مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1394، دوره 15، شماره 5، ص‌ص 127-136

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه یک روش بدون شبکه مرتبه بالا ضمنی برای جریان‌های تراکم‌پذیر غیرلزج

مهدی هاشم‌آبادی[1]، مصطفی هادی‌دولابی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

*تهران، صندوق پستی 1774-15875، mhadidoolabi@mut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 آذر 1393

پذیرش: 04 اسفند 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:

روش بدون شبکه

مرتبه بالا

روش ضمنی

جریان تراکم‌پذیر

معادلات اویلر

چکیده

در این مقاله معادلات مرتبه بالاتری برای یک روش بدون شبکه توسعه داده شده است. در دهه اخیر روش بدون شبکه که از توزیع نقاط استفاده می‌کند، در دینامیک سیالات محاسباتی مورد توجه قرار گرفته است. در روش بدون شبکه، معمولاً حداقل مربعات سری تیلور مرتبه اول در تخمین مشتقات مکانی در هر گره استفاده می‌شود. در این مقاله با ارایه معادلات مرتبه بالاتر و تعمیم آن برای یک روش بدون شبکه اختلاف مرکزی، افزایش دقت و عملکرد این روش در حل معادلات غیرلزج تراکم‌پذیر بررسی شده است. معادلات اویلر در حالت دوبعدی و با استفاده از اتلافات عددی مرتبه دو و چهار که سبب ایجاد یک روش سریع در روش بدون شبکه می‌شود، حل شده‌اند. در گسسته‌سازی زمانی از روش‌های صریح و ضمنی دو زمانه استفاده شده است. به منظور کاهش محاسبات، تکنیک‌های گام زمانی موضعی و هموارسازی باقیمانده‌ها برای افزایش سرعت همگرایی به‌کار گرفته شده‌اند. توانایی و دقت این روش با روش حجم محدود و داده‌های تجربی در جریان‌های گذرصوتی و مافوق‌صوت مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با استفاده از دقت مرتبه دوم نتایج در جریان‌های گذرصوتی و مافوق‌صوت در شبکه با تعداد نقاط کمتر، دارای دقت بسیار بالاتری نسبت به حل مرتبه اول است.

Development of an implicit high order gridless method for inviscid compressible flows

Mahdi Hashemabadi, Mostafa Hadidoolabi*

Department of Aerospace Engineering , Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.
*P.O.B. 158751774 Tehran, Iran, mhadidoolabi@mut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 December 2014
Accepted 23 February 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:
Gridless Method
High Order
Implicit Method
Compressible Flow
Euler Equations

ABSTRACT

In this paper, an implicit high order discretization has been developed for gridless method. In the last ten years, gridless method using a distribution of points has become an important research topic in computational fluid dynamics. Gridless method generally uses the first order Taylor series for discretization of the space derivatives at any point. This paper presents an extension of high order for a central difference gridless method and investigates the accuracy of the results and performance of this method for solving inviscid compressible flows. Euler equations have been solved in two dimensional using second and fourth order artificial dissipation terms. These terms make a fast gridless method. The method of discretization in time, explicit and dual-time implicit time discretization are used. In order to reduce the computational cost, local time stepping and residual smoothing techniques are utilized to speed up convergence. The capabilities and accuracy of the method are compared with finite volume method and experimental data for airfoils in transonic and supersonic flows. Results show that the second order accuracy solutions with fewer point distributions indicate higher accuracy when compared to the first order accuracy solutions in transonic and supersonic flows.

1- مقدمه

پیش‌بینی دقیق و سریع جریان در جریان‌های دوبعدی و سه‌بعدی از مسایل بسیار مهم در آیرودینامیک و هیدرودینامیک است. افزایش قدرت و سرعت سخت‌افزارها از یک سوی و توسعه و بهبود الگوریتم‌های حل از سوی دیگر باعث شده است تا دینامیک سیالات محاسباتی، به ابزاری کارا، نسبتاً ارزان و سریع در فرآیندهای تحلیل و طراحی تبدیل شود. بیشتر کارهای انجام شده در زمینه روش‌های بدون شبکه در دهه اخیر انجام شده است. روش بدون شبکه، برخی مشکلاتِ روش‌های مبتنی بر شبکه را ندارد و می‌توان از آن برای حل مسایل شرایط مرزی از جمله مسایل مکانیک جامدات، انتقال حرارت، سیالات و غیره بهره برد. در این روش‌ها فقط با نقاط سرکار داریم و به تعریف سلول‌ها نیازی نیست. از جمله مزایای روش بدون شبکه می‌توان به حساسیت کمتر نسبت به چیدمان نقاط، راحتی تولید و اصلاح توزیع نقاط در مقایسه با مدل‌های مبتنی بر تولید شبکه و مشکل کمتر این روش‌ها در حرکت مرز و تغییر شکل‌های بزرگ اشاره کرد. از طرفی، روش‌های بدون شبکه نه یک روش اختلاف محدود است و نه یک روش حجم محدود. در این روش متریک‌ها، مساحت یا حجم‌ها محاسبه نمی‌شوند. لوهنر و اونیاته با

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Hashemabadi, M. Hadidoolabi, Development of an implicit high order gridless method for inviscid compressible flows, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 5, pp. 127-134, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

تحقیقاتی که در زمینه تولید و توزیع نقطه در میدان و انتخاب حوزه نفوذ بهینه داشتند، نشان دادند که تولید نقطه در میدان چند برابر سریع‌تر از تولید شبکه است [1]. در حالت کلی روش بدون شبکه در هر نقطه مبتنی بر تخمین تابع بر اساس کمترین مربعات خطا با استفاده از نقاط همسایه در حوزه نفوذش است [2]. معمولاً این کمترین مربعات خطا با استفاده از سری تیلور یا توابع چند جمله‌ای تخمین زده می‌شود. به‌دلیل مزایای سری تیلور نسبت به توابع چند جمله‌ای معمولاً در روش‌های بدون شبکه از کمترین مربعات خطا مبتنی بر سری تیلور استفاده می‌شود [3]. باتینا از اولین افرادی بود که از روش استخراج توابع بر اساس کمترین مربعات خطا با تابع وزنی ثابت برای حل معادلات جریان لزج و غیرلزج استفاده کرد [4]. در این کار باتینا از اتلافات عددی مرتبه دو و چهار بهره برد. دشپانده و رامش از روش کمترین مربعات خطا بر پایه سری تیلور و با استفاده از روش بالادست برای حل عددی جریان تراکم‌پذیر استفاده کردند [5]. سریدار و بالاکریشنان یک روش اختلاف محدود بالادست را برای حلگرهای بدون شبکه ارایه دادند [6]. چن و شو از روش بدون شبکه بر پایه توابع پایه شعاعی و مبتنی بر مربع‌سازی دیفرانسیلی، برای حل معادلات اویلر تراکم‌پذیر دوبعدی استفاده کردند. آن‌ها در این کار از یک روش بالادست بهره برده و از الگوریتم ضمنی LU-SGS برای افزایش سرعت همگرایی استفاده کردند [7]. جایسانکار و همکارانش از حداقل مربعات مرتبه دو بر پایه تجزیه عبارت‌های جابجایی-فشار و استفاده از روش لکس-فردریک محلی[1] اما در نقاط میانی بهره برده و از گسسته‌سازی زمانی صریح استفاده کردند [8]. کتز و جیمسون به بررسی دقت چند روش بدون شبکه پرداختند و نشان دادند که روش توابع پایه شعاعی در جریان تراکم‌پذیر به‌همراه موج ضربه‌ای دارای دقت کمتری در مقایسه با روش کمترین مربعات خطا بر اساس سری تیلور است [3]. کتز و جیمسون همچنین برای افزایش سرعت همگرایی در روش بدون شبکه از روش چندابری[2] که مشابه روش چند شبکه‌ای[3] در روش حجم محدود است، استفاده کردند [9]. با توجه به مزیت‌های روش بدون شبکه در نزدیکی مرزها و همچنین مزایای شبکه کارتزین، در برخی موارد از ترکیب شبکه کارتزین و روش بدون شبکه برای تحلیل جریان تراکم‌پذیر استفاده شده است. لو و همکارانش با ترکیب شبکه کارتزین و روش بدون شبکه به حل جریان دوبعدی و سه‌بعدی پرداختند [10]. جهانگیریان و هاشمی نیز از ترکیب این دو روش و استفاده از تطبیق شبکه در حل جریان‌های دوبعدی لزج گذرصوتی استفاده کرده‌اند [11]. در طی سه سال اخیر روش‌های سریعی برای تحلیل جریان غیر لزج با استفاده از روش بدون شبکه برای جریان‌های دوبعدی توسعه یافته است. هاشمی و جهانگیریان [12] و وانگ و پریاکس [13] با استفاده از فرمولاسیون حداقل مربعات مرتبه اول تیلور و اتلافات عددی مبتنی بر روش اختلاف مرکزی (اتلافات مرتبه دو و چهار جیمسون) نشان دادند که روش بدون شبکه در مقایسه با روش حجم محدود با شبکه یکسان دارای سرعت همگرایی بیشتر و زمان محاسبات کمتری است. از همین روش سریعِ مرتبه اول، ستارزاده و جهانگیریان برای حل جریان سه‌بعدی غیرلزج بهره بردند [14]. اما برای رسیدن به دقت خوب معمولاً روش بدون شبکه نیاز به تعداد نقاط بیشتری نسبت به روش حجم محدود دارد.

در این مقاله با ارایه حداقل مربعات مرتبه دو تیلور و تعمیم آن برای روش بدون شبکه اختلاف مرکزی همراه با اتلافات عددی مرتبه دو و چهار، افزایش دقت و عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است. برای کارایی بیشتر علاوه بر گسسته‌سازی صریح از گسسته‌سازی زمانی ضمنی دو زمانه نیز استفاده شده است. در نهایت برای چند نمونه، دقت و عملکرد در سرعت‌های گذرصوتی و مافوق‌صوت با داده‌های موجود و روش حجم محدود مورد ارزیابی قرار گرفته است.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان‌های غیرلزج دو بعدی به‌صورت رابطه (1) است:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}=0 \tag{1}$$

جایی‌که پارامترهای رابطه (1) در رابطه (2) و (3) نشان داده شده است.

$$W=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix}, F_1=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{bmatrix}, F_2=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{bmatrix} \tag{2}$$

و

$$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) \tag{3}$$

2-1- گسسته‌سازی با دقت مرتبه اول

ابر نقاطی مطابق شکل 1 را در نظر بگیرید. نقاط j، نقاط همسایگی نقطه i و نقاط m نقاط میانی بین نقطه i و همسایه‌هایش هستند.

بسط سری تیلور مرتبه اول به صورت رابطه (4) است [3]:

$$F_m \approx F_i+(\Delta x_m)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i+(\Delta y_m)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{4}$$

جایی که $\Delta x_m = x_m - x_i$ و $\Delta y_m = y_m - y_i$ است (علامت تقریب در ادامه روابط به‌دلیل دقت قابل قبول به مساوی تبدیل شده است).

خطای تخمین، e، بصورت رابطه (5) خواهد بود:

$$e=\Delta F_m-(\Delta x_m)(F_x)_i-(\Delta y_m)(F_y)_i \tag{5}$$

جایی که $\Delta F_m = F_m - F_i$، $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ و $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ است. تابع خطای مجموع مربعات خطا در تمامی نقاط همسایه نقطه مرکزی با رابطه (6) نشان داده می‌شود:

$$E=\sum_{m=1}^{N}\omega_{im}\left[\Delta F_m-(\Delta x_m)(F_x)_i-(\Delta y_m)(F_y)_i\right]^2 \tag{6}$$

ω_{im} تابع وزنی است و در این‌جا به‌صورت معکوس فاصله بین دو نقطه i و m محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری تابع خطا نسبت به F_x و F_y و حداقل‌سازی آن‌ها، رابطه (7) به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_i=\sum_{m=1}^{N}a_{im}\Delta F_{1,m}$$
$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_i=\sum_{m=1}^{N}b_{im}\Delta F_{2,m} \tag{7}$$

جایی که $\Delta F_{1,m} = F_{1,m} - F_{1,i}$، $\Delta F_{2,m} = F_{2,m} - F_{2,i}$ و N تعداد نقاط همسایه در هر ابر نقاط است و a_{im} و b_{im} به ترتیب با رابطه (8) و (9) مشخص می‌شوند.

$$a_{im}=\frac{\omega\Delta x\sum\omega\Delta y^2-\omega\Delta y\sum\omega\Delta x\Delta y}{\sum\omega\Delta x^2\sum\omega\Delta y^2-(\sum\omega\Delta x\Delta y)^2} \tag{8}$$

$$b_{im}=\frac{\omega\Delta y\sum\omega\Delta x^2-\omega\Delta x\sum\omega\Delta x\Delta y}{\sum\omega\Delta x^2\sum\omega\Delta y^2-(\sum\omega\Delta x\Delta y)^2} \tag{9}$$

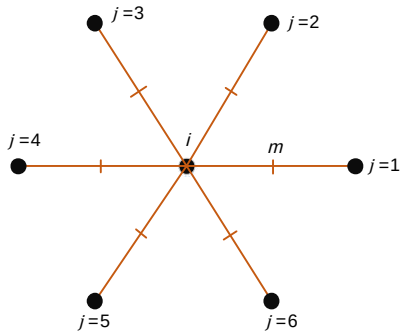
2-2- گسسته‌سازی با دقت مرتبه دوم

شکل کلی بسط تیلور دو متغیره با رابطه (10) تعریف می‌شود.

1- Local Lax-Fredrichs (LLF)
2- Multicloud
3- MultiGrid

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]



شکل 1 ابرنقاط مربوط به نقطه i

$$F(x_m - x_i, y_m - y_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\bigg|_i \Delta x_m^{n-k}\Delta y_m^k\right\} \tag{10}$$

جایی‌که $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ است. گسسته‌سازی تا مرتبه دومِ رابطه (10) در رابطه (11) نشان داده شده است:

$$F_m = F_i + \Delta x_m\frac{\partial F}{\partial x} + \Delta y_m\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{(\Delta x_m)^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y_m)^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \Delta x_m\Delta y_m\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \tag{11}$$

با مشتق‌گیری رابطه (11) نسبت به x به رابطه (12) می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta F_m) = \Delta x_m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_i + \Delta y_m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right) + \cdots \tag{12}$$

با مشتق‌گیری رابطه (11) نسبت به y به رابطه (13) می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_m - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i = \frac{\partial}{\partial y}(\Delta F_m) = \Delta x_m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_i + \Delta y_m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_i + \cdots \tag{13}$$

با ضرب‌کردن رابطه (12) در $\frac{\Delta x_m}{2}$ و رابطه (13) در $\frac{\Delta y_m}{2}$ و جمع‌کردن این دو، رابطه (14) به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{\Delta x_m}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta F_m) + \frac{\Delta y_m}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta F_m) = \frac{\Delta x_m^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y_m^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_i + \Delta x_m\Delta y_m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_i + O[\Delta x_m^3, \Delta y_m^3] \tag{14}$$

با جایگزینی رابطه (14) در رابطه (11) مشتقات مرتبه دوم حذف می‌شوند و بنابراین رابطه (15) را خواهیم داشت:

$$\Delta F_m - \frac{\Delta x_m}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta F_m) - \frac{\Delta y_m}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta F_m) = \Delta x_m\frac{\partial F}{\partial x} + \Delta y_m\frac{\partial F}{\partial y} + O[\Delta x_m^3, \Delta y_m^3] \tag{15}$$

مطابق رابطه (16) با در نظر گرفتن:

$$\Delta\hat{F}_m = \Delta F_m - \frac{\Delta x_m}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta F_m) - \frac{\Delta y_m}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta F_m) \tag{16}$$

و با جایگزینی رابطه (16) در رابطه (15)، رابطه (17) به‌دست می‌آید:

$$\Delta\hat{F}_m = \Delta x_m\frac{\partial F}{\partial x} + \Delta y_m\frac{\partial F}{\partial y} + O[\Delta x_m^3, \Delta y_m^3] \tag{17}$$

بنابراین خطا به‌صورت رابطه (18) تعریف می‌شود:

$$e = \Delta\hat{F}_m - \Delta x_m\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i - \Delta y_m\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{18}$$

که دارای دقت مرتبه دو است. تابع خطای مجموع مربعات در تمامی نقاط همسایه نقطه مرکزی به‌صورت رابطه (19) لحاظ می‌شود:

$$E = \sum_{m=1}^{n}\omega_{im}\left[\Delta\hat{F}_m - \Delta x_m(F_x)_i - \Delta y_m(F_y)_i\right]^2 \tag{19}$$

مشابه روش مرتبه اول با مشتق‌گیری تابع خطا نسبت به F_x و F_y و حداقل‌سازی آن‌ها به رابطه (20) می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = \sum_{m=1}^{N} a_{im}\Delta\hat{F}_m$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i = \sum_{m=1}^{N} b_{im}\Delta\hat{F}_m \tag{20}$$

مقادیر a_{im} و b_{im} همان مقادیر رابطه (8) و (9) هستند. روابط به صورت دقیق‌تر در رابطه (21) نشان داده‌شده است:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_i = \sum_{m=1}^{N} a_{im}\Delta\hat{F}_{1,m}$$
$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_i = \sum_{m=1}^{N} b_{im}\Delta\hat{F}_{2,m} \tag{21}$$

در معادلات (21) برای محاسبه مقدار $\Delta\hat{F}_m$ (رابطه (16)) ما نیاز داریم که مقادیر $\Delta F_m = F_m - F_i$ و مشتقات مرتبه اول را در نقطه i و نقاط میانی m داشته باشیم که مقادیر $(F_x)_i$ و $(F_y)_i$ با استفاده از دقت مرتبه اول در تمام نقاط میدان محاسبه می‌شوند و مقادیر $(F_x)_m$ و $(F_y)_m$ به‌این صورت محاسبه می‌شوند که مقدار هر پارامتر در نقطه m میانگین مقادیر در دو نقطه i و j است و بنابراین مشتق در نقطه میانی به‌صورت رابطه (22) خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j\right]$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_j\right] \tag{22}$$

برای ساده‌سازی روابط به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا رابطه (16) را به شکل رابطه (23) بسط می‌دهیم:

$$\Delta\hat{F}_m = \Delta F_m - \frac{\Delta x_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m + \frac{\Delta x_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i - \frac{\Delta y_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_m + \frac{\Delta y_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{23}$$

حال با استفاده از رابطه (22) و جاگذاری آن در رابطه (23)، به رابطه (24) می‌رسیم:

$$\Delta\hat{F}_m = \Delta F_m - \frac{\Delta x_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i - \frac{\Delta x_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j + \frac{\Delta x_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i - \frac{\Delta y_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i - \frac{\Delta y_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_j + \frac{\Delta y_m}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{24}$$

بنابراین با ساده کردن رابطه (24) به رابطه (25) می‌رسیم:

$$\Delta\hat{F}_m = \Delta F_m - \frac{\Delta x_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j + \frac{\Delta x_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i - \frac{\Delta y_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_j + \frac{\Delta y_m}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{25}$$

از طرفی پارامترهای با اندیس m با رابطه (26) مشخص می‌شوند:

$$\Delta F_m = F_m - F_i = \frac{1}{2}\Delta F_j = \frac{1}{2}(F_j - F_i)$$
$$\Delta x_m = x_m - x_i = \frac{1}{2}\Delta x_j = \frac{1}{2}(x_j - x_i)$$
$$\Delta y_m = y_m - y_i = \frac{1}{2}\Delta y_j = \frac{1}{2}(y_j - y_i) \tag{26}$$

بنابراین رابطه (25) با توجه به رابطه (26) به‌صورت رابطه (27) خواهد شد:

$$\Delta\hat{F}_m = \frac{1}{2}(F_j - F_i) - \frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j + \frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

$$-\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_j+\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i \tag{27}$$

و بدین ترتیب رابطه (28) به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_i=\sum_{m=1}^{N}a_{im}\left[\frac{1}{2}\Delta F_1-\frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_j+\frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_i-\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_j+\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_i\right]$$
$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_i=\sum_{m=1}^{N}b_{im}\left[\frac{1}{2}\Delta F_2-\frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_j+\frac{\Delta x_j}{8}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_i-\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_j+\frac{\Delta y_j}{8}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_i\right] \tag{28}$$

از طرفی $a_{im}=2a_{ij}$ و $b_{im}=2b_{ij}$ و بنابراین به رابطه (29) می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{i\,SO}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left[\Delta F_1-\frac{\Delta x_j}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{j\,FO}+\frac{\Delta x_j}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{i\,FO}-\frac{\Delta y_j}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{j\,FO}+\frac{\Delta y_j}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{i\,FO}\right]$$
$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_{i\,SO}=\sum_{j=1}^{N}b_{ij}\left[\Delta F_2-\frac{\Delta x_j}{4}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{j\,FO}+\frac{\Delta x_j}{4}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{i\,FO}-\frac{\Delta y_j}{4}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_{j\,FO}+\frac{\Delta y_j}{4}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_{i\,FO}\right] \tag{29}$$

در رابطه (29) زیرنویس FO بیانگر حل مرتبه اول و زیرنویس SO بیانگر حل مرتبه دوم است. همان‌طور که از این رابطه مشخص است، شارهای مرتبه دوم در حقیقت از شارهای مرتبه اول و پارامترهای تصحیح‌کننده تشکیل شده است که این پارامترهای تصحیح‌کننده ضرایبی از مشتقات مکانی مرتبه اول در نقاط همسایه و خودِ آن نقطه هستند. شکل 2 پارامترهای هر همسایه که در تعیین شارهای مرتبه اول و دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد را نشان می‌دهد.

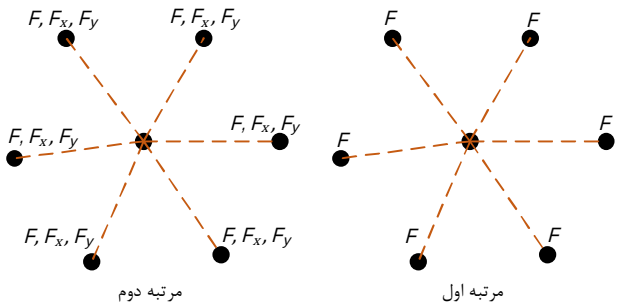
با جاگذاری مشتقات مکانی مرتبه اول یا مرتبه دوم (رابطه (7) یا رابطه (29)) در رابطه (1)، شکل کلی گسسته‌سازی شده معادلات به‌صورت رابطه (30) در می‌آید:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}F_{1ij}+b_{ij}F_{2ij})=0 \tag{30}$$

این رابطه، گسسته‌سازی غیر اتلافی است که به دلیل داشتن نوسانات داخل میدان پایدار نیست. در روش‌های مبتنی بر اختلاف مرکزی به دلیل کامل در نظر نگرفتن ناحیه وابستگی نقاط و نیز عدم وجود ترم‌های مستهلک کننده ذاتی، اغتشاشات و نوسانات ایجاد شده در میدانِ جریان میرا نمی‌شود. این مسأله باعث اخلال در همگرایی الگوریتم حل و در مواردی که گرادیان متغیرهای جریان بالا باشد مثل هنگامی که شوک در میدان وجود دارد باعث واگرایی آن می‌شود. یکی از راه‌های از بین بردن این نوسانات، اضافه کردن ترم‌های اتلافات به معادلات است که این اتلافات معمولاً به صورت تابعی از متغیرهای بقایی در نظر گرفته می‌شود [15]. برای پایدارسازی رابطه (30)، عبارت اتلافات عددی به آن اضافه می‌شود. در تحقیق حاضر، اتلافات عددی مرتبه دو و چهار جیمسون مورد استفاده قرار گرفته است.

2-3- اتلافات عددی

با اضافه‌کردن مشتقات مرتبه دوم و چهارمِ پارامترهای بقایی، می‌توان نوسانات را حذف کرد [16]. در این حالت شکل کلی معادله به‌صورت رابطه (31) در می‌آید:



شکل 2 پارامترهای هر همسایه که در محاسبه شارهای مرتبه اول و مرتبه دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}F_{1ij}+b_{ij}F_{2ij})-D_i=0 \tag{31}$$

و اتلافات با رابطه (32) مشخص می‌شوند:

$$D_i=\sum_{k=1}^{N}d_{ik} \tag{32}$$

و فرمولاسیون جامع آن در رابطه (33) آورده شده است:

$$d_{ik}=\epsilon_{ik}^{(2)}\lambda_{ik}(W_k-W_i)-\epsilon_{ik}^{(4)}\lambda_{ik}(\nabla^2W_k-\nabla^2W_i)$$
$$\epsilon_{ik}^{(2)}=K^{(2)}\nu_{ik}$$
$$\epsilon_{ik}^{(4)}=\max\left[0,K^{(4)}-\epsilon_{ik}^{(2)}\right]$$
$$\nabla^2W_i=\sum_{k=1}^{N}(W_k-W_i)$$
$$\nu_{ik}=\frac{|p_k-p_i|}{|p_k+p_i|} \tag{33}$$

مقادیر ویژه با رابطه (34) محاسبه می‌شوند:

$$\lambda_{ik}=|a_{ik}u+b_{ik}v|+c\sqrt{a_{ik}^2+b_{ik}^2} \tag{34}$$

جایی‌که c سرعت صوت محلی، u و v سرعت محلی، پارامترهای $K^{(2)}$ و $K^{(4)}$ ضرایب اتلاف برای مشتقات مرتبه دوم و چهارم، p فشار و λ_{ik} حداکثر مقادیر ویژه است. معمولا مقادیری که برای $K^{(2)}$ و $K^{(4)}$ استفاده می‌شود در رابطه (35) آورده شده است:

$$0.2\le K^{(2)}\le 1$$
$$0.004\le K^{(4)}\le 0.05 \tag{35}$$

2-4- گسسته‌سازی زمانی

با گسسته‌سازی مکانی، رابطه (31) به یک معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان می‌رسیم که در رابطه (36) آورده شده است.

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}=R_i \tag{36}$$

حال می‌توان به‌صورت صریح یا ضمنی این معادله دیفرانسیل معمولی را حل کرد.

2-4-1- گسسته‌سازی زمانی صریح

با گسسته‌سازی زمانی صریح، رابطه (36) به‌صورت رابطه (37) در می‌آید:

$$\frac{W_i^{n+1}-W_i^n}{\partial t}=R_i \tag{37}$$

برای حل رابطه فوق از روش چند مرحله‌ای رانگ-کوتا استفاده می‌شود که رابطه (38)، آن را نشان می‌دهد [13]:

$$W_i^{(0)}=W_i^n$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

$$W_i^{(k)} = W_i^{(0)} + \alpha_k \Delta t_i R_i^{(k-1)}$$
$$W_i^{(n+1)} = W_i^{(k)} \tag{38}$$

معمولاً از رانگ-کوتای سه تا پنج مرحله‌ای استفاده می‌شود که در این تحقیق، رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای استفاده شده است و ضرایب α_k به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

$$\alpha_1 = 0.3333, \alpha_2 = 0.2667, \alpha_3 = 0.555, \alpha_4 = 1.0$$

2-4-2- گسسته‌سازی زمانی ضمنی

مشکل عمده روش صریح، محدود بودن دامنه پایداری و در نتیجه کوچک بودن گام زمانی قابل استفاده در آن است. برای برطرف کردن این مشکل می‌توان از گسسته‌سازی کاملاً ضمنی بهره برد [17]. در این صورت رابطه (39) را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial W_i^{n+1}}{\partial t} = R_i(W^{n+1}) \tag{39}$$

برای گسسته‌سازی $\frac{d}{dt}$ از رابطه اختلاف پسرو که از دقت k برخوردار است استفاده می‌شود و این گسسته‌سازی در رابطه (40) نشان داده شده است:

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}[\Delta^-]^r \tag{40}$$

جایی که $\Delta^- W_i^{n+1} = W_i^{n+1} - W_i^n$ است.

با گسسته‌سازی زمانی با دقت مرتبه دوم، رابطه (39) به صورت رابطه (41) خواهد شد:

$$\frac{3W_i^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{2W_i^n}{\Delta t} + \frac{W_i^{n-1}}{2\Delta t} - R_i(W^{n+1}) = 0 \tag{41}$$

با توجه به این‌که این رابطه غیرخطی است و به‌صورت تحلیلی حل نمی‌شود، پارامتر R^* را بعنوان پارامتر ناپایای باقیمانده‌ها به‌صورت رابطه (42) در نظر می‌گیریم:

$$R_i^*(W^{n+1}) = \frac{3W_i^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{2W_i^n}{\Delta t} + \frac{W_i^{n-1}}{2\Delta t} - R_i(W^{n+1}) \tag{42}$$

حال اگر یک زمان مجازی مانند τ در نظر بگیریم و معادله دیفرانسیل را نسبت به این زمان بنویسیم، رابطه (43) را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial W_i^{n+1}}{\partial \tau} = R_i^*(W^{n+1}) \tag{43}$$

حل حالت پایای این رابطه شرط $\frac{\partial W_i^{n+1}}{\partial \tau} = 0$ را ارضا می‌کند که به معنی $R_i^*(W^{n+1}) = 0$ و پاسخ حالت دایمِ رابطه (43) است و این رابطه با استفاده از روش صریح رانگ-کوتا چند مرحله‌ای قابل حل است. گام زمانی برای هر تکرار صریح داخلی (زمان مجازی τ) با رابطه (44) ارزیابی می‌شود:

$$\Delta\tau_i = \min\left[\frac{CFL_{ex}}{\lambda_i}, \frac{2\Delta t_i}{3}\right] \tag{44}$$

جایی که CFL_{ex} عدد کورانت تکرارهای صریح و $\lambda_i = \sum_{k=1}^{N}|a_{ik}u + b_{ik}v| + c\sqrt{a_{ik}^2 + b_{ik}^2}$ است [12]. برای محاسبات، عدد کورانت زمان واقعی 500000 و عدد کورانت زمان مجازی 4/5 در نظر گرفته شده است. همگرایی برای تکرارهای داخلی تا 10^{-4} برای باقیمانده چگالی در نظر گرفته شده است.

2-5- روش‌های تسریع همگرایی

در این مقاله از گام زمانی محلی و هموارسازی باقیمانده‌ها برای سریع‌کردن همگرایی استفاده شده است [15]. گام زمانی محلی در نقطه i برای روش بدون شبکه با رابطه (45) محاسبه می‌شود:

$$\Delta t_i = \frac{CFL}{\lambda_i} \tag{45}$$

همواره‌سازی باقیمانده‌ها سبب افزایش عدد کورانت مجاز در تحلیل و در نتیجه افزایش سرعت می‌شود. در این روش، باقیمانده‌های جدید با دو تکرار و با رابطه (46) محاسبه می‌شود:

$$\bar{R}_i = \frac{R_i + \epsilon\sum_{k=1}^{N}\bar{R}_k}{1 + \epsilon N} \tag{46}$$

جایی که ϵ بین 0/2 تا 0/5 انتخاب می‌شود.

2-6- شرایط مرزی

شرایط مرزی پایدار روی دیواره و مرز دوردست گسسته‌سازی معادلات را تکمیل خواهد کرد.

2-6-1- شرط مرزی دیواره

شرط مرزی روی سطح ایرفویل برای حالت غیرلزج، شرط عدم ورود شار به سطح ایرفویل است که به همین دلیل مؤلفه سرعت عمود بر سطح برابر صفر خواهد بود. با توجه به رابطه (47):

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \sum a_{ij}\Delta\phi_{ij}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \sum b_{ij}\Delta\phi_{ij} \tag{47}$$

بنابراین مولفه در جهت عمود بر سطح دیواره، با رابطه (48) مشخص خواهد شد:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \sum \alpha_{ij}\Delta\phi_{ij} \tag{48}$$

جایی که $\alpha_{ij} = a_{ij}n_x + b_{ij}n_y$ و $\Delta\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$ و بنابراین به رابطه (49) می‌رسیم:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_i = \sum \alpha_{ij}(\phi_j - \phi_i) = \sum \alpha_{ij}\phi_j - \sum \alpha_{ij}\phi_i \tag{49}$$

و در نهایت پارامترها روی مرز دیواره با رابطه (50) محاسبه می‌شوند:

$$\phi_i = \frac{\sum \alpha_{ij}\phi_j - \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_i}{\sum \alpha_{ij}} \tag{50}$$

با توجه به رابطه بالا مقدار مناسب $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ و مقدار پارامترها در نقاط همسایه برای شرایط دیواره سبب ایجاد شرایط مرزی مناسب در نقاط رو دیواره خواهد شد که این شرایط در رابطه (51) بیان شده‌اند:

$$u_n = 0, \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0, \frac{\partial H}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho u_t^2}{R_s} \tag{51}$$

جایی که u_n سرعت عمودی، u_t سرعت مماسی، p فشار روی سطح و R_s شعاع انحنا سطح است [12].

2-6-2- شرط مرزی دوردست

برای مرز خارجی از متغیرهای ریمان روی مرز خارجی شبیه به روش حجم محدود استفاده می‌شود که در رابطه (52) نشان داده شده‌اند [16]:

$$R_\infty = u_{n\infty} - \frac{2c_\infty}{\gamma - 1}$$
$$R_e = u_{ne} + \frac{2c_e}{\gamma - 1} \tag{52}$$

که R متغیرهای ریمان و زیرنویس ∞ مربوط به جریان آزاد و e مربوط به خواص روی مرز خارجی است.

3- نتایج

برای بررسی روش عددی توسعه داده شده، جریان گذرصوتی برای ایرفویل NACA0012 در دو ماخ 0/8 با زاویه حمله 1/25 و ماخ 0/85 با زاویه حمله 1

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

با داده‌های مرجع [18] و برای ایرفویل RAE2822 در ماخ 0/729 و زاویه حمله 2/31 درجه و برای یک ایرفویل لوزی شکل در ماخ 2 و زاویه حمله صفر درجه با داده‌های به دست آمده از نرم‌افزار Uns2D [19] که از روش حجم محدود استفاده می‌کند، مقایسه شده‌اند. محاسبات با استفاده از یک پردازنده Core i5 با سرعت 2/53 GHz انجام شده است.

3-1- جریان حول ایرفویل NACA0012

برای این ایرفویل نتایج در دو ماخ 0/8 و 0/85 و در زوایای حمله به‌ترتیب 1/25 و 1 با استفاده از دقت مرتبه اول و مرتبه دوم محاسبه شده‌اند و سپس نتایج با داده‌های مرجع [18] مقایسه شده‌اند. نتایج در این دو ماخ برای دو شبکه با تعداد نقاط 2370 و 4832 نقطه محاسبه شده‌اند تا تأثیر دقت مرتبه دوم در شبکه با تعداد نقاط کمتر مشخص شود. شکل 3 نمایی نزدیک از نقاط اطراف ایرفویل NACA0012 با تعداد 2370 نقطه را نشان می‌دهد.

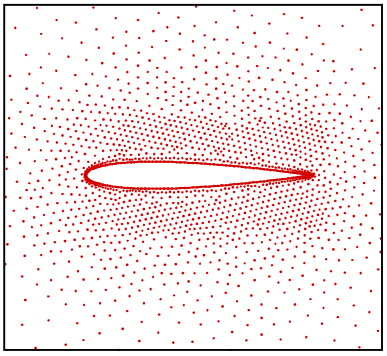
در ماخ 0/8 و زاویه حمله 1/25 درجه یک شوک قوی در موقعیت 0/6 وتر در قسمت بالایی ایرفویل ایجاد می‌شود و در پایین ایرفویل یک شوک ضعیف ایجاد می‌شود. نتایج ضریب فشار در دو حالت مرتبه اول و مرتبه دوم در این ماخ و با تعداد 2370 نقطه در شکل 4 با داده‌های مرجع [18] مقایسه شده است. همان‌طور که از شکل پیداست با دقت مرتبه دوم شوک قوی در بالای ایرفویل بسیار مناسب تخمین زده شده است. در حالی که دقت مرتبه اول در تخمین این شوک، دقت مناسبی ندارد. با افزایش تعداد نقاط شبکه به 4832 نقطه، اختلاف حل مرتبه اول و حل مرتبه دوم بسیار کم می‌شود و دو حل به یکدیگر نزدیک می‌شوند (شکل 5). اما باز هم با بزرگنمایی مشخص شد که حل مرتبه دوم اندکی دقیق‌تر است.

شکل 6 زمان همگرایی با حل مرتبه اول و مرتبه دوم را در دو حالت صریح و ضمنی برای ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/8 نشان می‌دهد. زمان همگرایی برای حل مرتبه اول صریح و ضمنی به‌ترتیب 18 و 7/2 ثانیه و این زمان‌ها برای حل مرتبه دوم به ترتیب 36 و 11 ثانیه است. زمان حل صریح مرتبه اول 50 درصد کمتر از حل صریح مرتبه دوم و زمان حل ضمنی مرتبه اول در مقایسه با حل ضمنی مرتبه دوم 35 درصد کمتر است. با توجه به داده‌ها، روش ضمنی مرتبه اول نسبت به روش صریح مرتبه اول حدود 60 درصد زمان محاسبات را کاهش می‌دهد در حالی‌که برای دقت مرتبه دوم این مقدار حدود 69 درصد است.

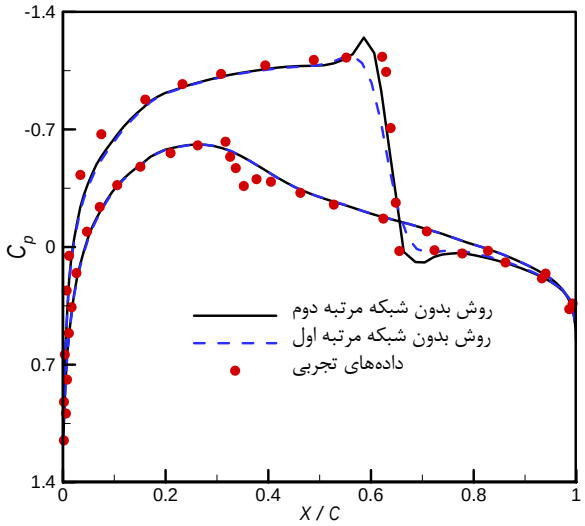
در ماخ 0/85 و زاویه حمله 1 درجه نیز شرایط مشابهی برای این ایرفویل وجود دارد. در این شرایط دو شوک قوی روی قسمت بالایی و پایینی ایرفویل رخ می‌دهد. باز هم دقت مرتبه دوم در تخمین موقعیت شوک برای تعداد 2370 نقطه (شکل 7) و 4832 نقطه (شکل 8) مناسب‌تر از دقت مرتبه اول است و در شبکه با تعداد نقاط کمتر (2370 نقطه) تخمین شوک با دقت مرتبه دوم به تخمین شوک با دقت مرتبه اول در شبکه 4832 نقطه‌ای نزدیک است. شکل 9 زمان همگرایی با حل مرتبه اول و مرتبه دوم را در دو حالت صریح و ضمنی را برای ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/85 نشان می‌دهد. زمان همگرایی برای حل مرتبه اول صریح و ضمنی به‌ترتیب 20/2 و 5/6 ثانیه و این زمان‌ها برای حل مرتبه دوم به ترتیب 41/3 و 8/7 ثانیه است. زمان حل صریح مرتبه اول 51 درصد کمتر از حل صریح مرتبه دوم و زمان حل ضمنی مرتبه اول در مقایسه با حل ضمنی مرتبه دوم 36 درصد کمتر است. با توجه به داده‌های زمان همگرایی، روش ضمنی مرتبه اول نسبت به روش صریح مرتبه اول حدود 72 درصد زمان محاسبات را کاهش می‌دهد در حالی که برای دقت مرتبه دوم این مقدار حدود 79 درصد است.کانتور فشار در دو ماخ 0/8 و 0/85 با دقت مرتبه اول و مرتبه دوم به ترتیب در شکل 10 و شکل 11 آورده شده است. در این دو شکل، خطوط توپر مربوط به دقت مرتبه دوم و خطوط خط‌چین مربوط به دقت مرتبه اول هستند.

3-2- جریان حول ایرفویل RAE2822

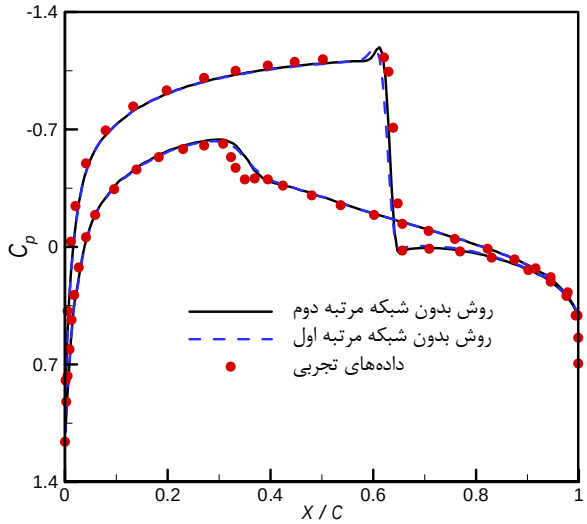
برای این ایرفویل تحلیل در ماخ 0/729 و در زاویه حمله 2/31 انجام شده



شکل 3 نقاط اطراف ایرفویل NACA0012

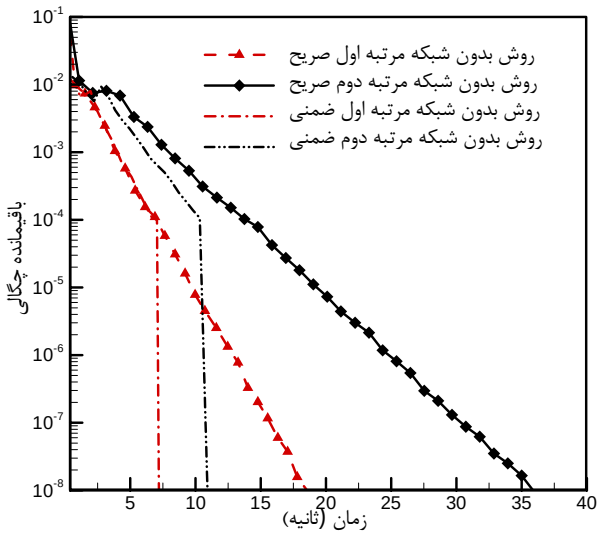


شکل 4 توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/8 و زاویه حمله 1/25 با شبکه‌ای معادل 2370 نقطه

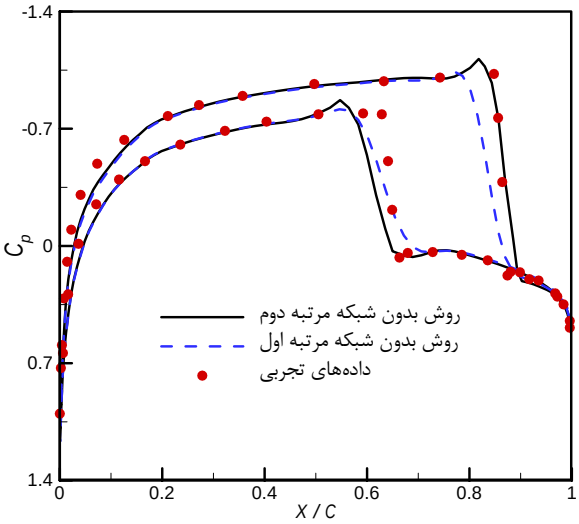


شکل 5 توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/8 و زاویه حمله 1/25 با شبکه‌ای معادل 4832 نقطه

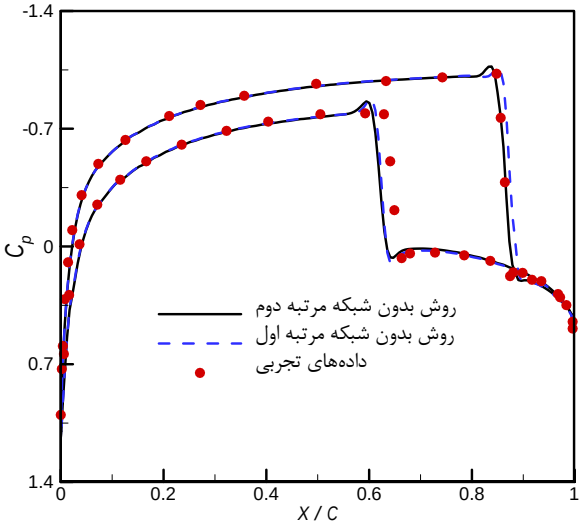
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]



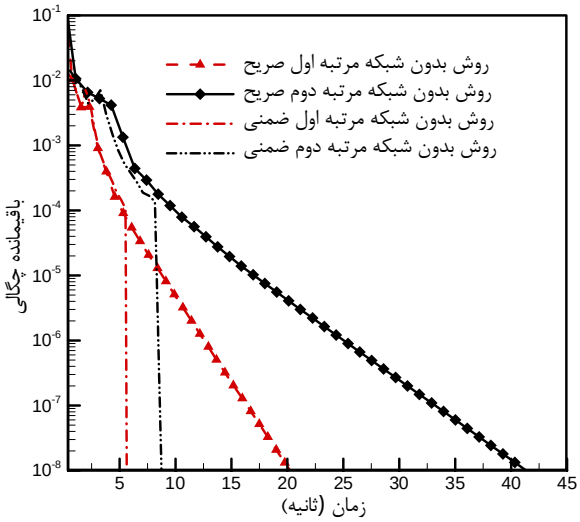
شکل 6 زمان همگرایی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/8 و زاویه حمله 1/25 با شبکه‌ای معادل 2370 نقطه در دو حالت صریح و ضمنی مرتبه اول و دوم



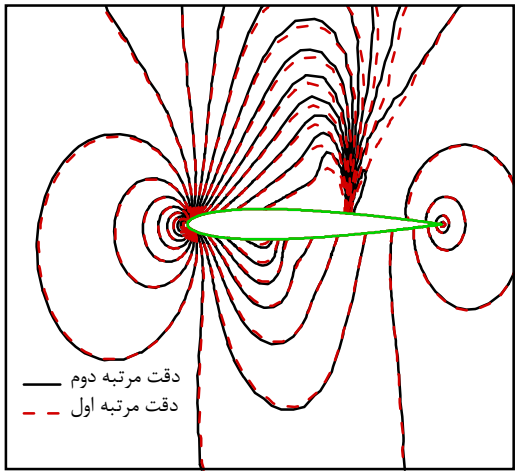
شکل 7 توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/85 و زاویه حمله 1 با شبکه‌ای معادل 2370 نقطه



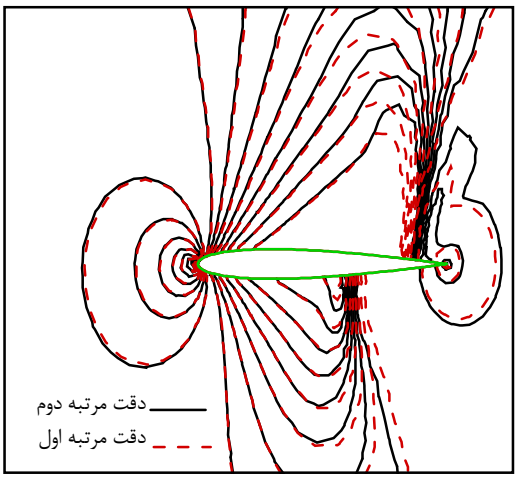
شکل 8 توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/85 و زاویه حمله 1 با شبکه‌ای معادل 4832 نقطه



شکل 9 زمان همگرایی ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/85 و زاویه حمله 1 با شبکه‌ای معادل 2370 نقطه در دو حالت صریح و ضمنی مرتبه اول و مرتبه دوم



شکل 10 کانتور فشار پیرامون ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/8 و زاویه حمله 1/25 با دو دقت مرتبه اول و مرتبه دوم



شکل 11 کانتور فشار پیرامون ایرفویل NACA0012 در ماخ 0/85 و زاویه حمله 1 با دو دقت مرتبه اول و مرتبه دوم

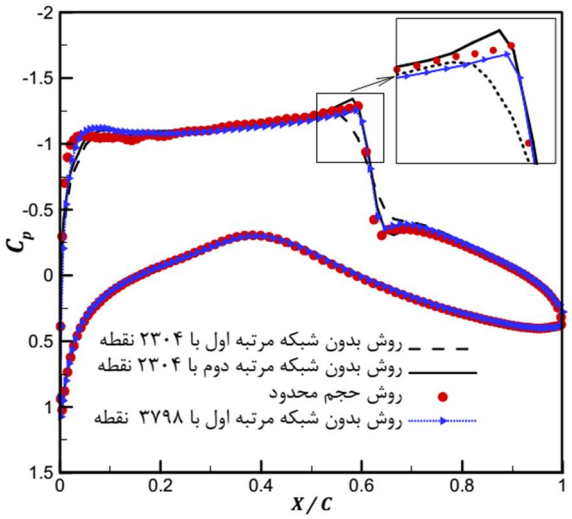
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

است. نتایج ارایه شده در این بخش با نتیجه به دست آمده از روش حجم محدود سلول-مرکز [19] مقایسه شده است. توزیع ضریب فشار برای این ایرفویل در شکل 12 در دو حالت مرتبه اول و مرتبه دوم با شبکه 2304 نقطه‌ای و برای شبکه 3798 نقطه‌ای با دقت مرتبه اول ارایه و این نتایج با حل حجم محدود مقایسه شده است. همان‌طور که از شکل هم پیداست دقت مرتبه دوم با شبکه کمتر معادل دقت مرتبه اول با شبکه بیشتر است و این درحالی است که دقت مرتبه اول با شبکه کمتر در تخمین شوک، دقیق عمل نمی‌کند.

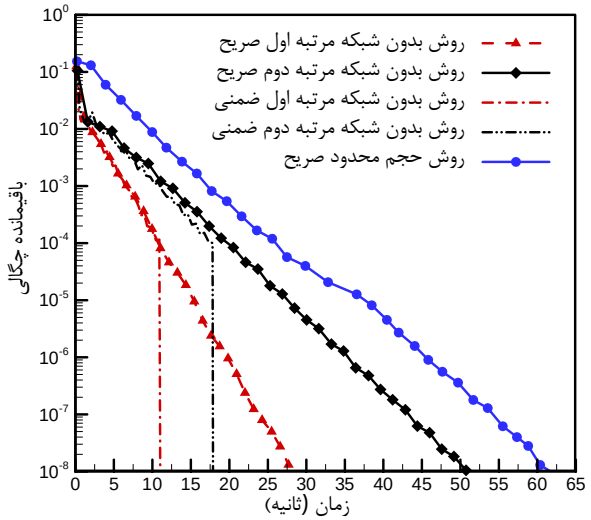
شکل 13 زمان همگرایی با حل مرتبه اول و مرتبه دوم روش بدون شبکه در دو حالت صریح و ضمنی را با زمان همگرایی روش حجم محدود صریح برای ایرفویل RAE2822 در ماخ 0/729 و زاویه حمله 2/31 درجه نشان می‌دهد. زمان همگرایی برای حل مرتبه اول صریح و ضمنی به‌ترتیب 28/1 و 11 ثانیه و این زمان‌ها برای حل مرتبه دوم به ترتیب 50/8 و 17/8 ثانیه و برای حل روش حجم محدود صریح 61/7 ثانیه است. زمان حل صریح مرتبه اول حدود 45 درصد کمتر از حل صریح مرتبه دوم و زمان حل مرتبه اول ضمنی در مقایسه با حل ضمنی مرتبه دوم 38 درصد کمتر است. زمان حل صریح مرتبه اول و مرتبه دوم این روش بدون شبکه به ترتیب 54 و 18 درصد از زمان حل صریح روش حجم محدود کمتر است. با توجه به داده‌ها، روش ضمنی مرتبه اول نسبت به روش صریح مرتبه اول حدود 61 درصد زمان محاسبات را کاهش می‌دهد در حالی که برای دقت مرتبه دوم این مقدار حدود 65 درصد است.

3-3- جریان مافوق‌صوت حول یک ایرفویل لوزی

برای بررسی کارایی روش در سرعت‌های مافوق‌صوت، یک ایرفویل لوزی شکل با طول وتر 1 و حداکثر ضخامت 0/1 در ماخ 2 و زاویه حمله صفر درجه مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج ارایه شده در این بخش با نتیجه به دست آمده از روش حجم محدود سلول-مرکز [19] مقایسه شده است. شکل 14 توزیع نقاط در نزدیک این ایرفویل را نشان می‌دهد. در این تحلیل دو شوک مایل در بالا و پایین لبه حمله ایرفویل اتفاق می‌افتد و هنگامی‌که جریان به وسط ایرفویل می‌رسد به‌دلیل ساختار این ایرفویل، امواج انبساطی تشکیل شده و جریان منبسط می‌شود. بنابراین لبه حمله و موقعیت وسط ایرفویل دو منطقه



شکل 12 توزیع ضریب فشار پیرامون ایرفویل RAE2822 در ماخ 0/729 و زاویه حمله 2/31



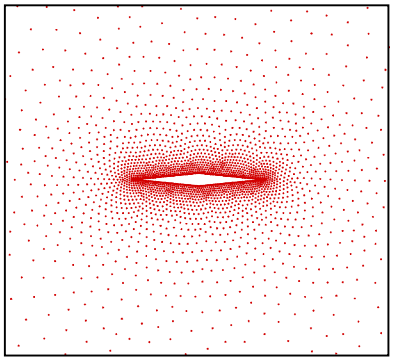
شکل 13 زمان همگرایی ایرفویل RAE2822 در ماخ 0/729 و زاویه حمله 2/31 با شبکه‌ای معادل 2304 نقطه

مناسب برای بررسی دقت جریان هستند. توزیع ضریب فشار برای این ایرفویل در شکل 15 در دو حالت مرتبه اول و مرتبه دوم با شبکه 2871 نقطه‌ای و برای شبکه 5852 نقطه‌ای با دقت مرتبه اول ارایه و این نتایج با حل حجم محدود مقایسه شده است. همان‌طور که از شکل هم پیداست نتایج دقت مرتبه دوم با شبکه کمتر نزدیک به نتایج دقت مرتبه اول با شبکه بیشتر و روش حجم محدود است در حالی که دقت مرتبه اول با شبکه کمتر در تخمین شوک مایل در لبه حمله ایرفویل و انبساط جریان در وسط ایرفویل دقت بالایی ندارد. همچنین در شکل 15، در وسط ایرفویل به‌دلیل انبساط جریان، فشار ناگهان افت می‌کند. در شبکه با تعداد نقاط کمتر، حل مرتبه دوم بسیار دقیق‌تر از حل مرتبه اول انبساط جریان را مدل کرده است و داده‌های حل مرتبه دوم با تعداد نقاط کمتر نزدیک به حل حجم محدود و حل مرتبه اول بدون شبکه با تعداد نقاط بیشتر است.

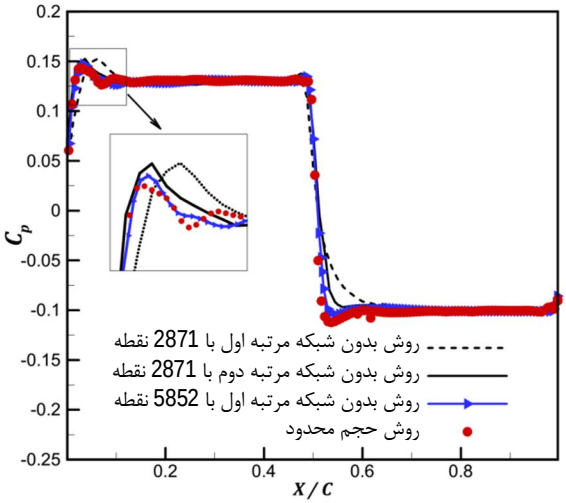
شکل 16 زمان همگراییِ حل مرتبه اول و مرتبه دوم روش بدون شبکه در دو حالت صریح و ضمنی را با زمان همگرایی روش حجم محدود صریح برای ایرفویل لوزی شکل در ماخ 2 و زاویه حمله صفر درجه نشان می‌دهد. زمان همگرایی برای حل مرتبه اول صریح و ضمنی به‌ترتیب 17/8 و 12 ثانیه و این زمان‌ها برای حل مرتبه دوم به ترتیب 26 و 15/7 ثانیه و برای حل روش حجم محدودِ صریح 40/7 ثانیه است. زمان حل صریح مرتبه اول حدود 32 درصد کمتر از حل صریح مرتبه دوم و زمان حل مرتبه اول ضمنی در مقایسه با حل ضمنی مرتبه دوم 24 درصد کمتر است. زمان حل صریح مرتبه اول و مرتبه دومِ این روش بدون شبکه به ترتیب 56 و 36 درصد از زمان حل صریح روش حجم محدود کمتر است. با توجه به داده‌های زمان همگرایی، روش ضمنی مرتبه اول نسبت به روش صریح مرتبه اول حدود 33 درصد زمان محاسبات را کاهش می‌دهد در حالی‌که برای دقت مرتبه دوم این مقدار حدود 40 درصد است.

شکل 17 کانتور فشار در ماخ 2 و زاویه حمله صفر را برای روش بدون شبکه با دقت مرتبه دوم و روش حجم محدود نشان می‌دهد. در این شکل، خطوط توپر مربوط به روش حجم محدود و خطوط خط‌چین مربوط به روش بدون شبکه با دقت مرتبه دوم است. همان‌طور که از این شکل پیداست، دقت روش بدون شبکه مرتبه دوم بسیار نزدیک به دقت روش حجم محدود است.

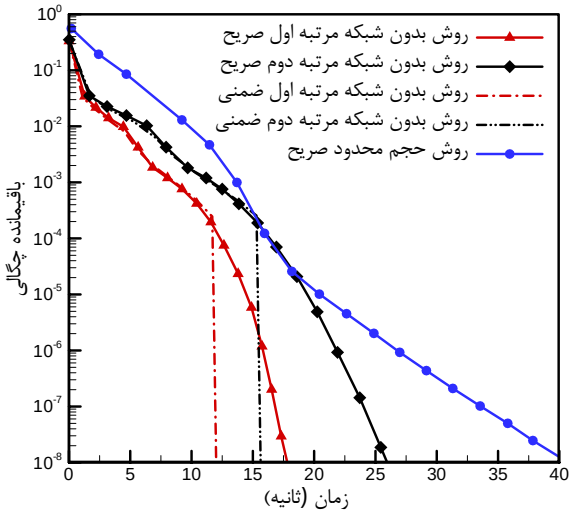
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]



شکل 14 نقاط اطراف ایرفویل لوزی شکل



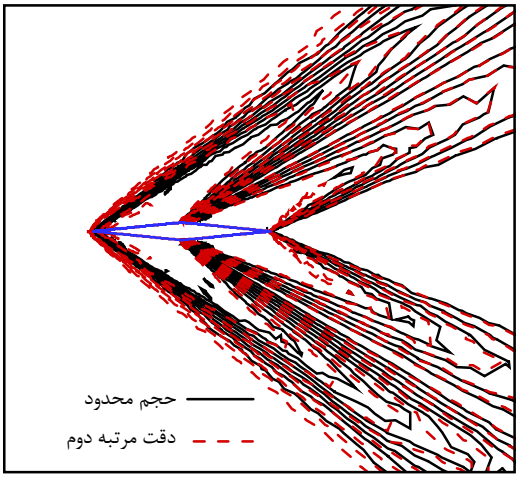
شکل 15 توزیع ضریب فشار حول ایرفویل لوزی شکل در ماخ 2 و زاویه حمله صفر



شکل 16 زمان همگرایی ایرفویل لوزی شکل در ماخ 2 و زاویه حمله صفر با شبکه‌ای معادل 2871 نقطه

4- نتیجه‌گیری

یک روش بدون شبکه مرتبه بالا بر پایه حداقل مربعات سری تیلور توسعه داده شد. این روش مرتبه بالا سبب افزایش دقت محاسبه مشتقات مکانی در معادلات اویلر و در نتیجه افزایش دقت حل می‌شود. نتایج با استفاده از روش بدون شبکه صریح و ضمنیِ دو زمانه برای جریان تراکم‌پذیر غیرلزج در سرعت‌های گذرصوتی برای دو ایرفویل مختلف و در سرعت مافوق‌صوت برای



شکل 17 نتایج کانتور فشار پیرامون ایرفویل لوزی شکل در ماخ 2 و زاویه حمله صفر برای روش حجم محدود و روش بدون شبکه با دقت مرتبه دوم

یک ایرفویل لوزی شکل ارایه شد. نتایج ارایه شده نشان داد که استفاده از مرتبه بالاتر باعث می‌شود تا با تعداد نقاط کمتر شبکه بتوان شوک ایجاد شده را با دقت بالاتری تخمین زد. با استفاده از حلِ دقت مرتبه دوم با تعداد نقاطی حدود 40 تا 50 درصد نقاط شبکه مناسب برای دقت مرتبه اول، می‌توان تخمین مناسبی از موقعیت شوک به‌دست آورد. نتایج همچنین نشان داد که کارایی روش ضمنی در دقت مرتبه دوم بیشتر از دقت مرتبه اول است.

5- مراجع

[1] R. Löhner, E. Oñate, A general advancing front technique for filling space with arbitrary objects, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 61, No. 12, pp. 1977-1991, 2004.
[2] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, Meshless methods: a review and computer implementation aspects, *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 79, No. 3, pp. 763-813, 2008.
[3] A. Katz, A. Jameson, A comparison of various meshless schemes within a unified algorithm, *AIAA Paper*, Vol. 594, 2009.
[4] J. BATINA, A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex-aircraft applications, in *31st Aerospace Sciences Meeting*, 1993.
[5] V. Ramesh, S. Deshpande, *Euler computations on arbitrary grids using LSKUM*, in: *Computational Fluid Dynamics 2000*, Eds., pp. 783-784: Springer, 2001.
[6] D. Sridar, N. Balakrishnan, An upwind finite difference scheme for meshless solvers, *Journal of Computational Physics*, Vol. 189, No. 1, pp. 1-29, 2003.
[7] H. Chen, C. Shu, An efficient implicit mesh-free method to solve two-dimensional compressible Euler equations, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 16, No. 03, pp. 439-454, 2005.
[8] S. Jaisankar, K. Shivashankar, S. R. Rao, A grid-free central scheme for inviscid compressible flows, *AIAA paper*, Vol. 3946, 2007.
[9] A. Katz, A. Jameson, Multicloud: Multigrid convergence with a meshless operator, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 14, pp. 5237-5250, 2009.
[10] H. Luo, J. D. Baum, R. Löhner, A hybrid Cartesian grid and gridless method for compressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 214, No. 2, pp. 618-632, 2006.
[11] A. Jahangirian, M. Hashemi, Adaptive Cartesian grid with mesh-less zones for compressible flow calculations, *Computers & Fluids*, Vol. 54, pp. 10-17, 2012.
[12] M. Hashemi, A. Jahangirian, An efficient implicit mesh-less method for compressible flow calculations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 67, No. 6, pp. 754-770, 2011.
[13] H. Wang, J. Periaux, A fast meshless method coupled with artificial dissipation for solving 2D Euler equations, *Computers & Fluids*, 2012.
[14] S. Sattarzadeh, A. Jahangirian, 3D implicit mesh-less method for compressible flow calculations, *Scientia Iranica*, Vol. 19, No. 3, pp. 503-512, 2012.
[15] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Principles and Applications*, Second ed.: Elsevier, 2005.
[16] A. Jameson, D. Mavriplis, Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh, *AIAA journal*, Vol. 24, No.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]

4, pp. 611-618, 1986.
[17] M. Hadidoolabi, A. Jahangirian, An implicit central difference method for solution of three dimensional unsteady aerodynamics on unstructured moving grids, *17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference,* 2005.
[18] H. Yoshihara, H. Norstrud, J. Boerstoel, G. Chiocchia, D. Jones, *Test Cases for Inviscid Flow Field Methods,* AGARD Advisory Report AR-211, pp. May 1985.
[19] M. Hadidoolabi, *Unsteady Compressible Flow Simulaiton for 3D Moving Bodies Using Unstructured Grids,* Thesis, Amirkabir University of Technology, Department of Aerospace Engineering, 2005.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.5.7.1]