



## مطالعه تأثیر میدان مغناطیسی بر انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال در محفظه موجی با توزیع دمای غیر یکنواخت

علیرضا شهرباری\*

مربی، مهندسی مکانیک، دانشگاه زابل، زابل  
\* زابل، صندوق پستی 98615-538، areza.shahriari@uoz.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 19 دی 1395  
پذیرش: 08 اسفند 1395  
ارائه در سایت: 14 فروردین 1396  
کلید واژگان:  
روش شبکه بولتزمن  
نانوسیال  
میدان مغناطیسی  
دیواره موجی  
توزیع دمای سینوسی

### چکیده

در مقاله حاضر، انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال آب-اکسید مس با در نظر گرفتن حرکت براونی تحت تأثیر میدان مغناطیسی در محفظه بسته به روش شبکه بولتزمن مورد مطالعه قرار گرفته است. دیواره سمت چپ محفظه دارای هندسه موجی و توزیع دمای غیر یکنواخت سینوسی بوده و دیواره سمت راست در دمای ثابت و سرد  $T_c$  قرار دارد. دیواره‌های افقی بالا و پایین محفظه هر دو صاف و نسبت به عبور حرارت و جرم عایق شده‌اند. به علت تغییرات ناچیز چگالی، از تقریب بوزینسک استفاده شده است که باعث تأثیرپذیری میدان هیدرودینامیکی از میدان حرارتی می‌گردد. برای توابع توزیع چگالی و انرژی از آرایش شبکه D2Q9 استفاده شده است. در این مقاله اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی نانوذرات، عدد رایلی، عدد هارتمن و پارامترهای هندسی دیواره موجی بر روی میدان‌های جریان و دما مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش عدد رایلی و افزایش کسر حجمی نانوذرات، عدد ناسلت افزایش ولی با افزایش عدد هارتمن عدد ناسلت کاهش می‌یابد. با این حال با توجه به عدد رایلی، افزایش عدد هارتمن می‌تواند سبب تقویت یا تضعیف اثر نانوذرات شود. علاوه بر این نشان داده شده است که برای یک عدد رایلی و هارتمن ثابت با تنظیم پارامترهای هندسه دیواره موجی می‌توان به یک انتقال حرارت بهینه دست یافت. بیشترین اثر نانوذرات با در نظر گرفتن نقش حرکت براونی مشاهده گردید. در نهایت این مطالعه می‌تواند یک دید کلی برای افزایش انتقال حرارت در محفظه‌هایی با دیواره‌های موجی و توزیع دمای سینوسی در معرض میدان مغناطیسی را فراهم آورد.

## Effect of magnetic field on natural convection heat transfer of nanofluid in wavy cavity with non-uniform temperature distribution

Alireza Shahriari\*

Department of Mechanical Engineering, University of Zabol, Zabol, Iran  
\* P.O.B. 98615-538, Zabol, Iran, areza.shahriari@uoz.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 08 January 2017  
Accepted 26 February 2017  
Available Online 03 April 2017

### Keywords:

Lattice Boltzmann Method  
Nanofluid  
Magnetic Field  
Wavy-Wall  
Sinusoidal Temperature Distribution

### ABSTRACT

In the present paper, natural convection heat transfer of CuO-water nanofluid subjected to a uniform magnetic field within an enclosed cavity considering Brownian motion is studied by adopting the lattice Boltzmann model. The left wavy wall is heated sinusoidally, while the right flat wall is maintained at the constant temperature of  $T_c$ . The top and the bottom horizontal walls are smooth and insulated against heat and mass. The variation of density is slight; thus, hydrodynamics and thermal fields equations are coupled using the Boussinesq approximation. The density and energy distribution are both solved by D2Q9 model. In this paper, the influence of pertinent parameters such as solid volume fraction of nanoparticles, Rayleigh number, Hartmann number and wavy-wall geometry parameters on flow and heat transfer fields are investigated. Results show that the heat transfer increases with the increment of Rayleigh number and nanoparticles volume fraction, but it decreases with the increment of the Hartmann number. The enhancement of magnetic field increases or decreases the effect produced by the presence of nanoparticles at different Rayleigh numbers. In addition, it is shown that for a fixed Rayleigh number and Hartmann number, the heat transfer performance depends on tuning the wavy-surface geometry parameters. The greatest effect of nanoparticles is observed by considering the role of Brownian motion. This study can provide useful insight for enhancing the convection heat transfer performance within enclosed cavities with wavy-wall surfaces and sinusoidal temperature distribution under influence of magnetic field.

### 1- مقدمه

خنک‌کاری قطعات الکترونیک، مبدل‌های حرارتی، سرمایش و گرمایش ساختمان‌ها و فناوری‌های خورشیدی به کار می‌رود. با توجه به فراوانی کاربرد انتقال حرارت جابجایی آزاد، شبیه‌سازی این نوع انتقال حرارت در

انتقال حرارت جابجایی آزاد به‌عنوان یک پدیده حیاتی در صنعت به شمار می‌رود. این پدیده در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون کوره‌ها،

### Please cite this article using:

A. Shahriari, Effect of magnetic field on natural convection heat transfer of nanofluid in wavy cavity with non-uniform temperature distribution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 29-40, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

صنایع پلیمر و صنایع متالورژی اشاره نمود. شبیه‌سازی جریان مگنتوهیدرودینامیک نانوسیال‌ها با روش‌های مختلفی همچون تفاضل محدود، المان محدود و روش شبکه بولتزمن انجام شده است.

در سال‌های اخیر روش شبکه بولتزمن به علت مزایایی که نسبت به روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی دارد مورد توجه ویژه محققین قرار گرفته است. از جمله این مزایا می‌توان به صریح بودن معادلات حاکم، سادگی اعمال شرایط مرزی گوناگون و قابلیت پردازش موازی مستقل از نوع مسئله اشاره نمود [14-16]. سادگی اعمال شرایط مرزی باعث شده است که روش شبکه بولتزمن به‌عنوان یک روش توانمند در حل مسائل با مرزهای پیچیده مانند جریان در محیط‌های متخلخل، جریان‌های چند فاز و جریان‌های چندجزیی مورد استفاده قرار گیرد [17,18].

عموماً مطالعات انجام‌شده بر روی جابجایی طبیعی مگنتوهیدرودینامیک در محفظه‌های اشباع‌شده با نانوسیال را می‌توان در سه گروه دسته‌بندی نمود: (الف) محفظه‌ها با دیواره‌های صاف و توزیع دمای یکنواخت روی دیواره‌ها. (ب) محفظه‌ها با دیواره‌های منحنی و توزیع دمای یکنواخت روی دیواره‌ها. (ج) محفظه‌ها با دیواره‌های صاف و توزیع دمای غیریکنواخت روی دیواره‌ها.

از مطالعات انجام‌شده روی جابجایی طبیعی مگنتوهیدرودینامیک نانوسیال در محفظه‌ها با دیواره‌های صاف و توزیع دمای یکنواخت روی دیواره‌ها می‌توان به کار قاسمی و همکاران [19] اشاره نمود. آن‌ها از نانوسیال آب-اکسید آلومینیم استفاده کردند و نشان دادند که اثر افزایش نانوذرات روی انتقال حرارت وابسته به اعداد رایلی و هارتمن است.

اگرچه بسیاری از مقالات به بررسی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌هایی با مرزهای صاف پرداخته‌اند، اما با توجه به کاربرد هندسه‌هایی با مرزهای غیرصاف، تعداد زیادی از محققین نیز جریان و انتقال حرارت را در این نوع هندسه‌ها بررسی نموده‌اند. از جمله کاربردهای مرزهای موجی و غیرصاف می‌توان به کلکتورهای انرژی خورشیدی، مبدل‌های حرارتی، وسایل الکترونیکی و چگالنده‌های موجود در یخچال‌ها اشاره نمود [20,21]. شیخ‌الاسلامی و همکاران [22] با استفاده از روش شبکه بولتزمن جابجایی آزاد نانوسیال را در محفظه مربعی با دیواره‌های منحنی به شکل نیم‌دایره تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت افقی بررسی کردند. آن‌ها با ثابت در نظر گرفتن شکل هندسه، به بررسی اثر کسر حجمی، عدد رایلی و عدد هارتمن بر جریان و انتقال حرارت پرداختند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که عدد ناسلت با کسر حجمی و عدد رایلی رابطه مستقیم ولی با عدد هارتمن رابطه عکس دارد.

علی‌رغم این‌که در بسیاری از مطالعات شرایط مرزی دما ثابت یا شار ثابت برای دیواره‌ها (صاف یا غیر صاف) در نظر گرفته شده است، با این حال در نمونه‌های واقعی این شرایط مرزی به‌ندرت وجود دارند. در بیشتر کاربردهای مهندسی که قبلاً نیز به آن‌ها اشاره شد، همچون کلکتورهای انرژی خورشیدی و تجهیزات الکترونیکی به علت تغییر در رنگ، قرار گرفتن در سایه و یا تأثیر دیگر اثرات، شرایط مرزی غیریکنواخت بر روی سطوح وجود دارد. کفایتی [23] روش شبکه بولتزمن را برای بررسی جریان جابجایی آزاد نانوسیال در حضور یک میدان مغناطیسی در محفظه دوبعدی با دیواره‌های صاف به کار برد. او برای دیواره سمت راست توزیع غیریکنواخت سینوسی دما را برگزید و نشان داد که بیشترین اثر حضور نانوذرات در رایلی بالا برای انحراف فاز  $\pi/2$  رخ می‌دهد.

هندسه‌های مختلف مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. سهم بیشتر مطالعات در این زمینه به محفظه‌های دوبعدی دارای دیواره‌های صاف با دمای ثابت مربوط می‌شود [1-3].

پایین بودن ذاتی هدایت حرارتی سیال‌های پایه همچون آب، انواع روغن‌ها و اتیلن گلیکول، اصلی‌ترین علت پایین بودن کارایی دستگاه‌هایی است که از این سیال‌ها استفاده می‌کنند. استفاده از ذرات جامد فلزی با هدایت حرارتی بالا یکی از راه‌حل‌هایی است که محققین برای حل این مشکل پیشنهاد نموده‌اند. با پیشرفت فناوری و امکان ساخت ذراتی در مقیاس نانو، چوبی و همکارانش [4] نخستین کسانی بودند که ایده افزودن نانوذرات (معمولاً ذراتی با ابعاد کمتر از 100 نانومتر) به سیال پایه را پیشنهاد نمودند و آن را نانوسیال نامیدند.

مطالعات زیادی با روش‌های تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی برای بررسی جریان جابجایی آزاد نانوسیال‌ها در محفظه‌های دوبعدی انجام شده است.

کیم و همکاران [5] به‌طور تحلیلی به بررسی ناپایداری انتقال حرارت جابجایی آزاد ریلی-بنارد برای نانوسیال‌ها پرداختند. آن‌ها دیواره‌ها را در دمای ثابت قرار دارند و برای لزجت و هدایت حرارتی نانوسیال از مدل‌های مختلفی استفاده نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که با حضور نانوذرات، ضریب انتقال حرارت نانوسیال افزایش می‌یابد.

در رویکرد آزمایشگاهی می‌توان به مطالعه انجام‌شده توسط ون و دینگ [6] برای جریان جابجایی آزاد نانوسیال آب-اکسید تیتانیم اشاره نمود. آن‌ها کاهش پارامترهای انتقال حرارت را با افزودن نانوذرات به سیال پایه مشاهده نمودند.

در رویکرد عددی نیز در سال‌های اخیر حل مسئله انتقال حرارت جابجایی آزاد نانوسیال در محفظه‌های بسته دوبعدی مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. از جمله این تحقیقات می‌توان به مطالعات انجام‌شده توسط خانافر و همکاران [7] و امین الساداتی و قاسمی [8] برای نانوسیال آب-اکسید مس در محفظه مربعی با دمای ثابت دیواره‌ها اشاره کرد. نتایج حاصل از این تحقیق‌ها نشان داد که با افزودن نانوذرات در تمام محدوده موردبررسی، میزان انتقال حرارت افزایش می‌یابد.

همان‌طور که در مطالعات بالا مشاهده می‌شود، یک تناقض در مورد اثر افزایشی انتقال حرارت با حضور نانوذرات در جریان جابجایی طبیعی وجود دارد. یکی از عوامل این تناقض می‌تواند مدل استفاده‌شده برای لزجت و هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال باشد. برای استدلال این مطلب می‌توان به مطالعات [9-12] اشاره نمود. نتایج این مطالعات نشان می‌دهد که مدل لزجت و هدایت حرارتی مورد استفاده می‌تواند تعیین‌کننده افزایش یا کاهش عدد ناسلت در حضور نانوذرات باشد؛ بنابراین مدل‌های لزجت و هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال پارامترهای کلیدی برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال‌ها به شمار می‌روند. از سوی دیگر تعداد زیادی از محققان نشان داده‌اند که حرکت براونی تأثیر بسزایی در لزجت و هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال دارد؛ بنابراین می‌توان گفت حرکت براونی نقش اساسی در کارایی حرارتی جابجایی طبیعی نانوسیال‌ها دارد.

مسئله انتقال حرارت جابجایی آزاد درون محفظه شامل سیال هادی جریان الکتریسیته تحت تأثیر میدان مغناطیسی (مگنتوهیدرودینامیک) نیز با توجه به کاربردهای فراوان در صنایع مهندسی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [13]. از جمله این کاربردها می‌توان به استخراج انرژی زمین‌گرمایی، رشد کریستال‌ها در سیال، خنک کاری راکتورهای هسته‌ای،

نمایش داده می‌شود که  $n$  بیانگر بعد و  $m$  بیانگر تعداد راستاهای مجاز برای حرکت ذرات است. مدل D2Q9 مرسوم‌ترین روش دوبعدی است و در مطالعه حاضر استفاده شده است. در این مدل هشت راستای مجاز برای حرکت داریم که در "شکل 2" نمایش داده شده است.  $\vec{c}_i$  ها به صورت رابطه (3) بیان می‌شوند که  $c = \Delta x / \Delta t$  سرعت ذرات مجازی روی شبکه است [26].

$$\begin{cases} \vec{c}_i = 0 & , i = 0 \\ \vec{c}_i = c(\cos \theta_i, \sin \theta_i); \theta_i = (i - 1) \frac{\pi}{2} & , i = 1, 2, 3, 4 \\ \vec{c}_i = c\sqrt{2}(\cos \theta_i, \sin \theta_i); \theta_i = (i - 5) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & , i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3)$$

تابع توزیع تعادلی نیز به صورت رابطه (4) تعریف شده است [26].

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[ 1 + 3 \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{u}}{C^2} + \frac{9(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{2C^4} - \frac{3\vec{u}^2}{2C^2} \right] \quad (4)$$

که  $\rho$  و  $\vec{u}$  خواص ماکروسکوپی هستند و  $\omega_i$  ها ضرایب وزنی تابع توزیع تعادلی در راستای  $i$  هستند و به صورت رابطه (5) بیان می‌شوند:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & , i = 0 \\ \frac{1}{9} & , i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{36} & , i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (5)$$

برای بازیابی معادله ناویر-استوکس از معادله بولتزمن، زمان آرامش ( $\tau_\theta$ ) با لزجت سینماتیکی ( $\nu$ ) به صورت رابطه (6) مرتبط خواهد شد [26]:

$$\nu = C_s^2 \Delta t (\tau_\theta - 0.5) \quad (6)$$

در رابطه (6)  $C_s$  سرعت صوت است که روی شبکه برابر با  $c/\sqrt{3}$  در نظر گرفته می‌شود. برای آن که مقدار لزجت سینماتیکی از نظر فیزیکی بامعنی باشد، باید محدودیت  $\tau_\theta > 0.5$  برای رابطه (6) لحاظ شود. جزئیات به دست آوردن این ارتباط به طور کامل در مرجع [27] آورده شده است.

خواص ماکروسکوپی همانند چگالی و سرعت سیال به ترتیب از روابط (7) و (8) محاسبه شده است [26].

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (7)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_{i=0}^8 \vec{c}_i f_i \quad (8)$$

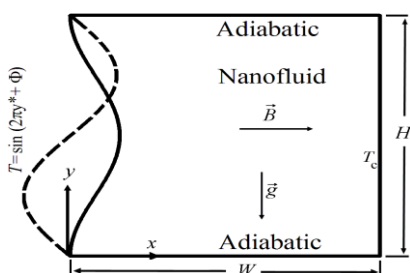


Fig. 1 Schematic for the physical configuration and coordinate system  
شکل 1 طرحواره‌ای از شکل فیزیکی و دستگاه مختصات

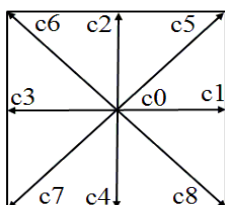


Fig. 2 Discrete velocity vectors for the D2Q9 model  
شکل 2 بردارهای سرعت گسسته شده برای مدل D2Q9

از جمله مهم‌ترین حالت‌های مسائل جابجایی آزاد که در حوزه‌های عملی نیز کاربرد زیادی دارد و کمتر مورد توجه قرار گرفته است، حالتی است که در آن توزیع دما بر روی دیواره منحنی به صورت غیریکنواخت باشد. به عنوان مثال در کلکتورهای خورشیدی، شبکه‌ای از لوله‌ها در مقابل جذب‌کننده وجود دارد که توزیع دما روی آن‌ها به صورت سینوسی مدل می‌شود. نمونه‌های دیگری از این نوع مسائل در تکنولوژی شیشه‌سازی و صنایع خشک‌کردن محصولات رخ می‌دهد [24]. شهبازی [25] با استفاده از روش شبکه بولتزمن جابجایی آزاد نانوسیال آب-اکسید آلومینیم را در یک محفظه با دیواره‌های موجی پیچیده و توزیع دمای غیریکنواخت بررسی نمود. او نشان داد که با تنظیم پارامترهای دیواره‌های موجی می‌توان به یک انتقال حرارت بهینه دست یافت.

با وجود این که مسئله انتقال حرارت نانوسیال‌ها تحت تأثیر میدان مغناطیسی برای هندسه‌هایی با دیواره‌های منحنی دارای شرایط مرزی یکنواخت و نیز برای دیواره‌های صاف با شرایط مرزی غیریکنواخت مورد مطالعه محققین قرار گرفته است اما اثر شرایط مرزی غیریکنواخت بر روی مرزهای منحنی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است؛ بنابراین در این تحقیق شرایط مرزی غیریکنواخت بر روی دیواره منحنی اعمال شده است و رژیم انتقال حرارت جابجایی آزاد نانوسیال آب-اکسید مس با در نظر گرفتن حرکت براونی تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت در محفظه با دیواره موجی بررسی شده است.

## 2- بیان مسئله و مدل ریاضی

### 2-1- بیان مسئله

"شکل 1" محفظه دوبعدی به ارتفاع  $H$  و دیواره جانبی موجی حاوی نانوسیال آب-اکسید مس را نشان می‌دهد. دیواره سمت چپ دارای توزیع دمای غیریکنواخت سینوسی و دیواره سمت راست در دمای ثابت و سرد قرار دارد. دیواره‌های بالا و پایین صاف و عایق در نظر گرفته شده‌اند. نیروی حجمی گرانشی بر کل محفظه و در راستای منفی محور  $y$  اعمال شده است و یک میدان مغناطیسی نیز در راستای مثبت محور  $x$  جریان جابجایی آزاد را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در مطالعه حاضر رینولدز مغناطیسی بسیار کوچک‌تر از یک است؛ بنابراین پخش مغناطیسی غالب‌تر از جابجایی مغناطیسی خواهد بود و در نتیجه جریان نانوسیال میدان مغناطیسی را تغییر نخواهد داد و می‌توان در کل میدان حل، میدان مغناطیسی را ثابت فرض نمود.

برای شبیه‌سازی پروفیل بدون بعد مربوط به دیواره چپ محفظه از رابطه (1) استفاده شده است.

$$x^* = a(1 - \cos(2n\pi y^*)) \quad (1)$$

که در رابطه (1)  $x^*$  و  $y^*$  محورهای مختصات بدون بعد،  $a$  و  $n$  به ترتیب دامنه بی‌بعد و تعداد نوسان پروفیل دیواره هستند.

### 2-2- روش شبکه بولتزمن

در روش شبکه بولتزمن معادله حاکم، معادله بولتزمن است که با گسسته‌سازی این معادله برای مکان و زمان، تابع توزیع چگالی به صورت رابطه (2) به دست می‌آید [26].

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_\theta} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)] \quad (2)$$

در معادله (2)،  $f_i$  تابع توزیع چگالی و  $f_i^{eq}$  تابع توزیع تعادلی نامیده می‌شوند و  $\vec{c}_i$  بستگی به مدل انتخاب شده دارد. مدل مورد استفاده برای گسسته‌سازی معادله بولتزمن بر روی یک شبکه عموماً به صورت DnQm

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{uW}{\alpha_f} \\
 V &= \frac{vW}{\alpha_f} \\
 \alpha^* &= \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \\
 \mu &= \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \\
 k &= \frac{k_{nf}}{k_f} \\
 \theta &= \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \\
 Pr &= \frac{\rho c_p \alpha_f}{k_f} \\
 Ra &= \frac{g \beta H^3 \Delta T}{\nu \alpha_f} \quad (18)
 \end{aligned}$$

با استفاده از معادلات بی‌بعد شده، شرایط مرزی مسئله به صورت رابطه (19) بیان شده است.

$$\begin{aligned}
 U = V = 0, \quad \theta = \sin\left(\frac{2\pi y}{H} + \Phi\right), \quad \Phi = 0 & \quad \text{دیواره سمت چپ} \\
 U = V = 0, \quad \theta = 0 & \quad \text{دیواره سمت راست} \\
 U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = 0 & \quad \text{دیواره‌های بالا و پایین}
 \end{aligned} \quad (19)$$

برای اعمال شرایط مرزی سرعت روی دیواره‌های بالا، پایین و راست از شرط مرزی انعکاسی استفاده شده است، مثلاً برای دیواره سمت راست داریم:

$$f_{6,n} = f_{8,n}, \quad f_{7,n} = f_{5,n}, \quad f_{3,n} = f_{1,n} \quad (20)$$

برای اعمال شرایط مرزی دما روی دیواره‌های عایق بالا و پایین از شرط مرزی انعکاسی استفاده شده است، مثلاً برای دیواره بالا داریم:

$$g_{7,n} = g_{5,n}, \quad g_{8,n} = g_{6,n}, \quad g_{4,n} = g_{2,n} \quad (21)$$

برای دیواره سمت راست دما معلوم و برابر صفر است بنابراین داریم:

$$g_{6,n} = -g_{8,n}, \quad g_{7,n} = -g_{5,n}, \quad g_{3,n} = -g_{1,n} \quad (22)$$

برای محاسبه سرعت و دما بر روی مرزهای منحنی به ترتیب از روش‌های ارائه شده توسط می و همکاران [28] و جو و همکاران [29] استفاده شده است. در "شکل 3" نمایی از مرز منحنی مورد استفاده و شبکه گره‌ها آورده شده است. گره‌های موجود در ناحیه مرز جامد با زیرنویس  $b$ ، محل تقاطع مرز منحنی با شبکه‌بندی با زیرنویس  $w$  و اولین و دومین گره در هر یک از راستاهای شبکه درون ناحیه محاسباتی نیز به ترتیب با زیرنویس‌های  $f$  و  $ff$  نام‌گذاری شده‌اند. هم‌چنین پارامتر  $\Delta$  برای محاسبه توابع توزیع چگالی و انرژی پس از برخورد، با رابطه (23) تعریف شده است [28].

$$\Delta = \frac{|\vec{x}_f - \vec{x}_w|}{|\vec{x}_f - \vec{x}_b|} \quad (23)$$

برای اعمال مرحله پخش روی گره‌های سیال در مجاورت مرز منحنی نیاز به محاسبه  $\vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_b, t)$  و  $\vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_f, t)$  داریم که  $\vec{e}_{\alpha} = -\vec{e}_{\alpha}$  محاسبه توابع

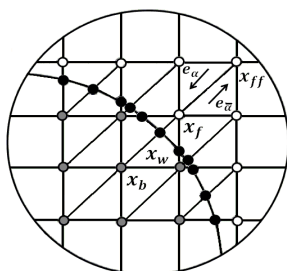


Fig. 3 Curved wall boundary and lattice nodes

شکل 3 مرز دیواره منحنی و شبکه گره‌ها

سرانجام حل معادله شبکه بولتزمان در دو مرحله برخورد و پخش انجام می‌شود. رابطه (9) مرحله برخورد و رابطه (10) مرحله پخش را نشان می‌دهد.

$$\vec{f}_i(\vec{x}, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_9} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)] \quad (9)$$

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = \vec{f}_i(\vec{x}, t + \Delta t) \quad (10)$$

در رابطه‌های (9) و (10)،  $\vec{f}$  نشانگر تابع توزیع بعد از برخورد است.

نیروی خارجی موجود در مسئله انتقال حرارت جابجایی آزاد، نیروی شناوری است که در معادله جریان ظاهر می‌شود. برای اعمال نیروی خارجی  $F$  معادله شبکه بولتزمان به صورت رابطه (11) تبدیل خواهد شد [26].

$$\begin{aligned}
 f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \Delta t, t + \Delta t) &= f_i(\vec{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_9} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)] \\
 &+ \Delta t F_i(\vec{x}, t) \cdot \frac{\vec{c}_i}{C_s^2} \quad (11)
 \end{aligned}$$

برای محاسبه نیروی شناوری از تقریب بوزینیسک که تغییرات چگالی با دما را به صورت خطی در نظر می‌گیرد، استفاده شده است. نیروی  $F$  در معادله (11) با استفاده از تقریب مذکور و تأثیر میدان مغناطیسی به صورت رابطه (12) تعریف شده است [22].

$$\begin{aligned}
 F &= F_x + F_y \\
 F_x &= w_i \rho \left[ \frac{Ha^2 \mu}{H^2} (v \sin(\gamma) \cos(\gamma) - (u \sin^2(\gamma))) \right] \\
 F_y &= w_i \rho \left[ g_y \beta (T(\vec{x}, t) - T_{\infty}) + \frac{Ha^2 \mu}{H^2} (u \sin(\gamma) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cos(\gamma) - (v \cos^2(\gamma))) \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

در رابطه (12)،  $g_y$  شتاب گرانشی در راستای  $y$  است و  $T_{\infty}$  برابر حداقل دما در نظر گرفته می‌شود ( $T_{\infty} = 0$ ). هم‌چنین پارامتر  $Ha$  در رابطه (12)، عدد هارتمن است که به صورت نسبت نیروی لورنتس به نیروهای ویسکوز بیان شده و به صورت رابطه (13) تعریف می‌شود.

$$Ha = HB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \quad (13)$$

با صرف نظر از اتلاف ویسکوز معادله انرژی شبکه بولتزمان به صورت رابطه (14) مشخص می‌شود [26].

$$g_i(\vec{x} + \vec{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(\vec{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_T} [g_i(\vec{x}, t) - g_i^{eq}(\vec{x}, t)] \quad (14)$$

در رابطه (14) تابع توزیع انرژی در راستای سرعت گسسته شده  $i$  با  $g_i$  نشان داده شده است و تابع توزیع انرژی تعادلی و دمای ماکروسکوپی به ترتیب توسط روابط (15) و (16) بیان شده‌اند [26].

$$g_i^{eq} = \omega_i T \left[ 1 + 3 \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{u}}{C^2} + \frac{9 (\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{2 C^4} - \frac{3 \vec{u}^2}{2 C^2} \right] \quad (15)$$

$$T = \sum_{i=0}^8 g_i \quad (16)$$

در نهایت برای بازیابی صحیح معادله انرژی از معادله حرارتی شبکه بولتزمان باید ضریب نفوذ حرارتی به صورت رابطه (17) بیان شود [26].

$$\alpha = C_s^2 \Delta t (\tau_T - 0.5) \quad (17)$$

و برای داشتن یک مقدار مثبت برای  $\alpha$  باید برای زمان آرامش محدودیت  $\tau_T > 0.5$  در رابطه (17) لحاظ شود.

### 2-3- اعمال شرایط مرزی

در رابطه (18) پارامترهای بی‌بعد در مسئله نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{W} \\
 y^* &= \frac{y}{W}
 \end{aligned}$$

خواص ترموفیزیکی نانوذرات و سیال پایه در جدول 1 آورده شده است [30]. رابطه (43) تا (45) به ترتیب چگالی، ظرفیت گرمایی و انبساط حرارتی مؤثر نانوسیال را براساس مرجع [30] تعریف نموده است.

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad (43)$$

$$(c_p)_{nf} = \left[ \frac{1}{1 + \frac{(1-\varphi)\rho_f}{\varphi\rho_p}} \frac{(c_p)_p}{(c_p)_f} + \frac{1}{1 + \frac{\varphi\rho_p}{(1-\varphi)\rho_f}} \right] (c_p)_f \quad (44)$$

$$\beta_{nf} = \left[ \frac{1}{1 + \frac{(1-\varphi)\rho_f}{\varphi\rho_p}} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{1 + \frac{\varphi\rho_p}{(1-\varphi)\rho_f}} \right] \beta_f \quad (45)$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، حرکت براونی به‌عنوان یک پارامتر اصلی در کارایی حرارتی نانوسیال‌ها به شمار می‌آید. احترام و همکاران [31] با بررسی مدل‌های مختلف هدایت حرارتی شامل اثر حرکت براونی، نشان دادند که مدل کو و کلینستور [32] نزدیک‌ترین رفتار را نسبت به مدل آزمایشگاهی دارد؛ بنابراین در کار حاضر برای هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال از مدل توسعه‌یافته کو و کلینستور [32] که اثرات حرکت براونی را لحاظ می‌کند استفاده شده است. مدل مذکور همچنین اثرات دمای نانوسیال، کسر حجمی و قطر متوسط نانوذرات را در نظر گرفته و شامل دو بخش استاتیک و بخش حرکت براونی می‌شود که به‌صورت رابطه (46) بیان شده است.

$$k_{nf} = k_{static} + k_{Brownian} \quad (46)$$

$$k_{static} = k_f \frac{k_p + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_p)}{k_p + 2k_f + \varphi(k_f - k_p)} \quad (47)$$

$$k_{Brownian} = 5 \times 10^4 \beta \varphi \rho_f c_{p,f} \sqrt{\frac{K_b T}{d_p \rho_p}} f(T, \varphi) \quad (48)$$

$$\beta = 0.0137(100\varphi)^{-0.8229}, \quad \varphi \leq 1\% \quad (49)$$

$$\beta = 0.0011(100\varphi)^{-0.7272}, \quad \varphi > 1\% \quad (50)$$

$$f(T, \varphi) = (-6.04\varphi + 0.4705)T + (1722.3\varphi - 134.63) \quad (51)$$

همچنین کو و کلینستور [33] مدلی برای محاسبه لزجت مؤثر نانوسیال با در نظر گرفتن اثرات حرکت براونی به‌صورت رابطه (52) ارائه نمودند.

$$\mu_{nf} = \mu_{static} + \mu_{Brownian} \quad (52)$$

$$\mu_{static} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (53)$$

$$\mu_{Brownian} = 5 \times 10^4 \beta \varphi \rho_f \sqrt{\frac{K_b T}{d_p \rho_p}} f(T, \varphi) \quad (54)$$

### 3- ارزیابی استقلال شبکه و اعتبار سنجی نتایج

برای اطمینان از عدم وابستگی نتایج به شبکه انتخاب‌شده، عدد ناسلت محلی بر روی دیواره سمت چپ محفظه با دیواره موجی و توزیع غیریکنواخت دما برای پنج شبکه یکنواخت مختلف محاسبه و در "شکل 4" نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که برای بهینه نمودن محاسبات از نظر دقت و هزینه، می‌توان شبکه 121×121 را انتخاب نمود.

جدول 1 خواص ترموفیزیکی آب و نانوذرات

خواص	آب	نانوذرات اکسید مس
$\rho(\text{kg/m}^3)$	997.1	6500
$c_p(\text{J/kgK})$	4179	540
$k(\text{W/mK})$	0.613	18
$\beta \times 10^5 (1/\text{K})$	21	0.85
$\mu \times 10^4 (\text{Pas})$	8.54	-

مذکور به کمک اطلاعات مرز منحنی و گره‌های مرز جامد انجام می‌شود.

$$\vec{f}_{\alpha}^*(\vec{x}_b, t) = (1 - \chi)\vec{f}_{\alpha}^*(\vec{x}_f, t) + \chi f_{\alpha}^*(\vec{x}_b, t) - 2\omega_{\alpha}\rho(\vec{x}_f, t) \frac{3}{C^2} \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{u}_w \quad (24)$$

$$f_{\alpha}^*(\vec{x}_b, t) = f_{\alpha}^{eq}(\vec{x}_f, t) + \omega_{\alpha}\rho(\vec{x}_f, t) \frac{3}{C^2} \vec{e}_{\alpha} \cdot (\vec{u}_{bf} - \vec{u}_f) \quad (25)$$

می و همکارانش [28] برای محاسبه فاکتور وزنی  $\chi$  و سرعت مجازی  $\vec{u}_{bf}$  روابط (26) و (27) را پیشنهاد نمودند.

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_{ff} = \vec{u}(\vec{x}_{ff}, t), \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau - 2}, \quad 0 < \Delta \leq \frac{1}{2} \quad (26)$$

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_f + \frac{3}{2\Delta}(\vec{u}_w - \vec{u}_f), \quad \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau - 0.5}, \quad \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1 \quad (27)$$

برای تابع توزیع انرژی نیز از روابط پیشنهادی توسط جو و همکاران [29] استفاده شده است.

$$\vec{g}_{\alpha}(\vec{x}_b, t + \Delta t) = g_{\alpha}^{eq}(\vec{x}_b, t) + (1 - \frac{1}{\tau_T})g_{\alpha}^{neq}(\vec{x}_b, t) \quad (28)$$

$$g_{\alpha}^{eq}(\vec{x}_b, t) = \omega_{\alpha} T_b^* (1 + \frac{3}{C^2} \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{u}_b^*) \quad (29)$$

$$g_{\alpha}^{neq}(\vec{x}_b, t) = \Delta g_{\alpha}^{neq}(\vec{x}_f, t) + (1 - \Delta)g_{\alpha}^{neq}(\vec{x}_{ff}, t) \quad (30)$$

در رابطه (29) مقدار  $T_b^*$  و  $\vec{u}_b^*$  به  $\Delta$  بستگی دارد.

$$\vec{u}_b^* = \vec{u}_{b1}, \quad \Delta > 0.75 \quad (31)$$

$$\vec{u}_b^* = \vec{u}_{b1} + (1 - \Delta)\vec{u}_{b2}, \quad \Delta \leq 0.75 \quad (32)$$

$$T_b^* = T_{b1}, \quad \Delta > 0.75 \quad (33)$$

$$T_b^* = T_{b1} + (1 - \Delta)T_{b2}, \quad \Delta \leq 0.75 \quad (34)$$

$$\vec{u}_{b1} = \frac{1}{\Delta}[\vec{u}_w + (\Delta - 1)\vec{u}_f] \quad (35)$$

$$\vec{u}_{b2} = \frac{1}{\Delta + 1}[2\vec{u}_w + (\Delta - 1)\vec{u}_{ff}] \quad (36)$$

$$T_{b1} = \frac{1}{\Delta}[T_w + (\Delta - 1)T_f] \quad (37)$$

$$T_{b2} = \frac{1}{\Delta + 1}[2T_w + (\Delta - 1)T_{ff}] \quad (38)$$

به‌منظور داشتن معیاری برای تعیین مقدار انتقال حرارت اعداد ناسلت محلی، ناسلت میانگین و نسبت ناسلت بر روی دیواره سمت چپ به ترتیب با روابط (39)، (41) و (42) محاسبه شده است.

$$Nu_l = -\frac{k_{nf}}{k_f} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n^*} \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n^*} = \sqrt{\left( \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right)^2} \quad (40)$$

$$Nu_m = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_l d\eta \quad (41)$$

$$Nu = \frac{Nu_m(\varphi)}{Nu_m(\varphi = 0)} \quad (42)$$

در روابط (40) و (41)،  $n$  راستای عمود بر دیواره موجی،  $L$  بیانگر طول دیواره موجی و  $\eta$  متغیر انتگرال‌گیری در راستای دیواره موجی هستند.

### 4-2- معادلات حاکم برای نانوسیال‌ها

در این مطالعه نانوسیال، نیوتنی، غیرقابل تراکم و تک‌فاز فرض شده و جریان نیز دوبعدی، آرام، پایا و بدون اثرات تابشی در نظر گرفته شده است. خواص فیزیکی نانوسیال نیز نسبت به تغییرات دما ثابت در نظر گرفته شده به‌جز چگالی در معادله نیروی شناوری که تغییرات آن با اعمال تقریب بوزینیسک حاصل می‌شود. همچنین به‌علت استفاده از مدل تک‌فازی فرض شده است که نانوذرات جامد مشابه همان ذرات سیال پایه هستند و تعادل دمایی و سرعت برابر بین نانوذرات جامد و ذرات سیال پایه برقرار خواهد بود.

جدول 2 مقایسه عدد ناسلت میانگین در محفظه مربعی

$$(Ra = 10^5, \phi = 0.0, n = 0)$$

Table 2: Comparison of the mean Nusselt numbers in the square cavity. (Ra = 10<sup>5</sup>, φ = 0.0, n = 0)

عدد ناسلت میانگین			هارتمن
مرجع [35]	مرجع [34]	مرجع [19]	مطالعه حاضر
4.722	4.794	4.738	4.6865
-----	-----	4.143	4.1006
3.143	3.224	3.150	3.1203
-----	-----	2.369	2.3461
1.865	1.900	1.851	1.8311
-----	1.356	-----	1.3145

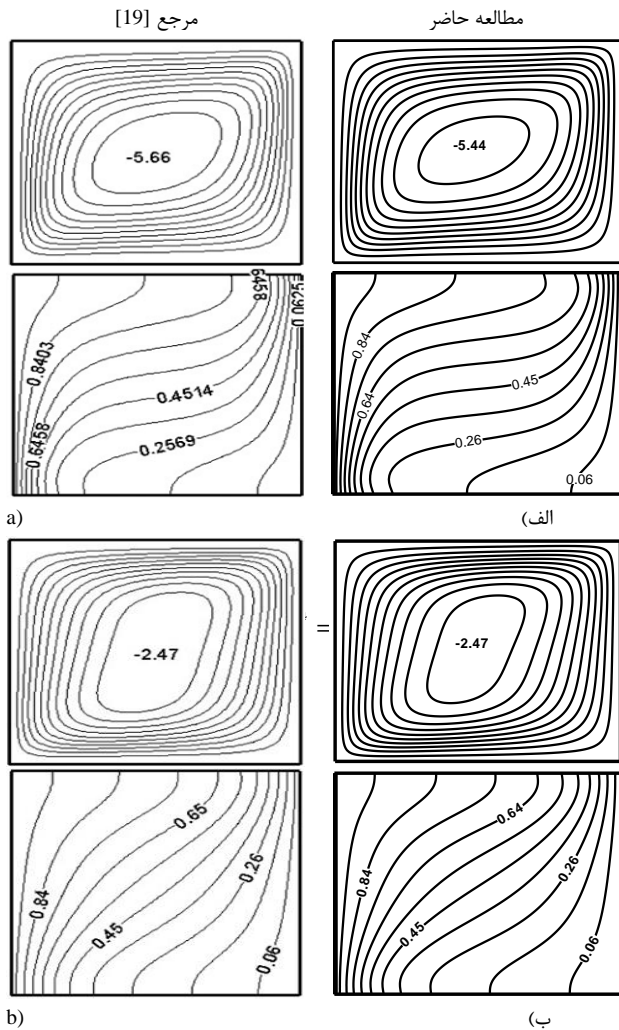


Fig. 5 Comparison of streamlines and isotherms contours for (a) Ha = 30 (b) Ha = 60. (Ra = 10<sup>5</sup>, φ = 0.03)

شکل 5 مقایسه خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای (الف) Ha = 30، (ب) Ha = 60. (Ra = 10<sup>5</sup>, φ = 0.03)

هم‌دما کمتر شده و به تدریج موازی دیواره سمت راست می‌شوند که بیانگر غالب شدن جریان هدایتی نسبت به جابجایی در محفظه است. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با افزایش عدد هارتمن خطوط هم‌دما تمایل به دور شدن از دیواره موجی را دارند که منجر به کاهش گرادیان دمایی در این ناحیه می‌شود.

در "شکل 6" تأثیر افزایش کسر حجمی نانوذرات با خط‌چین‌ها نشان داده شده است. با افزایش کسر حجمی ماکزیمم مقدار تابع جریان کاهش

معیار همگرایی برای پایان محاسبات با رابطه (55) بیان شده است.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |T^{n+1} - T^n|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |T^n|} < 10^{-7} \quad (55)$$

در رابطه (55)، n بیانگر مرحله زمانی قدیم، n+1 بیانگر مرحله زمانی جدید و ε خطای مجاز بین مرحله قدیم و جدید محاسبات عددی است. تعداد گره‌ها در راستای x و y به ترتیب با M و N نشان داده شده است. به‌منظور اعتبارسنجی نتایج، عدد ناسلت میانگین در یک محفظه مربعی برای اعداد هارتمن متفاوت بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده با نتایج مطالعه‌های مشابه قبلی [35,34,19] در جدول 2 آورده شده است. همچنین به‌منظور اطمینان یافتن از صحت نتایج، خطوط جریان و خطوط هم‌دما در "شکل 5" با دو روش مختلف با هم مقایسه شده‌اند. اعتبارسنجی انجام‌شده تطبیق خوب نتایج با نتایج عددی پیشین به روش‌های دیگر را نشان می‌دهد.

#### 4- نتایج

##### 4-1- اثر میدان مغناطیسی و کسر حجمی بر روی جریان و انتقال حرارت

در این بخش با در نظر گرفتن n = 1 و a = 0.1 روی جریان و انتقال حرارت نانوسیال بحث شده است. "شکل 6" خطوط جریان و هم‌دما را برای اعداد رایلی و هارتمن مختلف در دو کسر حجمی نشان می‌دهد. خطوط جریان در همه حالت‌ها دارای دو سلول گردشی متقارن نسبت به خط افقی مرکزی بوده که در خلاف جهت همدیگر هستند و سلول پایینی ساعت‌گرد می‌چرخد. این امر به‌دلیل واقع شدن چشمه حرارتی در بخش پایینی دیواره رخ می‌دهد و باعث می‌شود سلول پایینی گرما را از دیواره دریافت و به سلول بالایی منتقل کند. همچنین با افزایش رایلی مقدار تابع جریان افزایش می‌یابد مثلاً در "شکل 6b"

ولی با افزایش عدد هارتمن مقدار مذکور کاهش می‌یابد مثلاً در Ra = 10<sup>5</sup> که بر کاهش اثرات جابجایی دلالت دارد. به‌علاوه کشیده شدن سلول‌ها موازی محور افقی باعث ایجاد گرادیان دمایی در راستای افق می‌شود.

در "شکل 6" مشاهده می‌شود که به‌علت توزیع غیریکنواخت دما، خطوط هم‌دما با دیواره موجی برخورد نموده و باعث ایجاد سلول‌هایی روی این دیواره شده است. با افزایش عدد رایلی انحنای قابل‌ملاحظه‌ای در خطوط هم‌دما به وجود می‌آید درحالی‌که با افزایش عدد هارتمن انحنای خطوط

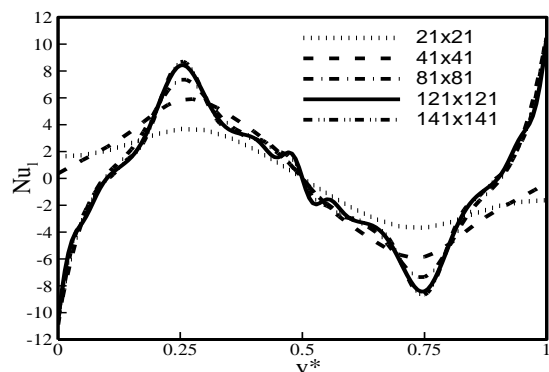


Fig. 4 Variations of local Nusselt number for different mesh size on wavy-wall. (Ra = 10<sup>4</sup>, Ha = 30, φ = 0.04, n = 2, a = 0.1)

شکل 4 تغییرات عدد ناسلت محلی برای شبکه‌های مختلف روی دیواره موجی (Ra = 10<sup>4</sup>, Ha = 30, φ = 0.04, n = 2, a = 0.1)

عدد ناسلت میانگین با افزایش عدد رایلی افزایش می‌یابد. علت این امر افزایش نیروهای شناوری با افزایش عدد رایلی است که منجر به کاهش لایه مرزی روی دیواره و در نتیجه افزایش اثرات جابجایی می‌شود؛ اما از سوی دیگر "شکل 7" نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن در یک رایلی ثابت به جز رایلی  $Ra = 10^3$ ، ناسلت میانگین کاهش می‌یابد. این کاهش به علت نیروی لورنتس القاشده توسط میدان مغناطیسی افقی اعمال شده بر جریان است که با توجه به معادله (12) به صورت یک نیروی بازدارنده نسبت به نیروی شناوری عمل می‌کند. البته باید دقت داشت که مقدار کاهش عدد ناسلت میانگین تابعی از عدد رایلی است. به عنوان مثال وقتی عدد هارتمن از 0 تا 100 افزایش می‌یابد، عدد ناسلت میانگین در  $Ra = 10^4$  حدود 6% و در رایلی  $Ra = 10^5$  حدود 31% کاهش می‌یابد.

"شکل 8" برای تغییرات عدد ناسلت محلی برحسب کسر حجمی نانوذرات در هارتمن‌های مختلف رسم شده است. با افزایش کسر حجمی نانوذرات و افزایش عدد هارتمن الگوی کلی ناسلت محلی تغییر نکرده ولی حضور نانوذرات نیروهای شناوری را افزایش داده که در نتیجه آن میزان انتقال حرارت در هر دو ناحیه سرد و گرم افزایش یافته است. در قسمت‌هایی از "شکل 8" که عدد ناسلت مثبت است انتقال حرارت از دیواره موجی به سیال رخ می‌دهد و در قسمت‌هایی که ناسلت منفی شده حرارت از سیال در حال چرخش به دیواره در حال انتقال است.

با توجه به "شکل‌های 6 و 8" مشاهده می‌شود که نواحی واقع در مراکز سلول‌های خطوط هم‌دما روی دیواره موجی، اکسترمم‌های نمودار ناسلت محلی هستند و با افزایش عدد هارتمن بیشترین کاهش ناسلت محلی در همین نواحی رخ داده است. علت این تغییرات عدد ناسلت را می‌توان این‌گونه توضیح داد که افزایش و کاهش عدد ناسلت به ترتیب رابطه مستقیم با همگرایی و واگرایی خطوط هم‌دما دارد. در نواحی که خطوط هم‌دما متأثر از پروفیل دیواره همگرا شده‌اند اختلاف دمای بیشتری و در نواحی که خطوط هم‌دما واگرا شده‌اند اختلاف دمای کمتری به وجود آمده است. اختلاف دمای بیشتر منجر به ایجاد گردایان دمایی بیشتر و در نهایت افزایش عدد ناسلت شده است. کاهش عدد ناسلت نیز با استنباطی مشابه قابل توجیه است.

در "شکل 9" به بررسی اثر حضور نانوذرات بر روی نسبت عدد ناسلت  $Nu$  در رایلی‌ها و هارتمن‌های مختلف پرداخته شده است. با مشاهده "شکل 9" نتایج مختلفی به دست می‌آید. اول این که با افزایش کسر حجمی در تمام حالت‌های مورد بررسی، عدد ناسلت افزایش می‌یابد اما مقدار این افزایش تابعی از عدد رایلی است؛ مثلاً در عدد هارتمن  $Ha = 0$  وقتی کسر حجمی از

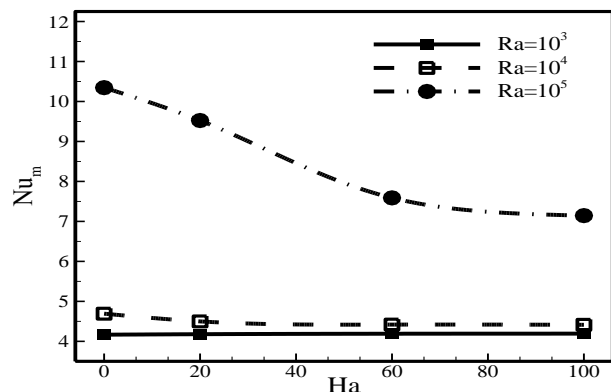


Fig. 7 Variations of mean Nusselt number with Rayleigh and Hartmann numbers. ( $\phi = 0.04$ )

شکل 7 تغییرات عدد ناسلت میانگین با اعداد رایلی و هارتمن. ( $\phi = 0.04$ )

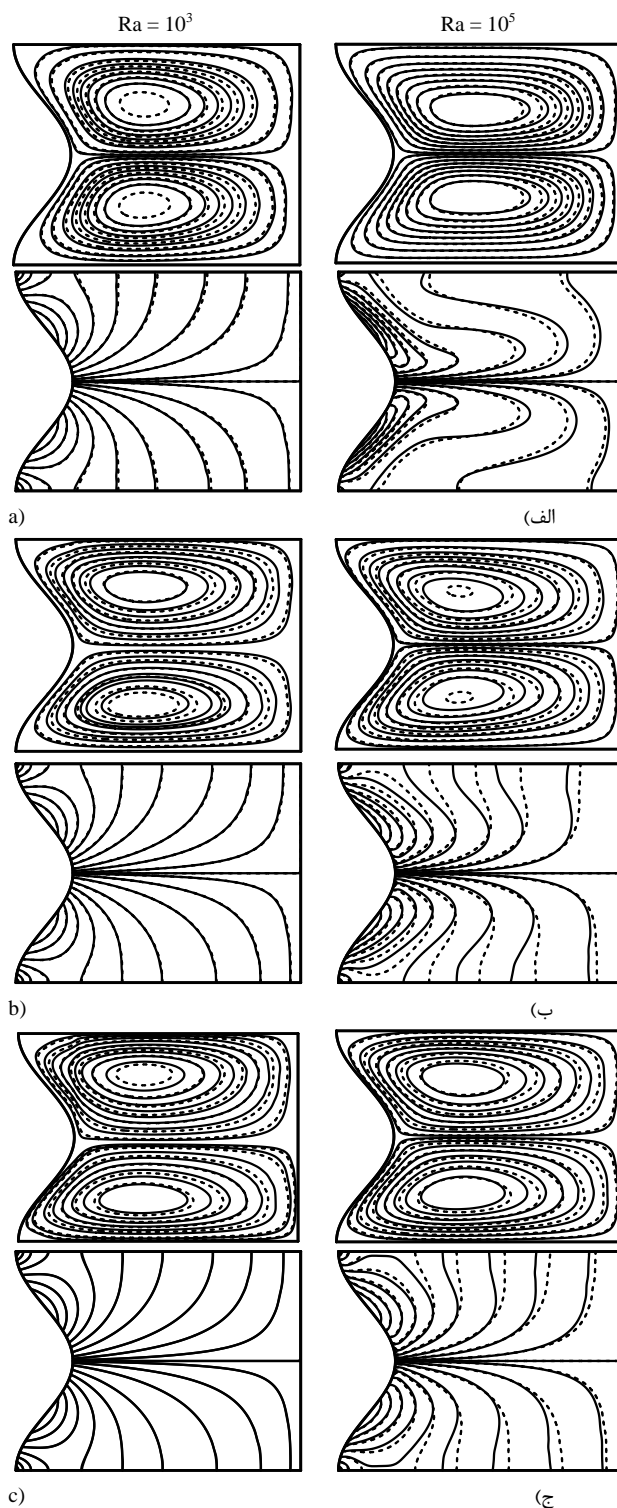


Fig. 6 Comparison of streamlines and isotherms contours for pure water (solid line) and nanofluid with  $\phi = 0.04$  (dashed line) (a)  $Ha = 0$  (b)  $Ha = 60$  (c)  $Ha = 100$

شکل 6 مقایسه خطوط جریان و هم‌دما برای سیال پایه (خط‌های توپر) و نانوسیال با  $\phi = 0.04$  (خط‌چین‌ها) (الف)  $Ha = 0$  (ب)  $Ha = 60$  (ج)  $Ha = 100$

یافته که به علت افزایش لزجت نانوسیال با افزایش کسر حجمی است. انحنای خطوط هم‌دما نیز با افزایش کسر حجمی نانوذرات در حال کم شدن است. در "شکل 7" به بررسی چگونگی تغییرات عدد ناسلت میانگین با عدد هارتمن در رایلی‌های مختلف پرداخته شده است. "شکل 7" نشان می‌دهد که

برای  $n=2$  و  $n=3$  در وسط و گوشه‌های دیواره موجی گردابه‌هایی به وجود آمده‌اند که نسبت به خط افقی مرکزی متقارن بوده و در خلاف جهت سلول‌های بزرگ مجاور خود در حال چرخش هستند و به‌عنوان واسط انتقال حرارت بین دیواره موجی و سلول‌های بزرگ عمل می‌کنند. برای  $n=2$  چون در محل موج‌ها سرعت نسبتاً بالاست جریان با سرعت از روی موج حرکت کرده و گردابه‌های کوچکی به وجود آمده است ولی با افزایش عدد هارتمن چون سرعت کل جریان کاهش یافته است گردابه‌های مرکزی حذف شده‌اند. برای  $n=3$  نیز موج‌ها نزدیک به دیواره‌های افقی قرار دارند که سرعت سیال پایین است بنابراین در وسط گردابه‌ای تشکیل نشده است. علت تشکیل گردابه‌ها در گوشه‌ها کاهش فضای موردنیاز برای ورود سیال است.

برای خطوط هم‌دما نیز مشاهده می‌شود که در تمام حالت‌ها، چگالی خطوط هم‌دما در نواحی فرورفتگی دیواره موجی بیشتر از بقیه نقاط دیواره

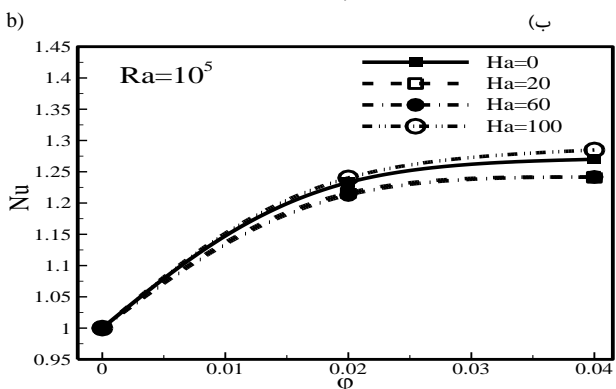
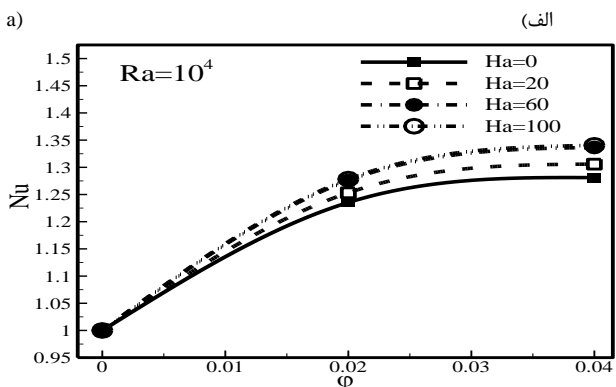
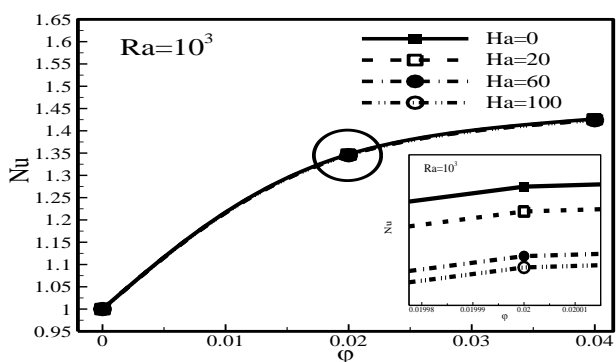


Fig. 9 Variations of the mean Nusselt number ratio at different Ra and Ha numbers. (a)  $Ra = 10^3$  (b)  $Ra = 10^4$  (c)  $Ra = 10^5$

شکل 9 تغییرات نسبت عدد ناسلت برای اعداد رایلی و هارتمن مختلف  
 (الف)  $Ra = 10^3$  (ب)  $Ra = 10^4$  (ج)  $Ra = 10^5$

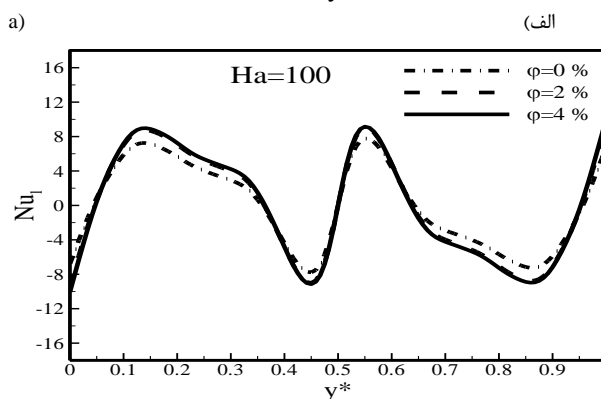
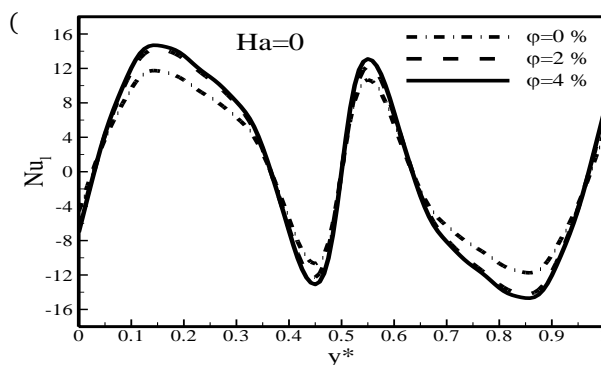


Fig. 8 Variations of local Nusselt number along hot wavy-wall  
 (a)  $Ha = 0$  (b)  $Ha = 100$ . ( $Ra = 10^5$ )

شکل 8 تغییرات عدد ناسلت محلی بر روی دیواره موجی گرم.  
 (الف)  $Ha = 0$  (ب)  $Ha = 100$  ( $Ra = 10^5$ )

0% تا 4% افزایش می‌یابد، نسبت عدد ناسلت در  $Ra = 10^3$  و 27% در  $Ra = 10^5$  افزایش می‌یابد. علت این روند را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که در عدد رایلی کم رژیم انتقال حرارت هدایتی غالب است که با افزایش کسر حجمی نانوذرات هدایت حرارتی نانوسیال و در نتیجه اثرات هدایتی جریان گرما تقویت شده است.

دوم این‌که در رایلی‌های مختلف افزایش قدرت میدان مغناطیسی اثرات مختلفی بر حضور نانوذرات می‌گذارد. در  $Ra = 10^3$  افزایش عدد هارتمن باعث کاهش اثر نانوذرات می‌شود در حالی که در  $Ra = 10^4$  افزایش عدد هارتمن باعث تقویت اثر نانوذرات می‌شود. در  $Ra = 10^5$  افزایش عدد هارتمن تا  $Ha = 20$  اثر نانوذرات را کاهش و افزایش بیشتر هارتمن، تأثیر مثبت بر حضور نانوذرات دارد. علت این پدیده را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که افزایش کسر حجمی و عدد رایلی در تمام حالات باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود اما افزایش میدان مغناطیسی می‌تواند باعث کاهش عدد ناسلت شود از طرفی این افزایش و کاهش به‌طور غیرخطی اثرگذار بوده و در مجموع باعث تغییر شیب عدد ناسلت در حالت‌های مختلف شده است.

#### 4-2- اثر پارامترهای هندسی دیواره موجی بر روی جریان و انتقال حرارت

در "شکل 10" خطوط جریان و هم‌دما برای تعداد موج‌های متفاوت در رایلی  $Ra = 10^5$  و هارتمن‌های مختلف برای نانوسیال با کسر حجمی  $\phi = 0.04$  نشان داده شده است.

با افزایش  $n$  موج‌ها همانند مانع در مسیر جریان عمل کرده و باعث کاهش قدرت جریان می‌شوند مثلاً در  $Ha = 0$



تعداد چشمه و چاه حرارتی روی این دیواره بوده و مستقل از تغییرات عدد هارتمن، عدد رایلی، تعداد موج‌ها و دامنه بی‌بعد موج‌ها می‌باشند.

در  $Ha = 0$  که جریان دارای سرعت نسبتاً بالایی است، افزایش دامنه بی‌بعد موج‌ها باعث افزایش سطح تماس سیال و دیواره و نیز برخورد جریان جابجایی آزاد با دیواره به‌عنوان یک مانع و در نتیجه کاهش قدرت جریان می‌شود ( $|\Psi|_{max}^{a=0.1} = 7.88 > |\Psi|_{max}^{a=0.2} = 7.59 > |\Psi|_{max}^{a=0.3} = 5.5$ ).

در  $Ha = 100$  نیز نکته قابل توجه تغییر مرز سلول‌های چرخشی است که برای  $a = 0.3$  این مطلب کاملاً مشهود است. علت این پدیده می‌تواند کاهش سرعت جریان به دلیل کاهش فضای هندسی باشد که مانع حرکت سلول پایینی به بالا و بنابراین سقوط سلول بالایی به سمت پایین شده است. برای خطوط هم‌دما نیز مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه بی‌بعد، ناحیه پرچگالی خطوط هم‌دما روی نوک موج توسعه یافته است.

به‌منظور بررسی تأثیر دامنه بی‌بعد دیواره موجی بر میدان دما، تغییرات عدد ناسلت میانگین برحسب اعداد هارتمن، به‌عنوان تابعی از دامنه بی‌بعد دیواره در "شکل 13" آورده شده است. "شکل 13" نشان می‌دهد که برای دامنه‌های بزرگ‌تر از  $a = 0.1$  عدد ناسلت افت شدیدی دارد. افزایش دامنه بی‌بعد دو اثر هم‌زمان دارد، اول این که دیواره‌های عمودی نزدیک‌تر شده و گرادیان دما افزایش می‌یابد و اثر دوم اینکه با افزایش  $a$  سطح مبادله کننده انرژی با سیال افزایش و با نزدیکی دیواره‌ها سرعت سیال کم شده و در نتیجه نفوذ حرارت به محفظه کاهش می‌یابد که به علت غالب بودن اثر دوم (عامل نامطلوب از نقطه نظر حرارتی) عدد ناسلت کاهش یافته است. همچنین بیشترین مقدار کاهش ناسلت با تغییر دامنه بی‌بعد دیواره موجی، برابر با 47% است که برای دامنه بی‌بعد  $a = 0.3$  و  $Ha = 0$  اتفاق می‌افتد.

### 3-4- اثر حرکت براونی

در "شکل 14" تأثیر حرکت براونی ذرات بر روی عدد ناسلت در اعداد رایلی و هارتمن مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که از "شکل 14" مشهود است برای تمام حالت‌ها مقدار عدد ناسلت با در نظر گرفتن حرکت براونی بیشتر از حالتی است که حرکت براونی نادیده گرفته شده است. به‌عنوان مثال برای  $Ha = 0$  و  $Ra = 10^3$  افزایش عدد ناسلت در کسر حجمی 0.04 برای مدل براونی و غیر براونی به ترتیب برابر 43% و 25% است. در "شکل 15" تأثیر حرکت براونی ذرات بر روی عدد ناسلت در کسر حجمی‌های مختلف نشان داده شده است. در غیاب مدل براونی عدد ناسلت با افزایش کسر حجمی به‌طور یکنواخت و تدریجی افزایش می‌یابد ولی با لحاظ

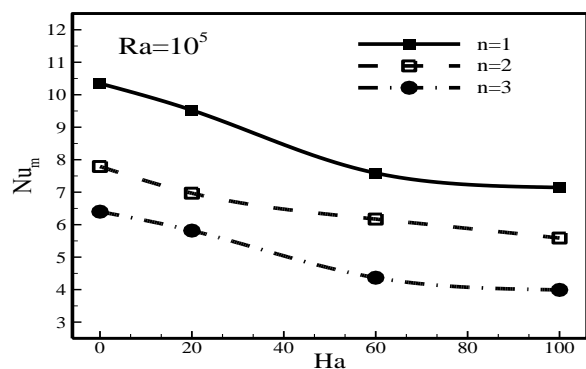


Fig. 11 Variations of mean Nusselt number with undulation number for different Hartmann numbers. ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $a = 0.1$ )

شکل 11 تغییرات عدد ناسلت میانگین با تعداد موج‌ها برای اعداد هارتمن متفاوت. ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $a = 0.1$ )

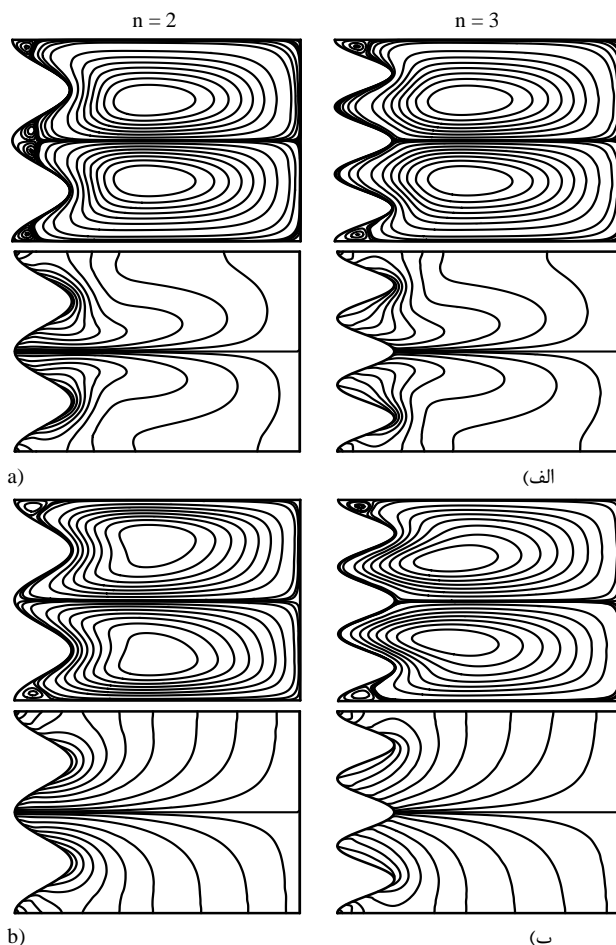


Fig. 10 Comparison of streamlines and isotherms contours (a)  $Ha = 0$  (b)  $Ha = 100$ . ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $a = 0.1$ )

شکل 10 مقایسه خطوط جریان و هم‌دما (الف)  $Ha = 0$  (ب)  $Ha = 100$  ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $a = 0.1$ )

است که باعث افزایش گرادیان دمایی در این نواحی می‌شود. با افزایش  $n$  اگرچه تعداد فرورفتگی‌های دیواره موجی بیشتر و دارای شیب تندتری می‌شوند که باعث افزایش گرادیان دمایی این نواحی می‌شود اما سطح فیزیکی کل موجود برای انتقال حرارت در ناحیه فرورفتگی کاهش می‌یابد.

به‌منظور بررسی تأثیر افزایش تعداد موج‌ها بر میدان دما، تغییرات عدد ناسلت میانگین برحسب عدد هارتمن، به‌عنوان تابعی از تعداد موج‌ها در "شکل 11" آورده شده است. "شکل 11" نشان می‌دهد که با افزایش تعداد موج‌های دیواره عدد ناسلت میانگین در تمام محدوده اعداد هارتمن، کاهش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً بیان شد افزایش  $n$  باعث کاهش سرعت و قدرت جریان می‌شود و این امر موجب کاهش نفوذ حرارت درون محفظه شده که در نهایت کاهش عدد ناسلت میانگین را به همراه دارد. همچنین دیده می‌شود که افزایش عدد هارتمن اثر کاهشی موج‌ها را تقویت کرده به‌طوری‌که بیشترین کاهش عدد ناسلت برابر 44% در  $n = 3$  و  $Ha = 100$  اتفاق می‌افتد.

"شکل 12" به بررسی اثر دامنه بی‌بعد دیواره موجی بر روی خطوط جریان و خطوط هم‌دما در رایلی  $Ra = 10^5$  و هارتمن‌های مختلف برای نانوسیال با کسر حجمی  $\phi = 0.04$  پرداخته است.

با مشاهده "شکل‌های 6، 10 و 12" می‌توان نتیجه گرفت که تعداد سلول‌های بزرگ جریان در حال گردش تابعی از توزیع دمای دیواره موجی یا

میدان مغناطیسی برای نانوسیال آب-اکسید مس به کمک روش شبکه بولتزمن با اعمال روش مرز منحنی و با در نظر گرفتن اثرات حرکت براونی مورد بررسی قرار گرفته است. دیواره‌های بالا و پایین صاف و از نظر حرارتی عایق شده‌اند درحالی‌که دیواره چپ دارای شکل موجی و توزیع غیریکنواخت دما است و دیواره راست صاف و دارای توزیع یکنواخت دما می‌باشد.

اثر عدد رایلی، عدد هارتمن، کسر حجمی نانوذرات، پارامترهای تغییر هندسه و حرکت براونی بر روی توزیع خطوط جریان، توزیع خطوط هم‌دما، عدد ناسلت محلی، عدد ناسلت میانگین و نسبت عدد ناسلت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست‌آمده موارد زیر را نشان می‌دهند.

- 1- شبیه‌سازی انجام‌شده و اعتبارسنجی نتایج نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزمن یک روش مناسب برای حل مسائل مختلف از جمله مسئله با هندسه و شرایط مرزی پیچیده است.
- 2- با افزایش عدد رایلی و کسر حجمی میزان انتقال حرارت افزایش و با افزایش پارامترهای تغییر هندسه و عدد هارتمن (به‌استثنای  $Ra = 10^3$ ) میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد.
- 3- بیشترین کاهش عدد ناسلت با تغییر عدد هارتمن برابر با 31% بوده که برای  $Ra = 10^5$  مشاهده می‌شود.
- 4- بیشترین تأثیر حضور نانوذرات در غیاب میدان مغناطیسی و برای  $Ra = 10^3$  و کسر حجمی 4% اتفاق می‌افتد که عدد ناسلت در این شرایط 43% افزایش می‌یابد.
- 5- با افزایش عدد هارتمن تأثیر حضور نانوذرات در  $Ra = 10^3$  کاهش، در  $Ra = 10^4$  افزایش و در  $Ra = 10^5$  بستگی به عدد

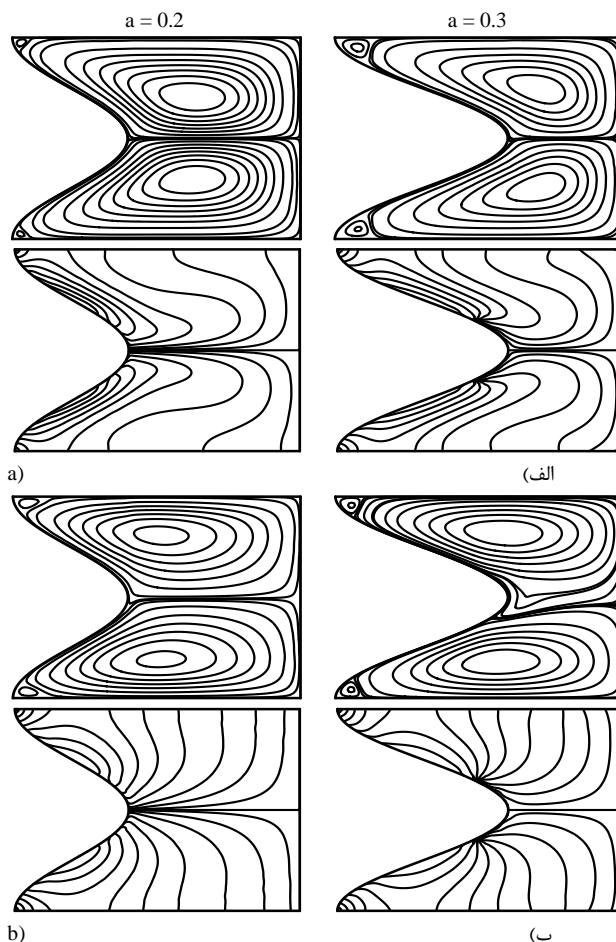


Fig. 12 Comparison of streamlines and isotherms contours (a)  $Ha = 100$  (b)  $Ha = 0$ . ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ )

شکل 12 مقایسه خطوط جریان و هم‌دما (الف)  $Ha = 0$  (ب)  $Ha = 100$  ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ )

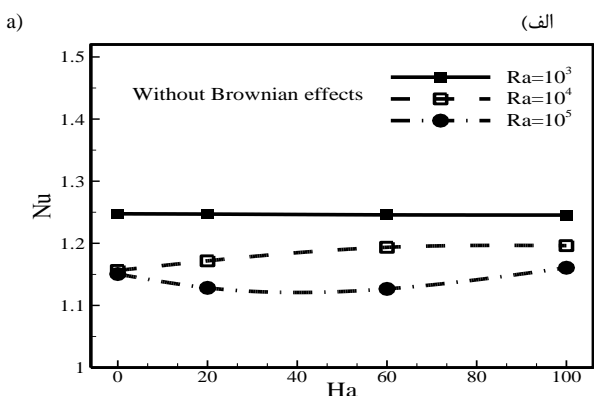
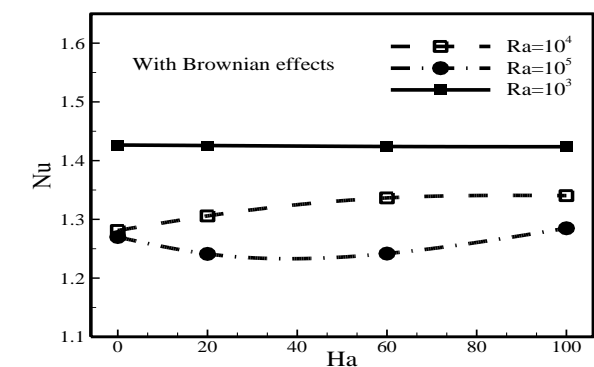


Fig. 14 Variations of mean Nusselt number ratio with Hartmann numbers. (a) With Brownian effects (b) Without Brownian effects ( $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0.1$ )

شکل 14 تغییرات نسبت عدد ناسلت میانگین با اعداد هارتمن (الف) با اثرات براونی (ب) بدون اثرات براونی. ( $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0.1$ )

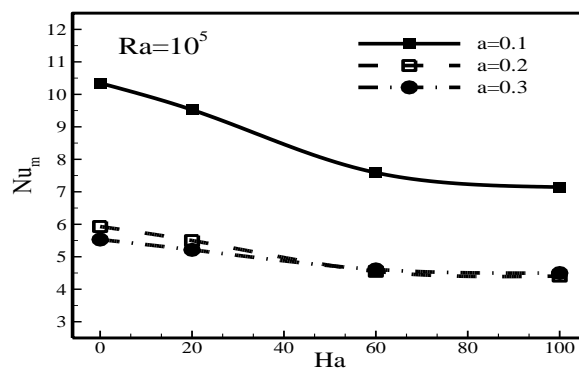


Fig. 13 Variations of mean Nusselt number with dimensionless amplitude of the wavy wall for different Hartmann numbers. ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ )

شکل 13 تغییرات عدد ناسلت میانگین با دامنه بی‌بعد دیواره موجی برای اعداد هارتمن متفاوت ( $Ra = 10^5$ ,  $\phi = 0.04$ ,  $n = 1$ )

کردن مدل براونی ناسلت به‌طور غیرخطی، افزایش می‌یابد. علاوه بر این برای حالت براونی در  $\phi = 0.01$  نمودار دارای شیب تندی است ولی با افزایش کسر حجمی شیب نمودار کاسته شده است. علت این امر می‌تواند رشد بیشتر هدایت حرارتی نسبت به رشد ویسکوزیته در این کسر حجمی باشد.

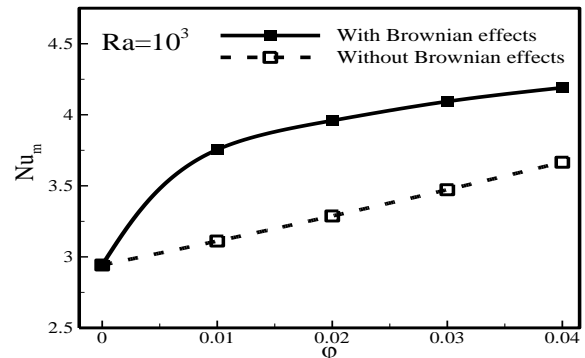
### 5- نتیجه‌گیری

در این مطالعه انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه دوبعدی تحت تأثیر

ارتفاع محفظه (m)	$H$
عدد هارتمن	$Ha$
هدایت حرارتی ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )	$k$
تعداد موج‌های دیواره موجی	$n$
عدد ناسلت محلی روی دیواره چپ	$Nu_l$
عدد ناسلت میانگین	$Nu_m$
نسبت عدد ناسلت	$Nu$
عدد پرانتل	$Pr$
دما (K)	$T$
مؤلفه بدون بعد سرعت در راستای $x^*$	$U$
مؤلفه سرعت در راستای $x$ ( $ms^{-1}$ )	$u$
مؤلفه بدون بعد سرعت در راستای $y^*$	$V$
مؤلفه سرعت در راستای $y$ ( $ms^{-1}$ )	$v$
عرض محفظه (m)	$W$
مختصات دکارتی (m)	$x, y$
<b>علائم یونانی</b>	
ضریب پخش حرارتی ( $m^2s^{-1}$ )	$\alpha$
ضریب انبساط حرارتی ( $K^{-1}$ )	$\beta$
کسر حجمی نانوذرات	$\phi$
انحراف فاز تابع سینوسی توزیع دما	$\Phi$
زاویه میدان مغناطیسی با راستای افق	$\gamma$
لزجت دینامیکی ( $kgm^{-1}s^{-1}$ )	$\mu$
لزجت استاتیکی ( $m^2s^{-1}$ )	$\nu$
چگالی ( $kgm^{-3}$ )	$\rho$
دمای بدون بعد	$\theta$
زمان آرامش	$\tau$
ضرایب وزنی تابع توزیع تعادلی	$\omega_i$
<b>زیر نویس‌ها</b>	
سیال پایه	$f$
نانوسیال	$nf$
نانوذرات جامد	$p$
<b>بالا نویس‌ها</b>	
حالت تعادلی	$eq$
کمیت بی‌بعد	$*$

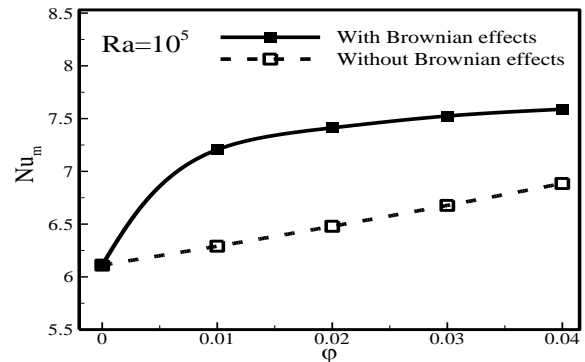
7- مراجع

- [1] S. Ostrach, Natural convection in enclosures, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 10, No. 4b, pp. 1175-1190, 1988.
- [2] B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, No. 16, pp. 2522-2531, 2005.
- [3] E. Abu-Nada, Natural convection heat transfer simulation using energy conservative dissipative particle dynamics, *Physical Review E*, Vol. 81, No. 056704, pp. 1-14, 2010.
- [4] S. U. S. Choi, J. A. Eastman, Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, in *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exhibition*, San Francisco, USA, 1995.
- [5] J. Kim, Y. T. Kang, C. K. Choi, Analysis of convective instability and heat transfer characteristics of nanofluids, *Physics of Fluids*, Vol. 16, No. 7, pp. 2395-2401, 2004.
- [6] D. Wen, Y. Ding, Formulation of nanofluids for natural convective heat transfer applications, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 26, No. 6, pp. 855-864, 2005.
- [7] K. Khanafer, K. Vafai, M. Lightstone, Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 19, pp. 3639-3653, 2003.



a)

(الف)



b)

(ب)

**Fig. 15** Variations of mean Nusselt number with nanoparticle volume fraction (a)  $Ra = 10^3$  (b)  $Ra = 10^5$ . ( $Ha = 60$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0.1$ )

شکل 15 تغییرات عدد ناسلت میانگین با عدد کسر حجمی نانوذرات ( $Ha = 60$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0.1$ ). (الف)  $Ra = 10^3$  (ب)  $Ra = 10^5$

هارتمن دارد.

6- بیشترین تأثیر تعداد موج‌ها برای  $n = 3$  و  $Ha = 100$  مشاهده شد که عدد ناسلت در این حالت 44% کاهش را نشان می‌دهد درحالی‌که بیشترین تأثیر دامنه بی‌بعد موج در غیاب میدان مغناطیسی و  $a = 0.3$  مشاهده شد که عدد ناسلت در این حالت 47% کاهش را نشان می‌دهد.

7- مشاهده می‌شود که تعداد سلول‌های در حال چرخش در محفظه تابع عدد رایلی، عدد هارتمن و پارامترهای تغییر هندسه نیستند و تنها تابع انحراف فاز توزیع غیریکنواخت دما روی دیواره موجی هستند.

8- عدد ناسلت با در نظر گرفتن حرکت براونی عموماً بیشتر از حالتی است که حرکت براونی نادیده گرفته شده است.

9- در یک عدد رایلی و هارتمن ثابت، انتقال حرارت تابع پارامترهای تغییر هندسه همچون تعداد و دامنه موج دیواره است و با تغییر مناسب این پارامترها می‌توان به یک انتقال حرارت بهینه دست یافت.

6- فهرست علائم

دامنه موج‌های دیواره موجی	$a$
سرعت ذرات مجازی روی شبکه	$C_i$
گرمای ویژه ( $Jkg^{-1}K^{-1}$ )	$c_p$
نیروی خارجی	$F$
تابع توزیع چگالی	$f_i$
تابع توزیع انرژی	$g_i$
شتاب جاذبه ( $ms^{-2}$ )	$g$

- curved and moving, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 117-129, 2012. (in Persian فارسی).
- [22] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, D.D. Ganji, Investigation of Nanofluid Flow and Heat Transfer in Presence of Magnetic Field Using KKL Model, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 39, No. 1, pp. 5007-5016, 2014.
- [23] G. H. R. Kefayati, Lattice Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid filled cavity with sinusoidal temperature distribution, *Powder Technology*, Vol. 243, No. 1, pp. 171-183, 2013.
- [24] A. Sabeur-Bendehina, O. Imine, L. Adjlout, Laminar free convection in undulated cavity with non-uniform boundary conditions, *Comptes Rendus Mecanique*, Vol. 339, No. 1, pp. 42-57, 2011.
- [25] A. Shahriari, Numerical simulation of free convection heat transfer of nanofluid in a wavy-wall cavity with sinusoidal temperature distribution, using lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 143-154, 2016. (in Persian فارسی).
- [26] P. H. Kao, R. J. Yang, Simulating oscillatory flows in rayleigh-bénard convection using the Lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 17-18, pp. 3315-3328, 2007.
- [27] S. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flow *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 329-364, 1998.
- [28] R. Mei, L. S. Luo, W. Shyy, An accurate curved boundary treatment in the Lattice Boltzmann method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, No. 2, pp. 307-330, 1999.
- [29] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, An Extrapolation Method for Boundary conditions in Lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 6, pp. 2007-2010, 2002.
- [30] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 19, pp. 3701-3707, 2000.
- [31] H. R. Ehteram, A. A. Abbasian Arani, G. A. Sheikhzadeh, A. Aghaei, A. R. Malihi, The effect of various conductivity and viscosity models considering Brownian motion on nanofluids mixed convection flow and heat transfer, *Trans. Phenom. Nano Micro Scales*, Vol. 4, No. 1, pp. 19-28, 2016.
- [32] J. Koo, C. Kleinstreuer, A New Thermal Conductivity Model for Nanofluids, *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 6, No. 1, pp. 577-588, 2004.
- [33] J. Koo, C. Kleinstreuer, Laminar Nanofluid flow in Microheat-Sinks, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, No. 1, pp. 2652-2661, 2005.
- [34] G.H. R. Kefayati, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in nanofluid-filled 2D long enclosures at presence of magnetic field, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 27, No. 6, pp. 865-883, 2013.
- [35] A.J. Ahrar, M.H. Djavarehshkian, Lattice Boltzmann simulation of a Cu-water nanofluid filled cavity in order to investigate the influence of volume fraction and magnetic field specifications on flow and heat transfer, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 215, No. 1, pp. 328-338, 2016.
- [8] S.M. Aminossadati, B. Ghasemi, Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Vol. 28, No. 5, pp. 630-640, 2009.
- [9] C.J. Ho, M.W. Chen, Z.W. Li, Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 17-18, pp. 4506-4516, 2008.
- [10] E. Abu-Nada, Effects of variable viscosity and thermal conductivity of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 30, No. 4, pp. 679-690, 2009.
- [11] E. Abu-Nada, Z. Masoud, H. Oztop, A. Campo, Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, No. 3, pp. 479-491, 2010.
- [12] E. Abu-Nada, A. Chamkha, Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures filled with a CuO-EG Water nanofluid, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, No. 3, pp. 2339-2352, 2010.
- [13] M. Kharati Koopaee, I. Jelodari, Numerical study of effective techniques to increase mixed convection heat transfer rate within the enclosure subjected to magnetic field, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 69-77, 2014. (in Persian فارسی)
- [14] G. Barrios, R. Rechtman, J. Rojas, R. Tovar, The lattice boltzmann equation for natural convection in a two-dimensional cavity with a partially heated wall, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 522, No. 1, pp. 91-100, 2005.
- [15] E. Fattahi, M. Farhadi, K. Sedighi, Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in eccentric annulus, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, No. 12, pp. 2353-2362, 2010.
- [16] D. Gao, Z. Chen, Lattice Boltzmann simulation of natural convection dominated melting in a rectangular cavity filled with porous media, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, No. 4, pp. 493-501, 2011.
- [17] O. R. Mohammadipoor, H. Niazmand, S. A. Mirbozorgi, A new curved boundary treatment for the Lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 28-41, 2013. (in Persian فارسی)
- [18] M. Nazari, H. Shokri, Natural convection in semi-ellipse cavities with variable aspect ratios using Lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 1-13, 2014. (in Persian فارسی)
- [19] B. Ghasemi, S.M. Aminossadati, A. Raisi, Magnetic field effect on natural convection in a nanofluid-filled square enclosure, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, No. 9, pp. 1748-1756, 2011.
- [20] R. Nouri, M. Gorji, D. Domir Ganji, Numerical investigation of magnetic field effect on forced convection heat transfer of nanofluid in a sinusoidal channel, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 14, pp. 43-55, 2013. (in Persian فارسی)
- [21] M. Nazari, M. H. Kayhani, H. Shokri, LBM for modeling cavities with