



## تحلیل ضربه‌ی کم سرعت بر نانوتیر با استفاده از تئوری تنش جفتی اصلاح شده

مهران قلمی‌چوهر<sup>1</sup>، عمار بیات<sup>1</sup>، غلامحسین لیاقت<sup>2\*</sup>، حامد احمدی<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، تربیت مدرس، تهران

2- استاده مهندسی مکانیک، تربیت مدرس، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14115-111، ghlia530@modares.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 مرداد 1396

پذیرش: 29 مهر 1396

ارائه در سایت: 10 آذر 1396

کلید واژگان:

ضربه‌ی کم سرعت

تئوری تنش جفتی

اثر اندازه

در این مقاله تحلیل ضربه‌ی کم سرعت نانوذره بر نانوتیر با استفاده از تئوری تنش جفتی اصلاح شده بررسی شد. تئوری تنش جفتی اصلاح شده برای در نظر گرفتن اثرات اندازه مورد استفاده قرار گرفت. از اصل هامیلتون برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی استفاده شد و در نهایت حل عمومی برای حل آنها پیشنهاد گردید. صحت پاسخ‌ها با مقایسه نتایج کنونی با نتایج گزارش شده بررسی گردید. مقایسه نتایج نشان داد که مدل حاضر با دقت قابل قبولی توانایی پیش‌بینی رفتار دینامیکی ضربه کم سرعت را دارد. نتایج نشان می‌دهد با افزایش نسبت جرم، فرکانس‌های طبیعی نوسان کاهش پیدا کرده و سپس به مقداری ثابت میل می‌کنند. این مقدار برای فرکانس‌های دوم و سوم بیشتر است. همچنین با افزایش نسبت طول مشخصه به ضخامت، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. قابل ذکر است که فرکانس‌های بالاتر در برابر تغییر نسبت یادشده حساسیت بیشتری دارند. خیز بیشینه دینامیکی نوسان با افزایش نسبت جرم افزایش می‌یابد. علاوه بر این از نتایج مهم این تحقیق می‌توان به اثر ضریب پواسون بر فرکانس طبیعی در تیرهای نانو-مقیاس اشاره کرد. وقتی که ضریب پواسون افزایش می‌یابد، فرکانس طبیعی کم می‌شود. همچنین برای نسبت‌های طول مشخصه به ضخامت کم، اثرات اندازه ناچیز بوده و جواب به جواب کلاسیک میل می‌کند. بنابراین، از تئوری تنش جفتی اصلاح شده می‌توان برای در نظر گرفتن اثرات اندازه در ضربه‌ی کم سرعت بر نانوتیر استفاده نمود.

## Analysis of low velocity impact on nano-beam using modified couple stress theory

Mehran Ghalami Choobar, Amar Bayat, Gholam Hossein Liaghat\*, Hamed Ahmadi

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 14115-111, Tehran, ghlia530@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 23 July 2017

Accepted 21 October 2017

Available Online 01 December 2017

### Keywords:

Low velocity impact

Couple stress theory

Size effect

### ABSTRACT

In this paper, low velocity impact on nano-beam using couple stress theory was investigated. Modified couple stress theory was utilized to capture size-dependent effects. Hamilton's principle was employed to derive governing equations and boundary conditions and then general solution was proposed. The solutions validity was confirmed by comparing present results with that of the literature. Comparing the results shows the present theory is capable to predict low velocity dynamic behavior with acceptable accuracy. The results show as mass ratio increased, natural frequencies decreased and then trend to a constant value. This limit is higher for second and third natural frequencies. Also, the natural frequencies increased when characteristic length to thickness ratio increased. It can be noted higher natural frequencies are more sensitive to variation of this ratio. Furthermore, maximum dynamic deflection raised when mass ratio increased. Moreover, a considerable result from this study is the profound effect of poisson ratio on natural frequencies for nano-sized beams. As Poisson's ratio increased, natural frequencies increased. Also, for low length scale to thickness ratio the size effect is insignificant and response trend to classic solution. Therefore, the couple stress theory can be employed to take into account size effects in low velocity impact on nano-beam problem.

### 1- مقدمه

آن است که مدول الاستیک و استحکام تسلیم ورق گرافن<sup>1</sup> تک‌لایه می‌تواند 1 TPa و 130 GPa باشد.

مدلسازی این‌گونه سازه‌ها با استفاده از روش محیط پیوسته برتری‌هایی از قبیل هزینه محاسباتی کم را نسبت به روش‌های اتم‌گرایانه<sup>2</sup> و همچنین

در سال‌های اخیر استفاده از سازه‌های میکرو نانومقیاس در زمینه‌هایی مانند هوافضا و الکترونیک گسترش زیادی یافته‌است. به دلیل اثرات اندازه، این سازه‌ها، ویژگی‌های مکانیکی، گرمایی و الکتریکی بسیار بیشتری نسبت به سازه‌های بزرگ-مقیاس از خود نشان می‌دهند. برای مثال مطالعات، حاکی از

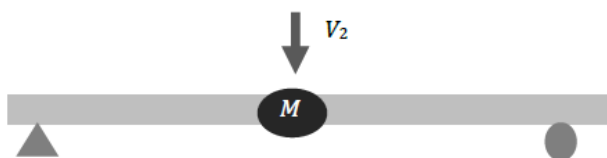
<sup>1</sup> Graphene sheet

<sup>2</sup> Atomistic

### Please cite this article using:

M. Ghalami Choobar, A. Bayat, Gh. H. Liaghat, H. Ahmadi, Analysis of low velocity impact on nano-beam using modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 42-46, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:



**Fig.1** A nano-beam subjected to low velocity impact by nano-particle  
 شکل 1 نانوتیر تحت ضربه‌ی کم‌سرعت بوسیله نانوذره

تنش و  $\mu_{ij}$  تنسور انحنای متقارن است. که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ipq}\varepsilon_{qj,p} + e_{jqp}\varepsilon_{qi,p}) \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \mu_{ij} \quad (5)$$

در روابط (2) تا (5)،  $u$  بردار جابجایی،  $e_{ipq}$  بیانگر تنسور جایگشت و  $l$  پارامتر طول مشخصه ماده هستند. علاوه بر این  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  ضریب پواسون هستند. بر طبق تئوری تیر اویلر برنولی میدان جابجایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(x, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7)$$

$$v(x, z, t) = 0 \quad (8)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (9)$$

که  $u, v$  و  $w$  اجزای بردار جابجایی یک نقطه به مختصات  $(x, y, z)$  روی سطح مقطع تیر در جهت‌های  $x, y$  و  $z$  هستند.

با استفاده از روابط میدان جابجایی و روابط (2) تا (5) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (10)$$

$$\mu_{xy} = \mu_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (12)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -\mu l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zy} = 0 \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (10) تا (13) در معادله (1) نتیجه می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V [E \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 (z^2 + \frac{l^2}{2})] dV \quad (14)$$

انرژی جنبشی کل برای تیر اویلر برنولی به انضمام جسمی به جرم  $M$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial w(L/2, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (15)$$

طبق اصل همیلتون [8] معادله حاکم بر تیر طویل با شرایط اولیه و شرایط مرزی با استفاده از فرمول‌بندی حساب تغییرات به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (T - U_s) dt \right] = 0 \quad (16)$$

روش ترکیبی به ارمغان می‌آورد. با این وجود کاربرد و صحت عملکرد مدل‌های محیط پیوسته کلاسیک در مقیاس میکرو و نانو با ابهاماتی روبرو بوده و لازم است اصلاحاتی برای لحاظ کردن اثرات اندازه انجام شود. از تئوری‌های غیرکلاسیک پیشنهاد شده می‌توان به گرادیان کرنش، ناموضعی و همچنین جفت‌تنش اصلاح شده اشاره داشت. تئوری تنش جفتی اصلاح شده در سال 2002 توسط یانگ و همکاران ارائه گردید. در تئوری اصلاح شده تنسور تنش متقارن بوده و شامل په طول مشخصه می‌باشد که اثرات ریزمقیاس را مدلسازی می‌کند. از این مدل در بررسی رفتار کششی، خمشی و همچنین ارتعاشی-کمانشی سازه‌ها استفاده شده است. ردی تئوری‌های مختلف موجود برای تیر شامل اویلر-برنولی، تیموشینکو، ردی و لوینسون را با استفاده از روابط ارینگن بازنویسی کرد [1]. تئوری ارینگن بیانگر این نکته است که تنش در هر نقطه تابعی از میدان کرنش آن نقطه و همه نقاط مکانیک محیط پیوسته است [2].

شیمشک با استفاده از تئوری تنش جفتی اصلاح شده<sup>1</sup> به تحلیل تئوری و عددی میکروتیر حامل یک ذره متحرک پرداخت. او اثر طول مشخصه ماده، اثر ضریب پواسون، سرعت میکرو ذره را در پاسخ دینامیکی میکرو بیم بررسی کرده است و نتیجه گرفته است که اثرات ذکر شده نقش مهمی در رفتار دینامیکی میکرو تیر بازی می‌کنند [3]. اکبری و ابوالقاسمی به ارائه فرمول تیر اویلر برنولی براساس تئوری تنش جفتی پرداختند. معادله بدست آمده از این تئوری فقط شامل پارامتر مقیاس طولی بوده که توانایی بررسی اثر اندازه میکروسازه‌ای در پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌ها را دارد [4]. صیغوری و لیاقت ضربه کم سرعت نانوذره بر روی نانو تیر را با استفاده از مدل غیر محلی الاستیسیته به منظور بررسی اثرات غیر محلی در رفتار جابجایی دینامیکی نانوتیر انجام دادند. نتایج با تقریب خوبی نشان داد که جرم و سرعت نانوذره اثرات قابل توجهی در رفتار دینامیکی نانوتیر دارد [5]. صیغوری و لیاقت یک روش تحلیلی جدید برای بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره بر روی نانوتیر اویلر برنولی و براساس تئوری غیرمحلی ارائه کردند. نتیجه نهایی افزایش تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر با افزایش پارامتر غیرمحلی و کاهش فرکانسهای نانوتیر در همه نسبت‌های جرم بود [6].

در این مقاله در ادامه پژوهش‌های پیشین [5,6]، مسئله برخورد کم‌سرعت نانوذره به نانو با تئوری جفت‌تنش اصلاح شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای استخراج معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده شده و حل عمومی معادله حاکم ارائه می‌گردد. نتایج حاصل با منابع موجود مقایسه شده و صحت نتایج بررسی می‌شود. مثال‌های عددی برای بررسی نقش عوامل مختلف در رفتار دینامیکی برخورد نانو ذره بر نانوتیر بررسی می‌گردد.

## 2- فرمول‌بندی مسئله

شکل 1 تیری با تکیه‌گاه ساده را تحت ضربه‌ی کم‌سرعت نشان می‌دهد. برای در نظر گرفتن اثرات اندازه می‌توان از تئوری تنش جفتی اصلاح شده استفاده کرد. طبق تئوری تنش جفتی اصلاح شده بیان شده توسط یانگ و همکارانش [7]، انرژی کرنشی ذخیره شده در یک میکروتیر همسانگرد اویلر برنولی بر اساس مولفه‌های تنسور کرنش مقیاس ماکرو و تنسور انحنای متقارن که با چرخش ذرات در مقیاس ماکرو ارتباط دارد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}; \varepsilon_{ij} + m_{ij}; \mu_{ij}) dV \quad (1)$$

$\sigma_{ij}$  تنسور تنش،  $\varepsilon_{ij}$  تنسور کرنش،  $m_{ij}$  قسمت انحرافی تنسور کوپل

<sup>1</sup>couple stress theory

با جایگذاری روابط (14) و (15) در رابطه (16) معادله حاکم به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$(EI + 4\mu Al^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

شرایط مرزی برای تیر مورد بررسی (شکل 1) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= \frac{M}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ w &= 0 \end{aligned} \quad \text{در } x = \frac{L}{2} \quad (18 \text{ الف})$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad (18 \text{ ب})$$

### تحلیل ارتعاش آزاد

در ادامه برای بررسی رفتار دینامیکی و تحلیل ارتعاش آزاد تیر مذکور، پاسخ تیر به صورت مقابل در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin \omega_n t \quad (19)$$

با جایگذاری معادله (18) در (17) داریم

$$(EI + 4\mu Al^2) \frac{\partial^4 W_n(x)}{\partial x^4} + \rho A \omega_n^2 W_n(x) + k W_n(x) = 0 \quad (20)$$

که  $\omega_n$  فرکانس تیر است. حل عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$W_n(x) = A_n \sin \alpha_n x + B_n \cos \alpha_n x + C_n \sinh \alpha_n x + D_n \cosh \alpha_n x \quad (21)$$

که ضرایب  $A_n, B_n, C_n, D_n$  از شرایط مرزی و با توجه به نوع شرط مرزی بدست خواهند آمد. علاوه براین ضریب  $\alpha_n$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_n^4 = \omega_n^2 \left( \frac{\rho A}{EI + 4\mu Al^2} \right) \quad (22)$$

فرکانس ارتعاشی مود  $n$ ام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\lambda_n^2}{2\pi} \left( \frac{EI + 4\mu Al^2}{\rho A} \right)^{0.5} \quad (23)$$

با در نظر گرفتن مقطع مستطیلی  $b \times h$  برای تیر، رابطه (23) به صورت زیر بازآرایی و ساده می‌شود:

$$\omega_{nondim} = \frac{\omega_n}{\sqrt{\frac{Eh^2}{\rho}}} = \lambda_n^2 \sqrt{\left( \frac{1}{12} + \frac{2l^2}{(1+\nu)h^2} \right)} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (20) در (18)، معادله مشخصه‌ی ارتعاش نانوتیر

تحت ضربه بدین صورت بدست می‌آید:

$$\frac{M}{m} \frac{\lambda_n}{2} \left( \tanh \frac{\lambda_n}{2} - \tan \frac{\lambda_n}{2} \right) + 2 = 0 \quad (25)$$

که فرکانس طبیعی از رابطه (24) و (23) بدست می‌آید.

### پاسخ دینامیکی و رفتار ضربه‌ای

برای یافتن پاسخ دینامیکی معادله (17) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم:

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه (26) در معادله حاکم، رابطه (1)، خواهیم داشت:

$$(EI + 4\mu Al^2) \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} T + \rho A \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X = 0 \quad (27)$$

که به شکل زیر ساده‌نویسی می‌شود:

$$(EI + 4\mu Al^2) X^{(4)} T + \rho A \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X = 0 \quad (28)$$

معادله (28) را می‌توان به صورت معادله (29) بازنویسی کرد:

$$\frac{(EI + 4\mu Al^2) X^{(4)}}{\rho A} = - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (29)$$

از (28) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{(EI + 4\mu Al^2) X^{(4)}}{\rho A} = \gamma^2 \quad (30 \text{ الف})$$

$$- \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \gamma^2 \quad (30 \text{ ب})$$

معادله (30 الف) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$X^{(4)} - \alpha^4 X = 0 \quad (31)$$

که در آن

$$\alpha^4 = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^4 = (\gamma^2) \frac{\rho}{Eh^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{12} + \frac{2l^2}{(1+\nu)h^2} \right)} \quad (32)$$

حل عمومی معادله دیفرانسیل (30 ب) به صورت زیر خواهد بود:

$$T(t) = B_0 \sin(\gamma t) + B_1 \cos(\gamma t) \quad (33)$$

جواب معادله (30 الف) به صورت (34) بدست می‌آید.

$$X(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} + C_3 \sin(\alpha x) + C_4 \cos(\alpha x) \quad (34)$$

در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی به معادله (34)، شکل مود ارتعاشی

به صورت (35) بدست خواهد آمد:

$$X_i(x) = - \frac{\cos\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)} \sinh(\alpha_i x) + \sin(\alpha_i x) \quad (35)$$

در نتیجه جواب کلی معادله (27) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} w_i(x, t) = & \left( - \frac{\cos\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)} \sinh(\alpha_i x) \right. \\ & \left. + \sin(\alpha_i x) \right) (B_{0_i} \sin(\gamma t) + B_{1_i} \cos(\gamma t)) \end{aligned} \quad (36)$$

و تابع کلی خیز بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \sum_{i=1}^N \frac{-\cos\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)} \sinh(\alpha_i x) \\ & + \sin(\alpha_i x) (B_{0_i} \sin(\gamma t) \\ & + B_{1_i} \cos(\gamma t)) \end{aligned} \quad (37)$$

در نهایت با اعمال شرایط اولیه مکان-صفر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \sum_{i=1}^N \frac{-\cos\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_i L}{2}\right)} \sinh(\alpha_i x) \\ & + \sin(\alpha_i x) (B_{0_i} \sin(\gamma t) \end{aligned} \quad (38)$$

برای محاسبه ضریب  $B_{0_i}$  از شرط اولیه سرعت ضربه ای استفاده

می‌کنیم

$$\int \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} dS = M v_2 \quad (39)$$

که انتگرال سمت چپ معادله (39)، روی مجموعه تیر و پرتابه گرفته

می‌شود. با توجه به تعریف  $X_i$  در معادله (35)، میدان خیز را می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$w(x, t) = \sum_i B_{0_i} X_i \sin(\gamma t) \quad (40)$$

با جایگذاری رابطه (40) در (39)، معادله‌ی (41) بدست خواهد آمد:

$$\int \sum_i B_{0_i} Y_i \rho A dx + \sum_i B_{0_i} m_2 Y_i = M v_2 \quad (41)$$

برای یافتن  $B_{0_i}$  با استفاده از خواص مودهای ارتعاشی برای  $i$  و  $j$  مساوی

داریم

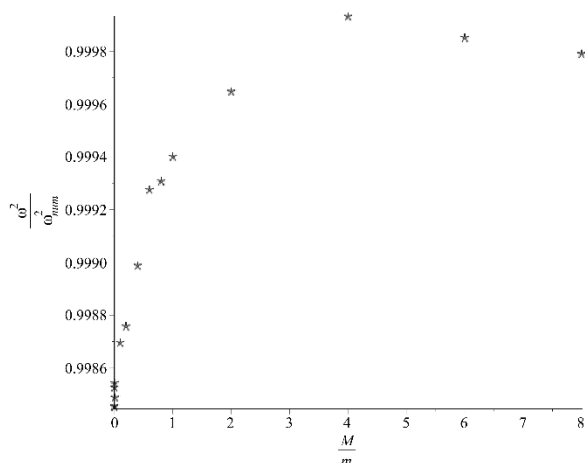


Fig. 2 variation of frequencies proportion vs. mass ratio

شکل 2 تغییرات نسبت فرکانس‌ها بر حسب نسبت جرم‌ها

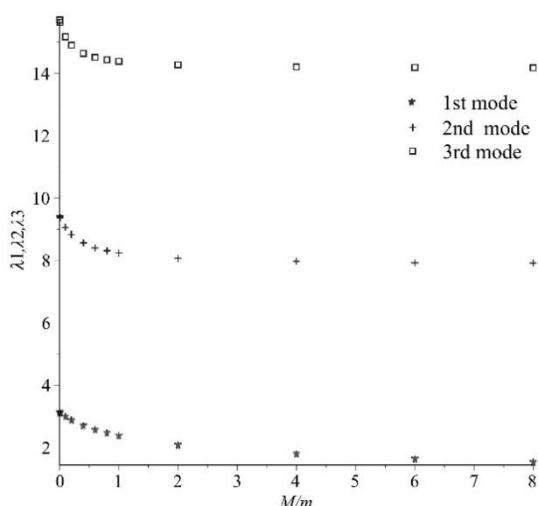


Fig.3 Variation of first three non-dimensional frequency with masses proportion

شکل 3 تغییر سه فرکانس اول بی‌بعد بر حسب نسبت جرم‌ها

نسبت طول مشخصه به ضخامت نشان می‌دهد. با افزایش ضریب پواسون فرکانس طبیعی نوسان کاهش می‌یابد. افزایش ضریب پواسون باعث کاهش سفتی سازه شده و آن نیز فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد. همچنین با افزایش نسبت طول مشخصه به ضخامت تاثیر ضریب پواسون افزایش می‌یابد. شکل 6 خیز بیشینه‌ی وسط تیر را بر حسب پارامتر نسبت ضخامت نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش جرم، خیز با سرعت زیادی افزایش یافته سپس به مقداری ثابت میل می‌کند که در شکل 4 نیز مشاهده گردید.

در واقع با افزایش نسبت جرم، جرم تیر ( $m$ ) در برابر جرم پرتابه ( $M$ ) قابل صرفنظر بوده و بعد از آن، افزایش جرم تاثیری بر تغییر شکل و فرکانس بی‌بعد مورد بررسی ندارد.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله ضربه‌ی کم‌سرعت نانوذره بر نانوتیر بر اساس تئوری تنش جفتی اصلاح شده بررسی گردید. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج گردید و سپس حل عمومی برای حل آنها پیشنهاد گردید. از مهم‌ترین نتایج بدست آمده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

$$\lambda B_{0j}(\rho A \int_0^L Y_j Y_j dx + m_2 Y_j^2(L/2)) = M v_2 Y_j(L/2) \quad (42)$$

و در نهایت

$$B_{0j} = \frac{1}{\lambda} \frac{M v_2 Y_j(L/2)}{\rho A \int_0^L Y_j Y_j dx + M Y_j^2(L/2)} \quad (43)$$

بدین صورت پاسخ دینامیکی تیر نانو به صورت زیر بدست می‌آید

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} \frac{M v_2 Y_j(L/2)}{\rho A \int_0^L Y_j Y_j dx + M Y_j^2(L/2)} Y_i \sin(\gamma t) \quad (44)$$

که شکل مود آن  $Y_i$  از رابطه (35) بدست می‌آید.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} \frac{v_2 Y_j(L/2)}{\frac{m}{ML} \int_0^L Y_j Y_j dx + Y_j^2(L/2)} Y_i \sin(\gamma t) \quad (45)$$

### 3- صحت‌سنجی

برای بررسی صحت نتایج بدست آمده فرکانس‌های بدست آمده از معادله (24) با مقادیر گزارش در مرجع [9] مقایسه می‌شود که به روشی نیمه‌تحلیلی فرمولی مطابق زیر ارائه شده است.

$$\omega^2 = \frac{48EI}{ML^3} \frac{\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{5}{4}\alpha + 1}{\frac{62}{315}\alpha^3 + \frac{113}{112}\alpha^2 + \frac{243}{140}\alpha + 1} \quad (46)$$

که در آن  $\alpha$  نسبت جرم‌ها بوده و به صورت  $\frac{m}{M}$  تعریف می‌گردد. برای سهولت در امر مقایسه، کسری ایجاد می‌شود که نسبت مجذور فرکانس‌ها در دو حالت کنونی و مرجع [9] را نشان می‌دهد. در این حالت داریم

$$\frac{\omega^2}{\omega_{\text{NUMERICAL}}^2} = \frac{\frac{LEI}{M} \frac{1}{\alpha} \lambda_n^4 L^4}{\frac{48EI}{ML^3} f(\alpha)} = \frac{\lambda_n^4}{48\alpha f(\alpha)} \quad (47)$$

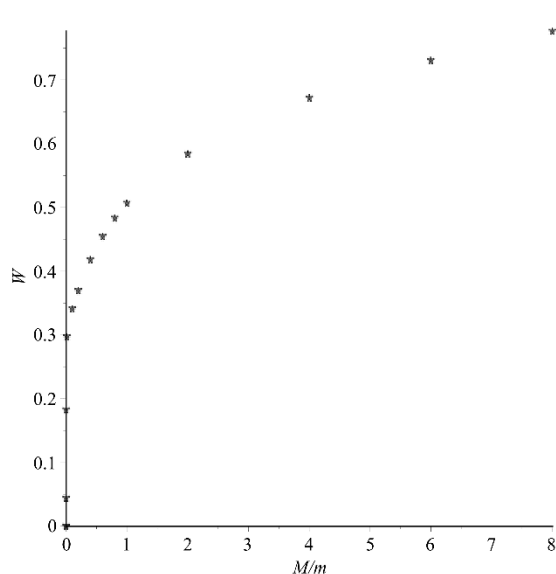
بررسی رابطه (47) نشان می‌دهد که نسبت فرکانس‌ها و همچنین دقت روش محاسبه تنها به نسبت جرم‌ها وابسته است. شکل 2 نشان می‌دهد که نتایج فرمول (24) و (25) از دقت خوبی برخوردار است چون نسبت تقریباً برابر 1 می‌باشد.

### 4- نتایج و بحث

در این بخش به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در رفتار دینامیکی برخورد نانو ذره بر نانوتیر پرداخته می‌شود. شکل 3 تغییرات سه فرکانس اول بی‌بعد را بر حسب تغییرات نسبت جرم‌ها نشان می‌دهد. همانگونه که از شکل مشخص است با افزایش نسبت جرم‌ها فرکانس نوسان کاهش می‌یابد ولی سپس به یک مقداری همگرا می‌گردد این مقدار همگرایی برای فرکانس‌های بالاتر بیشتر شده و سرعت همگرایی نیز افزایش می‌یابد. علت همگرایی میل کردن سیستم مورد بررسی به مسئله کلاسیک برخورد جرم به «تیر بدون جرم» می‌باشد. در این حالت تیر تنها دارای خاصیت الاستیک بوده و جرمی ندارد. شکل 4 سه فرکانس اول بی‌بعد را بر حسب نسبت طول مشخصه به ضخامت نشان می‌دهد. با افزایش طول مشخصه فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. مشاهدات مشابه برای فرکانس تیر در مرجع [10] گزارش شده است. در واقع در نظر گرفتن طول مشخصه در این تئوری، برخلاف تئوری غیر موضعی، باعث افزایش سفتی سازه می‌گردد.

همچنین با کاهش نسبت طول مشخصه به ضخامت فرکانس‌ها به مقداری همگرا می‌شوند که همان مقدار پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک می‌باشد.

شکل 5 نمودار فرکانس طبیعی را بر حسب ضریب پواسون به ازای سه



**Fig.6** variation of first maximum dynamic deflection of nano-beam vs mass ratio

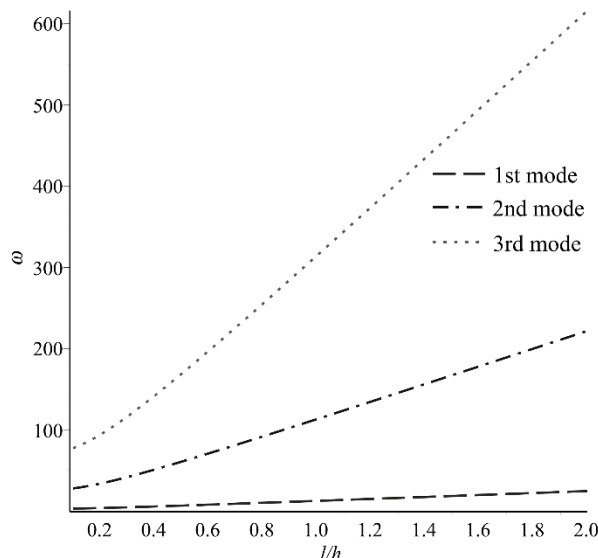
شکل 6 تغییر خیز دینامیکی بیشنیه‌ی اول بر حسب نسب جرم‌ها

مورد بررسی افزایش می‌یابد.

- برای نسبت‌های کم طول مشخصه به ضخامت اثرات اندازه کم‌تر بوده و جواب به جواب کلاسیک میل می‌کند.
- به ازای نسبت «طول مشخصه به ضخامت» های بزرگ، تاثیر ضریب پواسون بر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- خیز بیشینه دینامیکی نوسان با افزایش نسبت جرم افزایش می‌یابد.

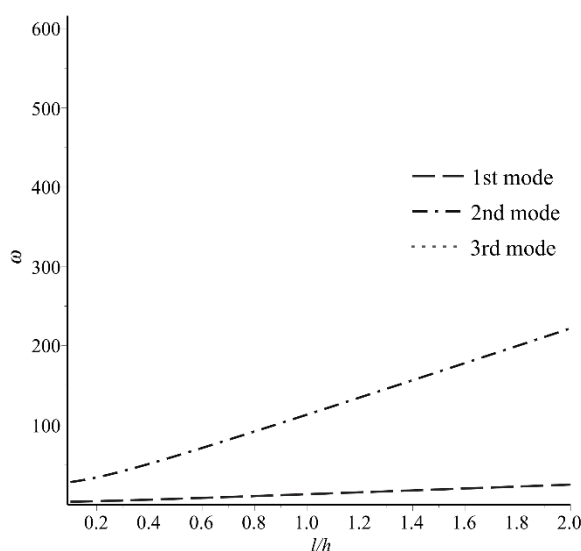
#### 6- مراجع

- [1] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [2] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, First edition, pp. 217-218, Springer Science & Business Media, 2002.
- [3] M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1721-1732, 2010.
- [4] A. Alashti, A. Abolghasemi, A size-dependent Bernoulli-Euler beam formulation based on a new model of couple stress theory, *International Journal of Engineering Transactions C*, Vol. 27, No. 6, pp. 951-960, 2014. (in Persian فارسی)
- [5] S. Seifoori, G. Liaghat, Low velocity impact of a nanoparticle on nanobeams by using a nonlocal elasticity model and explicit finite element modeling, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 69, No.1, pp. 85-93, 2013.
- [6] G. H. L. Sajad Seifoori, Low velocity impact of nanoparticle on euler-bernoulli nanobeam using a nonlocal elasticity model, *Tarbiat Modares University*, Vol. 13, No.3, pp. 37-44, 2012. (in Persian فارسی)
- [7] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [8] J. H. Ginsberg, J. H. Ginsberg, *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications*, First edition, pp. 89-100, Wiley, 2001.
- [9] Jagmohan L. Humar, *Dynamics of Structures*, Third edition, pp. 55-60, CRC Press, 2012.
- [10] Wan Ji Chen, Xiao Peng Li, Size-dependent free vibration analysis of composite laminated Timoshenko beam based on new modified couple stress theory, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 3, pp. 431-444, 2013.



**Fig.4** Variation of first three non-dimensional frequency vs. characteristic lengths to thickness ratio

شکل 4 تغییر سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد بر نسبت طول مشخصه به ضخامت



**Fig.5** variation of non-dimensional frequency vs. Poisson's ratio

شکل 5 تغییر فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ضریب پواسون

- تئوری تنش جفتی اصلاح شده توانایی مدلسازی اثرات اندازه در ضربه‌ی کم‌سرعت را دارد.
- با توجه به موارد مربوط به مقایسه نتایج، مدل حاضر با دقت قابل قبولی رفتار دینامیکی ضربه‌ی کم‌سرعت را مدل می‌کند.
- با افزایش نسبت جرم، فرکانس‌های طبیعی نوسان کاهش می‌یابند و سپس به مقداری ثابت میل می‌کنند.
- سرعت میل کردن برای فرکانس‌های دوم و سوم بیشتر است.
- با افزایش نسبت طول مشخصه به ضخامت، فرکانس طبیعی سیستم