



تحلیل کماتش نانو ورق هوشمند تحت بارگذاری درون صفحه‌ای براساس تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلّی و تغییر شکل برشی و عمودی

مرتضی قاسمی شیرینی¹، عبدالرحمان جامی الاحمدی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 9177948974، jaami-a@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 آبان 1395

پذیرش: 16 بهمن 1395

ارائه در سایت: 09 اسفند 1395

کلید واژگان:

تحلیل کماتش

نانو ورق هوشمند

لایه‌های پیزوالکتریک

تئوری الاستیسیته غیرمحلّی

تئوری تغییر شکل برشی و عمودی

چکیده

در این مطالعه، رفتار کماتشی نانو ورق هوشمند چند لایه از جنس گرافین با دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل بر اساس تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلّی و تغییر شکل برشی و عمودی انجام شده است. به منظور مطالعه تحلیلی کماتش نانو ورق هوشمند، میدان جابجایی خاص تئوری تغییر شکل برشی و عمودی بیان می‌شود. با معرفی توابع لژاندر و شش جمله اول آن‌ها، میدان جابجایی بسط داده شده و روابط غیرخطی کرنش-جابجایی استخراج می‌شوند. معادلات تعادل حاکم بر نانو ورق هوشمند بر پایه تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلّی و تغییر شکل برشی و عمودی، با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و معادله ماکسول به دست آمده‌اند. در حوزه حل الکتریکی به منظور بررسی اثر لایه‌های پیزوالکتریک، از معادله ماکسول به عنوان معادله مورد نیاز برای متغیرهای الکتریکی استفاده شده است. با استفاده از معیار تعادل همسایگی، معادلات پایداری حاکم بر نانو ورق هوشمند استخراج شده‌اند. معادلات حاصل با فرض تکیه‌گاه ساده روی هر چهار لبه به صورت تحلیلی حل شده است و بارهای بحرانی کماتش داده شده‌اند. به منظور اعتبارسنجی نتایج، مقادیر بارهای بحرانی کماتش با منابع در دسترس مقایسه می‌شوند. در پایان، پس از بررسی صحت نتایج ارائه شده، نتایج عددی برای اثر پارامترهای مختلف مانند طول نانو ورق، پارامتر غیرمحلّی، نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت گرافین، نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه، ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و نوع ماده پیزوالکتریک بر بار بحرانی کماتش با جزئیات مورد مطالعه قرار گرفته است.

Buckling Analysis of intelligent Nanoplate under Inplane Loading Based on Nonlocal Elasticity and Shear and normal Deformation Theories

Morteza Ghasemi Shiri, Abdolrahman Jaamialahmadi *

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

* P.O.B. 9177948974, Mashhad, Iran, jaami-a@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 November 2016
Accepted 04 February 2017
Available Online 27 February 2017

Keywords:

Buckling Analysis
intelligent Nanoplate
Piezoelectric Layers
nonlocal elasticity theory
Shear and Normal Deformation Theory

ABSTRACT

In this paper, the nonlocal buckling behavior of a biaxially loaded graphene sheet with piezoelectric layers based on an isotropic smart nanoplate model is studied. The equilibrium equations are derived with the von Karman-type geometrical nonlinearity by considering the small scale effect. The buckling of multilayer smart nanoplate made of graphene and piezoelectric materials is investigated. Based on the nonlocal elasticity and shear and normal deformation theories, the governing equilibrium equations are obtained using the principle of minimum total potential energy and Maxwell's equation.

Using an analytical approach, the governing stability equations of smart nanoplate have been presented in terms of displacement components and electrical potential. In order to obtain the stability equations, the adjacent equilibrium criterion is used. The stability equations are then solved analytically, assuming simply supported boundary condition along all edges. To validate the results, the critical buckling load values have been compared with available resources. Finally, following validation of the results, numerical results for intelligent nanoplate are presented.

Also, the effects of different parameters such as nanoplate length, different nonlocal parameter, piezoelectric layers thickness, the graphene thickness to length ratio, the piezoelectric layer thickness to graphene thickness ratio and type of piezoelectric material on the critical buckling loads of intelligent nanoplate are studied in detail. Furthermore, the effect of the mentioned parameters on the critical buckling loads has been presented in some figures.

1- مقدمه و مروری بر تحقیقات گذشته

جمله نظامی، هوانوردی و دریانوردی کاربرد دارند. نانو ورق‌ها زیرشاخه‌ای از ریزساختارها به شمار می‌روند که به علت آرایش اتمی مخصوص به خود باعث بهبود خواص الکتریکی، استحکام و افزایش انعطاف‌پذیری مواد می‌شود. از نانو

از میان سازه‌های پر کاربرد در صنعت می‌توان به نانو ورق‌ها اشاره کرد که به طور وسیع در شاخه‌های مختلف مهندسی و از جمله زمینه‌های مکانیک از

Please cite this article using:

M. Ghasemi Shiri, A. Jaamialahmadi, Buckling Analysis of intelligent Nanoplate under Inplane Loading Based on Nonlocal Elasticity and Shear and normal Deformation Theories, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 2, pp. 427-438, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تئوری الاستیسیته غیرمحلّی در یک نقطه تنش را تابعی وزن دار از کرنش در تمام نقاط ناحیه همسایگی موثر، در نظر گرفته و اثرات غیرمحلّی را در مقیاس کوچک لحاظ می‌کند. فرم دیفرانسیلی روابط تنش-کرنش ارینگن جهت تحلیل مکانیکی نانو ورق‌ها بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است.

فرج پور و همکارانش [11] با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی، کمانش نانو ورق‌ها با ضخامت متغیر تحت بار دو محوره فشاری را با استفاده از روش گالکین تحلیل کردند. اسدی و فرشی [12] بر پایه تئوری کلاسیک، کمانش نانو ورق مرکب لایه‌ای^۹ با لایه‌های گرافین در یک محیط پلیمری را بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی بررسی کردند. پرادهان و فادیکار [13] بر اساس تئوری‌های کلاسیک و الاستیسیته غیرمحلّی، تحلیل کمانش نانو ورق‌های گرافین چند لایه در یک محیط الاستیک پلیمری را انجام دادند.

در تحقیقات مربوط به پیزوالکتریک، در پیدا نمودن روابط و معادلات حاکم می‌توان به باترا و ویدولی [2] اشاره کرد. شن [14] پس کمانش حرارتی ورق لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و تحت بارهای حرارتی و الکتریکی ارائه داد. ونگ و یانگ [15] بر تئوری‌های مرتبه بالا استفاده شده در بررسی رفتار دینامیکی ورق‌های پیزوالکتریک، مروری جامع داشته‌اند. اثر شرایط مرزی الکتریکی بر سختی موثر لایه‌های پیزوالکتریک توسط دیویس و لزیوتر [16] مورد مطالعه قرار گرفت.

2- ساختارهای هوشمند و ساختارهای نانو

ساختارهایی با ابعاد 1 تا 100 نانومتر، خواص فیزیکی جدیدی از خود بروز می‌دهند، چون خواص کوانتومی آن‌ها بر خواص کلاسیک احاطه دارند. ساختارهای کربنی گستره وسیعی از تنوع و کاربرد را به خود اختصاص داده‌اند. گرافین تک لایه ساختار زیر بنایی برای ساخت ساختارهای کربنی می‌باشد. ضخامت گرافین یک اتم کربن است و در آن اتم‌های کربن که چهار ظرفیت دارند، با سه پیوند کووالانسی سیگما به سه اتم کربن دیگر متصل شده و شبکه‌ای مسطح از شش ضلعی‌های منظم را به وجود می‌آورند.

گرافین با استحکام‌ترین ماده شناخته شده است، چون پیوند کووالانسی بین اتم‌های کربن یک پیوند بسیار محکم است. گرافین در دمای اتاق جریان الکتریسیته را سریع‌تر از هر ماده دیگری انتقال می‌دهد، چون ساختار کریستالی بدون نقصی را داراست. همچنین دارای بیشترین رسانایی حرارتی بوده و از ظرفیت بار الکتریکی بسیار بالایی برخوردار است. جرم موثر آن صفر بوده و نسبت به گاز نفوذ ناپذیر است [17]. به دلیل مقاومت مکانیکی بسیار بالا و خواص گریستالوگرافی با کیفیت بالای گرافین، در ساخت مانع برای نفوذ گازها، کرنش سنج‌ها و حسگرهای جرمی و فشاری [18] کاربرد دارد.

نانو ورق‌های گرافین نقش مهمی در فناوری روز ایفا می‌کنند، شناخت رفتار مکانیکی این نانو ساختارها تحت تاثیر بارهای مختلف استاتیکی و دینامیکی از اهمیت بسیاری برخوردار است. از سوی دیگر، سازه‌های نانو با داشتن خواص قبلیشان هنگامی که با لایه‌ای از مواد پیزوالکتریک ترکیب شوند، ماده‌ای با خواص کنترل‌پذیر به وجود خواهند آورد که کاربرد آن را بیش از پیش مطلوب می‌سازد.

نسل جدیدی از مواد، به نام ساختارهای هوشمند، در عصر حاضر به دنیای صنعت معرفی شده‌اند. ساختارهای هوشمند نوعاً از یک یا تعداد بیشتری ماده فعال^{۱۰} تشکیل شده‌اند. مواد فعال با جفت کردن حداقل دو

ورق‌ها در خازن‌ها، سویچ‌های قطع و وصل جریان برق، سنسورهای ملکولی، مواد غشایی نازک و سیستم‌های الکترومکانیکی میکرو و نانو استفاده می‌شود. بار صفحه‌ای در نانو ورق‌ها به کمانش و ناپایداری آن‌ها می‌انجامد که به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ در این وضعیت، نانو ساختار وامانده می‌شود. از این رو، تحلیل پایداری و کمانش نانو ورق‌ها یکی از موضوعات مهم و مورد توجه در مهندسی است [1].

تاکنون روش‌های متفاوتی برای تحلیل نانو ورق‌ها ارائه شده است. تحلیل رفتار با تئوری الاستیسیته سه بعدی و انواع تئوری‌های دوبعدی انجام می‌شود. تحلیل با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی اگرچه روشی پایه‌ای و دقیق محسوب می‌شود، اما با پیچیدگی‌ها و دشواری‌هایی همراه است. برای کاهش این دشواری‌ها، تئوری‌هایی دیگر ارائه شده‌اند که دقت این تئوری‌ها به تعداد جملات نگاه داشته شده در بسط میدان جابجایی وابسته است.

تئوری‌های کلاسیک و برشی به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های برشی و عمودی، با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل و بالا بردن حداکثری دقت، تئوری دقیقی به نام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی^۱ توسط باترا و ویدولی [2] معرفی شده است. این تئوری، کامل کننده تئوری‌های قبلی بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در نظر می‌گیرد.

تحقیقات انجام شده در سال‌های اخیر روی کمانش نانو ورق‌ها با اشکال گوناگون، با فرض نادیده گرفتن اثرات برشی و عمودی و بر مبنای تئوری کلاسیک^۲ انجام شده است. برای نانو ورق‌ها اثرات برشی و عمودی بسیار مهم می‌باشند، که در صورت نادیده گرفتن آن‌ها، حل به دست آمده از صحت مناسبی برخوردار نخواهد بود.

برای تحلیل رفتار غیرمحلّی نانو ساختارها از روش‌های اتمی و روش‌های آزمایشی استفاده می‌شود. از جمله روش‌های اتمی می‌توان به روش دینامیک ملکولی^۳ [3] اشاره کرد. روش‌های اتمی به دلیل هزینه زیاد و پیچیدگی محاسبات فقط برای سیستم‌هایی با تعداد اتم‌ها و ملکول‌های کم، مناسب هستند. در روش‌های آزمایشی نیز چون انجام آزمایش در مقیاس نانو بسیار دشوار است، مقرون به صرفه نمی‌باشند.

مواد در ابعاد نانو، ساختاری ناپیوسته دارند و فضاهای بین اتمی نسبت به ابعاد کل جسم قابل ملاحظه هستند. بر همین اساس محققان روش‌های مکانیک محیط‌های پیوسته و اصلاح شده آن را به کار می‌برند. چون این روش‌ها، اثرات بین اتمی را در مقیاس کوچک در نظر می‌گیرند.

تئوری‌هایی مانند تئوری الاستیسیته تنش کوپل^۴ [4]، تئوری اصلاح شده تنش کوپل [5]، تئوری میکرومرفیک^۵ [6]، تئوری گرادیان کرنش^۶ [7]، تئوری میکروپلاز^۷ [8] و تئوری الاستیسیته غیرمحلّی^۸ [9,10]، تئوری‌های بر پایه مکانیک محیط‌های پیوسته‌ای هستند که اثرات مقیاس کوچک را نیز در نظر می‌گیرند. تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اولین بار برای حل مسائل منفردی مانند مسئله توزیع تنش در محل اثر بارهای متمرکز، نوک ترک‌ها، ناپیوستگی‌ها و گوشه‌های تیز توسط ارینگن مطرح شد که برای تحلیل مکانیکی نانو ساختارها از دقت بسیار خوبی برخوردار است [10].

¹ Shear and Normal Deformable Theory

² Classical Plate Theory

³ Molecular dynamics

⁴ Couple stress

⁵ Micromorphic

⁶ Strain gradient

⁷ Micropolar

⁸ Nonlocal elasticity

⁹ Composite Laminates

¹⁰ Active Materials

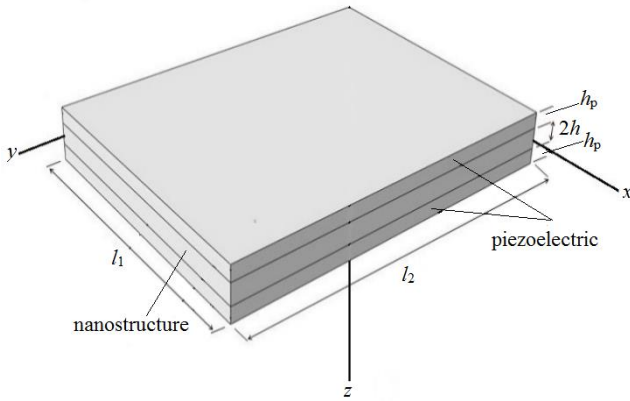


Fig. 1 Schematic view of nanoplate

شکل 1 نمای شماتیک نانو ورق

ماده نانو ورق، گرافین در نظر گرفته شده است. در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی، میدان جابجایی به صورت رابطه (3) بیان می‌شود [22,2].

$$u_i(x_1, x_2, z, t) = v_\alpha(x_1, x_2, z, t)\delta_{i\alpha} + w(x_1, x_2, z, t)\delta_{i3} \quad (3)$$

که در آن مؤلفه‌های میدان جابجایی کلی جسم، w و v_α به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای و جابجایی عرضی هر نقطه دلخواه در فاصله z از صفحه میانی می‌باشند. زیرنویس α نشان دهنده راستاهای x_1 و x_2 بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونیگر⁷ است.

مؤلفه‌های میدان جابجایی در راستای z را می‌توان به صورت بسط چند جمله‌ای نوشت. یکی از انواع بسط چند جمله‌ای‌ها، بسط با استفاده از چند جمله‌ای‌های لژاندر متعامد⁸ است. به این ترتیب مؤلفه‌های جدید میدان جابجایی فقط تابع مختصات درون صفحه‌ای می‌شوند. اگر L_a چند جمله‌ای لژاندر متعامد به صورت رابطه (4) باشد [22].

$$\int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a(z)L_b(z)dz = \delta_{ab}, \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

a, b شمارنده‌های آزاد بوده و K مرتبه تئوری مورد استفاده در تحقیق است. برای نمونه، 6 چندجمله‌ای اول لژاندر بر اساس تعریف فوق به صورت رابطه (5) بیان می‌شوند [22].

$$\begin{aligned} L_0(Z) &= \sqrt{\frac{1}{h}}, & L_1(Z) &= 2\sqrt{\frac{3}{h}}\left(\frac{Z}{h}\right), \\ L_2(Z) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{h}}\left[12\left(\frac{Z}{h}\right)^2 - 1\right], \\ L_3(Z) &= \sqrt{\frac{7}{h}}\left[-3\left(\frac{Z}{h}\right) + 20\left(\frac{Z}{h}\right)^3\right], \\ L_4(Z) &= \frac{3}{\sqrt{h}}\left[\frac{3}{8} - 15\left(\frac{Z}{h}\right)^2 + 70\left(\frac{Z}{h}\right)^4\right], \\ L_5(Z) &= \sqrt{\frac{11}{h}}\left[\frac{15}{4}\left(\frac{Z}{h}\right) - 70\left(\frac{Z}{h}\right)^3 + 252\left(\frac{Z}{h}\right)^5\right] \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را به صورت رابطه (6) بسط داد [22,2].

$$\begin{aligned} v_\alpha(x_1, x_2, z) &= L_a(z)v_\alpha^\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2, \\ w(x_1, x_2, z) &= L_a(z)w^\alpha(x_1, x_2), \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (6)$$

⁷ Kronecker's delta function⁸ Legendre's orthonormal polynomials

میدان از میان میدان‌های مکانیکی، الکتریکی، مغناطیسی، حرارتی، شیمیایی و نوری، عملکردی همچون تغییر شکل، پاسخ به محرک خارجی و تغییر در خصوصیات هندسی، فیزیکی را نشان می‌دهند. از میان مواد فعال موجود، پیزوالکتریک‌ها جزء رایج‌ترین مواد فعال استفاده شده، محسوب می‌شوند.

پیزوالکتریسیت به پدیده‌ای الکتریکی-مکانیکی در بعضی مواد حالت جامد خاص اطلاق می‌شود که نشان‌دهنده جفت شدگی خواص مکانیکی، الکتریکی تولید شده به وسیله اعمال تنش‌های مکانیکی به کریستال‌های دی‌الکتریک است. مواد پیزوالکتریک در سیستم‌های جمع‌آوری اطلاعات¹، سیستم‌های خنک‌کاری، سیستم‌های کنترل ارتعاشات، مبدل‌های انرژی و شبکه‌های سنسوری کاربردهای فراوانی دارند [19].

رفتاری که مواد پیزوالکتریک از خود نشان می‌دهند، ترکیبی از برهم‌کنش میان میدان‌های الکتریکی و مکانیکی است. روابط ساختاری و جابجایی الکتریکی برای یک لایه پیزوالکتریک که در راستای z پلاریزه شده به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود [20].

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^I \\ \sigma_{yy}^I \\ \sigma_{zz}^I \\ \sigma_{yz}^I \\ \sigma_{xz}^I \\ \sigma_{xy}^I \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{11} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{13} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C'_{11} - C'_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن σ_{ij}^I مؤلفه‌های تنش در تئوری الاستیسیته محلّی، $\{D\}$ بیانگر بردار جابجایی الکتریکی²، $\{E\}$ بردار میدان الکتریکی، $[C']$ ماتریس صلبیت ماده پیزوالکتریک³، $[E]$ ماتریس نفوذپذیری دی‌الکتریک مطلق⁴ و $\{e\}$ ، عامل کوپل الکترومکانیکی، ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک⁵ می‌باشند. مؤلفه‌های الکتریکی ماده پیزوالکتریک باید معادله ماکسول⁶ را در فرم انتگرالی رابطه (2) ارضا کنند [21].

$$\int_h^{h+h_p} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z})dz + \int_{-h-h_p}^{-h} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z})dz = 0 \quad (2)$$

3- تئوری تغییر شکل برشی و عمودی و تحلیل الکتریکی

نانو ورق هوشمند مستطیلی شکل، به طول l_1 و عرض l_2 و ضخامت کل $2(h+h_p)$ در نظر گرفته می‌شود. لایه میانی، از یک نانو ورق و به ضخامت $2h$ ساخته شده که سطوح بالا و پایین آن با لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت h_p پوشانده شده است (شکل 1).

¹ Data Collection System² Electrical Displacement Vector³ Piezoelectric Stiffness Matrix⁴ Absolute Dielectric Permittivity Matrix⁵ Piezoelectric Charge Constants Matrix⁶ Maxwell's Equation

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^1 &= L_a \left\{ \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2}L_b w_{,1}^a w_{,1}^b + \frac{1}{2}L_b \cdot \right. \\ &\quad \left. w_{,2}^a w_{,2}^b) \delta_{\alpha\beta} + D_{ba} w^b \delta_{\alpha\beta}] + \frac{E}{2(1+\nu)} (v_{\alpha,\beta}^a + v_{\beta,\alpha}^a + L_b \cdot \right. \\ &\quad \left. w_{,\alpha}^a w_{,\beta}^b) \right\}, \\ \sigma_{\alpha 3}^1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} L_a (D_{ba} v_{\alpha}^b + w_{,\alpha}^a), \\ \sigma_{33}^1 &= L_a \left\{ \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2}L_b w_{,1}^a w_{,1}^b + \frac{1}{2}L_b \cdot \right. \\ &\quad \left. w_{,2}^a w_{,2}^b) + D_{ba} w^b] + \frac{E}{(1+\nu)} D_{ba} w^b \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

توزیع تابع پتانسیل الکتریکی برای به دست آوردن میدان الکتریکی، در راستای ضخامت تابعی مرتبه دوم فرض می‌شود [21]. تغییر در شرایط مرزی الکتریکی بر روی سطوح لایه‌های پیزوالکتریک، مدارهای مختلفی به وجود می‌آورد. چنانچه دو الکتروود به یکدیگر متصل باشند و یا دو سر مدار به سطوح پتانسیل صفر وصل گردد، هیچ‌گونه اختلاف پتانسیلی بین دو سطح الکتروودها به وجود نمی‌آید. به این حالت اتصال کوتاه یا مدار بسته گفته می‌شود. شرایط مرزی الکتریکی بر دو سطح الکتروود به صورت زیر است،

$$\Phi(z = \pm h) = 0, \quad \Phi(z = \pm(h + h_p)) = 0 \quad (16)$$

برای داشتن تابعی از مرتبه دوم و ارضا کردن شرایط مرزی (16)، از رابطه زیر برای تابع پتانسیل الکتریکی استفاده می‌شود،

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi(x, y) \left[1 - \left(\frac{z - h - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \\ , h \leq z \leq h + h_p, \\ \varphi(x, y) \left[1 - \left(\frac{-z - h - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \\ , -h - h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (17)$$

هنگامی که سطوح خارجی لایه‌های پیزوالکتریک در تماس با محیطی با نفوذپذیری پایین، مانند هوا و یا خلأ باشد، محیط همچون عایق الکتریکی عمل کرده و بردار جابجایی الکتریکی در راستای عمود بر سطوح لایه‌های خارجی پیزوالکتریک صفر خواهد شد. به این وضعیت که مدار باز گفته می‌شود، سطوح داخلی به پتانسیل صفر متصل می‌شوند. در این حالت شرایط مرزی الکتریکی بر دو سطح الکتروود به صورت زیر است،

$$\Phi(z = \pm h) = 0, \quad D_z(z = \pm(h + h_p)) = 0 \quad (18)$$

برای داشتن تابعی از مرتبه دوم و ارضا کردن شرایط مرزی (18)، از رابطه زیر برای تابع پتانسیل الکتریکی استفاده می‌شود،

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi(x, y) \left[1 - \left(\frac{z - h - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 + (Az + B) \right] \\ , h \leq z \leq h + h_p, \\ \varphi(x, y) \left[1 - \left(\frac{-z - h - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 + (A'z + B') \right] \\ , -h - h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (19)$$

میدان الکتریکی منفی گرادیان تابع پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود. در رابطه (19) ثوابت مجهول A, A', B, B' تابعی از مختصات x, y بوده که به کمک شرایط مرزی الکتریکی (18) به دست می‌آیند. ابتدا مولفه در جهت z جابجایی الکتریکی در رابطه (1) را در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی و بر اساس تعریف میدان الکتریکی استخراج می‌کنیم. سپس با استفاده از شرایط مرزی (18) و ساده‌سازی، تابع پتانسیل الکتریکی را در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی به صورت رابطه (20) پیدا می‌کنیم،

شمارنده تکرار شونده α در معادلات (6) اندیس تکرار شونده¹ است. می‌توان مشتق چند جمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چند جمله‌ای‌ها به صورت رابطه (7) نوشت،

$$L'_a(z) = D_{ab} L_b(z) \quad (7)$$

که در معادله فوق، D ماتریس ضرایب مشتق است [22,2]. با مشتق گرفتن نسبت به x, y, z از مؤلفه‌های میدان جابجایی در رابطه (6)، رابطه (8) در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\beta} &= L_a v_{\alpha,\beta}^a, \quad v_{\alpha,z} = D_{ab} L_b v_{\alpha}^a, \\ w_{,a} &= L_a w_{,a}^a, \quad w_{,z} = D_{ab} L_b w^a \end{aligned} \quad (8)$$

در تحلیل پایداری نانو ورق از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، به صورت رابطه (9) استفاده می‌شود [22]،

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T) + \frac{1}{2} ((\vec{\nabla} \vec{u})^T \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \quad (9)$$

با جایگذاری معادلات (3) در (9) و با استفاده از فرضیات فون کارمن² برای روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، مؤلفه‌های کرنش بر حسب جابجایی در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی به صورت رابطه (10) استخراج می‌شوند،

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= L_a \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta}^a + v_{\beta,\alpha}^a + L_b w_{,\alpha}^a w_{,\beta}^b) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} (D_{ba} v_{\alpha}^b + w_{,\alpha}^a) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) + D_{ba} w^b \delta_{i3} \delta_{j3} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

مولفه‌های تنش غیرمحلّی با استفاده از معادله ساختاری زیر بر حسب مولفه‌های تنش در تئوری محلّی، بیان می‌شوند [23]،

$$(1 - (e_0 l)^2 \nabla^2) \left\{ \begin{matrix} \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{i3} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{\alpha\beta}^1 \\ \sigma_{i3}^1 \end{matrix} \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (11)$$

که در آن σ_{ij}^1 مولفه‌های تنش در تئوری الاستیسیته محلّی می‌باشند. روابط ساختاری محلّی برای گرافین را می‌توان به فرم زیر بیان نمود،

$$\sigma_{ij}^1 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (12)$$

که در آن C ، تانسور الاستیسیته است. برای ماده همسانگرد، مؤلفه‌های تانسور الاستیسیته در روابط ساختاری، تنها شامل دو ضریب مستقل می‌باشد که به آنها ثوابت مهندسی گفته می‌شود. در این صورت، مؤلفه‌های تانسور الاستیسیته را می‌توان به صورت زیر بیان نمود،

$$C_{ijkl} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (13)$$

که ثوابت E, ν معرف خواص مکانیکی ماده هستند. با قرار دادن رابطه (13) در (12) و انجام عملیات اندیسی، معادلات ساختاری به صورت زیر نوشته می‌شوند،

$$\sigma_{ij}^1 = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} \quad (14)$$

در این رابطه ε_{kk} مجموع درایه‌های روی قطر اصلی تانسور کرنش می‌باشد. با جایگذاری مقادیر کرنش رابطه (10)، در رابطه ساختاری (14)، مؤلفه‌های تانسور تنش بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی برای گرافین در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی، به صورت زیر به دست می‌آیند،

¹ Dummy Index

² Von-Carman Hypothesis

4- معادلات حاکم بر نانو ورق هوشمند

برای به دست آوردن معادلات تعادل حاکم بر نانو ورق هوشمند، از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بهره برده می‌شود. انرژی پتانسیل سیستم مجموع انرژی کرنشی سیستم ناشی از کار نیروهای داخلی U و انرژی پتانسیل ناشی از کار نیروهای خارجی Ω می‌باشد.

$$\Pi = U + \Omega \quad (24)$$

در این رابطه، Π انرژی پتانسیل کل می‌باشد. طبق اصل حداقل انرژی پتانسیل برای یک سیستم در حال تعادل، تغییرات انرژی پتانسیل کل برابر صفر است [24].

$$\delta U + \delta \Omega = 0 \quad (25)$$

اپراتور δ نیز بیانگر عملگر وردش (تغییرات) نسبت به میدان جابجایی (v_1, v_2, w) می‌باشد. با استفاده از این اصل معادلات تعادل به صورت رابطه (26) بیان شوند،

$$\begin{aligned} \delta v_1^a &: M_{11,1}^a + M_{12,2}^a - D_{ab} T_1^b = 0, \\ \delta v_2^a &: M_{12,1}^a + M_{22,2}^a - D_{ab} T_2^b = 0, \\ \delta w^a &: (M_{11}^{ab} w_{1,1}^b + M_{12}^{ab} w_{2,2}^b + T_1^a)_{,1} + (M_{22}^{ab} w_{2,2}^b + M_{12}^{ab} w_{1,1}^b + T_2^a)_{,2} - D_{ab} T_3^b = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

معادلات (26)، معادلات غیرخطی تعادل نانو ورق هوشمند تحت بارگذاری درون صفحه‌ای در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی می‌باشند. در این معادلات، ترم‌های $M_{\alpha\beta}^a$ و $M_{\alpha\beta}^{ab}$ با $a, b \geq 2$ منتجه‌های برون صفحه‌ای از مرتبه a هستند. T_i^a نیز منتجه نیروهای جانبی از مرتبه a می‌باشد. این ترم‌ها و نیز ترم‌های محلی متناظر آن‌ها، توسط انتگرال گیری تنش‌های متناظر سرتاسر ضخامت به صورت رابطه (27) به دست می‌آیند،

$$\begin{aligned} (M_{\alpha\beta}^a, M_{\alpha\beta}^{ab}) &= \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a (\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}^1) dz, \\ (M_{\alpha\beta}^{ab}, M_{\alpha\beta}^{abl}) &= \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a L_b (\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}^1) dz, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \\ (T_i^a, T_i^{al}) &= \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a (\sigma_{i3}, \sigma_{i3}^1) dz, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (27)$$

بر پایه نتایج تغییرات بار بحرانی با مولفه‌های جابجایی، برای بررسی وضعیت پیش از کمانش¹ می‌توان از معادلات تعادل به شکل خطی استفاده کرد. منظور از تحلیل پایداری سیستم، تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب² به وسیله حل معادلات دیفرانسیل خطی است [22]. به منظور تعیین معادلات دیفرانسیل خطی برای تعیین بار متناظر با نقطه انشعاب یا بار بحرانی کمانش از معیار تعادل همسایگی استفاده می‌شود. برای بررسی امکان وجود شکل‌های تعادل همسایگی، طبق این معیار یک تغییر کوچک در مولفه‌های جابجایی داده و دو شکل همسایگی با جابجایی‌ها، قبل و بعد از تغییر به صورت رابطه (28) در نظر گرفته می‌شود،

$$u \rightarrow u^0 + u^1, \quad v \rightarrow v^0 + v^1, \quad w \rightarrow w^0 + w^1 \quad (28)$$

که در آن (u^1, v^1, w^1) جابجایی‌هایی به اندازه دلخواه کوچک هستند و (u, v, w) و (u^0, v^0, w^0) دو حالت دلخواهی در همسایگی وضعیت تعادل می‌باشند. با جایگذاری روابط (28) در روابط مربوط به کرنش و سپس قرار دادن روابط حاصل در روابط مربوط به منتجه‌های تنش و لنگر، این عبارات به صورت رابطه (29) استخراج می‌شوند،

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi + \left\{ \frac{L_a(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b(h+h_p)(w_{1,1}^a w_{1,1}^b + w_{2,2}^a w_{2,2}^b)] + e_{33} D_{ba} w^b \} + \frac{4\varphi}{h_p} (z-h), & h \leq z \leq h+h_p, \\ \left[1 - \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi + \left\{ \frac{L_a(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b(-h-h_p)(w_{1,1}^a w_{1,1}^b + w_{2,2}^a w_{2,2}^b)] + e_{33} D_{ba} w^b \} - \frac{4\varphi}{h_p} (z+h), & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (20)$$

با توجه به تعریف میدان الکتریکی، با استفاده از رابطه (20)، مولفه‌های میدان الکتریکی در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی در حالت مدار باز به فرم زیر استخراج می‌شوند،

$$E_x = - \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi_{,1} + \left\{ \frac{L_a(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,11}^a + v_{2,21}^a + \frac{1}{2} L_b(h+h_p)(w_{1,11}^a w_{1,1}^b + w_{1,1}^a w_{1,11}^b + w_{2,21}^a w_{2,2}^b + w_{2,2}^a w_{2,21}^b)] + e_{33} D_{ba} w_{1,1}^b \} + \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} (z-h), & h \leq z \leq h+h_p, \\ \left[1 - \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi_{,1} + \left\{ \frac{L_a(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,11}^a + v_{2,21}^a + \frac{1}{2} L_b(-h-h_p)(w_{1,11}^a w_{1,1}^b + w_{1,1}^a w_{1,11}^b + w_{2,21}^a w_{2,2}^b + w_{2,2}^a w_{2,21}^b)] + e_{33} D_{ba} w_{1,1}^b \} - \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} (z+h), & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (21)$$

$$E_y = - \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi_{,2} + \left\{ \frac{L_a(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,12}^a + v_{2,22}^a + \frac{1}{2} L_b(h+h_p)(w_{1,12}^a w_{1,1}^b + w_{1,1}^a w_{1,12}^b + w_{2,22}^a w_{2,2}^b + w_{2,2}^a w_{2,22}^b)] + e_{33} D_{ba} w_{2,2}^b \} + \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} (z-h), & h \leq z \leq h+h_p, \\ \left[1 - \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \varphi_{,2} + \left\{ \frac{L_a(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} \right\} \{ e_{31} [v_{1,12}^a + v_{2,22}^a + \frac{1}{2} L_b(-h-h_p)(w_{1,12}^a w_{1,1}^b + w_{1,1}^a w_{1,12}^b + w_{2,22}^a w_{2,2}^b + w_{2,2}^a w_{2,22}^b)] + e_{33} D_{ba} w_{2,2}^b \} - \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} (z+h), & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (22)$$

$$E_z = - \begin{cases} -2 \left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \varphi + \frac{L_a(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} \{ e_{31} [v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b(h+h_p)(w_{1,1}^a w_{1,1}^b + w_{2,2}^a w_{2,2}^b)] + e_{33} D_{ba} w^b \} + \frac{4\varphi}{h_p}, & h \leq z \leq h+h_p, \\ 2 \left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \varphi + \frac{L_a(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} \{ e_{31} [v_{1,1}^a + v_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_b(-h-h_p)(w_{1,1}^a w_{1,1}^b + w_{2,2}^a w_{2,2}^b)] + e_{33} D_{ba} w^b \} - \frac{4\varphi}{h_p}, & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (23)$$

با استفاده از این روابط مولفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی حاکم بر لایه‌های پیزوالکتریک در حالت مدار باز استخراج می‌شوند.

¹ Pre Buckling

² Bifurcation Point

5- تحلیل کمانش

یک نانو ورق هوشمند مستطیلی با طول a و عرض b و تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای که به طور یکنواخت در دو جهت x و y توزیع شده‌اند، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین نیروهای برآیند پیش‌کمانش با استفاده از شرایط تعادل به صورت رابطه (34) به دست می‌آیند،

$$M_{11}^{a0} = -L_a(0)q_1, \quad M_{22}^{a0} = -L_a(0)q_2 \quad (34)$$

که در آن q_1 و q_2 نیروهای وارد شده در صفحه میانی بر واحد طول می‌باشند. در روابط (34) دو پارامتر مستقل بار وجود دارد. می‌توان بارهای اعمالی در جهات x و y را با تعریف پارامتر بی‌بعدی به نام نسبت بارگذاری (R) به هم مرتبط ساخت. به منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه نانو ورق هوشمند مورد نیاز است. برای یک نانو ورق هوشمند با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$M_{11}^a = 0, \quad M_{12}^a = 0, \quad w^a = 0 \quad \text{on} \quad x_1 = 0, l_1, \\ M_{22}^a = 0, \quad M_{21}^a = 0, \quad w^a = 0 \quad \text{on} \quad x_2 = 0, l_2 \quad (35)$$

با در نظر گرفتن روش حل نایر² و معادلات حاکم بر پایداری نانو ورق هوشمند، شرایط مرزی الکتریکی نیز به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\varphi = 0 \quad \text{on} \quad x_1 = 0, l_1 \quad \& \quad x_2 = 0, l_2 \quad (36)$$

مولفه‌های میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی تنها تابع مختصات درون صفحه‌ای هستند. به منظور اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و حل معادلات حاکم بر پایداری، از روشی موسوم به روش نایر (روش سری‌های دوگانه) استفاده می‌شود. این روش، تابعیت میدان جابجایی از مختصات درون صفحه‌ای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می‌گیرد. این تابعیت باید به گونه‌ای در نظر گرفته شود که شرایط مرزی نانو ورق هوشمند را ارضا کند. بنابراین، با توجه به شرایط مرزی (35) و (36)، میدان جابجایی و تابع پتانسیل الکتریکی را می‌توان به صورت زیر بسط داد،

$$v_1^a(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_1^{amn} \cos\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right), \\ v_2^a(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_2^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right), \\ w^a(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right), \\ \varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}^{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \quad (37)$$

که در آن، ضرایب $\tilde{\varphi}^{mn}$ ، \tilde{w}^{amn} ، \tilde{v}_1^{amn} ، \tilde{v}_2^{amn} به ترتیب، مولفه‌های ثابت جابجایی در راستاهای z ، x_2 ، x_1 و تابع پتانسیل الکتریکی می‌باشند. با قرار دادن روابط (37) در معادلات حاکم بر پایداری نانو ورق هوشمند در حالت مدار باز (معادلات (2) و (39) تا (41))، معادلات با مشتقات جزئی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. با حل این معادلات، به مسئله مقدار ویژه‌ای می‌رسیم که مقادیر ویژه آن، همان بارهای کمانش می‌باشند و کوچکترین آن‌ها بار بحرانی کمانش نام دارد.

6- اعتبارسنجی و نتایج عددی

خصوصیات مواد پیزوالکتریک، در جدول 1 آورده شده است [25].

$$M_{\alpha\beta}^a \rightarrow M_{\alpha\beta}^{a0} + M_{\alpha\beta}^{a1}, \\ M_{\alpha\beta}^{ab} \rightarrow M_{\alpha\beta}^{a0} + M_{\alpha\beta}^{a1}, \\ T_i^a \rightarrow T_i^{a0} + T_i^{a1} \quad (29)$$

که منته‌های با بالانویس 0 مربوط به وضعیت تعادل نانو ورق هوشمند و شامل ترم‌های غیرخطی از جابجایی هستند و منته‌های با بالانویس 1 مربوط به وضعیت همسایگی تعادل است که شامل ترم‌های خطی از مؤلفه‌های جابجایی می‌باشند. با جایگذاری روابط (28) و (29) در معادلات (26) و در نظر گرفتن معادلات تعادل، معادلات پایداری نانو ورق هوشمند به صورت رابطه (30) استخراج می‌شوند،

$$\delta v_1^a : M_{11,1}^a + M_{12,2}^a - D_{ab}T_1^b = 0, \\ \delta v_2^a : M_{12,1}^a + M_{22,2}^a - D_{ab}T_2^b = 0, \\ \delta w^a : M_{11}^{ab0}w_{,11}^b + M_{22}^{ab0}w_{,22}^b + T_{1,1}^a + T_{2,2}^a - D_{ab}T_3^b = 0 \quad (30)$$

معادلات (30)، معادلات پایداری نانو ورق هوشمند در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی هستند. همچنین منته‌های M_{11}^{ab0} و M_{22}^{ab0} توسط نیروهای پیش-کمانشی که از شرایط تعادل به دست آمده‌اند، جایگزین می‌شوند.

با استفاده از روابط (11) و (27) می‌توان منته‌های غیرمحملی $M_{\alpha\beta}^a$ ، $M_{\alpha\beta}^{ab}$ ، T_i^a را برحسب منته‌های محلی $M_{\alpha\beta}^{al}$ ، $M_{\alpha\beta}^{abl}$ ، T_i^{al} به صورت زیر استخراج کرد،

$$(1 - (e_0l)^2\nabla^2) \begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta}^a \\ M_{\alpha\beta}^{ab} \\ T_i^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta}^{al} \\ M_{\alpha\beta}^{abl} \\ T_i^{al} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

با اعمال $(1 - (e_0l)^2\nabla^2)$ بر طرفین معادلات پایداری (30) و استفاده از رابطه (31) خواهیم داشت،

$$\delta v_1^a : M_{11,1}^{al} + M_{12,2}^{al} - D_{ab}T_1^{bl} = 0, \\ \delta v_2^a : M_{12,1}^{al} + M_{22,2}^{al} - D_{ab}T_2^{bl} = 0, \\ \delta w^a : (1 - (e_0l)^2\nabla^2)(M_{011}^{ab}w_{,11}^b + M_{022}^{ab}w_{,22}^b) + T_{1,1}^{al} + T_{2,2}^{al} - D_{ab}T_3^{bl} = 0 \quad (32)$$

با جایگذاری منته‌های تنش، از رابطه (27) در معادلات پایداری نانو ورق هوشمند (32) خواهیم داشت،

$$\int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{11,1}^1 dz + \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{12,2}^1 dz - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_b \sigma_{13}^1 dz = 0 \\ \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{12,1}^2 dz + \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{22,2}^2 dz - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_b \sigma_{23}^2 dz = 0 \\ (1 - (e_0l)^2\nabla^2)(M_{011}^{ab}w_{,11}^b + M_{022}^{ab}w_{,22}^b) + \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{13,1}^1 dz + \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a \sigma_{23,2}^2 dz - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_b \sigma_{33}^3 dz = 0 \quad (33)$$

این سه معادله به همراه معادله ماکسول در رابطه (2)، معادلات پایداری نانو ورق هوشمند می‌باشند. در این چهار معادله، اگر تنش‌ها برحسب مولفه‌های میدان جابجایی نوشته شوند، معادلات حاکم بر پایداری نانو ورق هوشمند استخراج می‌شوند که نحوه استخراج آن‌ها در پیوست شرح داده شده‌اند. در معادلات حاکم بر پایداری نانو ورق هوشمند در حالت مدار باز (معادلات (2) و (39) تا (41))، مؤلفه‌های میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی تنها مجهولات مسئله هستند و تنها تابع مختصات درون صفحه‌ای می‌باشند. به منظور حل آن‌ها، از شرایط مرزی ورق کمک گرفته می‌شود.

¹ Loading Ratio
² Navier's Solution

در جدول 3 بار بحرانی کمانش نانو ورق‌های گرافین در ساختارهای آرمچر و زیگزاگ استخراج شده‌اند. با توجه به جدول 3، بار بحرانی کمانش نانو ورق‌های گرافین آرمچر و زیگزاگ تقریباً با هم برابر می‌باشند.

با توجه به اختلافات ناچیز خواص نانو ورق‌های گرافینی در جهات زیگزاگ و آرمچر، می‌توان گفت که در نانو ورق‌های با تکیه‌گاه ساده و دارای نسبت طول به عرض نزدیک به یک، نیز کمانش در مود اول اتفاق می‌افتد. مدول یانگ و ضریب پواسن مختلفی برای آن در مراجع مختلف گزارش شده است. هوانگ و همکارانش [27] با در نظر گرفتن ضخامت 0.0811 nm برای گرافین، مدول یانگ را برابر $E = 2.99 \text{ TPa}$ و نسبت پواسن را برابر با $\nu = 0.397$ گزارش کردند. تعدادی از محققان ضخامت گرافین را برابر با 0.34 nm و مدول یانگ متناظر با این ضخامت را 1 TPa در نظر گرفتند [28].

حماسی زاده و همکارانش [29] مقادیر $E = 0.939 \text{ TPa}$ ، $\nu = 0.19$ و $h = 0.1317 \text{ nm}$ را برای گرافین ارائه کردند. گستره وسیع خواص مکانیکی گرافین می‌تواند به علت عدم قطعیت در مقدار ضخامت آن باشد.

تاکنون هیچ آزمایشی جهت تعیین پارامتر مقیاس کوچک برای نانو ورق‌های گرافین انجام نگرفته است. به طور کلی برای به دست آوردن پارامتر مقیاس کوچک باید نتایج تئوری غیرمحملی را با نتایج حاصل از روش‌های اتمی (نظیر دینامیک مولکولی و دینامیک شبکه اتمی) یا نتایج آزمایشی مقایسه کرد. مقدار پارامتر e_0l برای نانو ساختارها بین 0 تا 2 نانومتر گزارش شده است. بسیاری از محققین با توجه به اینکه مقدار دقیقی برای پارامتر مقیاس کوچک، برای نانو ورق‌های گرافین گزارش نشده بود، فرض کردند که مقدار پارامتر مقیاس کوچک برای نانو ورق‌ها نیز بین 0 تا 2 نانومتر بوده و تحلیل‌های فراوانی بر اساس مقادیر مختلف e_0l انجام دادند.

به منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از این روش، مقایسه‌ای میان نتایج این کار و نتایج حاصل از پژوهش‌های دیگر انجام شده است. در جدول 4، بار بحرانی کمانش بر اساس تئوری مورد استفاده، برای نانو ورق مربعی به ازای ابعاد مختلف استخراج شده و با نتایج بر اساس دینامیک مولکولی در مرجع [30] مقایسه شده‌اند. در نتایج این جدول، خواص ماده پیزوالکتریک، خواص PZT - 4 از جدول 1 انتخاب شده و برای گرافین از خواص مکانیکی و هندسی زیر استفاده شده است،

$$E = 1 \text{ TPa}, \quad \nu = 0.16, \quad 2h = 0.34 \text{ nm}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده به ازای $e_0l = \sqrt{1.76}$ مطابقت بسیار خوبی با نتایج دینامیک مولکولی دارند.

پس از نشان دادن صحت تحلیل حاضر، نتایج جدیدی برای بیان رفتار کمانشی نانو ورق هوشمند ارائه گردیده است. از آنجا که پارامترهای ورودی در مقالات معتبر به صورت نسبت کمیت‌های طولی بی‌بعد می‌باشند، پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$q_{cr} = \frac{q_1 a^2}{\pi^2 D} \quad (38)$$

که در آن $H = 2(h + h_p)$ و $D = (EH^3)/[12(1 - \nu^2)]$ مقادیر بارهای بحرانی کمانش بی‌بعد برای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی،

جدول 3 بار بحرانی کمانش ($q_{cr}h$) ساختارهای نانو ورق‌های گرافین

Table 3 Critical buckling load of ($q_{cr}h$) graphene nanoplate structures

zigzag	Armchair
0.5033	0.5034

جدول 1 خصوصیات مواد پیزوالکتریک [25]

Table 1 Properties of piezoelectric materials [25]

نوع ماده پیزوالکتریک			خصوصیت
PZT-4	PZT-6B	BaTiO ₃	
132	168	150	c'_{11} (GPa)
71	84.7	65.3	c'_{22} (GPa)
115	163	146	c'_{33} (GPa)
73	84.2	66.2	c'_{13} (GPa)
26	35.5	43.9	c'_{55} (GPa)
-4.1	-0.9	-4.3	e_{31} (Cm ⁻²)
14.1	7.1	17.5	e_{33} (Cm ⁻²)
10.5	4.6	11.4	e_{15} (Cm ⁻²)
7.124	3.60	9.87	\bar{E}_{11} (nFm ⁻¹)
5.841	3.42	11.16	\bar{E}_{33} (nFm ⁻¹)

مقادیر دقیق خواص مکانیکی و هندسی نانو ورق‌های گرافین در ساختارهای زیگزاگ¹ و آرمچر²، با شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، توسط شن و همکاران [26] مطابق جدول 2 استخراج شد.

آنها خواص مکانیکی و هندسی را برای نانو ورق‌های گرافین با ساختارهای زیگزاگ و آرمچر، به دست آوردند (شکل 2).

آنها همچنین با مقایسه فرکانس طبیعی نانو ورق‌های گرافین بر اساس تئوری غیرمحملی و نتایج مبتنی بر شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی، مقدار دقیق پارامتر مقیاس کوچک متناظر با هر یک از نانو ورق‌ها را ارائه کردند. گرچه شن و همکاران نشان دادند که خواص مکانیکی در جهات زیگزاگ و آرمچر با هم اختلاف دارند، اما این اختلاف ناچیز است. این اختلاف ناچیز باعث می‌شود که مقادیر بارهای بحرانی کمانش برای هر دو نوع نانو ورق‌های آرمچر و زیگزاگ یکسان به دست آید.

جدول 2 خصوصیات نانو ورق‌های گرافین [26]

Table 2 Properties of graphene nanoplate [26]

نوع نانو ورق گرافین		خصوصیت
zigzag	armchair	
1987	1949	E_1 (GPa)
1974	1962	E_2 (GPa)
0.205	0.201	ν_{12}
857	846	G_{12} (GPa)
0.22	0.27	e_0l (nm)
0.154	0.156	h (nm)
4.855	4.888	a (nm)
4.888	4.855	e_0l (nm)

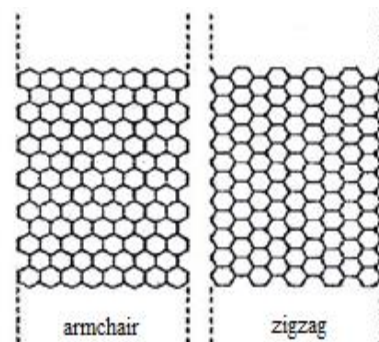


Fig. 2 Zigzag and armchair structures of graphene nanoplate

شکل 2 ساختارهای زیگزاگ و آرمچر نانو ورق‌های گرافین

¹ zigzag
² armchair

جدول 6 مقادیر بارهای بحرانی بی‌بعد کمانش نانو ورق‌های هوشمند به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مقیاس کوچک و نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه در حالت مدار باز ($h_p/2h = 0.25, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

Table 6 The dimensionless critical buckling load values of smart nanoplates for different values of small scale parameter and the graphene thickness to the characteristic length ratio at open circuit condition ($h_p/2h = 0.25, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

e_0l/a	$2h/a$	q_{cr}	e_0l/a	$2h/a$	q_{cr}		
0.05	0.01	1.4636	0.15	0.01	0.9291		
	0.03	1.4475		0.03	0.9160		
	0.05	1.4198		0.05	0.8957		
	0.1	1.3467		0.1	0.8496		
	0.2	1.1723		0.2	0.7289		
	0.3	0.9593		0.3	0.5741		
	0.4	0.7184		0.4	0.4005		
	0.5	0.4645		0.5	0.2183		
	0.1	0.01		1.1816	0.2	0.01	0.6548
		0.03		1.1661		0.03	0.6422
0.05		1.1484	0.05	0.6297			
0.1		1.0952	0.1	0.5957			
0.2		0.9474	0.2	0.4987			
0.3		0.7696	0.3	0.3785			
0.4		0.5615	0.4	0.2318			
0.5		0.3354	0.5	0.0761			

جدول 7 مقادیر بارهای بحرانی بی‌بعد کمانش نانو ورق‌ها به ازای مقادیر مختلف نسبت ضخامت‌ها و مواد پیزوالکتریک متفاوت در حالت مدار باز ($2h/a = 0.03, e_0l/a = 0.05, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

Table 7 The dimensionless critical buckling load values of nanoplates for different values of the thickness ratio and different piezoelectric materials at open circuit condition ($2h/a = 0.03, e_0l/a = 0.05, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

$h_p/2h$	PZT-4	BaTiO3	PZT-6B
0	1.9135	1.9135	1.9135
0.05	1.8260	1.8570	1.8707
0.1	1.7368	1.7950	1.8184
0.15	1.6380	1.7166	1.7478
0.2	1.5437	1.6433	1.6757
0.25	1.4475	1.5617	1.5924
0.3	1.3352	1.4766	1.5053
0.35	1.2154	1.3755	1.4124
0.4	1.0926	1.2595	1.2962
0.45	0.9648	1.1387	1.1779
0.5	0.8071	1.0064	1.0562

همانطور که در این جداول مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر مقیاس کوچک و طول نانو ورق هوشمند، بار بحرانی کمانش کاهش و با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت گرافین مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. در این جداول با افزایش نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. در ضخامت و طول یکسان، مقدار بار بحرانی کمانش برای ماده پیزوالکتریک PZT-6B از همه بیشتر و برای PZT-4 از همه کمتر است. تغییرات بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر

جدول 4 مقایسه بارهای بحرانی کمانش نانو ورق‌ها با نتایج حاصل از دینامیک مولکولی در مرجع [30]

Table 4 Comparison of the nanoplates critical buckling loads with the results of molecular dynamics in [30]

$e_0l = \sqrt{1.78}$	$e_0l = \sqrt{1.76}$	$e_0l = \sqrt{1.73}$	[30]	$a(\text{nm})$
1.0732	1.0835	1.0961	1.0837	4.99
0.6502	0.6536	0.6587	0.6536	8.08
0.4316	0.4340	0.4359	0.4331	10.77
0.2608	0.2616	0.2623	0.2609	14.65
0.1719	0.1722	0.1723	0.1714	18.51
0.1197	0.1198	0.1201	0.1191	22.35
0.0891	0.0894	0.0899	0.0889	26.22
0.0696	0.0699	0.0705	0.0691	30.04
0.0559	0.0559	0.0561	0.0554	33.85
0.0450	0.0452	0.0455	0.0449	37.81
0.0371	0.0372	0.0374	0.0372	41.78
0.0315	0.0315	0.0316	0.0315	45.66

نسبت‌های مختلف ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت گرافین، ضخامت گرافین به طول مشخصه، ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و نوع ماده پیزوالکتریک در حالت مدار باز، در جداول 5 تا 7 آمده است. در نتایج این جداول، خواص ماده پیزوالکتریک، خواص PZT-4 از جدول 1 انتخاب شده است.

جدول 5 مقادیر بارهای بحرانی بی‌بعد کمانش نانو ورق‌های هوشمند به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مقیاس کوچک و نسبت ضخامت‌ها در حالت مدار باز ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

Table 5 The dimensionless critical buckling load values of smart nanoplates for different values of small scale parameter and the thickness ratio at open circuit condition ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

e_0l	$h_p/2h$	q_{cr}	e_0l	$h_p/2h$	q_{cr}		
0	0	2.0517	0.15	0	1.2361		
	0.1	1.8924		0.1	1.1291		
	0.2	1.6941		0.2	0.9943		
	0.3	1.4745		0.3	0.8374		
	0.4	1.2241		0.4	0.6390		
	0.5	0.9146		0.5	0.4218		
	0.05	0		1.9135	0.2	0	0.9495
		0.1		1.7368		0.1	0.8410
		0.2		1.5437		0.2	0.7094
		0.3		1.3352		0.3	0.5721
0.4		1.0926	0.4	0.4262			
0.5		0.8071	0.5	0.2663			
0.1		0	1.6036	0.3		0	0.7369
		0.1	1.4538			0.1	0.6473
		0.2	1.2614			0.2	0.5365
		0.3	1.0683			0.3	0.4243
	0.4	0.8566	0.4		0.2898		
	0.5	0.6136	0.5		0.1498		

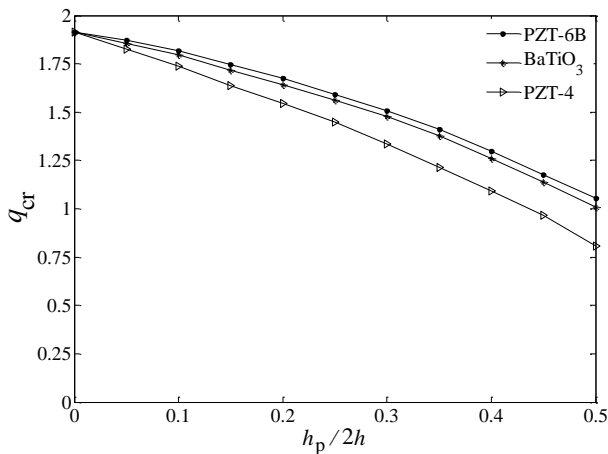


Fig. 5 Variation of the dimensionless critical buckling load versus the thickness ratio and for different piezoelectric materials at open circuit condition ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

شکل 5 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت‌ها و برای مواد پیزوالکتریک مختلف در حالت مدار باز ($2h/a = 0.03, e_0l/a = 0.05, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

برای نانو ورق هوشمند در "شکل 5"، تغییرات بارهای بحرانی بی‌بعد کمانش را بر حسب نسبت ضخامت‌ها برای سه ماده مختلف لایه پیزوالکتریک، رسم کرده‌ایم. نوع ماده پیزوالکتریک در بار بحرانی کمانشی موثر است به طوری که بیشترین آن مربوط به PZT-6B و کمترین آن مربوط به PZT-4 است و مقادیر بار بحرانی برای دو ماده پیزوالکتریک PZT-6B و BaTiO₃ بسیار به یکدیگر نزدیک‌اند.

برای داشتن تصویری بهتر از رفتار نانو ورق هوشمند، بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب نسبت ضخامت‌ها برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته در "شکل 6" رسم شده‌اند.

علاوه بر این، اثرات مکانیکی افزودن لایه پیزوالکتریک، موسوم به اثرات سختی [31]، با صفر قرار دادن ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک $[e]$ ، مورد بررسی قرار گرفته است.

همان طور که ملاحظه می‌شود، در نسبت ضخامت‌های کم، اثر الکتریکی لایه پیزوالکتریک، موسوم به اثر پیزو، که به نحوه توزیع تابع پتانسیل در راستای ضخامت وابسته می‌باشد [31]، برای هر دو حالت مدار باز و مدار بسته ناچیز است. در نسبت ضخامت بالاتر، اگرچه اثر پیزو برای حالت مدار بسته کوچک باقی می‌ماند ولی در حالت مدار باز، این اثر نقش کلیدی در تعیین بار بحرانی کمانش نانو ورق هوشمند بازی می‌کند. لازم به ذکر است، اثر پیزو برای هر دو حالت مدار باز و بسته سبب افزایش بار بحرانی کمانش می‌گردد.

در این شکل دیده می‌شود که اثر الکتریکی لایه پیزوالکتریک موسوم به اثر پیزو، سبب افزایش بار بحرانی کمانش نانو ورق هوشمند برای هر دو حالت مدار بسته و مدار باز می‌گردد.

همچنین برای حالت مدار باز، اثر مکانیکی لایه پیزوالکتریک موسوم به اثر سختی، همراه با اثر پیزو، سبب تغییر قابل توجه بار بحرانی کمانش نانو ورق هوشمند می‌گردد، حال آنکه تغییر بار بحرانی در حالت مدار بسته عمدتاً ناشی از اثر سختی پیزوالکتریک می‌باشد و اثر پیزو ناچیز است.

در یک نسبت ضخامت به طول و پارامتر غیرمحملی ثابت، بار کمانش بحرانی نانو ورق هوشمند در حالت مدار باز نسبت به مدار بسته بزرگتر است.

حسب تغییرات نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به کل ضخامت گرافین برای شرایط مختلف و در حالت مدار باز، رسم شده و در "شکل‌های 3 تا 5" آورده شده‌اند.

همانگونه که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، در یک نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه، با افزایش پارامتر مقیاس کوچک، بار بحرانی نانو ورق هوشمند کاهش می‌یابد.

از طرف دیگر، با افزایش ضخامت، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. همچنین در یک مقدار پارامتر مقیاس کوچک، با افزایش نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد و با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت گرافین، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

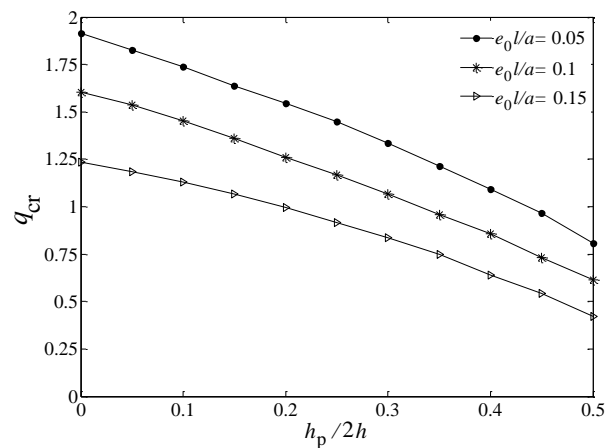


Fig. 3 Variation of the dimensionless critical buckling load versus the thickness ratio and for different values of small scale parameter at open circuit condition ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

شکل 3 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت‌ها و برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک در حالت مدار باز ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

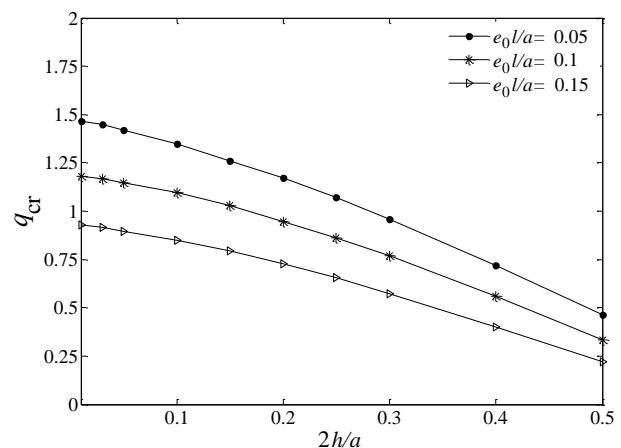


Fig. 4 Variation of the dimensionless critical buckling load versus the graphene thickness to the characteristic length ratio and for different values of small scale parameter at open circuit condition ($h_p/2h = 0.25, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

شکل 4 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت گرافین به طول مشخصه و برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس کوچک در حالت مدار باز ($h_p/2h = 0.25, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{L_c(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,11}^c + e_{31}v_{2,21}^c + e_{33}D_{dc}W_1^d) + \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} \right. \\ & - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) dz (e_{15}\varphi_{,1}) + D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) (z-h - \\ & h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{h_p^2} \varphi_{,1} - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z)L_c(z) dz c'_{55} (D_{dc}v_1^d \\ & + w_{,1}^c) - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z)(z+h) dz e_{15} \left[\frac{L_c(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} \right. \\ & (e_{31}v_{1,11}^c + e_{31}v_{2,21}^c + e_{33}D_{dc}W_1^d) - \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} - D_{ab} \cdot \\ & \left. \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) dz (e_{15}\varphi_{,1}) + D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z)(-z-h - \\ & h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{h_p^2} \varphi_{,1} - D_{ab} \int_{-h}^h L_b(z)L_c(z) dz \frac{E}{2(1+\nu)} \right. \\ & \left. (D_{dc}v_1^d + w_{,1}^c) = 0 \right. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \int_h^{h+h_p} L_a(z)L_b(z) dz \frac{1}{2} (c'_{11} - c'_{12})(v_{1,21}^b + v_{2,11}^b) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) \\ & \cdot L_b(z) dz \frac{1}{2} (c'_{11} - c'_{12})(v_{1,21}^b + v_{2,11}^b) + \int_{-h}^h L_a(z)L_b(z) dz \\ & \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} (v_{1,21}^b + v_{2,11}^b) + \int_{h+h_p}^{h+h_p} L_a(z)L_b(z) dz (c'_{12}v_{1,12}^b + \\ & c'_{11}v_{2,22}^b + c'_{13}D_{cb}W_2^c) + \int_h^{h+h_p} L_a(z) dz e_{31} \left[\frac{L_b(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} \right. \\ & (e_{31}v_{1,12}^b + e_{31}v_{2,22}^b + e_{33}D_{cb}W_2^c) + \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} - \int_h^{h+h_p} L_a(z) \cdot \\ & (z-h-h_p/2) dz \frac{8e_{31}}{(h_p)^2} \varphi_{,2} + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z)L_b(z) dz (c'_{12} \cdot \\ & v_{1,12}^b + c'_{11}v_{2,22}^b + c'_{13}D_{cb}W_2^c) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) dz e_{31} \cdot \\ & \left[\frac{L_b(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,12}^b + e_{31}v_{2,22}^b + e_{33}D_{cb}W_2^c) - \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} \right] \\ & + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z)(-z-h-h_p/2) dz \frac{8e_{31}}{(h_p)^2} \varphi_{,2} + \int_{-h}^h L_a(z) \cdot \\ & L_b(z) dz \left[\frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} (v_{1,12}^b + v_{2,22}^b + D_{cb}W_2^c) + \right. \\ & \left. \frac{E}{(1+\nu)} v_{2,22}^b \right] - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z)L_c(z) dz c'_{55} (D_{dc}v_2^d + w_{,2}^c) \\ & - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z)(z-h) dz e_{15} \left[\frac{L_c(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,12}^b + \right. \\ & e_{31}v_{2,22}^b + e_{33}D_{dc}W_2^d) + \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) dz (e_{15} \cdot \\ & \varphi_{,2} + D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z)(z-h-h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \varphi_{,2} - D_{ab} \cdot \\ & \left. \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z)L_c(z) dz c'_{55} (D_{dc}v_2^d + w_{,2}^c) - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) \right. \\ & \left. \cdot (z+h) dz e_{15} \left[\frac{L_c(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,12}^b + e_{31}v_{2,22}^b + e_{33} \right. \right. \end{aligned}$$

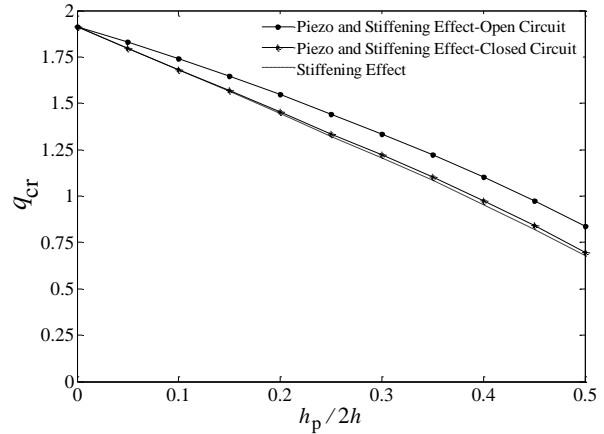


Fig. 6 Variation of the dimensionless critical buckling load versus the thickness ratio and for open and closed circuit conditions, piezo and stiffening effect ($2h/a = 0.03, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

شکل 6 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت‌ها و برای مدارهای باز و بسته، اثرات پیزو و سفتی ($2h/a = 0.03, e_0l/a = 0.05, E = 1949 \text{ GPa}, \nu = 0.201$)

-7 پیوست

با جایگذاری معادلات ساختاری گرافین (روابط (15)) و معادلات ساختاری لایه‌های بالا و پایین ماده پیزوالکتریک در حالت مدار باز (رابطه (1))، در معادلات پایداری (33) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} & \int_h^{h+h_p} L_a(z)L_b(z) dz (c'_{11}v_{1,11}^b + c'_{12}v_{2,21}^b + c'_{13}D_{cb}W_1^c) + \\ & \int_h^{h+h_p} L_a(z) dz e_{31} \left[\frac{L_b(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,11}^b + e_{31}v_{2,21}^b + e_{33} \cdot \right. \\ & D_{cb}W_1^c) + \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} - \int_h^{h+h_p} L_a(z)(z-h-h_p/2) dz \left[\frac{8e_{31}}{(h_p)^2} \cdot \right. \\ & \left. \varphi_{,1} + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z)L_b(z) dz (c'_{11}v_{1,11}^b + c'_{12}v_{2,21}^b + c'_{13}D_{cb} \right. \\ & \left. \cdot w_{,1}^c) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) dz e_{31} \left[\frac{L_b(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31}v_{1,11}^b + e_{31} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot v_{2,21}^b + e_{33}D_{cb}W_1^c) - \frac{4\varphi_{,1}}{h_p} + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z)(z-h-h_p/2 \right. \right. \\ & \left. \left. \right) dz \left[\frac{8e_{31}}{(h_p)^2} \varphi_{,1} \right] + \int_{-h}^h L_a(z)L_b(z) dz \left[\frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right. \right. \\ & \left. \left. (v_{1,11}^b + v_{2,21}^b + D_{cb}W_1^c) + \frac{E}{(1+\nu)} v_{1,11}^b \right] + \int_h^{h+h_p} L_a(z) \cdot \right. \\ & L_b(z) dz \frac{1}{2} (c'_{11} - c'_{12})(v_{1,22}^b + v_{2,12}^b) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z)L_b(z) \\ & \cdot dz \frac{1}{2} (c'_{11} - c'_{12})(v_{1,22}^b + v_{2,12}^b) + \int_{h+h_p}^{h+h_p} L_a(z)L_b(z) dz \cdot \\ & \left. \frac{E}{2(1+\nu)} (v_{1,22}^b + v_{2,12}^b) - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z)L_c(z) dz c'_{55} \cdot \right. \\ & \left. (D_{dc}v_1^d + w_{,1}^c) - D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z)(z-h) dz e_{15} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) dz e_{33} \left[\frac{L_c(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} v_{1,1}^c + e_{31} v_{2,2}^c + \right. \\
& e_{33} D_{dc} w^d) + \frac{4\varphi}{h_p} \left. \right] + D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) (z-h-h_p/2) dz \cdot \\
& \frac{8e_{33}}{(h_p)^2} \varphi - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) L_c(z) dz (c'_{13} v_{1,1}^c + c'_{13} v_{2,2}^c + \\
& c'_{33} D_{dc} w^d) - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) dz e_{33} \left[\frac{L_c(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} \cdot \right. \\
& v_{1,1}^c + e_{31} v_{2,2}^c + e_{33} D_{dc} w^d) - \frac{4\varphi}{h_p} \left. \right] - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) (- \\
& z-h-h_p/2) dz \frac{8e_{33}}{(h_p)^2} \varphi - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) L_c(z) dz \cdot \\
& \left[\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (v_{1,1}^c + v_{2,2}^c + D_{dc} w^d) + \frac{E}{(1+\nu)} (D_{dc} \cdot \right. \\
& \left. w^d) \right] = 0 \quad (41)
\end{aligned}$$

معادلات (39) تا (41) به همراه معادله ماکسول (2) به معادلات حاکم بر پایداری نانو ورق هوشمند در حالت مدار باز معروفند.

8- مراجع

- [1] J. Torabi, M. Bazdid-Vahdati, R. Ansari Kalkhali, Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 137-146, 2015. (in Persian فارسی)
- [2] R. C. Batra, S. Vidoli, Higher order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 40, No. 1, pp. 91-104, 2002.
- [3] R. Ansari, S. Ajory, B. Motavalli, Mechanical properties of defective single-layered graphene sheets via molecular dynamics simulation, *Superlattices and Microstructures*, Vol. 51, No. 2, pp. 274-289, 2010.
- [4] S. J. Zhou, Z. Q. Li, Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical microbar, *Journal of Shandong University of Technology*, Vol. 31, No. 5, pp. 401-407, 2010.
- [5] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 323-330, 2015. (in Persian فارسی)
- [6] J. D. Lee, X. Wang, Generalized Micromorphic solids and fluids, *The International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 12, pp. 1378-1387, 2001.
- [7] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, No. 1, pp. 296-358, 1997.
- [8] S. Ramezani, R. Naghdabadi, S. Sohrabpour, Analysis of micropolar elastic beams, *European Journal of Mechanics*, Vol. 28, No. 2, pp. 202-208, 2009.
- [9] A. C. Eringen, on differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [10] A. C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, pp. 95-100, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [11] A. Farajpour, M. Danesh, M. Mohammadi, Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics, *Low dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 3, pp. 719-727, 2011.
- [12] A. Assadi, B. Farshi, Stability analysis of graphene based laminated composite sheets under non-uniform inplane loading by nonlocal elasticity, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 9, pp. 4541-4549, 2011.
- [13] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, Scale effect and buckling analysis of multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum mechanics, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 7, No. 10, pp. 1948-1954, 2010.
- [14] H. S. Shen, Postbuckling of FGM plates with piezoelectric

$$\begin{aligned}
& D_{dc} w_{,2}^d - \frac{4\varphi_{,2}}{h_p} - D_{ab} \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) dz (e_{15} \varphi_{,2}) + D_{ab} \cdot \\
& \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) (-z-h-h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \varphi_{,2} - D_{ab} \cdot \\
& \int_{-h-h_p}^{-h} L_b(z) L_c(z) dz \frac{E}{2(1+\nu)} (D_{dc} v_{2,2}^d + w_{,2}^c) = 0 \quad (40) \\
& (1 - (e_0 l)^2 \nabla^2) \left[\int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a(z) L_b(z) \sigma_{11}^0 dz w_{,11}^b + \int_{-h-h_p}^{h+h_p} L_a(z) \cdot \right. \\
& L_b(z) \sigma_{22}^0 dz w_{,22}^b \left. \right] + \int_h^{h+h_p} L_a(z) L_b(z) dz c'_{55} (D_{cb} v_{1,1}^c + \\
& w_{,11}^b) + \int_h^{h+h_p} L_a(z) (z-h) dz e_{15} \left[\frac{L_b(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} v_{1,111}^b \right. \\
& + e_{31} v_{2,211}^b + e_{33} D_{cb} w_{,11}^c) + \frac{4\varphi_{,11}}{h_p} \left. \right] + \int_h^{h+h_p} L_a(z) dz (e_{15} \cdot \\
& \varphi_{,11}) - \int_h^{h+h_p} L_a(z) (z-h-h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \varphi_{,11} + \\
& \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) L_b(z) dz c'_{55} (D_{cb} v_{1,1}^c + w_{,11}^b) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) \cdot \\
& (z+h) dz e_{15} \left[\frac{L_b(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} v_{1,111}^b + e_{31} v_{2,211}^b + e_{33} \cdot \right. \\
& D_{cb} w_{,11}^c) - \frac{4\varphi_{,11}}{h_p} \left. \right] + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) dz (e_{15} \varphi_{,11}) - \\
& \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) (-z-h-h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \varphi_{,11} + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) \cdot \\
& L_b(z) dz \frac{E}{2(1+\nu)} (D_{cb} v_{1,1}^c + w_{,11}^b) + \int_h^{h+h_p} L_a(z) L_b(z) dz \cdot \\
& c'_{55} (D_{cb} v_{2,2}^c + w_{,22}^b) + \int_h^{h+h_p} L_a(z) (z-h) dz e_{15} \cdot \\
& \left[\frac{L_b(h+h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} v_{1,122}^b + e_{31} v_{2,222}^b + e_{33} D_{cb} w_{,22}^c) + \right. \\
& \left. \frac{4\varphi_{,22}}{h_p} \right] + \int_h^{h+h_p} L_a(z) dz (e_{15} \varphi_{,22}) - \int_h^{h+h_p} L_a(z) (z-h- \\
& h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \varphi_{,22} + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) L_b(z) dz c'_{55} (D_{cb} v_{2,2}^c \\
& + w_{,22}^b) + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) (z+h) dz e_{15} \left[\frac{L_b(-h-h_p)}{\varepsilon_{33}} (e_{31} \cdot \right. \\
& v_{1,122}^b + e_{31} v_{2,222}^b + e_{33} D_{cb} w_{,22}^c) - \frac{4\varphi_{,22}}{h_p} \left. \right] + \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) \cdot \\
& dz (e_{15} \varphi_{,22}) - \int_{-h-h_p}^{-h} L_a(z) (-z-h-h_p/2)^2 dz \frac{4e_{15}}{(h_p)^2} \cdot \\
& \varphi_{,22} + \int_h^{h+h_p} L_a(z) L_b(z) dz \frac{E}{2(1+\nu)} (D_{cb} v_{2,2}^c + w_{,22}^b) - \\
& D_{ab} \int_h^{h+h_p} L_b(z) L_c(z) dz (c'_{13} v_{1,1}^c + c'_{13} v_{2,2}^c + c'_{33} D_{dc} w^d)
\end{aligned}$$

- Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 11, pp. 64-76, 2014. (in Persian فارسی)
- [24] A. Arefi, H. Nahvi, Investigation of small scale effect on buckling of nanorings, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 385-391, 2015. (in Persian فارسی)
- [25] X. Q. He, T. Y. Ng, Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 9, pp. 1641-1655, 2001.
- [26] L. Shen, H. S. Shen, C. L. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Materials Science*, Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010.
- [27] Y. Huang, J. Wu, K. C. Hwang, Thickness of graphene and single-wall carbon nanotubes, *Physical Review*, Vol. 74, No. 24, pp. 413-422, 2006.
- [28] C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone, Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene, *Science*, Vol. 321, No. 5887, pp. 385-388, 2008.
- [29] A. Hemmasizadeh, M. Mahzoon, E. Hadi, R. Khandan, A method for developing the equivalent continuum model of a single layer graphene sheet, *Thin Solid Films*, Vol. 516, No. 21, pp. 7636-7640, 2008.
- [30] R. Ansari, H. Rouhi, Explicit analytical expressions for the critical buckling stresses in a monolayer graphene sheet based on nonlocal elasticity, *Solid State Communications*, Vol. 152, No. 2, pp. 56-59, 2012.
- [31] N. Wu, Q. Wang, S. T. Quek, Free Vibration Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate with Open Circuit, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 8, pp. 1126-1136, 2010.
- actuators under thermo-electro-mechanical loadings, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No. 23, pp. 6101-6121, 2005.
- [15] J. Wang, J. Yang, Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 53, No. 4, pp. 87-99, 2000.
- [16] C. L. Davis, G. A. Lesieutre, An Actively Tuned Solid-State Vibration Absorber Using Capacitive Shunting of Piezoelectric Stiffness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 232, No. 3, pp. 601-617, 2000.
- [17] A. K. Geim, Graphene Status and Prospects, *Science*, Vol. 324, No. 5934, pp. 1530-1534, 2009.
- [18] K. Jensen, K. Kim, A. Zettl, An atomic-resolution nanomechanical mass sensor, *Nature Nanotechnology*, Vol. 3, No. 9, pp. 533-537, 2008.
- [19] Z. Hao, B. Liao, An analytical study on interfacial dissipation in piezoelectric rectangular block resonators with in-plane longitudinal-mode vibrations, *Sensors and Actuators*, Vol. 163, No. 1, pp. 401-409, 2010.
- [20] J. Yang, *Special Topics in the Theory of Piezoelectricity*, pp. 319-324, New York: Springer-Verlag, 2009.
- [21] Q. Wang, S. T. Quek, C. T. Sun, X. Liu, Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate, *Smart Material and Structures*, Vol. 10, No. 2, pp. 229-239, 2001.
- [22] M. Ghasemi, A. Jaamialahmadi, Analytical solution based on higher order shear and normal deformation theory for Buckling of functionally graded plates with piezoelectric layers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 387-397, 2015. (in Persian فارسی)
- [23] M. Mohammadimehr, M. Salemi, H. Nasiri², H. Afshari, Thermal effect on deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal