعی برای تکیه‌گاه گیردار-گیردار، گیردار-ساده، ساده-ساده و ساده-گیردار بررسی می‌کند. در این شکل شاخص مدرج تابعی، $k = 1$ اختیار شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، بیشترین لنگر شعاعی، در$\overline{r} = ۰/۲$ مربوط به تکیه‌گاه گیردار-ساده و در $\overline{r} = 1$ بیشترین لنگر مربوط به تکیه‌گاه ساده-گیردار می‌باشد. همچنین ماکزیمم مقدار لنگر شعاعی در تکیه‌گاه گیردار-گیردار و گیردار-ساده در$\overline{r} = ۰/۲$ رخ می‌دهد.

۶- روش مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس

با توجه به این که تعریف مواد مدرج تابعی در نرم‌افزار آباکوس وجود ندارد، در این بخش به توضیحاتی پیرامون مدل‌سازی این مواد و

همچنین مدل تحقیق حاضر پرداخته می‌شود. همان‌طور که در متن بیان شد، ضخامت هسته دو برابر ضخامت پوسته‌ها درنظر گرفته شده بود و ضخامت پوسته‌ها نیز با هم برابر بودند. در تحقیق حاضر برای مدل کردن لایه‌های تابعی در نرم‌افزار آباکوس بدین ترتیب عمل شده است که ابتدا لایه تابعی را به ده لایه ایزوتروپیک مساوی تقسیم می‌گردد. با تقسیم-بندی لایه تابعی به ده لایه ایزوتروپیک با مدول یانگ مختلف (که در راستای ضخامت تغییر می‌کند و مقادیرش از برنامه فرترن به‌دست آمده است) و با قراردادن این ده لایه کنار هم لایه تابعی مدل می‌شود. این فرآیند برای هر دو پوسته به‌طور مجزا انجام شده است و تغییر خواص آن‌ها در راستای ضخامت دقیقا همان مقادیر در لایه تابعی می‌باشد. همچنین هسته نیز مانند یک لایه ایزوتروپیک با مدول یانگ مربوط به خودش با ضخامتی دو برابر ضخامت لایه تابعی در وسط قرار گرفته است و لایه تابعی پایین نیز مانند لایه تابعی بالا در دو طرف هسته قرار داده شده‌اند و بدین ترتیب صفحه ساندویچی با هسته ایزوتروپ و پوسته‌های تابعی در نرم‌افزار آباکوس مدل شد. شایان ذکر است که در مدل‌سازی از المان دو بعدی چهارگوش استفاده گردیده است و تحلیل به صورت متقارن محوری دوبعدی صورت پذیرفته است و تعداد ۸۰۰ المان به‌کار گرفته شده است.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل غیرخطی خمش صفحات ساندویچی دایره‌ای و حلقوی با پوسته‌های مدرج تابعی و هسته همگن تحت بار مکانیکی عرضی بررسی شده است. روابط حاکم براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط کرنش ون کارمن برای تغییر شکل‌های بزرگ استخراج شده است. دستگاه معادلات تعادل غیرخطی به‌دست آمده توسط ترکیب روش‌های عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل می‌گردد. در نهایت به‌بررسی اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی و ثابت مدرج تابعی بر روی خمش غیرخطی پرداخته شده است. برخی از نتایج مهم به‌دست آمده عبارت‌اند از:

۱) ماکزیمم تنش در صفحه (۱-۲-۱) و مینیمم تنش در صفحه (۲-۱-۲) رخ می‌دهد.

۲) با کاهش نسبت ضخامت هسته به پوسته، خیز افزایش و تنش شعاعی کاهش می‌یابد.

۳) تغییرات نسبت ضخامت هسته به پوسته در صفحه حلقوی، تاثیر بیشتری بر روی نتایج نسبت به صفحه دایره‌ای دارد.

۸- پیوست

همان‌طور که در بخش روش رهایی پویا توضیح داده شد، ماتریس سفتی از مشتق نیروهای داخلی نسبت به جابه‌جایی به‌دست می‌آید. نیروهای داخلی از سمت چپ معادله (۳۷) به‌دست می‌آیند که در رابطه (۴۲) نشان داده شده‌اند:

$$p^u = \frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r}$$
$$p^w = \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{N_\theta}{r}\frac{d\,w}{dr} + q$$
$$p^{\varphi_r} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r \qquad (۴۲)$$

با استفاده از روابط قبل ماتریس سفتی به شکل زیر تعریف می‌شود که البته با توجه به این که ضرایب ماتریس B به‌علت تقارن خواص ماده در راستای ضخامت در مساله صفر هستند از معادلات حذف شده‌اند:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial p^u}{\partial u_\circ} & \frac{\partial p^u}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^u}{\partial w_\circ} \\ \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial u_\circ} & \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial w_\circ} \\ \frac{\partial p^w}{\partial u_\circ} & \frac{\partial p^w}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^w}{\partial w_\circ} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \frac{\partial p^u}{\partial u_\circ} = A_{11}\left(\frac{d^3 u_\circ}{du_\circ dr^2} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^2}{du_\circ dr}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\left(\frac{d^2}{du_\circ dr}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)\right) + \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{d^2 u_\circ}{du_\circ dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d}{du_\circ}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)(A_{11} - A_{12}) + \frac{d}{du_\circ}\frac{u_\circ}{r}(A_{12} - A_{22})\right\}$$

$$K_{12} = \frac{\partial p^u}{\partial \varphi_r} = 0$$

$$K_{13} = \frac{\partial p^u}{\partial w_\circ} = A_{11}\left(\frac{d^3 u_\circ}{dw_\circ dr^2} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^2}{dw_\circ dr}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\left(\frac{d^2}{dw_\circ dr}\left(\frac{u_\circ}{r}\right)\right) + \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{d^2 u_\circ}{dw_\circ dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dw_\circ}\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right)(A_{11} - A_{12})\right\}$$

$$K_{21} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial u_\circ} = 0$$

$$K_{22} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial \varphi_r} = D_{11}\frac{d^3\varphi_r}{d\varphi_r dr^2} + D_{12}\left(\frac{-1}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{d^2\varphi_r}{d\varphi_r dr}(D_{11} - D_{12}) + \frac{1}{r(D_{12} - D_{22})}\right) - F_{66}\left(1 + \frac{d^2 w_\circ}{d\varphi_r dr}\right)$$

$$K_{23} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial w_\circ} = D_{11}\frac{d^3\varphi_r}{dw_\circ dr^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{d^2\varphi_r}{dw_\circ dr}(D_{11} - D_{12})\right) - F_{66}\left(\frac{d^2 w_\circ}{dw_\circ dr}\right)$$

$$K_{31} = \frac{\partial p^w}{\partial u_\circ} = F_{66}\left(\frac{d^2\varphi_r}{du_\circ dr} + \frac{d^3 w_\circ}{du_\circ dr^2}\right) + F_{66}\left(\frac{d^2 w_\circ}{rdrdu_\circ}\right) + \frac{d^3 w_\circ}{du_\circ dr^2}\left(A_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\frac{u_\circ}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{d^2 w_\circ}{du_\circ dr}\left(A_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{22}\frac{u_\circ}{r}\right)$$

$$K_{32} = \frac{\partial p^w}{\partial \varphi_r} = F_{66}\left(\frac{d^2\varphi_r}{d\varphi_r dr} + \frac{d^3 w_\circ}{d\varphi_r dr^2}\right) + F_{66}\left(\frac{d^2 w_\circ}{rdrd\varphi_r}\right) + \frac{d^3 w_\circ}{d\varphi_r dr^2}\left(A_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\frac{u_\circ}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{d^2 w_\circ}{d\varphi_r dr}\left(A_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{22}\frac{u_\circ}{r}\right)$$

$$K_{33} = \frac{\partial p^w}{\partial w_\circ} = F_{66}\left(\frac{d^2\varphi_r}{dw_\circ dr} + \frac{d^3 w_\circ}{dw_\circ dr^2}\right) + F_{66}\left(\frac{d^2 w_\circ}{rdrdw_\circ}\right) + \frac{d^3 w_\circ}{dw_\circ dr^2}\left(A_{11}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\frac{u_\circ}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{d^2 w_\circ}{dw_\circ dr}\left(A_{12}\left(\frac{du_\circ}{dr} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dw_\circ}{dr}\right)^2\right) + A_{22}\frac{u_\circ}{r}\right) \qquad (۴۳)$$

۹- منابع

[1] M. Zaid, Symmetrical bending of circular sandwich plates, *National Congress of Applied Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 413-420, 1954.

[2] E. R. Bruun, Thermal deflection of a circular sandwich plate, *AIAA*, Vol. 1, No. 5, pp. 1213–1215, 1963.

[3] A. M. Zenkour, Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, *Journal Mater Science* , Vol. 43, No. 8, pp. 2574–2589, 2008.

[4] H. M. Shodja, H. Haftbaradaran, M. Asghari, A thermo elasticity solution of sandwich structures with functionally graded coating. *Composite Science Technology*, Vol. 67, No. 4, pp. 1073–1080, 2007.

[5] Q. Li, V. P. Iu, K. P. Kou, three- dimensional vibration Analysis of functionally graded material sandwich plates, *Journal Sound vibration*, Vol. 311, No. 1, pp. 498–515, 2008.

[6] H. S. Shen, S. R. Li, Post buckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. *Composites Part B*, Vol. 39, No. 2, pp. 332–344, 2008.

[7] X. K. Xia, H. S. Shen, Vibration of post-buckled sandwich plates with FGM face sheets in a thermal environment. *Journal Sound vibration*, Vol. 314, No. 1, pp. 254–274, 2008.

[8] M. Shariyat, A generalized high-order global–local Plate theory for nonlinear bending and buckling analyses of imperfect sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 1, pp. 130–143, 2010.

[9] A. Tounsi, A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 11, No. 1, pp. 663–684, 2011.

[10] H. S. Shen, Nonlinear analysis of sandwich Plates with FGM face sheets resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 3, pp. 2521–2532, 2011.

[11] S. K. Jalali, M. H. Naei, A. Poorsolhjouy, Thermal stability analysis of circular functionally graded sandwich plates of variable thickness using pseudo-spectral method, *Materials and Design*, Vol. 31, No. 7, pp. 4755–4763, 2010.

[12] L. M. S. Castro, A. J. M. Ferreira, S. Bertoluzza, R. C. Batra, J. N. Reddy, A wavelet collocation Method for the static analysis of sandwich Plates using a layerwise theory, *Composite Structures*, Vol. 9, No. 2, pp. 1786–1792, 2010.

[13] V. N. Pilipchuk, V. L. Berdichevsky, R. A. Ibrahim, Thermo-mechanical coupling in cylindrical bending of sandwich plates, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 2, pp. 2632–2640, 2010.

[14] S. M. R. Khalili, Y. Mohammadi, Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature–dependent material properties, *Europen Journal Mechanics/A Solids*, Vol. 35, No. 1, pp. 61-74, 2012.

[15] S. Merdaci, A. Tounsi, M. S. A. Houari, I. Mechab, H. Hebali, S. Benyoucef, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, *Archive Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 9, pp. 1507–1522, 2011.

[16] E. I. Starovoytov, E. P. Dorovskaya, S. A. Starovoytov, Cylindrical bending of an elastic rectangular sandwich plate on a deformable foundation, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 1, pp. 57-68, 2010.

[17] H. S. Shen, Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction, *Composites Part B*, Vol. 38, No. 1, pp. 201–215, 2007.

[18] H. S. Shen, *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, Boca Raton:CRC Press, Vol. 1, No. 1, pp. 556-570, 2004.

[19] M. E. Golmakani, M. Kadkhodayan, Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using Higher-order shear deformation plate theories, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 3, pp. 973–982, 2011.

[20] M. Salehi, A. R. Sobhani, Elastic linear and non-linear analysis of fiber reinforced symmetrically laminated sector Mindlin plate, *Composite Structures*, Vol. 65, No. 1, pp. 65-79, 2004.

[21] S. R. Falahatgar, M. Salehi, DR nonlinear viscoelastic analysis of annular sector composite plate, *Journal of Composite Materials*, Vol. 43, No. 1, pp. 257-275, 2009.

[22] S. R. Falahatgar, M. Salehi, M. M. Agdam, Micro-macro analysis of viscoelastic unidirectional laminated composite plates using DR method. *Applied Composite Materials*, Vol. 17, No. 2, pp. 427–440, 2012.

[23] M. Salehi, H. Aghaei, Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates, *Computer Structure*, vol. 83, No. 6, pp. 1878–1890, 2005.

[24] G. J. Turvey, M. Salehi, Elasto-plastic large deflection response of pressure loaded circular plates stiffened by a single diametral stiffener, *Thin-Walled Structure*, Vol. 46, No. 3, pp. 991–1002, 2008.

[25] H. Kobayashi, G. J. Turvey, On the application of a limiting process to thedynamic relaxation analysis of circular membranes, circular plates and spherical shells, *Computer Structure*, Vol. 48, No. 7, pp. 1107–16, 1993.

[26] M. E. Golmakani, M. Kadkhodayan, Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties, *Composites Part B*, Vol. 42, No. 2, pp. 614–662, 2011.

[27] Abaqus, version 6.10.1.

[28] M. Shariyat, M. M. Alipour, Semi-analytical consistent zigzag-elasticity formulations with implicit layer wise shear correction factors for dynamic stress analysis of sandwich circular plates with FGM layer, *Composites Part B*, Vol. 49, No. 1, pp. 43-64, 2013.