



## بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی و اجباری در فین متخلخل با مقطع مستطیلی به روش نیمه تحلیلی DTM

سلیمان نورآذر<sup>1\*</sup>، محمدرضا محمدپور<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران  
icp@aut.ac.ir، 158754413

### چکیده

در این پژوهش انتقال حرارت جابجایی طبیعی و اجباری در فین متخلخل با مقطع مستطیلی با در نظر گرفتن اثر افت فشار سیال عبوری از فین به صورت نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حل معادله‌ی بالانس انرژی از روش تبدیل دیفرانسیلی استفاده شده است. دقت این روش با پژوهش‌های انجام شده‌ی قبلی صحت سنجی شده و تطابق خوبی با نتایج به دست آمده، وجود دارد. در معادلات حاکم برای مدل کردن انتقال حرارت در محیط متخلخل، مدل داری در نظر گرفته شده است. به علاوه ضریب انتقال حرارت جابجایی ثابت فرض شده است. توزیع درجه حرارت بی بعد شده در طول فین به عنوان تابعی از پارامترهای تخلخل و جابجایی در نظر گرفته شده است. همچنین اثر پارامتر افت فشار بر مواردی مانند توزیع دما در طول فین، نرخ انتقال حرارت، بازده حرارتی و ضریب عملکرد فین مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه مقایسه‌ای بین فین صلب و متخلخل در شرایط یکسان جرم فین انجام شده است. در این حالت مشاهده شده است که در شرایط خاص، فین متخلخل انتقال حرارت بیشتری نسبت به فین صلب دارد. براساس نتایج به دست آمده، می‌توان دریافت که تمامی پارامترهای انتقال حرارت از پارامتر افت فشار تأثیر می‌پذیرند. پس با انتخاب مناسب این پارامتر می‌توان انتقال حرارت و بازده مناسبی داشت.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 21 اسفند 1395  
پذیرش: 29 اردیبهشت 1396  
ارائه در سایت: 08 تیر 1396  
کلید واژگان:  
انتقال حرارت  
فین متخلخل  
مدل داری  
روش نیمه تحلیلی  
بازده حرارتی

## Free and forced convective heat transfer analysis of rectangular porous fin with Differential transformation method

Salman Nourazar\*, Mohammadreza Mohammadpour

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir of University of Technology, Tehran, Iran  
\* P.O.B. 158754413, Tehran, Iran, icp@aut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 March 2017  
Accepted 19 May 2017  
Available Online 29 June 2017

**Keywords:**  
Heat transfer  
porous fin  
Darcy model  
analytical method  
Fin efficiency

### ABSTRACT

In this article, the free and forced convective heat transfer in a rectangular porous fin with considering pressure loss across the fin length is investigated analytically. A well-known Differential transformation method is employed to obtain the solution of energy balance equation. Convergence of obtained solution is examined by previous works and they are found to be in a good agreement. In order to simulate heat transfer through porous media, Darcy model is applied. Also, convective heat transfer coefficient is assumed to be constant. Dimensionless temperature distribution is defined as a function of convection and porosity parameters. The effects of pressure loss across the fin length on the temperature distribution, rate of heat transfer, fin efficiency and effectiveness of fin are also studied. A comparative study is also made between the porous and solid fins for an equal mass of fins. It is highlighted that the porous fin always transfers more heat at specific condition compared to the solid fin. Results show that all of the thermal parameters are influenced by pressure loss parameter. So in order to reach high fin efficiency, pressure loss across the fin length should be controlled.

### 1- مقدمه

مانند رآکتور خنک‌کن و مبدل‌های حرارتی و کلکتورهای خورشیدی می‌شود [2]. فین‌ها یا سطوح گسترده در تهویه مطبوع و فرآیندهای تبرید و خنک‌سازی ابزارهای الکترونیکی کاربردهای بسیاری دارند [3]. ایده‌ی استفاده از فین‌های متخلخل برای اولین بار توسط کی‌وان و همکاران با در نظر گرفتن مدل داری مطرح شد [4، 5]. سپس تحقیقات زیادی برای درک بهتر انتقال حرارت سطوح گسترده در محیط متخلخل انجام شده است. سعدالدین و صادقی [6] انتقال حرارت در فین متخلخل استوانه‌ای را با

فرآیند انتقال حرارت جابجایی در محیط متخلخل کاربردهای بسیار مهمی در مقیاس‌های مهندسی و صنایع مربوطه دارد. از این‌رو حل‌های عددی و تجربی زیادی برای فهم بهتر انتقال حرارت در محیط متخلخل استفاده شده است. محیط متخلخل کاربرد عمده در زمینه‌های افزایش بازده فرآیند خشک کردن و همچنین کلکتورهای خورشیدی و مبدل‌های حرارتی دارد [1]. زیر لایه متخلخل با هدایت گرمایی بالا موجب افزایش انتقال حرارت در مکانیزم انتقال حرارت جابجایی اجباری در بسیاری از کاربردهای مهندسی

### Please cite this article using:

S. Nourazar, M. Mohammadpour, Free and forced convective heat transfer analysis of rectangular porous fin with Differential transformation method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 393-400, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

[9] که در آن از افت فشار در راستای عرضی فین صرف نظر شده و از روش HPM<sup>4</sup> برای معادلات به کار رفته، مورد مقایسه قرار گرفته است.

**2- مدل سازی ریاضی و تعریف مسئله**

فین مستطیلی با محیط متخلخل مطابق شکل (1) در نظر می گیریم. فین مستطیلی با سطح مقطع ثابت و با طول  $L$  و ضخامت  $t$  و عرض  $w$  می باشد. با توجه به این که فین محیط متخلخل می باشد هوا می تواند از منافذ موجود در فین عبور کند. می توان فرض هایی برای استخراج معادلات در نظر گرفت. در اینجا محیط متخلخل ایزوتروپیک و هموزن در نظر گرفته شده است و همچنین فین توسط سیال تک فاز اشباع شده است. همچنین در اینجا از مکانیزم تشعشع صرف نظر شده است و خصوصیات ترموفیزیکی سیال مورد نظر و فین متخلخل ثابت فرض شده است.

درجه حرارت صرفاً در طول فین تغییر می کند و از تغییرات درجه حرارت در راستای ضخامت صرف نظر شده است. زمینه صلب فین و سیال در تعادل حرارتی می باشند و از قانون دارسی برای استخراج معادله درحالتی که بین محیط متخلخل و سیال تعادل حرارتی برقرار است، استفاده شده است. با استفاده از رابطه ی بقای انرژی خواهیم داشت:

$$q_x - q_{x+dx} = \dot{m}c_p(T(x) - T_{\infty}) + hA(T(x) - T_{\infty}) \quad (1)$$

سرعت جریان سیال عبوری از مجرای فین متخلخل با در نظر گرفتن پارامتر افت فشار در راستای عرضی در هر نقطه درون فین با استفاده از قانون دارسی [8] برابر خواهد بود با:

$$V = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{t} + \frac{gK\beta(T(x)-T_{\infty})}{\nu} \quad (2)$$

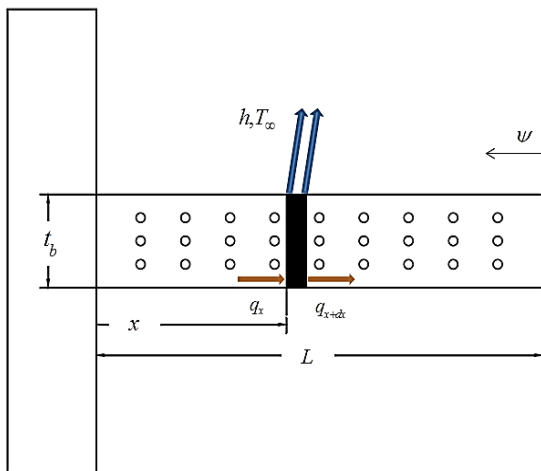
ترم اول موجود در رابطه ی فوق، افت فشار ناشی از تغییر سرعت سیال عبوری از مجرای فین متخلخل می باشد. دبی جرمی سیال عبوری از فین مطابق رابطه زیر است:

$$\dot{m} = \rho V w dx \quad (3)$$

با توجه به سطح مقطع ثابت فین می توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$A = (2w + 2t) dx \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه (4) در رابطه (2) و با فرض این که  $dx$  به سمت صفر میل کند، خواهیم داشت:



**Fig. 1** Schematic of the rectangular porous fin

شکل 1 شماتیک فین مستطیلی محیط متخلخل

استفاده از روش عددی رانگ-کوتا مرتبه 4 بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که انتقال حرارت در فین متخلخل بیشتر از فین صلب است. انتقال حرارت در فین متخلخل با سطح مقطع متغیر توسط کوندو و همکاران<sup>1</sup> [7] بررسی شد. آن ها دریافتند که سطح مقطع سهموی بیشترین انتقال حرارت را در مقایسه با سایر سطح مقطع ها دارد. همچنین بیشترین انتقال حرارت در فین متخلخل در مقایسه با فین صلب با هندسه دلخواه با تخلخل کم و دبی جرمی سیال زیاد اتفاق می افتد.

کی وان [11] پدیده ی انتقال حرارت جابجایی طبیعی را در فین متخلخل بررسی کرد. او با استفاده از معادله ی بقای انرژی و رابطه دارسی معادله انتقال حرارت حاکم بر مسئله را استخراج کرد. همچنین عملکرد حرارتی سه نوع فین مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت. سرانجام مشاهده شد که نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل نسبت به فین صلب بیشتر است.

وهاب زاده و همکاران [14] از روش حداقل مربعات (LSM) و حل عددی برای بررسی توزیع دما و میزان انتقال حرارت فین متخلخل با مقطع دایروی که در امتداد طولی ضخامت آن متغیر است، استفاده کردند. هوای اطراف فین متخلخلی که در پژوهش آن ها مورد استفاده قرار گرفت، در شرایط کاملاً مرطوب قرار داشت. لذا اثر رطوبت نسبی سیال موجود در مجاورت فین متخلخل بر روی توزیع درجه حرارت فین مورد بررسی قرار گرفت. آن ها نشان دادند که با افزایش درصد رطوبت نسبی سیال مورد نظر، توزیع درجه حرارت بی بعد شده در طول فین افزایش می یابد.

دیانکار و همکاران [15] توزیع درجه حرارت و بازده و ضریب عملکرد فین متخلخل با مقطع دایروی را مورد مطالعه قرار دادند. بی هانجا و همکاران [16] بر روی فین متخلخل با سطح مقطع مختلف از جمله مستطیلی، سهموی کوژ و سهموی کاو تحقیقات گسترده ای انجام دادند. آن ها تاثیر پارامتر سطح مقطع متغیر فین را بر روی ضریب عملکرد فین را مورد بررسی قرار دادند. همچنین آن ها با استفاده از این پارامتر، هندسه فین را بهینه سازی کردند.

اغلب کارهای انجام شده در مبحث انتقال حرارت فین در محیط متخلخل، به صورت عددی بوده و کمتر با روش های نیمه تحلیلی به آن ها پرداخته می شود.

ایده استفاده از روش<sup>2</sup> DTM اولین بار توسط ژوو [12] برای حل مسائل مقدار مرزی خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت. از مزایای اصلی این روش عدم نیاز به خطی سازی و گسسته سازی معادله خطی یا غیرخطی حاکم بر مسئله است، به طوری که به راحتی می توان این روش را در معادله حاکم بر مسئله اعمال کرد.

عباسف و بهادیر [13] این روش را برای مسائل مختلف خطی و غیرخطی مهندسی استفاده کردند. آن ها مشاهده کردند که نتایج عددی تطابق مناسبی با نتایج تحلیلی دارند.

در این پژوهش کاربرد روش های نیمه تحلیلی در محاسبه بازده فین، ضریب عملکرد و توزیع دما در طول فین مستطیلی متخلخل مورد بررسی قرار می گیرد. تغییر سرعت جریان سیال در راستای عرضی فین به وسیله ی اعمال پارامتر افت فشار در معادلات منظور می گردد.

به علاوه از روش DTM برای حل معادلات حاکم استفاده شده است و نتایج حاصل با روش عددی رانگ-کوتا مرتبه 4 و پژوهش اردم و همکاران<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Kundu et al

<sup>2</sup> Differential transformation method

<sup>3</sup> Erdem Cuce et al

<sup>4</sup> Homotopy perturbation method

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \forall t \in D \quad (22)$$

همچنین تبدیل دیفرانسیلی تابع  $x(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(H)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \quad (23)$$

که  $x(t)$  تابع اصلی و  $X(k)$  تابع تبدیل شده‌ی دیفرانسیلی است. تابع  $X(k)$  در بازه‌ی  $t \in [0, H]$  تعریف می‌شود که مقدار  $H$  ثابت می‌باشد. حال می‌توان تبدیل معکوس تابع تبدیلی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k) \quad (24)$$

همچنین مقدار تابع اصلی  $x(t)$  به صورت سری توانی محدود تقریب زده می‌شود، بنابراین معادله (24) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k) \quad (25)$$

برخی عملگرهای ریاضی مهم که براساس روش DTM می‌باشند، در جدول (1) نشان داده شده است.

### 2-2- آنالیز مسئله به روش DTM

حال معادله انتقال حرارت حاکم بر فین متخلخل مستطیلی را با استفاده از روش DTM به صورت معادله (26) بازنویسی می‌کنیم. در رابطه (26)،  $\theta$  بیانگر تبدیل دیفرانسیلی تابع اصلی  $\theta$  است. همچنین شرایط مرزی برای مسأله در فضای تبدیل شده به صورت رابطه (27) نوشته می‌شود.

$$(k+2)(k+1)\theta(k+2) = \zeta^2(1+\alpha)\theta(k) + \xi \sum_{v=0}^k \theta(k)\theta(k-v) \quad (26)$$

$$\theta(0) = a, \theta(1) = 0 \quad (27)$$

در رابطه (27) مقدار  $a$  ثابت است. با حل معادله (26) و قرار دادن شرایط مرزی رابطه (27) جملات سری به صورت رابطه (28) به دست می‌آید:

$$\theta(2) = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a^2, \theta(3) = 0$$

$$\theta(4) = 0.04150 + 0.04153a^2 + \frac{1}{6} a \left( \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a^2 \right) \quad (28)$$

همچنین با استفاده از رابطه (20) و با فرض  $\zeta = \xi = 1, \alpha = 0$  می‌توان ثابت  $a$  برای این حالت پیدا کرد:

$$a = 0.523128 \quad (29)$$

در این حالت می‌توان معادله توزیع دما در طول فین را به صورت رابطه (30) نوشت:

$$\theta(\psi) = 0.523128 + 0.397872\psi^2 + 0.067779\psi^4 + 0.009895\psi^6 + 0.001324\psi^8 \quad (30)$$

دقت این روش در مقایسه با حل اردم و همکاران [9] و همچنین با روش عددی رانگ کوتا مرتبه 4 با صرف نظر از پارامتر افت فشار در "شکل 2" نشان داده شده است.

جدول 1 عملگرهای ریاضی روش DTM

Table 1 The fundamental operations of the Differential Transform Method (DTM).

تابع اصلی	تابع تبدیل یافته
$x(t) = \alpha f(x) \pm \beta g(t)$	$X(k) = \alpha F(k) \pm \beta G(k)$
$x(t) = \frac{d^m f(x)}{dt^m}$	$X(k) = \frac{(k+m)! F(k+m)}{k!}$
$x(t) = f(t)g(t)$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)G(k-l)$
$x(t) = t^m$	$X(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\rho c_p g k \beta w}{v} (T(x) - T_{\infty})^2 + h(2w + 2t)(T(x) - T_{\infty}) - \rho w \frac{k \Delta P}{\mu t} (T(x) - T_{\infty}) \quad (5)$$

با استفاده از قانون فوریه در هدایت می‌توان نوشت:

$$q = -k_e w t \frac{dT}{dx} \quad (6)$$

در رابطه (6)،  $k_e$  ضریب هدایت حرارتی فین در محیط متخلخل می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_e = \phi k_f + (1 - \phi) k_s \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (6) و (7) در رابطه (5) می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho c_p g k \beta}{v t k_e} (T(x) - T_{\infty})^2 - \left( \frac{h(2w+2t)}{w t k_e} - \frac{\rho k \Delta P}{k_e \mu t} \right) (T(x) - T_{\infty}) = 0 \quad (8)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای زیر برای بی‌بعدسازی مسأله می‌توان نوشت:

$$\theta = \frac{T(x) - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} \quad (9)$$

$$\psi = \frac{x}{L} \quad (10)$$

می‌توان معادله (8) را به این صورت نوشت:

$$\frac{d^2 \theta}{d\psi^2} - (\lambda + \zeta^2) \theta - \xi \theta^2 = 0 \quad (11)$$

در رابطه (11)  $\xi$  پارامتر تخلخل و  $\zeta$  پارامتر جابجایی و  $\lambda$  به عنوان پارامتر افت فشار در نظر گرفته شده است. همچنین  $\lambda$  به عنوان عبارت چشمه نسبت به معادله‌ی حاکم بر پژوهش اردم و همکاران [9] است. پس  $\xi$  و  $\lambda$  و  $\zeta$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi = \frac{Da \times Ra}{k_r} \left( \frac{L}{t} \right)^2 \quad (12)$$

$$\zeta = \left( \frac{h(2w+2t)L^2}{w t k_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\lambda = - \frac{\rho k L^2 \Delta P}{k_e \mu t} \quad (14)$$

در روابط (12) و (13)  $Da$  و  $Ra$  به ترتیب پارامتر بی‌بعد تخلخل-جابجایی و عدد رایلی نامیده می‌شوند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Da = \frac{\zeta}{t^2} \quad (15)$$

$$Ra = \frac{g k \beta t^3}{v a} (T(x) - T_{\infty}) \quad (16)$$

$$k_r = \frac{k_e}{k_f} \quad (17)$$

$$\frac{\lambda}{\zeta^2} = \alpha, \alpha = 0, \pm 0.2, \pm 0.4 \quad (18)$$

در رابطه (16)  $a$ ، پارامتر نفوذ حرارتی و  $K$  پارامتر افت فشار و  $k_r$  نسبت ضریب هدایت گرمایی و  $\alpha$  عدد ثابت می‌باشد.

در این مسئله دو شرط مرزی برای حل مسئله می‌توان در نظر گرفت:

$$\left. \frac{d\theta}{d\psi} \right|_{\psi=0} = 0 \quad (19)$$

$$\theta|_{\psi=1} = 1 \quad (20)$$

### 1-2- روش تبدیل دیفرانسیلی DTM

در این قسمت مفهوم این روش مختصراً بیان می‌گردد. فرض می‌شود که  $x(t)$  تابع تحلیلی در دامنه  $D$  و  $t - t_i$  بیانگر هر نقطه درون این دامنه باشد، آنگاه تابع  $x(t)$  به صورت یک سری توانی حول نقطه‌ی  $t_i$  بیانگر نوشته می‌شود. بسط سری تیلور تابع  $x(t)$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_i}, \forall t \in D \quad (21)$$

با در نظر گرفتن سری مک لوران برای سری فوق در  $t_i = 0$  می‌توان نوشت:

$$\tau = -\frac{k_e w t}{h P L^2} \quad (34)$$

در رابطه (34)،  $P$  محیط فین است. حال می‌توان نمودار نسبت نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل نسبت به فین صلب را برحسب پارامتر ترمو-هندسی فین به صورت "شکل 4" نشان داد. مطابق "شکل 4" می‌توان گفت که با افزایش مقدار  $\alpha$  نسبت انتقال حرارت در فین متخلخل به فین صلب افزایش می‌یابد. افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، به معنی افزایش گرادیان فشار منفی در جهت جریان همچنین افزایش سرعت جریان در جهت اصلی است که این امر باعث افزایش انتقال حرارت فین متخلخل می‌شود.

### 3-1- بازده فین متخلخل و اثر پارامتر افت فشار

می‌توان بازده فین را به صورت رابطه‌ی (35) نوشت:

$$\eta = \frac{Q_f}{Q_m} \quad (35)$$

در رابطه (35)  $Q_f$  نرخ انتقال حرارت در فین و  $Q_m$  ماکزیمم نرخ انتقال حرارت در فین است. نرخ انتقال حرارت در فین را می‌توان توسط قانون سرد شدن نیوتون به صورت رابطه (36) نوشت:

$$Q_f = \int_0^L h P (T(x) - T_\infty) dx \quad (36)$$

از طرفی نرخ انتقال حرارت در فین بر مبنای دمای پایه  $T_b$  را به صورت زیر می‌توان نوشت:

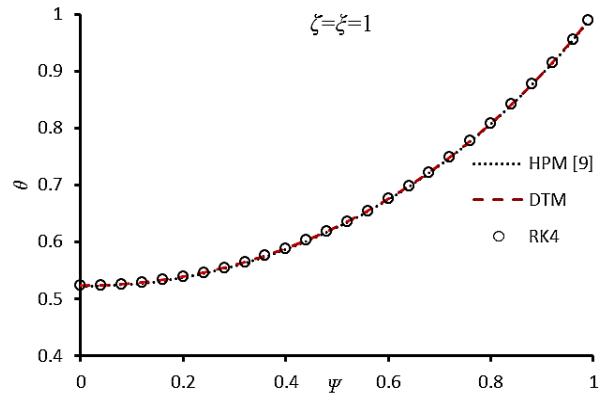


Fig. 2 Distribution of non-dimensional temperature along the length of porous fin: validation with the work of Erdem et al [9]

شکل 2 نمودار مقایسه دقت روش DTM در مقایسه با حل اردم و همکاران به ازای [9]

مطابق "شکل 2" می‌توان گفت که روش DTM با دقت بالایی بر نتیجه‌ی حاصل از روش عددی رانگ کوتا مرتبه 4 (RK4) و همچنین روش نیمه-تحلیلی HPM منطبق است. این دو روش از دقت بالایی برخوردار هستند و در این پژوهش از زاویه‌ی جدید تحلیلی دیگری به این مسئله نگاه شده است.

### 3- آنالیز مسئله به روش DTM

حال با استفاده از نتایج حاصل از روش DTM می‌توان نمودار توزیع دمای بی‌بعد شده فین را در راستای طولی به صورت "شکل 3" نشان داد. با توجه به روابط (14) و (18)، مقادیر مثبت  $\alpha$ ، به معنی منفی بودن گرادیان فشار در جهت جریان و افزایش سرعت جریان سیال بوده و مقادیر منفی  $\alpha$ ، به معنی مثبت بودن گرادیان فشار در جهت جریان و کاهش سرعت جریان در جهت اصلی جریان سیال است. مطابق "شکل 3" مشاهده می‌شود که با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، سرعت حرکت سیال عبوری از فین متخلخل افزایش یافته و باعث می‌شود که درجه حرارت در نقاطی دور از پایه‌ی فین کاهش یابد. همچنین با کاهش  $\alpha$  به سمت مقادیر منفی، سرعت حرکت سیال عبوری از فین متخلخل کاهش یافته و باعث می‌شود که درجه حرارت در نقاطی دور از پایه‌ی فین افزایش یابد. این نتیجه با قانون حاکم بر جابجایی طبیعی و نتیجه حاصل شده با تحقیقات سعدالدین و شاه بابایی [10] تطابق دارد.

محاسبه درجه حرارت بی‌بعد شده در طول فین این امکان را می‌دهد که بتوان نرخ انتقال حرارت ایده‌آل فین متخلخل نسبت به فین صلب را به دست آورد. می‌توان نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل و نرخ انتقال حرارت در فین صلب را به صورت معادله‌های زیر نوشت [9]:

$$q_p = -k_e w t \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (31)$$

$$q_s = h P L (T_b - T_\infty) \quad (32)$$

با بی‌بعدسازی روابط (31) و (32) نسبت نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل به نرخ انتقال حرارت در فین صلب به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{q_p}{q_s} = \gamma = \tau \frac{d\theta}{d\psi} \Big|_{\psi=1} \quad (33)$$

در رابطه (33)،  $\tau$  خاصیت ترموهندسی<sup>1</sup> فین است که به صورت زیر می‌توان نوشت:

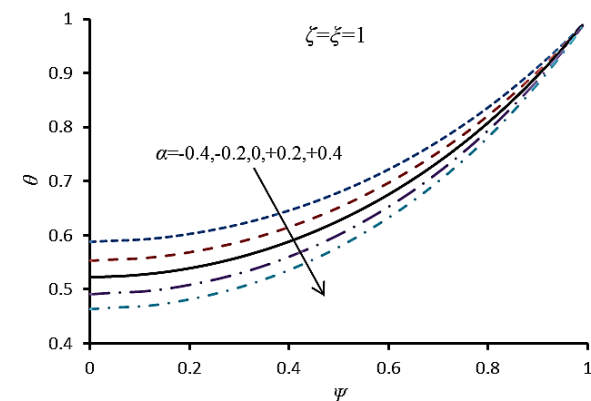


Fig. 3 Dimensionless temperature distribution along the length of porous fin for different values of  $\alpha$  parameter

شکل 3 نمودار توزیع دمای بی‌بعد شده در راستای طولی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$

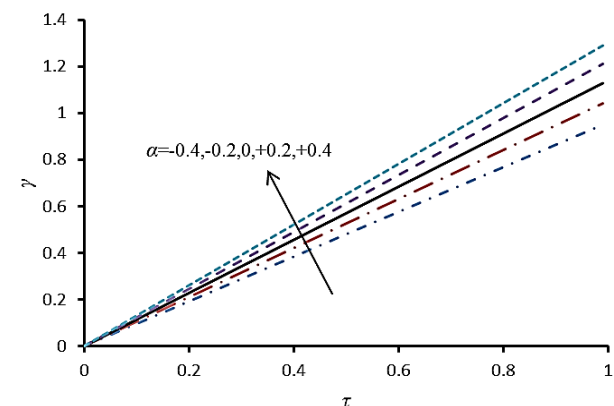


Fig. 4 Thermo-geometric fin parameter dependency of the ratio of porous fin to solid fin heat transfer rate for different values of  $\alpha$  parameter

شکل 4 نمودار تغییرات نسبت انتقال حرارت در فین متخلخل به انتقال حرارت در فین صلب برحسب پارامتر ترمو هندسی فین به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$

<sup>1</sup> Thermo-geometric

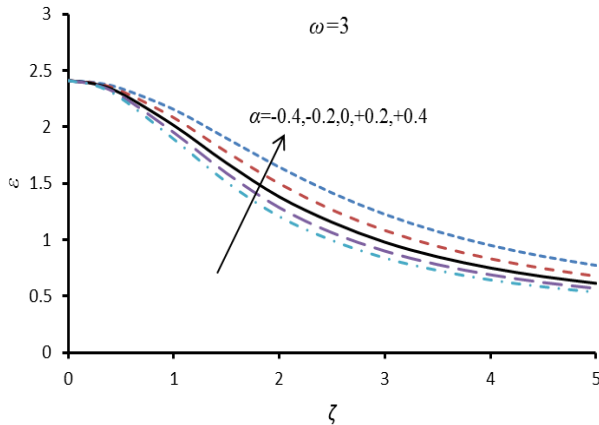


Fig. 6 Effectiveness of porous fin for different values of  $\alpha$  parameter as a function of convection parameter

شکل 6 نمودار ضریب عملکرد فین برحسب جابجایی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$

### 3-3- بررسی اثر جابجایی طبیعی و اجباری بر توزیع دما

در این قسمت اثر جابجایی ترکیبی بر توزیع دما در طول فین پرداخته می‌شود. با توجه به رابطه (2) با صرف نظر از ترم جابجایی طبیعی و با در نظر گرفتن  $\beta = 0$  می‌توان نوشت:

$$V = -\frac{k \Delta P}{\mu t} \quad (43)$$

مطابق رابطه‌ی (8) می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \left( \frac{h(2w+2t)}{wtk_e} - \frac{\rho k \Delta P}{k_e \mu t} \right) (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (44)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در رابطه (44) ترم جابجایی طبیعی با در نظر گرفتن فرض موجود در رابطه (43) حذف شده است. بنابراین تنها مکانیزم انتقال حرارت به‌صورت جابجایی اجباری می‌باشد. پس با در نظر گرفتن رابطه (44) و بی‌بعدسازی آن می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 \theta}{d\psi^2} - (K + \zeta^2) \theta = 0 \quad (45)$$

شرایط مرزی رابطه (45) همانند شرط مرزی رابطه (11) می‌باشد. از حل معادله (45) و شرایط مرزی مربوطه، نمودار توزیع درجه حرارت بی‌بعد شده فین در راستای طولی مطابق با "شکل 7" حاصل می‌شود.

مطابق با "شکل 7"، توزیع درجه حرارت بی‌بعد شده در طول فین برای  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  (جابجایی طبیعی)، همچنین برای حالت  $\alpha \neq 0, \beta = 0$

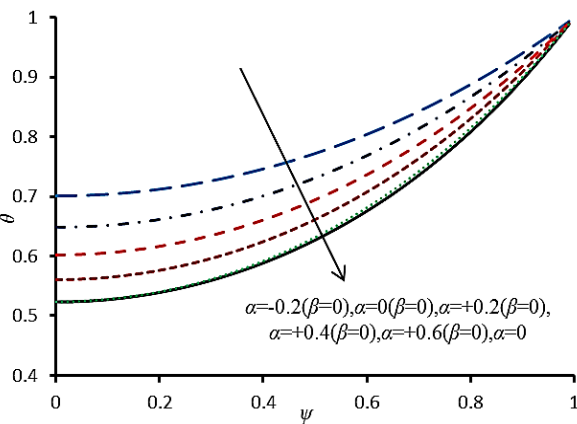


Fig. 7 Dimensionless temperature distribution along the length of porous fin for different values of  $\alpha$  and  $\beta$  parameters

شکل 7 نمودار توزیع دمای بی‌بعد شده در راستای طولی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$

$$Q_m = hPL(T_b - T_\infty) \quad (37)$$

حال با قرار دادن روابط (36) و (37) در رابطه (35) می‌توان نوشت:

$$\eta = \frac{\int_0^L hP(T(x) - T_\infty) dx}{hPL(T_b - T_\infty)} = \int_0^1 \theta(\psi) d\psi \quad (38)$$

همچنین نمودار بازده حرارتی برحسب پارامتر جابجایی برای مقادیر مختلف  $\alpha$  را می‌توان به "شکل 5" نشان داد.

مطابق "شکل 5" می‌توان گفت که با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، بازده فین افزایش می‌یابد. بنابراین افزایش  $\alpha$  اثری مطلوب به شمار می‌آید. به این علت که با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، گرادیان فشار منفی در جهت جریان افزایش می‌یابد و در نتیجه سرعت حرکت سیال در جهت اصلی جریان افزایش یافته و این امر منجر می‌شود که انتقال حرارت در فین متخلخل افزایش یافته و در نهایت موجب افزایش بازده فین می‌شود. همچنین می‌توان گفت که با کاهش  $\alpha$  به سمت مقادیر منفی، بازده فین کاهش می‌یابد که اثری نامطلوب به شمار می‌آید.

### 3-2- ضریب عملکرد فین متخلخل و اثر پارامتر افت فشار

می‌توان ضریب عملکرد فین را به صورت رابطه (39) نوشت:

$$\varepsilon = \frac{Q_f}{Q_{fb}} \quad (39)$$

در رابطه‌ی فوق  $Q_{fb}$  مقدار حرارت اتلافی در پایه فین است. برای فین با عرض  $w$  و ضخامت  $t$  رابطه‌ی انتقال حرارت اتلافی در پایه فین را به صورت رابطه (40) می‌توان نوشت:

$$Q_{fb} = \frac{hPt}{2} (T_b - T_\infty) \quad (40)$$

حال با قرار دادن روابط (36) و (40) در رابطه (39) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{\int_0^L 2hP(T(x) - T_\infty) dx}{hPt(T_b - T_\infty)} = \int_0^1 \omega \theta(\psi) d\psi \quad (41)$$

در رابطه (41)،  $\omega$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{2L}{t} \quad (42)$$

همچنین نمودار ضریب عملکرد فین برحسب پارامتر جابجایی برای مقادیر مختلف  $\alpha$  را می‌توان به "شکل 6" نشان داد.

مطابق "شکل 6" می‌توان گفت که با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، ضریب عملکرد فین نیز افزایش می‌یابد. پس کاهش  $\alpha$  اثری نامطلوب به حساب می‌آید. یعنی با کاهش  $\alpha$  سرعت جریان سیال عبوری از فین متخلخل کم شده و انتقال حرارت در فین متخلخل کاهش یافته و در نتیجه ضریب عملکرد فین کم می‌شود.

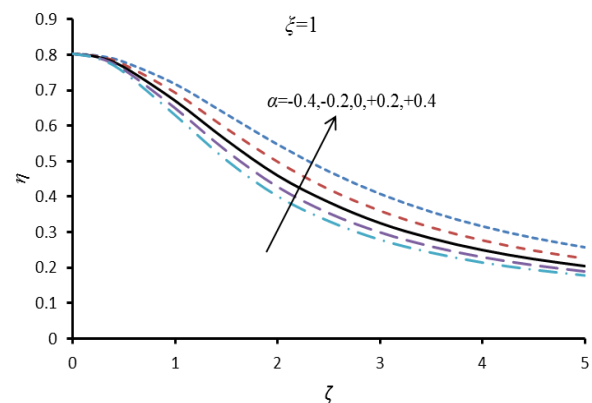
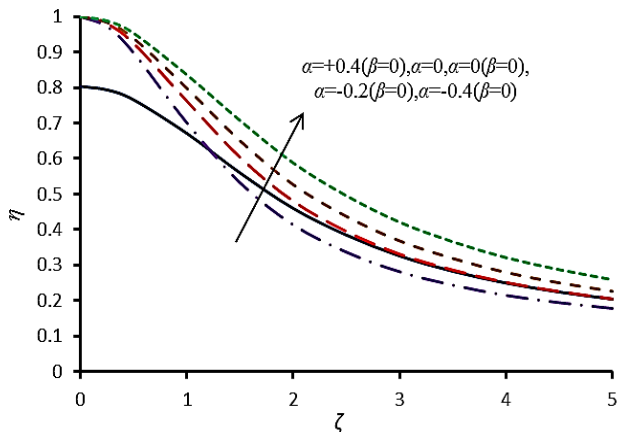


Fig. 5 Efficiency of porous fin for different values of convection and  $\alpha$  parameter

شکل 5 نمودار بازده حرارتی فین برحسب جابجایی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$



**Fig. 9** Efficiency of porous fin for different values of convection,  $\alpha$  and  $\beta$  parameters

شکل 9 نمودار تغییرات بازده فین متخلخل برحسب پارامتر جابجایی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نمودار بازده برحسب پارامتر تخلخل برای مقدار  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  و همچنین برای حالت  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  رسم شده است، در این حالت می‌توان گفت که با در نظر گرفتن مکانیزم انتقال حرارت اجباری  $\beta = 0$  و کاهش مقدار  $\alpha$  از  $+0.4$  تا مقدار  $-0.4$  عملاً بازده فین متخلخل افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به نمودار  $\zeta \leq 2$  برای دو حالت  $\alpha = 0$  و  $\beta = \alpha = 0$  می‌توان چنین گفت که برای حالت جابجایی اجباری بازده فین متخلخل نسبت به حالتی که مکانیزم انتقال حرارت جابجایی طبیعی است، بیشتر می‌باشد. همچنین برای حالت خاص یعنی  $\zeta = 3$  می‌توان گفت بازده فین متخلخل برای حالت‌های  $\alpha = 0$  و  $\beta = 0, \alpha = 0.4$  از مقدار  $32.5\%$  به مقدار  $42.3\%$  افزایش می‌یابد. یعنی با تغییر مکانیزم انتقال حرارت از حالت جابجایی طبیعی به حالت جابجایی اجباری بازده فین برای این حالات خاص حدوداً  $10\%$  افزایش می‌یابد.

### 3-6- بررسی اثر جابجایی طبیعی و اجباری بر ضریب عملکرد فین متخلخل

برای ضریب عملکرد فین متخلخل نیز با حذف پارامتر جابجایی طبیعی از معادله انتقال حرارت می‌توان نمودار مربوطه را برحسب پارامتر تخلخل را به صورت "شکل 10" ترسیم کرد.

مطابق شکل فوق، نمودار ضریب عملکرد فین متخلخل برحسب پارامتر تخلخل برای مقدار  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  و همچنین برای حالت  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  رسم شده است، مطابق این حالت، با در نظر گرفتن مکانیزم انتقال حرارت اجباری  $\beta = 0$  و کاهش مقدار  $\alpha$  از  $+0.4$  تا مقدار  $-0.4$  عملاً ضریب عملکرد فین متخلخل افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به نمودار  $\zeta \leq 2$  برای دو حالت  $\alpha = 0$  و  $\beta = \alpha = 0$  می‌توان چنین گفت که برای حالت جابجایی اجباری ضریب عملکرد فین متخلخل نسبت به حالتی که مکانیزم انتقال حرارت جابجایی طبیعی است، بیشتر می‌باشد. برای حالت خاص یعنی  $\zeta = 3$  می‌توان گفت ضریب عملکرد فین متخلخل برای حالت‌های  $\alpha = 0$  و  $\beta = 0, \alpha = -0.4$  از مقدار  $0.975$  به مقدار  $1.270$  افزایش می‌یابد. یعنی با تغییر مکانیزم انتقال حرارت از حالت جابجایی طبیعی به حالت جابجایی اجباری ضریب عملکرد فین برای این حالات خاص حدوداً  $30\%$  افزایش می‌یابد.

(جابجایی اجباری)، ترسیم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود افزایش  $\alpha$  از مقدار  $-0.2$  تا مقدار  $+0.6$  منحنی توزیع دما به سمت منحنی مربوط به  $\alpha = 0$  می‌رسد. می‌توان چنین استنباط کرد که وقتی مکانیزم انتقال حرارت صرفاً جابجایی اجباری باشد،  $\beta = 0$ ، با در نظر گرفتن  $\alpha = +0.6$ ، توزیع درجه حرارت منطبق بر حالتی است که مکانیزم انتقال حرارت طبیعی می‌باشد. همچنین می‌توان گفت که برای حالت  $\beta = 0$ ، با افزایش  $\alpha$ ، دمای فین متخلخل به سمت دمای محیط پیرامون میل می‌کند. یعنی صرفاً با مکانیزم جابجایی اجباری نیز می‌توان این حالت را ایجاد کرد.

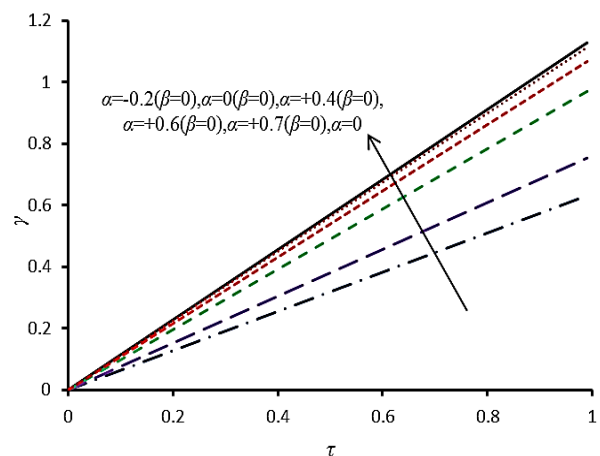
### 3-4- بررسی اثر جابجایی طبیعی و اجباری بر نرخ انتقال حرارت فین متخلخل به فین صلب

پس از محاسبه درجه حرارت بی‌بعد شده در طول فین به ازای  $\alpha$  و  $\beta$  می‌توان نرخ انتقال حرارت را در فین متخلخل نسبت به فین صلب را به دست آورد. نسبت نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل به نرخ انتقال حرارت به ازای مقادیر متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  در "شکل 8" نشان داده شده است.

مطابق با "شکل 8"، برای حالت  $\beta = 0$ ، (مکانیزم جابجایی اجباری) با افزایش مقدار  $\alpha$  از مقدار  $-0.2$  تا مقدار  $+0.7$  منحنی تغییرات انتقال حرارت در فین متخلخل نسبت به فین صلب به حالت  $\alpha = 0$  می‌رسد. یعنی می‌توان گفت وقتی مکانیزم انتقال حرارت صرفاً جابجایی اجباری باشد،  $\beta = 0$ ، با در نظر گرفتن  $\alpha = +0.7$ ، میزان نسبت انتقال حرارت در محیط متخلخل به محیط صلب فین منطبق بر حالتی است که مکانیزم انتقال حرارت جابجایی طبیعی می‌باشد. همچنین می‌توان گفت که برای حالت  $\beta = 0$ ، با افزایش  $\alpha$  میزان نسبت انتقال حرارت در محیط متخلخل به محیط صلب فین افزایش می‌یابد. یعنی صرفاً با مکانیزم جابجایی اجباری نیز می‌توان این حالت را ایجاد کرد.

### 3-5- بررسی اثر جابجایی طبیعی و اجباری بر بازده حرارتی فین متخلخل

برای بازده نیز با حذف پارامتر جابجایی طبیعی از معادله انتقال حرارت می‌توان نمودار بازده برحسب پارامتر تخلخل را به صورت "شکل 9" ترسیم کرد:



**Fig. 8** Thermo-geometric fin parameter dependency of the ratio of porous fin to solid fin heat transfer rate for different values of  $\alpha$  and  $\beta$  parameters

شکل 8 نمودار تغییرات نسبت انتقال حرارت در فین متخلخل به انتقال حرارت در فین صلب برحسب پارامتر ترمو هندسی فین به ازای مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$



- 11- برای حالت  $\beta = 0$ ، با افزایش  $\alpha$  میزان نسبت انتقال حرارت در محیط متخلخل به محیط صلب فین افزایش می یابد.
- 12- در  $2 \leq \zeta$ ، برای دو حالت  $\alpha = 0$  و  $\beta = \alpha = 0$  می توان گفت که برای حالت جابجایی اجباری بازده فین متخلخل نسبت به حالتی که مکانیزم انتقال حرارت طبیعی است، بیشتر می باشد.
- 13- در  $\zeta = 3$ ، بازده فین متخلخل از حالت  $\alpha = 0$  به حالت  $\beta = -0.4$  حدوداً 10% افزایش می یابد.
- 14- با تغییر مکانیزم انتقال حرارت از حالت جابجایی طبیعی به حالت جابجایی اجباری ضریب عملکرد فین در حدود 30% افزایش می یابد.

#### 5- فهرست علائم

$a$	پارامتر نفوذ حرارتی
$A$	سطح مقطع ( $m^2$ )
$c_p$	ظرفیت گرمایی ویژه سیال ( $Jkg^{-1}K^{-1}$ )
$Da$	پارامتر بی بعد تخلخل - جابجایی فین متخلخل
$g$	شتاب گرانش ( $ms^{-2}$ )
$h$	ضریب انتقال حرارت جابجایی ( $Wm^{-2}K^{-1}$ )
$k_e$	ضریب هدایت حرارتی فین متخلخل ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )
$k_f$	ضریب هدایت حرارتی فین متخلخل ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )
$k_r$	ضریب انتقال حرارت نسبی
$k_s$	ضریب هدایت حرارتی قسمت صلب فین متخلخل ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )
$K$	ضریب تراوایی فین متخلخل ( $m^2$ )
$L$	طول فین متخلخل (m)
$\dot{m}$	دبی جرمی عبوری از فین متخلخل ( $kgs^{-1}$ )
$q$	شار گرمایی ( $Wm^{-2}$ )
$Q_f$	نرخ انتقال حرارت از فین متخلخل (W)
$Q_{fb}$	نرخ انتقال حرارت از پایه ی فین متخلخل (W)
$Q_m$	ماکزیمم نرخ انتقال حرارت از فین متخلخل (W)
$Ra$	عدد رایلی
$T$	درجه حرارت فین متخلخل (K)
$T_\infty$	درجه حرارت محیط (K)
$V$	سرعت حرکت سیال عبوری از فین متخلخل ( $ms^{-1}$ )

#### علائم یونانی

$\alpha$	ضریب بی بعد افت فشار درون فین متخلخل
$\beta$	ضریب انبساط حرارتی
$\gamma$	نرخ انتقال حرارت بی بعد
$\varepsilon$	ضریب عملکرد فین متخلخل
$\lambda$	پارامتر افت فشار
$\zeta$	پارامتر جابجایی
$\eta$	بازده حرارتی فین متخلخل
$\theta$	درجه حرارت بی بعد فین متخلخل
$\xi$	پارامتر تخلخل
$\rho$	چگالی سیال
$\tau$	پارامتر ترمو هندسی فین متخلخل
$\nu$	ویسکوزیته سینماتیکی سیال
$\phi$	تخلخل

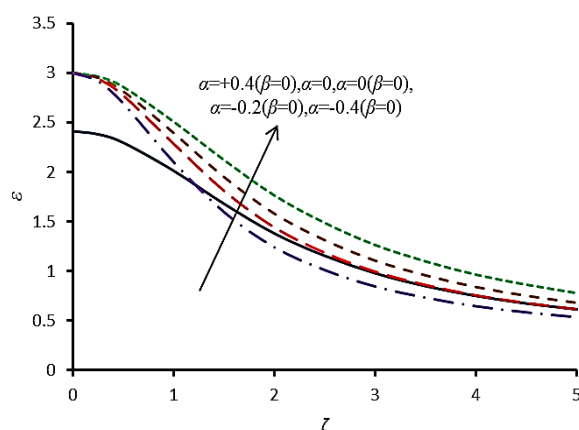


Fig. 10 Effectiveness of porous fin for different values of  $\alpha$  and  $\beta$  parameters as a function of convection parameter

شکل 10 نمودار تغییرات ضریب عملکرد فین متخلخل بر حسب پارامتر جابجایی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$

#### 4- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر به بررسی نحوه توزیع دما در فین متخلخل و همچنین نحوه تغییر بازده فین و ضریب تاثیر فین متخلخل با تغییرات پارامتر افت فشار پرداخته شد و نتایج زیر حاصل شد:

- 1- روش نیمه تحلیلی DTM یک سری توانی با بی نهایت جمله بوده و از دقت زیاد و سرعت همگرایی بالا برخوردار می باشد.
- 2- روش DTM با دقت بالایی بر نتیجه ی حاصل از روش عددی رانگ کوتا مرتبه 4 و همچنین روش نیمه تحلیلی HPM منطبق است.
- 3- درجه حرارت فین متخلخل در امتداد طولی کاهش یافته و با افزایش  $\alpha$  سریع تر به دمای محیط پیرامون می رسد که این پدیده با اصل جابجایی طبیعی تطابق کامل دارد.
- 4- نسبت انتقال حرارت در فین متخلخل به فین صلب  $\gamma$  با افزایش پارامتر ترموهندسی فین  $\tau$  افزایش می یابد.
- 5- برای مقادیر ثابت  $\tau$  مقدار  $\gamma$  با افزایش  $\alpha$  افزایش می یابد و این بدان معنی است که نرخ انتقال حرارت در فین متخلخل نسبت به فین صلب افزایش می یابد.
- 6- بازده فین با کاهش  $\alpha$  به سمت مقادیر منفی وضوح کاهش می یابد که این کاهش به خصوص در مقدار های بالاتر  $\zeta$  بیشتر خود را نشان می دهد. همچنین با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، بازده فین افزایش یافته که اثری مطلوب به شمار می آید.
- 7- ضریب عملکرد فین  $\varepsilon$  با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، افزایش می یابد در سویی دیگر، با کاهش آن مقدار ضریب تاثیر فین کاهش یافته و اثری نامطلوب در فرآیند انتقال حرارت به شمار می آید.
- 8- در مکانیزم انتقال حرارت جابجایی اجباری یعنی حالت  $\beta = 0$ ، با در نظر گرفتن  $\alpha = +0.6$ ، توزیع درجه حرارت منطبق بر حالتی است که مکانیزم انتقال حرارت، جابجایی طبیعی  $\alpha = 0$ ، می باشد.
- 9- برای حالت  $\beta = 0$ ، با افزایش  $\alpha$  به سمت مقادیر مثبت، دمای فین متخلخل سریع تر به دمای محیط پیرامون می رسد.
- 10- در مکانیزم انتقال حرارت جابجایی اجباری  $\beta = 0$ ، با در نظر گرفتن  $\alpha = +0.7$  میزان نسبت انتقال حرارت در محیط متخلخل به محیط صلب فین منطبق بر حالتی است که مکانیزم انتقال حرارت، جابجایی طبیعی می باشد.

$\psi$  طول بی‌بعد فین متخلخل  
 $\omega$  نسبت طول به ضخامت فین متخلخل

## 6- مراجع

- [8] D. A. Neild, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, pp. 147-148, Springer Science+Business Media, Inc. 2006.
- [9] E. Cuce, P. M. Cuce, A successful application of homotopy perturbation method for efficiency and effectiveness assessment of longitudinal porous fins, *Energy Conversion and Management*, Vol. 93, No. 1, pp. 92-9, 2015.
- [10] S. Saedodin, M. Shahbabaie. Thermal analysis of natural convection in porous fins with homotopy perturbation method, (HPM). *Arabian Journal of Science Engineering*, Vol. 38, No. 8, pp. 2227-31, 2013.
- [11] S. Kiwan. Thermal analysis of natural convection porous fins, *Transport in Porous Media*, Vol. 67, No. 1, pp. 17-29, 2006.
- [12] J. K. Zhou, *Differential Transformation Method and Its Application for Electrical Circuits*, PhD thesis, Wuhan, China: Huazhong university, 1986.
- [13] A. Abbasov, A. R. Bahadir, The investigation of the transient regimes in the nonlinear systems by the generalized classical method, *Mathematical Problems in Engineering* Vol. 5, No. 5 pp. 503-519, 2005.
- [14] A. Vahabzadeh, D. D. Ganji, M. Abbasi. Analytical investigation of porous pin fins with variable section in fully-wet conditions, *Case Study in Thermal Engineering*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-12, 2015.
- [15] B. Dipankar, B. Kundub, P. K. Mandala. Thermal analysis of porous pin fin used for electronic cooling, *Procedia Engineering*, Vol. 64, No. 1, pp. 956 - 965, 2013.
- [16] B. Kundu, D. Bhanja, K. S. Lee. A model on the basis of analytics for computing maximum heat transfer in porous fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, No. 25-26, pp. 7611-22, 2012.
- [1] M. Kaviany, *Principle of Heat Transfer in Porous Media*, Second ed, pp. 1-11, New York: Springer, 1995.
- [2] M. K. Alkam, M. A. Al-Nimr, Solar collectors with tubes partially filled with porous substrate, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 121, No. 1, pp. 20-24, 1999.
- [3] S. Jalili Palandi, M. Hatami, S. E. Ghasemi, E. Mohseni Languri, R. Masoodi, Temperature distribution of convective fin with temperature-dependent internal heat generation and thermal conductivity using DTM, *International Journal of Nonlinear Dynamics in Engineering and Sciences*, Vol. 4, No. 1-2, , pp. 141-153, 2012.
- [4] S. Kiwan, M. Al-Nimr, Using porous fins for heat transfer enhancement, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 123, No. 4, pp. 790-5, 2001.
- [5] S. Kiwan, Effect of radiative losses on the heat transfer from porous fins, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 46, No. 10, pp. 1046-55, 2007.
- [6] S. Saedodin, S. Sadeghi. Temperature distribution in long porous fins in natural convection condition, *Middle-East Journal of Scientific Research*, Vol. 13, No. 6, pp. 812-7, 2013.
- [7] B. Kundu, D. Bhanja, K. S. Lee. A model on the basis of analytics for computing maximum heat transfer in porous fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, No. 25-26, pp. 7611-22, 2012.