



## ارتعاشات صفحات گرافن با اثر نیروی محوری در محیط الاستیک براساس الاستیسیته غیر موضعی و تئوری مرتبه سوم برشی

احمد قاسمی قلعه بهمن<sup>1\*</sup>، علی خاکباز<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان  
\* سمنان، صندوق پستی 35131-19111، ghasemi@semnan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 22 دی 1396  
پذیرش: 14 اسفند 1396  
ارائه در سایت: 19 فروردین 1397  
کلید واژگان:  
نظریه غیرموضعی  
ارتعاشات آزاد  
صفحه گرافن  
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم  
نیروی محوری

### چکیده

این مطالعه با هدف بررسی ارتعاشات عرضی صفحات گرافن تک لایه و دولایه واقع در محیط الاستیک براساس تئوری تغییر شکل مرتبه سوم برشی با در نظر گرفتن اثر نیروی محوری و در غالب نظریه الاستیسیته غیرموضعی ارینگن انجام شده است که در آن معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. برتری مدل پیوسته غیرموضعی مورد مطالعه نسبت به همتای موضعی آن، در نظر گرفتن اثر اندازه روی رفتار مکانیکی سازه می باشد. نتایج حاصل از یک تحلیل فرکانس طبیعی برای شرایط مختلف مانند تأثیر اندازه و نسبت ابعادی، نیروی محوری، ضریب غیرموضعی و اثرات ناشی از تغییر در خواص سفتی محیط الاستیک اطراف با استفاده از روش ناویر و برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده به دست آمده است. با توجه به این که در صفحه گرافن دولایه، سیستم دارای یک مود ارتعاشی هم فاز و یک مود ارتعاشی غیرهم فاز با اختلاف فاز 180 درجه است، تأثیر نیروی ون دروالس در هر دو مود ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شد که نیروی ون دروالس اثری روی مود ارتعاشی هم فاز نداشته و با افزایش آن فرکانس غیرهم فاز افزایش می یابد. همچنین مشخص شد که پارامتر غیرموضعی یک پارامتر ثابت نبوده بلکه مقدار آن به اندازه و ساختار اتمی مانند آرایش کایرال یا زیگزگاک و حتی به نوع شرایط مرزی وابسته است.

## Vibration of graphene sheets with axial force effect in elastic medium based on nonlocal elasticity and third-order shear deformation theory

Ahmad Ghasemi Ghalebahman<sup>\*</sup>, Ali Khakbaz

Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran  
\* P.O.B. 35131-19111, Semnan, Iran, ghasemi@semnan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 12 January 2018  
Accepted 05 March 2018  
Available Online 08 April 2018

#### Keywords:

Nonlocal theory  
Free vibration  
Graphene sheet  
Third-order shear deformation theory  
Axial force

### ABSTRACT

This study aims to investigate the transverse vibration of single- and double-layered graphene sheets embedded in an elastic medium based on the third-order shear deformation theory considering the axial force effect within the framework of Eringen's nonlocal elasticity theory, where the governing equations of motion are obtained using Hamilton's principle. The superiority of the studied non-local continuum model to its local counterpart is to consider the effect of size on the mechanical behavior of the structure. The results from a natural frequency analysis are obtained for different conditions such as the effect of size and aspect ratio, axial force, nonlocal coefficient, and change in the stiffness properties of the surrounding elastic medium by using the Navier-type solution for simply supported boundary conditions. Given that in a double-layered graphene sheet, the system has an in-phase vibrational mode and anti-phase vibrational mode with 180-degree phase difference, the effect of van der Waals force on both vibrational modes is attempted to be investigated and it is shown that the van der Waals force has no effect on in-phase vibrational mode and by increasing it, the anti-phase frequency increases. It is also demonstrated that the nonlocal parameter is not a constant parameter but its value depends on the size and atomic structure, like chiral and zigzag configurations, and even on the type of boundary conditions.

### 1- مقدمه

پرادان و پادیکار [3] فرمول بندی جدیدی را برای تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول برشی با استفاده از روابط متشکله ارینگن برای ارتعاشات آزاد صفحات گرافن ارائه دادند. مورمو و پرادان [4] اثر اندازه را بر ارتعاشات درون صفحه ای نانوصفحات با استفاده از تئوری غیرموضعی مورد بررسی قرار دادند. ارتعاشات آزاد مدل صفحه غیرموضعی چندلایه بر پایه تئوری مرتبه اول برشی (میندلین- رایزنر) با شرایط مرزی مختلف روی بستر الاستیک

برتری های مکانیکی گرافن، پتانسیل بالایی برای استفاده در کامپوزیت هایی با ویژگی ها و کاربردهای خاص مانند صنایع هوافضا، خودرو، ساخت وساز، حمل و نقل، پتروشیمی و ... ایجاد کرده است. ارینگن نشان داد که در ابعاد بسیار کوچک، وضعیت تنش در یک نقطه نه تنها به وضعیت کرنش آن نقطه وابسته است بلکه تابعی از میدان کرنش تمامی نقاط محیط پیوسته می باشد [1, 2].

### Please cite this article using:

A. Ghasemi Ghalebahman, A. Khakbaz, Vibration of graphene sheets with axial force effect in elastic medium based on nonlocal elasticity and third-order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 04, pp. 232-240, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

نسبت به تئوری‌های ساده‌تر مثل تئوری صفحات کلاسیک کرشلف در نسبت‌های طول به ضخامت کم ( $a/h < 10$ ) می‌باشد. اهمیت موضوع مورد بحث به گونه‌ای است که اگر از تئوری‌های ساده‌تر برای تحلیل ارتعاشات صفحات گرافن با طول و عرض کم استفاده شود یا نانو ساختار دیگری مطالعه شود که دارای ضخامت بیشتری باشد، نتایج با خطا روبرو خواهد شد [17]. در استخراج معادلات حاکم، تحلیل غیرخطی کرنش-جابجایی مورد استفاده قرار گرفته و برای رسیدن به پاسخ معادلات از حل ناوبر که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را ارضا می‌کند استفاده شده است. همچنین با توجه به نتایج به‌دست آمده، تأثیر نیروی محوری بر رفتار ارتعاشی صفحات گرافن تک‌لایه و دولایه مورد بحث قرار گرفته است.

## 2- الاستیسیته غیر موضعی

در "شکل 1" مدل پیوسته صفحه‌ی گرافن تک‌لایه در نظر گرفته شده در این تحقیق در کنار مدل گسسته آن نمایش داده شده است. شماتیک مسأله برای حالت گرافن دولایه نیز به همراه بستر الاستیک وینکلر-پسترناک در "شکل 2" ارائه شده است. لازم به ذکر است در این پژوهش صفحه گرافن دارای شرایط مرزی از نوع تکیه‌گاه ساده فرض شده است. براساس تئوری غیرموضعی ارینگن [2,1] تنش در نقطه دلخواه  $x$  تنها

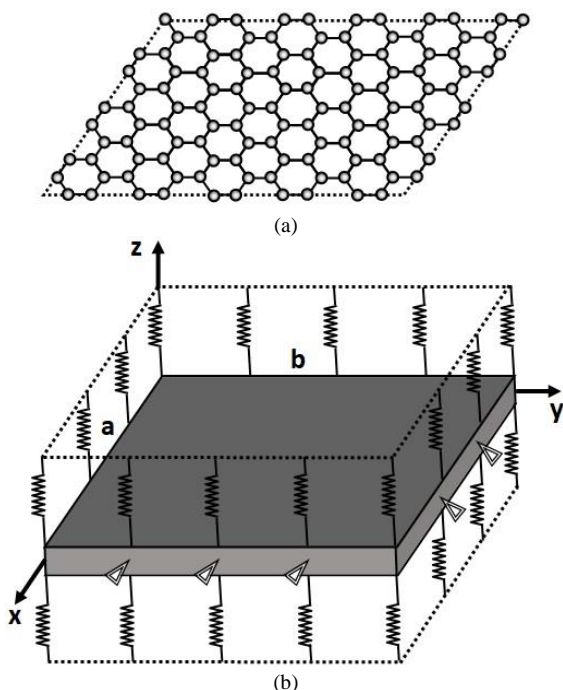


Fig. 2 The single-layered graphene sheet (a) discrete model (b) continuum model

شکل 1 صفحه‌ی گرافن تک‌لایه (a) مدل گسسته (b) مدل پیوسته

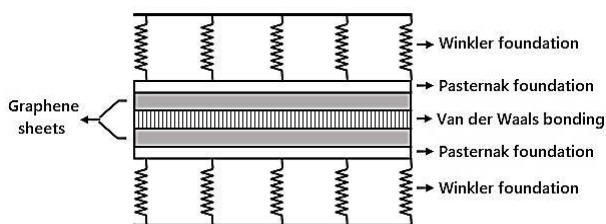


Fig 2. Schematic of two-layer graphene in elastic medium

شکل 2 شماتیک گرافن دولایه در بستر الاستیک

توسط انصاری و همکاران [6,5] انجام شده است. در این فعالیت‌ها از روش‌های عددی المان محدود و تربیع دیفرانسیلی استفاده شده است. در فعالیت دیگری یک مدل صفحه غیرموضعی برای ارتعاشات غیرخطی صفحات گرافن تک‌لایه با در نظر گرفتن شرایط دمایی ارائه شده است که در آن پارامتر اندازه از مقایسه فرکانس طبیعی منتج شده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با مدل غیرموضعی استخراج شده است [7]. انصاری و همکاران [8] تحلیل ارتعاشات صفحات گرافن تک‌لایه را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و روش تربیع دیفرانسیلی دنبال نموده و با استفاده از مقایسه فرکانس طبیعی حاصل شده با مقادیر نظیر به‌دست آمده از دینامیک مولکولی، مقادیر پارامتر غیرموضعی را به ازای صفحات گرافن از 10 nm تا 50 nm و برای شرایط مرزی ساده و گیردار پیش‌بینی نمودند. ونگ و همکاران ارتعاشات صفحات تک‌لایه و دو لایه گرافن را در شرایط مرزی مختلف با استفاده از دینامیک مولکولی و تئوری غیرموضعی ارینگن بررسی نموده و نشان دادند که مدل الاستیسیته کلاسیک خطای بسیار زیادی ایجاد می‌کند وقتی عرض صفحه گرافن کوچکتر شود. همچنین در پژوهش‌های پیشین نشان داده شده که اختلاف بین تئوری کلاسیک و تئوری غیرموضعی قابل توجه است برای تمامی مقادیر نسبت ابعادی. به‌عنوان نمونه در مرجع [9] به ازای نسبت ابعادی طول به عرض برابر با 4، مقدار فرکانس به‌دست آمده از تئوری کلاسیک حدود 50٪ بیشتر از مدل نمود که در بالا و پایین آن یک لایه گرافن قرار گرفته است. ناظم‌زاد و همکاران [10] با چنین فرضی توانستند ارتعاشات صفحات گرافن دولایه تئوری غیرموضعی گزارش شده است. با توجه به پیوند واندروالسی موجود در یک صفحه گرافن دولایه می‌توان آن را به‌صورت یک سازه ساندویچی را با در نظر گرفتن اثر برشی بین لایه‌ای و براساس تئوری تیر اوپلر برنولی برای شرایط مرزی آزاد-گیردار به‌دست آورده و نتایج کار خود را با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مدل تیر چندگانه برشی مقایسه نموده‌اند. عاصمی و فرج‌پور [11] ارتعاشات ترمومکانیکی یک ورق گرافن دایروی را با در نظر گرفتن اثر سطحی بر مبنای تئوری غیرموضعی تحلیل کردند. علی‌بیگلو [12] ارتعاشات آزاد نانو ورق‌ها را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی توسعه داده و با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته غیرمحلی و روش فضا-حالت و بسط سری فوریه، یک فرم حل بسته برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی نانو ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه ساده ارائه نموده است. ستوده [13] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق گرافن ارتوتروپیک را با استفاده از تئوری غیرموضعی ورق میندلین بررسی نموده و با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را به دستگاه معادلات جبری غیرخطی کاهش داده و برای حالات مختلف شرایط مرزی نتایج عددی را به‌دست آورده است. در یک مطالعه‌ی موردی، شن و همکاران [14] آثار ناشی از وجود یک جرم در مرکز صفحه را بررسی کرده و نتیجه گرفتند تغییرات در رفتار ارتعاشی صفحه می‌تواند به عنوان یک حسگر مورد استفاده قرار گیرد. ناتسوکوی و همکاران [15] فرکانس طبیعی یک صفحه دولایه گرافن را با توجه به جرم و موقعیت نانو ذره متصل به آن مورد بررسی قرار دادند. کیانی [16]، ارتعاشات طولی، عرضی، پیچشی و پایداری را برای یک نانو لوله کربنی تک‌جداره دارای حرکت محوری، که به‌صورت مدرج تابعی می‌باشد، با استفاده از روش مکانیک محیط‌های پیوسته غیرموضعی مورد بررسی قرار داد.

در این مطالعه از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم برای تحلیل ارتعاشات صفحات گرافن تک‌لایه و دولایه در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثر نیروی درون صفحه‌ای، استفاده شده است که دارای دقت بالاتری

با در نظر گرفتن ترم غیرخطی، رابطه کرنش-جابجایی چنین خواهد شد:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (8)$$

در رابطه (8)،  $i$  و  $j$  اندیس‌های مشخص کننده مؤلفه‌های کرنش بوده که می‌توانند مقادیر 1 تا 3 را اختیار کنند.

با قرار دادن روابط (5) و (6) و (7) در معادله (8)، میدان کرنش براساس

تئوری مرتبه سوم برشی به دست می‌آید.

$$\epsilon_{xx} = z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) - c_1 z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$

$$\epsilon_{yy} = z \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) - c_1 z^3 \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - c_1 z^2 \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - c_1 z^2 \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\gamma_{xy} = -c_1 z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (13)$$

#### 4- معادلات حاکم بر حرکت صفحه‌ی گرافن تک‌لایه

برای استفاده از اصل همیلتون احتیاج به معرفی تغییرات انرژی کرنشی، تغییرات انرژی جنبشی و کار خارجی مجازی می‌باشد که به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\delta U = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \omega_{xx} + \sigma_{yy} \delta \omega_{yy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz d\Omega \quad (14)$$

$$\delta T = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz d\Omega \quad (15)$$

$$\delta W = \int_{\Omega} k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 - k_w w_0 \delta w_0 + f \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} d\Omega \quad (16)$$

$$\delta U + \delta W - \delta T = 0 \quad (17)$$

در این روابط ضرایب  $k_p$  و  $k_w$  به ترتیب میزان سفتی و مقاومت محیط الاستیک در مقابل انحناء صفحه و جابجایی عرضی صفحه را نشان می‌دهند. رابطه (16) کار مجازی ناشی از نیروهای خارجی می‌باشد که شامل کار بستر وینکلر ( $k_w$ ) و پسترناک ( $k_p$ ) و همچنین نیروی درون صفحه‌ای  $f$  در راستای محور  $x$  می‌باشد.

در تئوری مرتبه سوم برشی، منتجه‌های تنش و ممان را می‌توان به صورت معادلات (18) و (19) تعریف نمود:

$$\begin{bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{bmatrix} dz \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{\alpha} \\ R_{\alpha} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha z} \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz \quad (19)$$

در این معادلات منتجه‌های  $N_{\alpha\beta}$ ،  $M_{\alpha\beta}$  و  $P_{\alpha\beta}$  کمیت‌های تانسوری و منتجه‌های  $Q_{\alpha}$  و  $R_{\alpha}$  نیز کمیت‌های برداری هستند. با جایگذاری معادلات

وابسته به کرنش در همان نقطه نبوده بلکه به میدان کرنش اطراف نقطه  $x$  هم بستگی دارد. لذا معادله ساختاری غیرموضعی به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد.

$$\sigma_{ij} = \int \lambda(|x-x'|, \alpha) C_{ijkl} \epsilon_{kl}(x') dV(x') \quad (1)$$

که در این معادله  $\lambda(|x-x'|, \alpha)$  کرنل یا هسته انتگرال نامیده می‌شود و نقش آن تضعیف اثر کرنش با دور شدن از نقطه  $x$  می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر کرنل به صورت دلتای دیراک در نقطه  $x$  تعریف شود، معادله (1) به شکل معادله متشکله کلاسیک تبدیل می‌شود. در الاستیسیته غیرموضعی با وارد کردن ثابت  $\alpha$  در معادله (1)، یک محیط گسسته تبدیل به یک محیط پیوسته می‌شود.

$$\alpha = \frac{ae_0}{l} \quad (2)$$

در معادله (2)،  $a$  طول مشخصه داخلی می‌باشد که در این مطالعه معادل طول پیوند کربن-کربن است. همچنین  $l$  طول مشخصه خارجی و  $e_0$  وابسته به جنس ماده می‌باشد. با انجام چند عملیات ریاضی و استفاده از تابع بسل، معادله انتگرالی (1) به معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود [19,18]. لازم به ذکر است شکل دیفرانسیلی معادله‌ی (1) توسط ارینگن ارائه شده که کار کردن با آن برای استخراج معادلات حاکم ساده‌تر است.

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma = C : \epsilon \quad (3)$$

همان‌طور که پیش از این اشاره شد پارامتر غیرموضعی  $\mu$  که در این رابطه آمده است تابعی از اندازه، آرایش (ساختار اتمی) و شرایط مرزی می‌باشد [20,8]. به‌عنوان نمونه برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و ساختار زیگزاگ، این پارامتر برابر 1.41 بوده و حال آن‌که با همین شرایط مرزی ولی با ساختار آرمچیر این پارامتر برابر 1.34 می‌باشد [8]. با توجه به معادله (3)، معادله متشکله صفحه گرافن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

در این رابطه ضرایب سفتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}, \quad A_{12} = A_{21} = \frac{E\nu}{(1 - \nu^2)},$$

$$A_{33} = A_{44} = A_{55} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته،  $G$  مدول برشی،  $\nu$  نسبت پواسون و  $\mu$  پارامتر غیرموضعی می‌باشد.

#### 3- رابطه کرنش-جابجایی

براساس تئوری مرتبه سوم برشی، میدان جابجایی به صورت معادلات (5)، (6) و (7) می‌باشد.

$$u = z\phi_x - c_1 z^3 \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$v = z\phi_y - c_1 z^3 \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$w = w_0 \quad (7)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب معرف مؤلفه‌های جابجایی در سه راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  بوده،  $w_0$  جابجایی عرضی صفحه‌ی میانی و  $\phi_x$  و  $\phi_y$  نیز به ترتیب بیانگر مقادیر چرخش در صفحات  $xz$  و  $yz$  می‌باشد که چرخش خط عمود بر صفحه‌ی میانی را در هر نقطه‌ی دلخواهی با موقعیت  $z=0$  نشان می‌دهد.

در گرافان دولایه، نیروی ون دروالس بین لایه‌ها باعث کوپل شدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت لایه‌ها می‌شود که این ارتباط بصورت ترم فشار  $C$  وارد معادلات حرکت می‌شود.

اگر اندیس‌های 1 و 2 مربوط به شماره لایه باشد، با استفاده از اصل همپلتون معادلات حرکت در سیستم دولایه بصورت زیر استخراج خواهند شد:

$$\begin{aligned} \delta w_1 : 0 = & c_1 \frac{\partial^2 P_{xx1}}{\partial x^2} + 2c_1 \frac{\partial^2 P_{xx1}}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 P_{yy1}}{\partial y^2} \\ & + \frac{\partial \hat{\phi}_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y1}}{\partial y} + \left\{ f \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right. \\ & - C(w_1 - w_2) \left. \right\} - \mu \nabla^2 \left\{ f \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right. \\ & + N_{yy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - C(w_1 - w_2) \left. \right\} - (1 - \mu \nabla^2) \left\{ k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - 2k_w w_0 \right\} + \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y1}}{\partial y} \right) \right. \\ & - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial y^2} \right) + m_0 \hat{w}_1 \left. \right\} - \mu \nabla^2 \\ & \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y1}}{\partial y} \right) - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial y^2} \right) \right\} \\ & - \mu \nabla^2 \{ m_0 \hat{w}_1 \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta w_2 : 0 = & c_1 \frac{\partial^2 P_{xx2}}{\partial x^2} + 2c_1 \frac{\partial^2 P_{xx2}}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 P_{yy2}}{\partial y^2} \\ & + \frac{\partial \hat{\phi}_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y2}}{\partial y} + \left\{ f \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right. \\ & + C(w_1 - w_2) \left. \right\} - \mu \nabla^2 \left\{ f \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right. \\ & + N_{yy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + C(w_1 - w_2) \left. \right\} - (1 - \mu \nabla^2) \left\{ k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - 2k_w w_0 \right\} + \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y2}}{\partial y} \right) \right. \\ & - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial y^2} \right) + m_0 \hat{w}_2 \left. \right\} - \mu \nabla^2 \\ & \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{y2}}{\partial y} \right) - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial y^2} \right) \right\} \\ & - \mu \nabla^2 \{ m_0 \hat{w}_2 \} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\delta \phi_{x1} : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{xy1}}{\partial y} - \hat{Q}_{x1} + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_{x1} + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_{x1} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \right) \right\} \quad (28)$$

$$\delta \phi_{x2} : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{xx2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{xy2}}{\partial y} - \hat{Q}_{x2} + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_{x2} + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_{x2} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial x} \right) \right\} \quad (29)$$

$$\delta \phi_{y1} : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{yy1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{M}_{xy1}}{\partial x} - \hat{Q}_{y1} + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_{y1} + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_{y1} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \right) \right\} \quad (30)$$

$$\delta \phi_{y2} : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{yy2}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{M}_{xy2}}{\partial x} - \hat{Q}_{y2} + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_{y2} + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_{y2} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial y} \right) \right\} \quad (31)$$

معادلات (26) و (27) توسط  $C$  به هم وابسته می‌باشند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر  $C$  مساوی صفر باشد دو معادله از هم مستقل شده و هر کدام از صفحات بدون تأثیر از دیگری ارتعاش می‌کند.

### 6- حل ناوبر

برای حل معادلات گرافان تک‌لایه (20-22) و گرافان دولایه (26-31) از حل ناوبر استفاده می‌شود که شرایط مرزی مربوط به تکیه‌گاه ساده را ارضاء می‌کند. در معادلاتی که در ادامه خواهد آمد  $\alpha = m\pi/a$  و  $\beta = n\pi/b$

(14)، (15) و (16) در (17) و استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و وارد کردن منته‌های تنش، به معادلات حاکم بر حرکت خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} \delta w : 0 = & c_1 \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2c_1 \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} + \\ & \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial y} + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ f \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\ & - (1 - \mu \nabla^2) \left\{ k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - 2k_w w_0 \right\} \\ & + \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial y} \right) - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial y^2} \right) \right. \\ & + m_0 \hat{w}_0 \left. \right\} - \mu \nabla^2 \left\{ c_1 \hat{m}_4 \left( \frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial y} \right) \right. \\ & - c_1^2 m_6 \left( \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial y^2} \right) + m_0 \hat{w}_0 \left. \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\delta \phi_x : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial y} - \hat{Q}_x + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_x + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_x + \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \right) \right\} \quad (21)$$

$$\delta \phi_y : 0 = \frac{\partial \hat{M}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial x} - \hat{Q}_y + (1 - \mu \nabla^2) \left\{ -\hat{m}_2 \hat{\phi}_y + c_1 \hat{m}_4 \left( \hat{\phi}_y + \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} \right) \right\} \quad (22)$$

علت تعریف منته‌های تنش، حذف روابط انتگرالی نسبت به  $z$  و خلاصه نمودن روابط می‌باشد تا معادله‌ی کلی حاصل به صورت یکپارچه دارای انتگرالی‌هایی نسبت به  $\Omega$  بوده و بتوان از اصل حساب تغییرات استفاده نمود و فاکتورگیری‌های لازم را جهت استخراج معادلات حاکم انجام داد. ضرایب و اینرسی‌های به کار رفته در معادلات (20)، (21) و (22) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = \frac{4}{h^2} \\ m_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz, \quad m_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \\ m_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^4 dz, \quad m_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^6 dz \\ \hat{m}_2 = m_2 - c_1 m_4, \quad \hat{m}_4 = m_4 - c_1 m_6 \end{aligned} \quad (23)$$

در ادامه تعریف منته‌های تنش معادل که در معادلات حاکم بر حرکت (20)، (21) و (22) آمده است ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{M}_{xx} \\ \hat{M}_{yy} \\ \hat{M}_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{Q}_x \\ \hat{Q}_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

شرایط مرزی برای صفحه‌ی گرافان با تکیه‌گاه ساده چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} w_{(x,0)} = w_{(x,b)} = w_{(0,y)} = w_{(a,y)} = 0 \\ \phi_{x(x,0)} = \phi_{x(x,b)} = \phi_{y(0,a)} = \phi_{y(0,a)} = 0 \\ M_{xx(0,y)} = M_{xx(a,y)} = M_{xx(x,0)} = M_{xx(x,b)} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

همچنین شرایط مرزی مربوط به نیروی محوری در معادله (20) اعمال شده است. چون اثر نیروی تک محوری در حال بررسی است، لذا در این روابط  $N_{xy}$  و  $N_{yy}$  مساوی صفر می‌باشند.

### 5- معادلات حاکم بر صفحه‌ی گرافان دولایه

برای تعیین اثر غیرموضعی روی فرکانس، یک کمیت بی بعد که نسبت فرکانسی نامیده می شود تعریف می شود که به صورت حاصل تقسیم فرکانس کلاسیک بر فرکانس غیرموضعی معادل در شرایط یکسان تعریف می شود.

$$\bar{\omega} = \frac{\text{فرکانس در حالت کلاسیک}}{\text{فرکانس در حالت غیرموضعی}} \quad (36)$$

برای اعتبارسنجی، خواص مکانیکی یک صفحه ی گرافن تک لایه مطابق با آنچه که در مرجع [21] در نظر گرفته شده، منظور می شود. در جدول 1 به ازای چندین مقدار انتخاب شده از پارامتر غیرموضعی، مقادیری از نسبت فرکانسی به دست آمده با نتایج ارائه شده در این مرجع که در آن از روش حل تریب دیفرانسیلی استفاده شده است مقایسه شده است. این نتایج صحت و دقت روش تحلیلی استفاده شده در این تحقیق را به اثبات می رساند. ویژگی های مادی به کار رفته در جدول 1 به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} E &= 1.06 \text{ TPa} \\ \nu &= 0.25 \\ \rho &= 2250 \text{ kg/m}^3 \\ h &= 0.34 \text{ nm} \end{aligned} \quad (37)$$

برای بررسی صحت محاسبات در یک سیستم دولایه، در جدول 2 مقایسه ای بین نتایج عددی مرجع [22] و این مطالعه انجام شده است. در این جدول ویژگی های مکانیکی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} h &= 0.34 \text{ nm} \\ E &= 1.02 \text{ TPa} \\ \nu &= 0.16 \\ \rho &= 2250 \text{ kg/m}^3 \\ C &= 10.8 \times 10^{19} \text{ Pa/m} \end{aligned} \quad (38)$$

دلیل کمتر بودن فرکانس های به دست آمده در این مطالعه نسبت به مرجع [22] این است که در مرجع [22] از روش تئوری صفحه کلاسیک استفاده شده که رفتار صفحه را سخت تر منظور می نماید. از جدول 2 مشاهده می شود که اختلاف فرکانس مود اول غیرهم فاز 0.3 درصد می باشد و این اختلاف در مود دوم ارتعاشی 0.7 درصد می باشد.

در پیوست (ب) برای هر دو حالت هم فاز و غیر هم فاز شکل مودهای مربوط به  $m$  و  $n$  های مختلف ارائه شده در جدول 2 نشان داده شده است. در ادامه این پژوهش برای بررسی فرکانس طبیعی، ویژگی های صفحه ی

**جدول 1** مقایسه نسبت فرکانسی یک صفحه ی گرافن تک لایه مربعی با طول 10nm  
**Table 1** Comparison of frequency ratios for a square single-layered graphene sheet with the length of 10nm

نسبت فرکانسی (کار حاضر)	نسبت فرکانسی [21]	پارامتر غیرموضعی $\mu(\text{nm}^2)$
1	1	0
0.9139	0.9139	1
0.8467	0.8468	2
0.7925	0.7926	3
0.7475	.....	4

**جدول 2** مقایسه فرکانس طبیعی صفحه ی گرافن مربعی دولایه با طول 10 nm  
**Table 2** Comparison of the results for the bilayer rectangular graphene sheet with length of 10 nm

فرکانس طبیعی (THZ) (کار حاضر)	فرکانس طبیعی [22]	مود ارتعاشی
0.0664	0.069	فرکانس هم فاز ( $m=1, n=1$ )
2.674	2.683	فرکانس غیرهم فاز ( $m=1, n=1$ )
0.263	0.276	فرکانس هم فاز ( $m=2, n=2$ )
2.678	2.697	فرکانس غیرهم فاز ( $m=2, n=2$ )

می باشد که در آن  $m$  مشخص کننده شماره مود در راستای محور  $y$  و  $n$  نیز معرف شماره مود در راستای محور  $x$  می باشد.

حل ناویبر برای تک لایه چنین بیان می شود:

$$\begin{aligned} w &= W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}} \\ \phi_x &= X_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mnt}} \\ \phi_y &= Y_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}} \end{aligned} \quad (32)$$

در یک سیستم دو لایه نیز روابط زیر دنبال خواهد شد:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{mn}^1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^1} \\ w_2 &= w_{mn}^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^2} \\ \phi_{x1} &= X_{mn}^1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^1} \\ \phi_{x2} &= X_{mn}^2 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^2} \\ \phi_{y1} &= Y_{mn}^1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^1} \\ \phi_{y2} &= Y_{mn}^2 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mnt}^2} \end{aligned} \quad (33)$$

معادلات (32) و (33) به نحوی هستند که شرایط مرزی را در هر لحظه از زمان ارضاء می کنند. بعد از جایگذاری رابطه ی (32) در معادلات حرکت صفحه ی گرافن تک لایه، یک دستگاه معادلات جبری همگن تولید می شود که برای داشتن یک حل قابل قبول و غیرصفر، دترمینان ماتریس ضرایب آن که یک ماتریس  $3 \times 3$  خواهد شد را می بایست مساوی صفر قرار داد.

$$\det \begin{bmatrix} K_{11}^{11} & K_{12}^{11} & K_{13}^{11} \\ K_{21}^{11} & K_{22}^{11} & K_{23}^{11} \\ K_{31}^{11} & K_{32}^{11} & K_{33}^{11} \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

به همین ترتیب برای صفحه ی گرافن دو لایه نیز برای حصول یک جواب غیرصفر، دترمینان ماتریس ضرایب که یک ماتریس  $6 \times 6$  خواهد شد را تشکیل داده و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\det \begin{bmatrix} K_{11}^{21} & K_{12}^{21} & K_{13}^{21} & K_{14}^{21} & 0 & 0 \\ K_{21}^{21} & K_{22}^{21} & K_{23}^{21} & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{21} & K_{32}^{21} & K_{33}^{21} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{21} & 0 & 0 & K_{44}^{21} & K_{45}^{21} & K_{46}^{21} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54}^{21} & K_{55}^{21} & K_{56}^{21} \\ 0 & 0 & 0 & K_{64}^{21} & K_{65}^{21} & K_{66}^{21} \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

محاسبات مربوط به تمامی درایه های ماتریس های سفتی صفحات گرافن تک لایه و دولایه در ضمیمه (الف) آمده است. لازم به ذکر است در معادله ی (35) درایه های  $K_{41}$  و  $K_{14}$  ترم های مربوط به نیروی ون دروالس یا کوپلینگ دو صفحه نسبت به هم می باشند.

معادلات (34) و (35) به ترتیب معادلات درجه 6 و 12 برحسب فرکانس بوده که به دلیل زوج بودن این معادلات نیمی از ریشه ها از لحاظ مقدار مساوی و از لحاظ علامت مخالف نیمی دیگر هستند. بنابراین معادله (34) سه ریشه دارد که یکی از آن ها مربوط به فرکانس حرکت عرضی می باشد و دو ریشه دیگر مربوط به فرکانس تغییرات  $\phi_x$  و  $\phi_y$  می باشند. اما برای معادله ی (35) تعداد 6 ریشه مثبت وجود دارد که به هر کدام از درجات آزادی دو فرکانس نسبت داده می شود. یکی از آن ها برای توصیف ارتعاشات هم فاز و دیگری برای توصیف ارتعاشات غیرهم فاز می باشد. تغییر علامت نیروی ون دروالس در معادلات (26) و (27) نیز به دلیل نیروی عکس العمل صفحات روی هم می باشد.

## 7- نتایج عددی

در این بخش ابتدا نتایج عددی مربوط به گرافن تک لایه مورد بررسی قرار می گیرد. مقدار پارامتر غیرموضعی  $\mu$  از 0 تا 4 نانومتر مربع به صورت متغیر منظور شده که برای بررسی اثر غیرموضعی در نظر گرفته شده است.

می‌باشد. ولی در حالتی که نیروی بی‌بعد برابر 0.133 می‌باشد این اختلاف به 5.1 GHz کاهش می‌یابد. البته در این حالت میزان نیروی اعمالی به صفحه بسیار بالاست و این نتایج فقط برای بررسی تأثیر نیرو روی فرکانس طبیعی ترسیم شده است.

در "شکل 5" تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش طول به‌ازای پارامترهای غیرموضعی مختلف نمایش داده شده است. با توجه به این شکل مشخص است که با افزایش طول گرافن، فرکانس طبیعی کم شده و نتایج به سمت تئوری کلاسیک میل پیدا می‌کند.

در "شکل 6" تغییرات نسبت فرکانسی برحسب نسبت ابعادی به‌ازای تغییرات نسبت فرکانسی از 0.2 تا 2 نشان داده شده است. در این شکل نسبت ابعادی به‌صورت  $b/a$  تعریف شده است. وقتی نسبت ابعادی ورق افزایش می‌یابد، ورق به یک نوار باریک تبدیل شده و با توجه به شکل تأثیر پارامتر غیرموضعی افزایش می‌یابد.

"شکل 7" تأثیر ضریب سفتی وینکلر محیط الاستیک اطراف را روی نسبت فرکانسی گرافن تک لایه نشان می‌دهد. با توجه به نمودار با افزایش ضریب سفتی وینکلر، نسبت فرکانسی برای تمام مقادیر پارامتر غیرموضعی به سمت واحد میل کرده و تأثیر پارامتر غیرموضعی کم می‌شود. دلیل این امر در معادله (20) قابل بررسی می‌باشد. با بررسی ترم‌های معادله (20) ملاحظه می‌شود وقتی مقدار  $k_w$  عدد بزرگی باشد، وزن ترم ضریب سفتی وینکلر در معادله بالا رفته و باعث کم شدن تأثیر پارامتر غیرموضعی می‌شود و فرکانس در حالت کلاسیک و غیرموضعی به هم نزدیک می‌شوند.

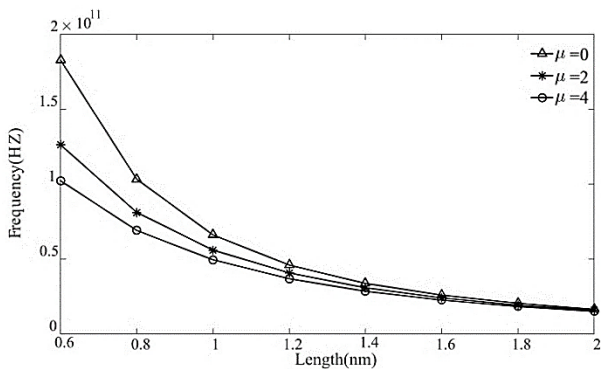


Fig. 5 Variation of natural frequency versus length for a square graphene sheet for various values of nonlocal parameter ( $m=n=1$ )

شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به طول برای صفحه‌ی گرافن مربعی برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

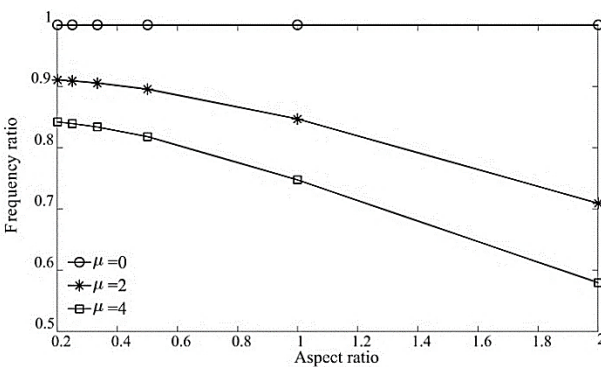


Fig. 6 Variation of frequency ratio versus aspect ratio ( $b=10\text{nm}$ ,  $m=n=1$ )

شکل 6 تغییرات نسبت فرکانسی برحسب نسبت ابعادی

گرافن به‌صورت زیر فرض شده است.

$$\begin{aligned} E &= 1 \text{ TPa} \\ \nu &= 0.16 \\ \rho &= 2250 \text{ kg/m}^3 \\ C &= 4.5 \times 10^{19} \text{ Pa/m} \\ h &= 0.34 \text{ nm} \end{aligned} \quad (39)$$

در "شکل 3" تغییرات نسبت فرکانسی با افزایش طول مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این شکل واضح است که با افزایش ابعاد گرافن نسبت فرکانسی افزایش یافته و به سمت واحد میل می‌کند. بنابراین فرکانس صفحه‌ی گرافن با افزایش ابعاد به سمت فرکانس طبیعی در حالت کلاسیک میل خواهد نمود. همچنین با افزایش پارامتر غیرموضعی، نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد و این میزان کاهش در نسبت‌های ابعادی کوچکتر بیشتر می‌باشد.

جهت بررسی اثر نیروی محوری روی فرکانس، نیروی بدون بعد بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\bar{f} = \frac{fa^2}{Em_2} \quad (40)$$

با توجه "شکل 4" می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش نیروی محوری اختلاف بین فرکانس در حالت موضعی و غیرموضعی کم می‌شود. به عبارتی با افزایش نیرو تأثیر پارامتر غیرموضعی کاهش می‌یابد. در این شکل، در حالتی که نیروی بی‌بعد برابر صفر است، اختلاف بین فرکانس‌های به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک و غیرموضعی به‌ازای  $\mu = 4$  برابر 16.73 GHz

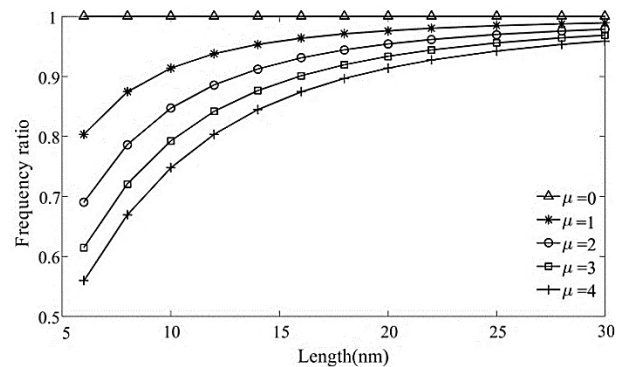


Fig. 3 Variation of frequency ratio with length of a square graphene sheet for various values of nonlocal parameter ( $m=n=1$ )

شکل 3 تغییرات نسبت فرکانسی برای گرافن مربعی نسبت به طول برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

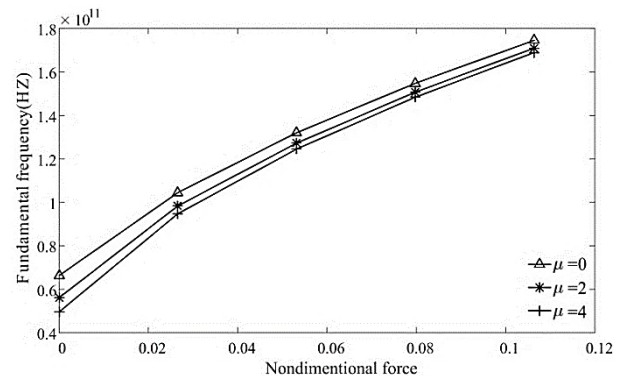
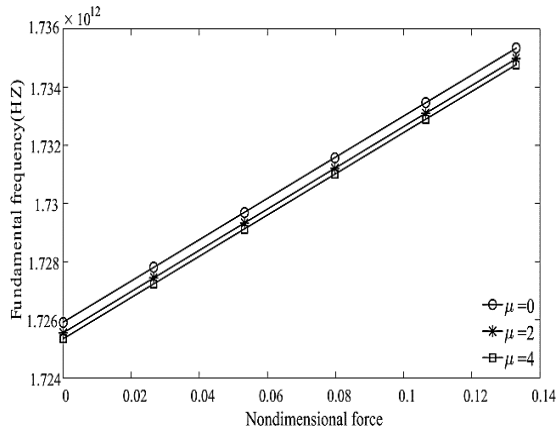


Fig. 4 Variation of frequency with respect to non-dimensional axial force obtained from nonlocal and classic theories ( $m=n=1$ )

شکل 4 تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نیروی محوری بی‌بعد بدست آمده از تئوری‌های غیرموضعی و کلاسیک



**Fig. 10** Variation of frequency with respect to non-dimensional axial force obtained from nonlocal and classic theories for the two-layer graphene ( $m=n=1$ )

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نیروی محوری بی بعد به دست آمده از تئوری‌های غیرموضعی و کلاسیک برای گرافن دولایه

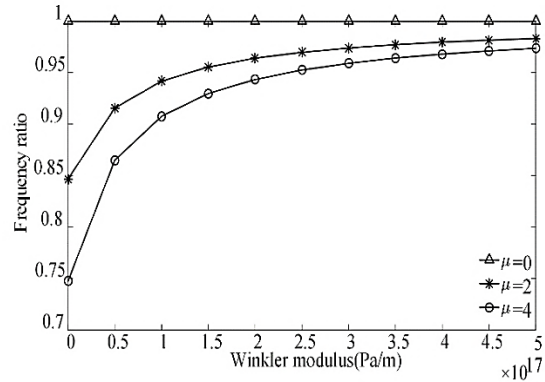
می‌یابد اما وابستگی این تغییرات به پارامتر غیرموضعی بسیار کوچک شده به طوری که با افزایش نیرو به ازای هر پارامتر غیرموضعی نتایج به صورت خطوط موازی حاصل می‌شود. یعنی فرکانس‌های طبیعی با سرعت بسیار کمی در اثر افزایش نیرو به سمت هم‌همگرا می‌شوند. دلیل این امر بالا بودن ضریب ون در والس در معادلات می‌باشد، که باعث کاهش تأثیر پارامتر غیرموضعی می‌شود.

**8- نتیجه گیری**

در این مقاله یک حل تحلیلی برای بررسی ارتعاشات عرضی صفحات گرافن تک‌لایه و دولایه تحت بارگذاری نیروی محوری و در محیط الاستیک و براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم و الاستیسیته غیرموضعی ارینگن ارائه شده است. استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه سوم وقتی طول و عرض صفحه کوچک باشد میتواند از خطاهای قابل ملاحظه جلوگیری کند [17]. اما برای گرافن در اندازه تقریباً بیشتر از 6nm تفاوت بسیار اندکی بین تئوری صفحات مختلف وجود دارد که قابل چشم‌پوشی است. از مطالعه پارامتری رفتار ارتعاشی صفحه‌ی گرافن چنین نتایجی حاصل شد: با افزایش ابعاد، نسبت فرکانسی افزایش و با افزایش پارامتر غیرموضعی، نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد؛ با افزایش نیروی محوری، تأثیر پارامتر غیرموضعی کاهش یافته و اختلاف نتایج حاصل از تئوری‌های موضعی و غیرموضعی کمتر خواهد شد؛ با افزایش طول گرافن، فرکانس طبیعی کم شده و نتایج به سمت تئوری کلاسیک میل می‌یابد؛ با افزایش نسبت ابعادی ورق و تبدیل آن به یک نوار باریک، تأثیر پارامتر غیرموضعی افزایش می‌یابد؛ با افزایش سختی وینکلر محیط الاستیک، نسبت فرکانسی برای تمام مقادیر پارامتر غیرموضعی به سمت واحد میل کرده و تأثیر پارامتر غیرموضعی کم می‌شود؛ در یک سیستم ارتعاشی گرافن دولایه، نیروی ون در والس بر فرکانس طبیعی غیرهم‌فاز تأثیر گذاشته و باعث افزایش فرکانس غیرهم‌فاز می‌شود ولی در حالت هم‌فاز به علت ثابت بودن فاصله دو لایه در هر لحظه تأثیری روی فرکانس ندارد؛ همانند آنچه که برای یک گرافن تک‌لایه گفته شد، در یک صفحه‌ی گرافن دولایه نیز با افزایش نیروی محوری، فرکانس طبیعی افزایش یافته و وابستگی این تغییرات به پارامتر غیرموضعی بسیار کم خواهد شد.

**9- پیوست**

الف) مقادیر درایه‌های مربوط به ماتریس سختی صفحه‌ی گرافن تک‌لایه در

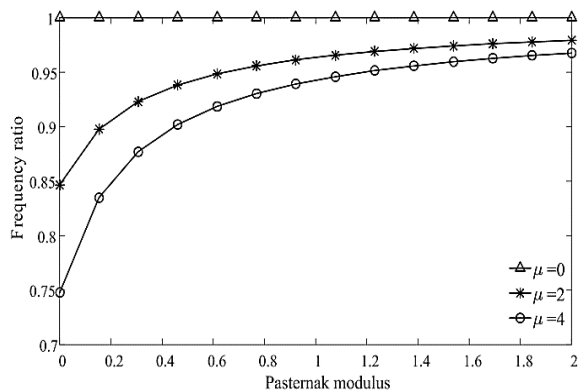


**Fig. 7** Effect of Winkler modulus on frequency ratio ( $m=n=1$ )

شکل 7 تأثیر ضریب سختی وینکلر روی نسبت فرکانسی

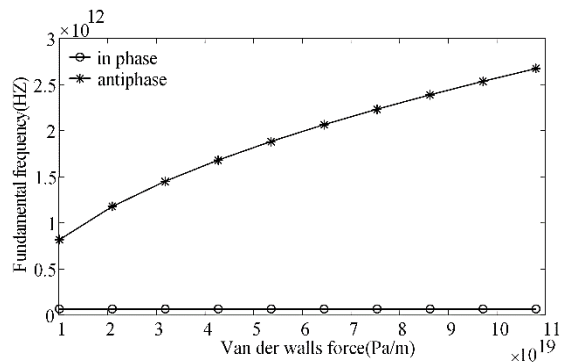
در "شکل 8" اثر ضریب سختی پسترناک بررسی شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است با افزایش ضریب سختی پسترناک، نسبت فرکانسی افزایش یافته و به سمت واحد میل می‌کند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضریب سختی پسترناک، تأثیر پارامتر غیرموضعی کاسته می‌شود. بررسی ارتعاشات گرافن دولایه در "شکل 9" نشان می‌دهد اثر نیروی ون در والس روی فرکانس طبیعی غیرهم‌فاز تأثیر گذاشته و باعث افزایش فرکانس در حالت غیرهم‌فاز می‌شود ولی در حالت هم‌فاز به علت ثابت بودن فاصله دو لایه در هر لحظه تأثیری روی فرکانس ندارد.

نتایج ارائه شده در "شکل 10" نشان می‌دهد با افزایش نیروی محوری در یک سیستم گرافن دولایه، همانند گرافن تک‌لایه، فرکانس طبیعی افزایش



**Fig. 8.** Effect of Pasternak modulus on frequency ratio ( $m=n=1$ )

شکل 8 تأثیر ضریب سختی پسترناک روی نسبت فرکانسی



**Fig. 9** Effect of van der walls force on vibration of graphene sheet. ( $a=b=10\text{ nm}$ ,  $\mu = 2\text{ nm}^2$ ,  $m = n = 1$ )

شکل 9 تأثیر نیروی ون در والس روی گرافن

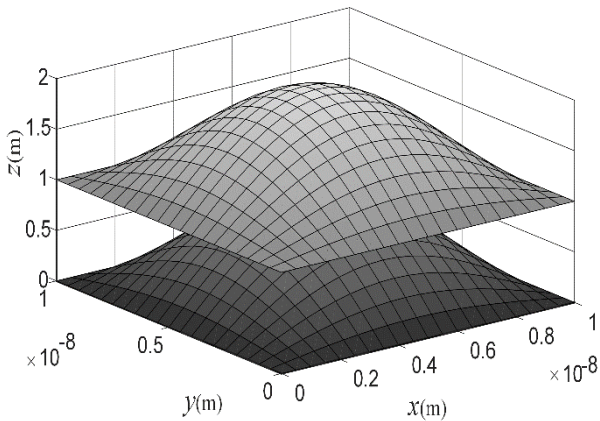


Fig. 11 Inphase mode-shape ( $m=n=1$ )

شکل 11 شکل مود اول - حالت هم‌فاز

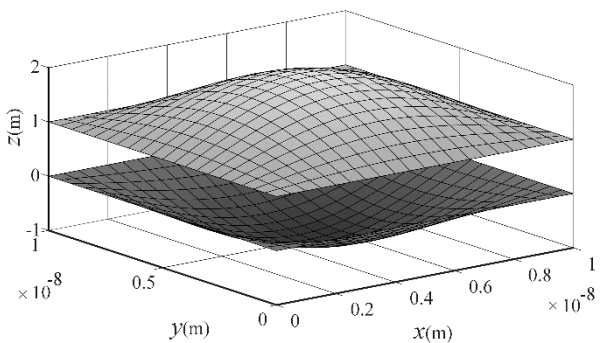


Fig. 12 Antiphase mode-shape ( $m=n=1$ )

شکل 12 شکل مود اول - حالت غیرهم‌فاز

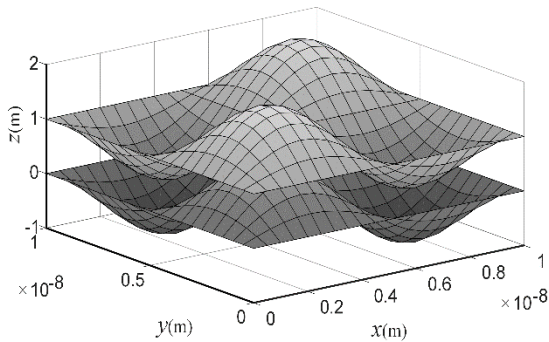


Fig. 13 Inphase mode-shape ( $m=n=2$ )

شکل 13 شکل مود دوم - حالت هم‌فاز

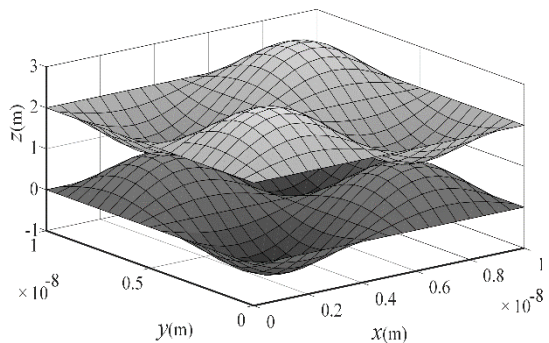


Fig. 14 Antiphase mode-shape ( $m=n=2$ )

شکل 14 شکل مود دوم - حالت غیرهم‌فاز

این قسمت بیان شده است.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{1l} &= H_2\alpha^4 + H_4\alpha^2\beta^2 - H_9\alpha^2 - H_{11}\beta^2 + H_{12} - H_{13}\alpha^6 \\
 &\quad - H_{14}\alpha^4\beta^2 - H_{15}\alpha^2\beta^4 - H_{16}\beta^6 + H_7\beta^4 - (-H_{17} \\
 &\quad + H_{20}\alpha^2 + H_{21}\beta^2 - H_{26}\alpha^4 - H_{27}\alpha^2\beta^2 - H_{28}B^4)\omega^2, \\
 K_{12}^{1l} &= H_3\alpha^2\beta + H_6\beta^3 - H_{10}\beta - (H_{18}\beta - H_{22}\beta\alpha^2 \\
 &\quad - H_{23}\beta^3)\omega^2, \\
 K_{13}^{1l} &= -H_1\alpha^3 - H_5\alpha\beta^2 + H_8\alpha - (-H_{19}\alpha - H_{24}\alpha^3 \\
 &\quad - H_{25}\alpha\beta^2)\omega^2, \\
 K_{22}^{1l} &= -I_3\alpha\beta, \quad K_{33}^{1l} = -J_1\alpha\beta, \\
 K_{23}^{1l} &= -I_1\alpha^2 - I_5\beta^2 + I_6 + (-I_8 + I_{10}\alpha^2 - I_{12}\beta^2)\omega^2, \\
 K_{21}^{1l} &= K_{12}^{1l}, \quad K_{31}^{1l} = K_{13}^{1l}, \quad K_{32}^{1l} = K_{23}^{1l},
 \end{aligned} \tag{41}$$

برای صفحه‌ی گرافن دولایه نیز داریم:

$$\begin{aligned}
 K_{14}^{2l} &= C + C\mu\alpha^2 + C\mu\beta^2, \\
 K_{12}^{2l} &= K_{45}^{2l} = K_{12}^{1l}, \quad K_{13}^{2l} = K_{46}^{2l} = K_{13}^{1l}, \quad K_{23}^{2l} = K_{56}^{2l} = K_{23}^{1l} \\
 K_{11}^{2l} &= K_{14}^{2l} - K_{14}^{1l}, \quad K_{44}^{2l} = K_{14}^{2l} - K_{14}^{1l}, \\
 K_{22}^{2l} &= K_{55}^{2l} = K_{22}^{1l}, \quad K_{33}^{2l} = K_{66}^{2l} = K_{33}^{1l} \\
 K_{41}^{2l} &= K_{14}^{2l}, \quad K_{32}^{2l} = K_{23}^{2l}, \quad K_{21}^{2l} = K_{12}^{2l}, \quad K_{46}^{2l} = K_{64}^{2l}, \\
 K_{65}^{2l} &= K_{56}^{2l}, \quad K_{54}^{2l} = K_{45}^{2l}
 \end{aligned} \tag{42}$$

که در این معادلات:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= c_1A_{11}\frac{h^5}{80} - c_1^2A_{11}\frac{h^7}{448} \\
 H_2 &= -c_1^2A_{11}\frac{h^7}{448} - k_p - \mu f, \\
 H_3 &= c_1A_{12}\frac{h^5}{80} - c_1^2A_{12}\frac{h^7}{448} + 2c_1A_{66}\frac{h^5}{80} - 2c_1^2A_{66}\frac{h^7}{448} \\
 H_4 &= -2c_1^2A_{12}\frac{h^7}{448} - 2k_p - \mu f - 4c_1^2A_{66}\frac{h^7}{448}, \\
 H_5 &= H_3, \quad H_6 = c_1A_{22}\frac{h^5}{80} - c_1^2A_{22}\frac{h^7}{448} \\
 H_7 &= -c_1^2A_{22}\frac{h^7}{448} - k_p, \\
 H_8 &= H_{10} = hA_{55} - 2c_2A_{55}\frac{h^3}{12} + c_2^2A_{55}\frac{h^5}{80}, \\
 H_9 &= hA_{55} - 2c_2A_{55}\frac{h^3}{12} + c_2^2A_{55}\frac{h^5}{80} + f - \mu k_w \\
 H_{11} &= hA_{44} - 2c_2A_{44}\frac{h^3}{12} + c_2^2A_{44}\frac{h^5}{80} - \mu k_w \\
 H_{12} &= k_w, \quad H_{13} = H_{16} = \mu k_p, \\
 H_{14} &= H_{15} = 3\mu k_p, \quad H_{17} = m_0, \\
 H_{18} &= H_{19} = c_1\hat{m}_4, \\
 H_{20} &= H_{21} = -c_1^2m_6 - \mu m_0, \quad H_{26} = H_{28} = \mu c_1^2m_6, \\
 H_{22} &= H_{23} = H_{25} = -\mu c_1\hat{m}_4, \\
 H_{27} &= 2\mu c_1^2m_6,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -A_{11}\frac{h^3}{12} + 2c_1A_{11}\frac{h^5}{80} - c_1^2A_{11}\frac{h^7}{448}, \\
 I_3 &= -A_{12}\frac{h^3}{12} - c_1^2A_{12}\frac{h^7}{448} + 2c_1A_{12}\frac{h^5}{80} - A_{66}\frac{h^3}{12} \\
 &\quad - c_1^2A_{66}\frac{h^7}{448} + 2c_1A_{66}\frac{h^5}{80}, \\
 I_5 &= -A_{66}\frac{h^3}{12} + 2c_1A_{66}\frac{h^5}{80} - c_1^2A_{66}\frac{h^7}{448}, \\
 I_6 &= hA_{55} - 2c_2A_{55}\frac{h^3}{12} + c_2^2A_{55}\frac{h^5}{80}, \\
 I_8 &= \hat{m}_2 - c_1\hat{m}_4, \quad I_{10} = I_{12} = -\mu\hat{m}_2 + \mu c_1\hat{m}_4
 \end{aligned}$$

(ب) در این قسمت شکل موده‌های هم‌فاز و غیر هم‌فاز نرمالایز شده برای صفحه‌ی گرافن با طول و عرض 10nm به ازای مقادیر  $m=n=1$  و  $m=n=2$  ارائه شده است. برای نمایش بهتر شکل مودها فاصله بین صفحات واحد در نظر گرفته شده است.



## 10- مراجع

- No. 7, pp. 80-90, 2014.
- [12] A. Alibeigloo, Free vibration analysis of nano plate using three dimensional theory of elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 222, pp. 149-159, 2011.
- [13] A. R. Setoodeh, P. Malekzadeh, A. R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal Mindlin plate theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 226, No. 7, pp. 1896-1906, 2012.
- [14] Z. B. Shen, H. L. Tang, D. K. Li, G. J. Tang, Vibration of fingle-layered graphene sheet based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Material Science*, Vol. 61, pp. 200-205, 2012.
- [15] T. Natsuki, J. X. Shi, Q. Q. Ni, Vibration analysis of nanomechanical mass sensor using double-layered graphene sheets resonators, *Journal of Applied Physics*, Vol. 114, No. 9, pp. 73-78, 2013.
- [16] K. Kiani, Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 610-619, 2014.
- [17] R. Aghababaei, J. N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, pp. 277-289, 2009.
- [18] B. Arash, Q. Wang, A review on the application of nonlocal elastic in modeling of carbon nanotubes and graphenes, *Computational Materials Science*, Vol. 51, pp. 303-317, 2012.
- [19] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [20] Y. Zhang, Z. X. Lei, L. W. Zhang, K. M. Liew, J.L. Yu, Nonlocal Continuum model for vibration of single-layered graphene sheets based on the element-free Kp-Ritz method, *Engineering Analysis With Boundary Element*, Vol. 56, pp. 90-97, 2015.
- [21] S. C. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of orthotropic grapheme sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 774-779, 2011.
- [22] X. Q. He, S. Kitipornchai, K. M. Liew, Resonance analysis of multi-layered graphene sheets used as nanoscale resonators, *Nanotechnology*, Vol. 16, pp. 2086-2091, 2005.
- [1] A. C. Eringen, *Nonlocal Micropolar Field Theory*, Eringen, A.C. (Ed.), *Continuum Physics*, Vol. 4, pp. 205-267, New York: Academic Press, 1976
- [2] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solution of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.
- [3] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, pp. 206-223, 2009.
- [4] T. Murmu, S. C. Pradhan, Small-scale effects on the free in-plane vibration of nanoplates by nonlocal continuum model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, pp. 1628-1633, 2009.
- [5] R. Ansari, R. Rajabiehfard, B. Arash, Nonlocal finite element for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science*, Vol. 49, No. 4, pp. 831-838, 2010.
- [6] R. Ansari, B. Arash, H. Rouhi, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2419-2429, 2011.
- [7] L. Shen, H. S. Shen, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environment, *Computational Materials Science*, Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010.
- [8] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010.
- [9] B. Arash, Q. Wang, Vibration of single- and double-layered graphene sheets, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-7, 2011.
- [10] R. Nazemnezhad, Sh. Hosseini-Hashemi, H. Shokrollahi, Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No.7, pp. 131-138, 2014. (In Persian)
- [11] S.R. Asemi, A. Farajpour, Decoupling the nonlocal elasticity equations for thermo-mechanical vibration of circular graphene sheets including surface effects, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 60,