



Analytical Solution for Vibration Analysis of Piezoelectric Shallow Spherical Sensors and Actuators

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Darabi P.¹ MSc,

Fadaee M.*¹ PhD

How to cite this article

Darabi P, Fadaee M. Analytical Solution for Vibration Analysis of Piezoelectric Shallow Spherical Sensors and Actuators. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(3):297-608.

ABSTRACT

In this article, an exact analytical approach is presented to analyze free vibration of a thin piezoelectric spherical shell, using thin shallow shell theory. The piezoelectric spherical shell is modeled as a sensor or an actuator. The piezoelectric material is polarized through the thickness of the shell. Using the separation of variables method as well as some new potential functions, the equations of motion and Maxwell's equation are exactly solved, simultaneously. First, the equation of the transverse displacement of the shell is separately obtained and after extracting the transverse displacement, other unknowns such as the in-plane displacements and electrical potential function are obtained. Then, applying mechanical and electrical boundary conditions, the natural frequencies of the shell are obtained for the sensor and actuator cases. In order to validate the accuracy of the present method, the obtained results are compared to those obtained by a finite element analysis in ABAQUS software. Also, the effects of various parameters such as inner radius to radius of curvature of the shell ratio, thickness to inner radius ratio, and different boundary conditions on the natural frequencies are considered. Results show that piezoelectricity effect causes an increase in strain energy of the structure leading to increasing the natural frequencies for both sensor and actuator shells. Also, by changing the conditions from actuator state to sensor one, the structure experiences an increase in the natural frequencies.

Keywords Vibration; Spherical Cap; Piezoelectric; Sensor and Actuator; Analytical Method

¹Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Qom University of Technology, Qom, Iran

*Correspondence

Address: Qom University of Technology, Qom, Iran

Phone: +98 (25) 36641601

Fax: +98 (25) 36641604

fadaee@qut.ac.ir

Article History

Received: April 20, 2018

Accepted: October 14, 2018

ePublished: March 01, 2019

CITATION LINKS

[1] Dynamic stability analysis and control of a composite beam ... [2] Three-dimensional natural vibration analysis and energy considerations ... [3] Exact solutions for free vibration of transversely isotropic ... [4] Analysis of piezoelectric coupled ... [5] Analytical solution for free vibration of piezoelectric ... [6] An exact analytical solution for freely vibrating piezoelectric coupled ... [7] Closed-form solution for free vibration of piezoelectric coupled annular ... [8] Thermoelastic analysis of rotating laminated functionally graded cylindrical ... [9] Free vibration of three-layer circular cylindrical shells with ... [10] Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated ... [11] A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric ... [12] Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface ... [13] 3D free vibration analysis of laminated cylindrical shell ... [14] Elasticity solution for the free vibration analysis of functionally graded ... [15] Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical ... [16] Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells on elastic ... [17] Axisymmetric snap-through behavior of Piezo-FGM shallow clamped ... [18] Generalized stress-strain recovery formulation applied to ... [19] Piezoelectric induced bending and twisting of laminated ... [20] Size-dependent analysis of a sandwich curved nanobeam integrated ... [21] Buckling analysis of piezoelectric cylindrical shell with initial imperfection under ... [22] Vibration analysis of laminated cylindrical shell with piezoelectric ... [23] Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates ... [24] Vibration of laminated shells ... [25] Vibration analysis of piezoelectric FGM sensors ...

بررسی تحلیلی ارتعاشات حسگر و عملگرهای پیزوالکتریک کم عمق کروی

پدram دارابی MSc

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

محمد فدایی* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

چکیده

در این مقاله حل دقیق ارتعاشات آزاد یک درپوش کروی نازک از جنس پیزوالکتریک با استفاده از تئوری پوسته‌های کم عمق ارایه شده است. درپوش کروی پیزوالکتریک در دو حالت رفتاری حسگر و عملگر مورد بررسی قرار گرفته است. ماده پیزوالکتریک در راستای ضخامت قطبی شده و با استفاده از روش جداسازی متغیرها و توابع پتانسیل جدید، سه معادله حرکت پوسته کم عمق نازک به همراه معادله ماکسول به صورت دقیق حل شده است. در ابتدا معادله حاکم بر جابه‌جایی عرضی پوسته به طور مجزا به دست آمده و پس از استخراج جابه‌جایی عرضی، دیگر مجهولات مساله اعم از جابه‌جایی‌های داخل صفحه‌ای و تابع پتانسیل الکتریکی نیز به دست می‌آیند. در ادامه با اعمال شرایط مرزی مختلف مکانیکی و الکتریکی، فرکانس‌های طبیعی برای پوسته کروی پیزوالکتریک در دو حالت حسگر و عملگر محاسبه شده است. برای اعتبارسنجی فرمول‌بندی حاضر و بررسی دقت فرکانس‌ها نتایج به دست آمده با تحلیل المان محدود مساله در نرم‌افزار آباکوس مقایسه و تایید شده است. همچنین تاثیر پارامترهای مختلف مانند نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنای پوسته، نسبت ضخامت به شعاع داخلی پوسته و شرایط مرزی مختلف، روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که خاصیت پیزوالکتریک باعث افزایش انرژی کرنشی سازه شده و در هر دو حالت حسگر و عملگر باعث افزایش مقدار فرکانس‌های طبیعی می‌شود. همچنین با تغییر شرایط از حالت عملگر به حالت حسگر، جسم یک افزایش را در مقادیر فرکانس‌های طبیعی تجربه می‌کند.

کلیدواژه‌ها: ارتعاشات، درپوش کروی، پیزوالکتریک، حسگر و عملگر، حل تحلیلی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۳۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۱۸

*نویسنده مسئول: fadaee@qut.ac.ir

۱- مقدمه

پوسته، سازه‌ای نازک با سطح منحنی است که بارها را به صورت کششی، فشاری و برشی تحمل می‌نماید. سازه‌های پوسته‌ای به عنوان مطلوب‌ترین عناصر سازه‌ای در بخش‌های مختلف مهندسی از جمله مکانیک، عمران، معماری، هوافضا و دریانوردی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در زمینه مهندسی مکانیک، پوسته‌ها می‌توانند در سیستم‌های لوله‌کشی، توربین‌ها و مخازن تحت فشار به کار روند. همچنین هواپیماها، موشک‌ها، راکت‌ها، کشتی‌ها، زیردریایی‌ها و مخازن حامل سوخت از جمله کاربردهای پوسته‌ها در صنایع هوافضا و مهندسی دریا هستند. بین این پوسته‌ها، پوسته‌های کروی به دلیل شکل ظاهری خاص خود از اهمیت ویژه‌ای در مقایسه با دیگر انواع پوسته‌ها برخوردار هستند و در صنعت سازه‌های پیشرفته، معماری، مخازن نگهدارنده تحت فشار معمولی و فشار بالا در صنایع نفت و شیمی کاربرد زیادی دارند. از پرکاربردترین انواع پوسته کروی می‌توان به پوسته‌های نیم کره و کروی کم عمق اشاره نمود که دارای کاربرد فراوانی در ساخت تانک‌های سوخت، اتاق احتراق، زیردریایی، ماهواره‌ها، دماغه موشک‌ها و شاتل‌ها هستند.

لزوم استفاده از ساختارهای مهندسی هوشمند در صنایع نوین موجب استفاده روزافزون از مواد پیزوالکتریک شده است. چرا که مواد پیزوالکتریک مطلوب‌ترین مواد برای استفاده در سازه‌های

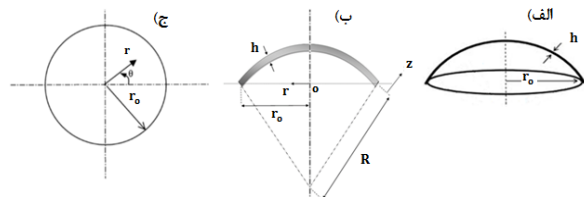
مهندسی به منظور ساخت، کاربرد و توسعه ساختارهای مهندسی هوشمند هستند. دلیل اصلی این امر آن است که مواد پیزوالکتریک در واقع برقرارکننده ارتباط بین خواص مکانیکی و الکتریکی در یک ماده هستند. با توجه به استفاده گسترده‌ای که این مواد در حسگرها و عملگرها دارند، مطالعه روی سازه‌هایی که جنس پیزوالکتریک دارند یا دارای لایه‌های پیزوالکتریک هستند، توجه بسیاری از محققان را به خود معطوف ساخته است. از جمله کاربردهای این مواد در کنترل ارتعاشات و ساختارهای هوشمند است [1]. این مواد هنگامی که تحت کرنش قرار گیرند، ولتاژ الکتریکی تولید می‌کنند (اثر مستقیم) و در اثر القای ولتاژ الکتریکی به کرنش واداشته می‌شوند (اثر غیرمستقیم). مبدل‌های پیزوالکتریک در حال حاضر به عنوان سنسور یا محرک یا هر دو، در کنترل ارتعاشات سازه‌ها به کار می‌روند. برای مقاصد کنترل ارتعاشات، مبدل‌های پیزوالکتریک روی بدنه سازه‌ها محکم می‌شوند. این کار با تعبیه مبدل در سازه یا چسباندن آن در سطح سازه با چسب‌های قوی صورت می‌پذیرد. این مواد به خاطر داشتن اندازه کوچک و وزن کم، وزن قابل توجهی به سازه اضافه نمی‌کنند، بنابراین برای کنترل‌های سازه‌ای بدون تغییر در مشخصات سازه می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. همچنین این مواد انعطاف‌پذیری خوبی در محیط‌های متفاوت دارند.

تاکنون بررسی‌های متعددی روی سازه‌های پیزوالکتریک و ورق‌ها با لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است. تحلیل دقیق سه‌بُعدی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته توسط کیوپال مورد بررسی قرار گرفته است [2]. حل عمومی معادلات دینامیک مواد پیزوالکتریک همسان‌گرد عرضی توسط ها/وجیانگ و همکاران ارایه شد [3]. آنها با استفاده از روش فضای حالت به حل معادلات ارتعاشی حاکم بر ورق‌های همسان‌گرد عرضی پیزوالکتریک مبادرت ورزیدند. سپس، مدل ریاضی دقیق برای تحلیل ورق دایروی مرکب از لایه‌های پیزوالکتریک در حالت مدار بسته توسط وانگ و همکاران به انجام رسید. آنها در گزارش خود توزیعی درجه دوم برای تابع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک پیشنهاد کردند [4]. لیو و همکاران با استفاده از تئوری‌های برشی کلاسیک و مرتبه اول، مدلی تحلیلی برای تحقیق در پاسخ ارتعاشی این گونه ورق‌ها ارایه کردند [5]. حسینی‌هاشمی و همکاران راه‌حل تحلیلی و دقیق را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم به منظور بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم دایروی و حلقوی قرارداد شده در لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مدار بسته را مطرح کردند [6]. در همین راستا، ارتعاشات آزاد ورق‌های حلقوی نسبتاً ضخیم میان لایه‌های پیزوالکتریک بر پایه تئوری لوبینسون توسط حسینی‌هاشمی و همکاران مورد تحلیل قرار گرفت [7]. حیدریور و همکاران تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دوار که در معرض محیط حرارتی قرار دارند را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی انجام دادند. این فرمول‌بندی شامل نیروهای گریز از مرکز و کریولیس ناشی از دوران پوسته است [8]. لی و همکاران نیز ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای دایروی سه لایه با لایه‌های داخلی و خارجی ساخته شده از ماده همسان‌گرد مشابه و لایه میانی متشکل از ماده با خواص درجه‌بندی شده را با تکیه‌گاه ساده مورد مطالعه قرار دادند [9]. ملک‌زاده و همکاران ارتعاشات آزاد سه‌بُعدی پوسته‌های با خواص درجه‌بندی شده مخروطی ناقص در معرض یک محیط حرارتی را بر اساس تئوری سه‌بُعدی الاستیسیته بررسی نمودند. سطح درونی

استفاده از نظریه رایزنر-میندلین ارایه کردند[23]. هدف از این مقاله ارایه یک روش و حل دقیق برای مسایل ارتعاشات آزاد پوسته کروی کم عمق (درپوش کروی) پیزوالکتریک است. پوسته از جنس پیزوالکتریک بوده و در دو حالت مدار باز و مدار بسته مورد بررسی قرار گرفته است. با جداسازی متغیرهای زمانی و هندسی در جابه‌جایی‌ها و پتانسیل الکتریکی و سپس اعمال شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند. در نهایت، اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی واکاوی شده است.

۲- فرمول‌بندی تئوری

در تئوری پوسته کم عمق، فرض کوچک بودن بعد قائم بر سطح میانی است که به واسطه آن، مساله سه‌بُعدی تغییر شکل جسم به مساله دو بُعدی، تبدیل و تغییر مکان هر نقطه داخل جداره پوسته، بر حسب مولفه‌های تغییر مکان نقاط متناظر بر سطح مبنا بیان می‌شود[24]. بنابراین برای حل مساله از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌شود. مطابق با شکل ۱، هندسه مساله شامل یک پوسته نازک از جنس پیزوالکتریک است. r مولفه شعاعی و θ مولفه مماسی است که از محور مرکز پوسته محاسبه می‌شوند. r_0 شعاع داخلی پوسته، R شعاع انحنای پوسته و h ضخامت پوسته است. Z مولفه عرضی است که راستای آن از مرکز پوسته و در راستای ضخامت محاسبه می‌شود



شکل ۱ هندسه درپوش کروی ساخته شده از ماده پیزوالکتریک؛ الف) نمای سه‌بُعدی، ب) نمای جانبی، ج) نما از بالا

در تئوری پوسته‌های نازک، مولفه‌های جابه‌جایی برابر با روابط زیر هستند[24]:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial r} \quad (1)$$

$$v = v_0 - \frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$w = w_0 \quad (3)$$

u_0 جابه‌جایی در راستای شعاعی، v_0 جابه‌جایی در راستای محیطی برای سطح میانی درپوش کروی و w_0 جابه‌جایی عرضی پوسته است.

حل پتانسیل الکتریکی برای درپوش کروی پیزوالکتریک باید طوری ایجاد شود که شرایط مرزی الکتریکی را ارضا نماید. ابتدا تابع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک به صورت زیر فرض می‌شود[5]:

$$\phi = \left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \phi + X, \quad X = Az + B \quad (4)$$

$\phi(r, \theta, t)$ پتانسیل الکتریکی سطح میانی درپوش کروی پیزوالکتریک است. A و B پارامترهایی بر حسب r و θ و t هستند. این پارامترهای مجهول را با اعمال شرایط مرزی الکتریکی برای دو حالت حسگر و عملگر می‌توان به دست آورد. بر این اساس،

پوسته سرامیک است که به صورت دمای ثابت فرض می‌شود و سطح بیرونی آن را فلز تشکیل می‌دهد و در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی ثابت قرار دارد[10]. سانتوس و همکاران مدل المان محدودی را برای تحلیل خمش و بررسی ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیت با لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارایه نمودند[11]. علی‌بیگلر و معدولیت، پوسته هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر را از لحاظ استاتیکی تحلیل نمودند. در این تحلیل از معادلات فضای حالت و سری‌های فوریه استفاده شده است[12]. همچنین علی‌بیگلر و کنی ارتعاشات آزاد سه‌بُعدی پوسته استوانه‌ای با لایه‌های پیزوالکتریک را با استفاده از اصل همپلتون و رابطه ماکسول بررسی کردند[13] و تحلیل ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای با خواص درجه‌بندی شده محدود به لایه‌های پیزوالکتریک را براساس تئوری سه‌بُعدی الاستیسیته انجام دادند. از اثرات دما در این کار صرف نظر شده، همچنین ضریب پواسون در لایه با خواص درجه‌بندی شده ثابت فرض شده است[14]. های‌بیچ و وان‌تانگ روشی تحلیلی را به منظور بررسی پاسخ غیرخطی پوسته‌های کم عمق هدفمند تابعی، تحت فشار یکنواخت خارجی به همراه اثرات دما ارایه کردند[15]. داک و همکاران بر پایه تئوری پوسته کلاسیک، پاسخ متقارن محوری غیرخطی پوسته‌های کروی کم عمق هدفمند تابعی، تحت نیروهای حرارتی را بررسی کردند[16]. سبزی‌کاربروجردی و اسلامی، کماتش پوسته‌های کروی کم عمق هدفمند تابعی و دارای محرک پیزوالکتریک را تحت بارگذاری الکترومکانیک مورد مطالعه قرار دادند[17]. ویولا و همکاران، رفتار استاتیک پنل‌ها و پوسته‌های کروی هدفمند تابعی تحت بارهای یکنواخت را مورد مطالعه قرار دادند. ساختار مدل شامل یک تنش برگشت‌پذیر و کرنش بهبودیافته است. روش حل معادلات حاکم در این تحقیق، استفاده از روش عددی گلرکین است[18]. کیو و میرزا، خمش و تغییر شکل چرخشی پوسته‌های کم عمق چندلایه پیزوالکتریک را مورد ارزیابی قرار دادند. در این تحقیق یک روش ساده و کارآمد برای رفتار استاتیک پوسته‌های کم عمق، تحت میدان‌های مکانیکی، حرارتی و پیزوالکتریک ارایه شده است. روابط حاکم بر پایه فرضیات تئوری خطی پیزوالکتریک و پوسته‌های کم عمق نازک هستند. حل با به‌کارگیری روش تقریبی ریتز و برای شرایط مرزی مختلف انجام شده است[19]. زنگور و همکاران فرمول‌بندی ناپایدار و غیرمحلی الکتریکی-مغناطیسی-الاستیک یک نانوتیر ساندویچی منحنی شکل را توسعه دادند. هندسه مساله شامل یک هسته نانو، دو ورق پیزومغناطیسی تحت نیروی عرضی مکانیکی و در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مستقر روی بستر پسترناک است. در این کار، روابط حرکت با به‌کارگیری معادلات غیرمحلی الکتریکی-مغناطیسی-الاستیک و اصل همپلتون استخراج شده است[20]. شریعیات و یاقوتیان کماتش استاتیک پوسته‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک دارای تغییر شکل شعاعی اولیه را مورد بررسی قرار دادند[21]. در این کار، به منظور وارد کردن اثرات برشی از یک تئوری مرتبه بالا استفاده شده است. لذا فرمول‌بندی به‌دست‌آمده برای پوسته‌های جدار ضخیم و جدار نازک معتبر است. کنی و علی‌بیگلر رفتار ارتعاشی پوسته‌های چندلایه مجهز به لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک را مطالعه کردند[22]. آنها ابتدا پوسته چندلایه با تکیه‌گاه‌های ساده را به روش تحلیلی و سپس با استفاده از روش عددی گلرکین بررسی کردند. نیکویی و حسنی روش عددی جدیدی را براساس تحلیل ایزوژئومتریک برای تحلیل‌های استاتیک و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه پوشیده شده با مواد هوشمند پیزوالکتریک با

ε_r و ε_θ کرنش‌های نرمال و $\varepsilon_{r\theta}$ کرنش برشی مطابق با رابطه ۱۴ هستند^[24]:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_{rr}^0 + z\varepsilon_{rr}^1 \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + z\varepsilon_{\theta\theta}^1 \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}^0 + z\varepsilon_{r\theta}^1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{w_0}{R} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} + \frac{w_0}{R} \\ \varepsilon_{r\theta}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{v_0}{r} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^1 = -\frac{\partial w_0}{r \partial r} - \frac{\partial^2 w_0}{r^2 \partial \theta^2} \\ \varepsilon_{r\theta}^1 = -\frac{\partial w_0}{r^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w_0}{r \partial r \partial \theta} \end{cases} \quad (16)$$

با جای‌گذاری روابط ۴ و ۱۰- ج در رابطه ۵ برای حالت حسگر و جای‌گذاری رابطه ۴ در رابطه ۶، پارامترهای A ، B و تابع پتانسیل ϕ به‌صورت زیر به دست می‌آیند:
برای حالت حسگر:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{\varepsilon}_{31}}{\bar{\varepsilon}_{33}} \left(\psi_1 + \frac{2w_0}{R} - h\Delta w_0 \right) \\ B &= 3\phi + \frac{\bar{\varepsilon}_{31}}{\bar{\varepsilon}_{33}} h \left(\psi_1 + \frac{2w_0}{R} - h\Delta w_0 \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi + 3\varphi \\ &+ \frac{\bar{\varepsilon}_{31}}{\bar{\varepsilon}_{33}} \left(\psi_1 + \frac{2w_0}{R} - h\Delta w_0 \right) (z+h) \end{aligned}$$

برای حالت عملگر:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\varphi}{h}, \quad B = \varphi \\ \phi &= -\frac{z^2}{h^2} \varphi + \varphi \end{aligned} \quad (18)$$

۳- معادلات پایه

معادلات حرکت حاکم بر پوسته کم‌عمق نازک به‌صورت زیر است^[24]:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (الف-۱۹)$$

$$\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial N_\theta}{r \partial \theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = I_0 \ddot{v}_0 \quad (ب-۱۹)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{Q_r}{r} - \frac{N_r + N_\theta}{R} = I_0 \ddot{w}_0 \quad (ج-۱۹)$$

که اینرسی جرمی به‌صورت زیر است:

$$\phi|_{z=-h} = 0, \quad D|_{z=h} = 0 \quad (5)$$

در حالت عملگر:

$$\phi|_{z=\pm h} = 0 \quad (6)$$

روابط ساختاری درپوش کروی پیزوالکتریک به‌صورت زیر بیان می‌شود^[25]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \bar{C}_{11} \varepsilon_r + \bar{C}_{12} \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z \\ \sigma_\theta &= \bar{C}_{12} \varepsilon_r + \bar{C}_{11} \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2} (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) \varepsilon_{r\theta} \\ \bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}, \bar{e}_{31} &\text{ ثوابت کاهش‌یافته ماده پیزوالکتریک برای مسایل تنش صفحه‌ای به‌صورت زیر هستند}^{[25]}: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} - (C_{13}^2 / C_{33}) \\ \bar{C}_{12} &= C_{12} - (C_{13}^2 / C_{33}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - (C_{13} e_{33} / C_{33})$$

$C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$ مدول الاستیسیته تحت میدان الکتریکی یکنواخت و e_{31} و e_{33} ثوابت پیزوالکتریک هستند.

E_r, E_θ, E_z به‌ترتیب شدت میدان الکتریکی در جهت‌های شعاعی، محیطی و عرضی هستند که برای حالت حسگر به‌صورت زیر است^[25]:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial X}{\partial r} \quad (الف-۹)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} - \frac{\partial X}{r \partial \theta} \quad (ب-۹)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\left(\frac{2}{h} - \frac{2z}{h^2} \right) \varphi - A \quad (ج-۹)$$

D_r, D_θ, D_z مولفه‌های جابه‌جایی الکتریکی به‌صورت زیر قابل بیان هستند^[25]:

$$D_r = \bar{\varepsilon}_{11} E_r = -\bar{\varepsilon}_{11} \left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \bar{\varepsilon}_{11} \frac{\partial X}{\partial r} \quad (الف-۱۰)$$

$$D_\theta = \bar{\varepsilon}_{11} E_\theta = -\bar{\varepsilon}_{11} \left(\frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} - \bar{\varepsilon}_{11} \frac{\partial X}{r \partial \theta} \quad (ب-۱۰)$$

$$D_z = \bar{\varepsilon}_{33} E_z + \bar{e}_{31} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \bar{\varepsilon}_{33} \left(-\frac{2}{h} + \frac{2z}{h^2} \right) \varphi$$

$$- \bar{\varepsilon}_{33} A + \bar{e}_{31} \left(\psi_1 + \frac{2w_0}{R} - z\Delta w_0 \right) \quad (ج-۱۰)$$

$\bar{\varepsilon}_{33}$ ثابت دی‌الکتریک کاهش‌یافته و $\bar{\varepsilon}_{11}$ و $\bar{\varepsilon}_{33}$ ثوابت دی‌الکتریک هستند^[25].

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}, \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + e_{33}^2 / C_{33} \quad (11)$$

$$\psi_1 = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} \quad (12)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad (13)$$

$$D = \int_{-h}^h \bar{C}_{11} z^2 dz, \quad f_1 = -\frac{4}{3} h \bar{e}_{31}$$

با جای گذاری معادلات ۲۲- الف تا و در معادلات ۱۹- الف تا ج، معادلات حرکت بر حسب مولفه های جابه جایی و تابع پتانسیل به دست می آیند.

$$(F + n_2) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + s_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta} \right) + (F + n_2 - s_1) \frac{2}{R} \frac{\partial w_0}{\partial r} + n_1 \frac{\partial (\Delta w_0)}{\partial r} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (۲۴- الف)$$

$$(F + n_2) \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} + s_1 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{v_0}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) + (F + n_2 - s_1) \frac{2}{rR} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + n_1 \frac{1}{r} \frac{\partial (\Delta w_0)}{\partial \theta} + n_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = I_0 \ddot{v}_0 \quad (۲۴- ب)$$

$$-D \Delta \Delta w_0 - \frac{2}{R} n_1 \Delta w_0 - \frac{4}{R^2} (F + n_2 - s_1) w_0 - \frac{2}{R} (F + n_2 - s_1) \Psi_1 + f_1 \Delta \varphi - \frac{2}{R} n_3 \varphi = I_0 \ddot{w}_0 \quad (۲۴- ج)$$

برای حالت عملگر منتجه های نیرو، منتجه های ممان و معادلات حرکت مانند حالت حسگر بوده اند، با این تفاوت که ضرایب n_1 تا n_3 برابر با صفر هستند.

تمامی متغیرات الکتریکی باید معادلات ماکسول را ارضا کنند. بنابراین باید دیورژانس چگالی شار الکتریکی در هر نقطه از درپوش کروی پیزوالکتریک، برابر با صفر باشد. این شرایط به طور تقریبی با صفر قراردادن انتگرال دیورژانس شار الکتریکی در هر نقطه با هر شعاعی در راستای ضخامت، ارضا می شود [5].

$$\int_{-h}^h \left(\frac{\partial (r D_r)}{r \partial r} + \frac{\partial D_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (۲۵)$$

با جای گذاری روابط ۱۰- الف تا ج در رابطه ۲۵، معادله ماکسول برای دو حالت حسگر و عملگر ایجاد می شود. در حالت حسگر:

$$M_1 \Delta \Delta w_0 + M_2 \Delta w_0 + M_3 \Delta \Psi_1 + M_4 \Delta \varphi + M_5 \varphi = 0 \quad (۲۶)$$

به طوری که:

$$M_1 = \frac{2 \bar{e}_{31} \bar{e}_{11}}{\bar{e}_{33}} h^3, \quad M_2 = -\left(\frac{4 \bar{e}_{31} \bar{e}_{11}}{R \bar{e}_{33}} h^2 + 2 \bar{e}_{31} h \right) \quad (۲۷)$$

$$M_3 = -\frac{M_1}{h}, \quad M_4 = -\frac{16}{3} \bar{e}_{11} h, \quad M_5 = \frac{4}{h} \bar{e}_{33}$$

در حالت عملگر:

$$N_1 \Delta w_0 + N_2 \Delta \varphi + N_3 \varphi = 0 \quad (۲۸)$$

$$I_0 = \int_{-h}^h \rho dz \quad (۲۰)$$

منتجه های نیرو و ممان نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

$$N_i = \int_{-h}^h \sigma_i dz, \quad i = r, \theta \quad (۲۱- الف)$$

$$N_{r\theta} = \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} dz \quad (۲۱- ب)$$

$$M_i = \int_{-h}^h \sigma_i z dz, \quad i = r, \theta \quad (۲۱- ج)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} z dz \quad (۲۱- د)$$

با جای گذاری معادلات ۷ و ۱۶-۱۴ در معادلات ۲۱- الف تا ه، منتجه های نیرو و ممان برای دو حالت حسگر و عملگر بر حسب جابه جایی ها به صورت زیر به دست می آیند: برای حالت حسگر:

$$N_r = F \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{w_0}{R} \right) + (F - 2s_1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} + \frac{w_0}{R} \right) + n_1 \Delta w_0 + n_2 \frac{2}{R} w_0 + n_2 \Psi_1 + n_3 \varphi \quad (۲۲- الف)$$

$$N_\theta = (F - 2s_1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{w_0}{R} \right) + F \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} + \frac{w_0}{R} \right) + n_1 \Delta w_0 + n_2 \frac{2}{R} w_0 + n_2 \Psi_1 + n_3 \varphi \quad (۲۲- ب)$$

$$N_{r\theta} = s_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} \right) + n_1 \Delta w_0 + n_2 \frac{2}{R} w_0 + n_2 \Psi_1 + n_3 \varphi \quad (۲۲- ج)$$

$$M_r = -D \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - (D - 2s_2) \left(\frac{\partial^2 w_0}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{r \partial r} \right) + f_1 \varphi \quad (۲۲- د)$$

$$M_\theta = -(D - 2s_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - D \left(\frac{\partial^2 w_0}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{r \partial r} \right) + f_1 \varphi \quad (۲۲- ه)$$

$$M_{r\theta} = -s_2 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \quad (۲۲- و)$$

به طوری که:

$$F = 2h \bar{C}_{11}, \quad s_1 = \frac{F}{2} \left(1 - \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \right), \quad s_2 = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \right) \quad (۲۳)$$

$$n_1 = -\frac{2 \bar{e}_{31}^2 h^2}{\bar{e}_{33}}, \quad n_2 = \frac{2 \bar{e}_{31}^2 h}{\bar{e}_{33}}, \quad n_3 = 4 \bar{e}_{31}$$

$$(\bar{\Delta} - x_3)\bar{w}_3 = 0, \quad (\bar{\Delta} - x_4)\bar{w}_4 = 0$$

بنابراین حل معادله ۳۳ به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{w}(r) = \sum_{i=1}^4 (c_i w_{i1}(p, \chi_i r) + c_{i+4} w_{i2}(p, \chi_i r)) \quad (39)$$

به طوری که:

$$\chi_i = \sqrt{|x_i|} \quad (40)$$

$$w_{i1}(p, \chi_i r) = \begin{cases} J_p(\chi_i r) & x_i < 0 \\ I_p(\chi_i r) & x_i > 0 \end{cases}$$

$$w_{i2}(p, \chi_i r) = \begin{cases} Y_p(\chi_i r) & x_i < 0 \\ K_p(\chi_i r) & x_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (41)$$

$c_i (i = 1, \dots, 8)$ ها ضرایب نامعلوم و J_p و Y_p به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم هستند. I_p و K_p نیز به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم هستند.

باید توجه داشت که تابع بسل نوع دوم در مقدار $r = 0$ بی نهایت میل می کند، بنابراین تابع جابه جایی عرضی درپوش کروی پیزوالکتریک به صورت رابطه ۴۲ است.

$$\bar{w}(r) = \sum_{i=1}^4 c_i w_{i1}(p, \chi_i r) \quad (42)$$

۴- عبارت صریح برای پتانسیل الکتریکی

پاسخ تابع پتانسیل به صورت رابطه ۴۳ در نظر گرفته می شود:

$$\varphi(r, \theta, t) = \bar{\varphi}(r) \cos(p\theta) \exp(i\omega t) \quad (43)$$

با جای گذاری روابط ۳۷ و ۴۳ در روابط ۲۴-ج، ۲۶ و ۳۰ و حذف Ψ_1 از روابط، رابطه ۴۴ نتیجه گرفته می شود.

$$\bar{\varphi} = K_1 \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w} + K_2 \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w} + K_3 \bar{\Delta} \bar{w} + K_4 \bar{w} \quad (44)$$

به طوری که $K_i (i = 1, \dots, 8)$ ها ضرایب معلوم هستند. از رابطه ۳۸ داریم:

$$\bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w}_i = x_i^3 \bar{w}_i, \quad \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w}_i = x_i^2 \bar{w}_i, \quad \bar{\Delta} \bar{w}_i = x_i \bar{w}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (45)$$

با جای گذاری رابطه ۴۵ در رابطه ۴۴، تابع پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه ۴۶ به دست می آید.

$$\bar{\varphi}(r) = \sum_{i=1}^4 L_i \bar{w}_i(r) \quad (46)$$

به طوری که:

$$L_i = K_1 x_i^3 + K_2 x_i^2 + K_3 x_i + K_4, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (47)$$

۵- عبارت صریح برای جابه جایی شعاعی و جابه جایی محیطی

با استفاده از روابط ۲۴-الف و ۲۴-ب، جابه جایی های شعاعی و محیطی برای درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر به صورت روابط ۴۸ و ۴۹ خواهد بود.

$$u_0 = -\frac{1}{I_0 \beta^2} \left[(F + n_2) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + s_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} + (F + n_2 - s_1) \frac{2}{R} \frac{\partial w_0}{\partial r} + n_1 \frac{\partial (\Delta w_0)}{\partial r} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \quad (48)$$

$$N_1 = -2\bar{e}_{31} h, \quad N_2 = -\frac{4}{3} \bar{e}_{11} h, \quad N_3 = \frac{4}{h} \bar{e}_{33} \quad (29)$$

به منظور حل معادلات حرکت و ماکسول، ابتدا باید معادلات ۲۴-الف و ۲۴-ب با استفاده از روش زیر از یکدیگر جداسازی شوند:

(۱) از معادله ۲۴-الف نسبت به r مشتق می گیریم.

(۲) معادله ۲۴-الف را به r تقسیم می کنیم.

(۳) ابتدا از معادله ۲۴-ب نسبت به θ مشتق می گیریم، سپس معادله به دست آمده را به r تقسیم می کنیم.

(۴) سه رابطه به دست آمده از مراحل ۱ تا ۳ را با هم جمع می کنیم تا معادله ۳۰ حاصل شود:

برای حالت حسگر:

$$n_1 \Delta \Delta w_0 + (F + n_2 - s_1) \frac{2}{R} \Delta w_0 + (F + n_2) \Delta \Psi_1 + n_3 \Delta \varphi = -I_0 \beta^2 \Psi_1 \quad (30)$$

(۵) گام بعدی در این تحلیل حذف پارامترهای Ψ_1 و φ از روابط ۲۴-ج، ۲۶ و ۳۰ است. بعد از یک سری عملیات ریاضی، رابطه ای صریح بر حسب w_0 و بدون مولفه های Ψ_1, v_0, u_0 و φ به دست می آید.

(۳۱)

$$P_1 \Delta \Delta \Delta \Delta w_0 + P_2 \Delta \Delta \Delta w_0 + P_3 \Delta \Delta w_0 + P_4 \Delta w_0 + P_5 w_0 = 0$$

این رابطه، معادله دیفرانسیل مرتبه هشتم با ضرایب ثابت برای جابه جایی عرضی درپوش کروی پیزوالکتریک است. از آنجایی که هندسه پوسته کروی، کامل و متقارن است، پاسخ تابع جابه جایی $w_0(r, \theta, t)$ با استفاده از روش جداسازی متغیرها، در راستای θ به شکل یک تابع متقارن مانند $\cos(p\theta)$ به دست خواهد آمد. همچنین به دلیل آن که ارتعاشات آزاد مساله مورد بحث است، پاسخ جابه جایی پوسته نسبت به زمان هارمونیک و به صورت $\exp(i\beta t)$ در نظر گرفته می شود. بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$w_0(r, \theta, t) = \bar{w}(r) \cos(p\theta) \exp(i\beta t) \quad (32)$$

که $\bar{w}(r)$ دامنه در راستای جابه جایی عرضی، β فرکانس طبیعی و p مشخص کننده تعداد گره های محیطی در شکل مود ارتعاشی هستند.

می توان رابطه ۳۱ را بر حسب $\bar{w}(r)$ و به صورت زیر نوشت:

$$P_1 \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w} + P_2 \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w} + P_3 \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{w} + P_4 \bar{\Delta} \bar{w} + P_5 \bar{w} = 0 \quad (33)$$

به طوری که:

$$\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{p^2}{r^2} \quad (34)$$

رابطه ۳۳ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\bar{\Delta} - x_1)(\bar{\Delta} - x_2)(\bar{\Delta} - x_3)(\bar{\Delta} - x_4)\bar{w} = 0 \quad (35)$$

x_i ها ریشه های معادله ۳۶ هستند [6].

$$P_1 x^4 + P_2 x^3 + P_3 x^2 + P_4 x + P_5 = 0 \quad (36)$$

حل عمومی معادله ۳۳ را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4 \quad (37)$$

به طوری که \bar{w}_1 تا \bar{w}_4 از معادلات بسل رابطه ۳۸ به دست می آیند.

$$(\bar{\Delta} - x_1)\bar{w}_1 = 0, \quad (\bar{\Delta} - x_2)\bar{w}_2 = 0 \quad (38)$$

جدول‌ها، ۷ فرکانس طبیعی اول درپوش کروی پیزوالکتریک به ترتیب در دو حالت عملگر و حسگر با شعاع داخلی یک‌متر، ضخامت ۰/۰۲ متر و مقادیر مختلف شعاع انحنا و به ترتیب برای شرایط مرزی لبه گیردار و تکیه‌گاه ساده آورده شده است.

همان طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش شعاع انحنا پوسته و به دلیل کاهش سفتی آن، فرکانس‌های طبیعی کاهش پیدا می‌کنند. قابل مشاهده است که با افزایش شماره مود، اختلاف بین دو روش افزایش می‌یابد. همخوانی مناسب بین مقادیر عددی فرکانس‌های طبیعی که از دو روش مختلف به دست آمده‌اند، صحت روش حل تحلیلی حاضر را تایید می‌کند.

نتایج مندرج در جدول ۴ تاثیر شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی را بر فرکانس‌های طبیعی درپوش کروی پیزوالکتریک به نمایش می‌گذارد. در جدول ۴ از ماده PZT4 استفاده شده است. شعاع انحنا درپوش برابر با ۱۰ متر و شعاع داخلی و ضخامت درپوش کروی نیز به ترتیب یک و ۰/۰۲ متر در نظر گرفته شده است. در این جدول، ۶ فرکانس اول تشدید تحت شرایط مرزی الکتریکی مدارباز (حسگر) و مدار بسته (عملگر) ذکر شده است. همچنین نتایج به دست آمده با نتایج عددی حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.

از داده‌های ارایه شده جدول ۴ مشاهده شد که فرکانس‌های درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر از فرکانس‌های حالت عملگر بیشتر است. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر از سفتی بیشتری برخوردار است که این مهم با تحلیل عددی ارایه شده در نرم‌افزار آباکوس همخوانی دارد. از نکات دیگر، کاهش فرکانس‌های طبیعی در حالت شرط مرزی لبه گیردار نسبت به شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و شرط مرزی تکیه‌گاه ساده نسبت به لبه آزاد است. در واقع هر چقدر جسم قابلیت جابه‌جایی بیشتری داشته باشد، فرکانس‌های طبیعی مقدار کمتری را از خود نشان می‌دهند.

جدول ۵، مقایسه ۷ فرکانس طبیعی اول درپوش کروی پیزوالکتریک را در دو حالت حسگر و عملگر و برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع داخلی بر حسب رادیان بر ثانیه نشان می‌دهد. شعاع انحنا درپوش برابر با ۱۰ متر در نظر گرفته شده و شرط مرزی، تکیه‌گاه ساده و جنس ماده PZT4 است. همان طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، فرکانس‌های درپوش پیزوالکتریک در حالت حسگر (مدارباز) بیشتر از مقدار محاسبه شده در حالت عملگر (مدار بسته) است. در واقع دلیل این امر تفاوت در توزیع پتانسیل الکتریکی برای دو حالت حسگر و عملگر است. در حقیقت، در حالت حسگر (مدارباز)، پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، مطابق با یک شیب ثابت افزایش می‌یابد و در انتها به بیشترین مقدار خود می‌رسد، در حالی که پتانسیل الکتریکی در حالت عملگر (مدار بسته) دارای بیشترین مقدار خود در سطح میانی است و سپس در سطح انتهایی به مقدار صفر می‌رسد. در این شرایط لایه پیزوالکتریک در حالت اتصال کوتاه قرار دارد و مقدار پتانسیل الکتریکی روی هر دو سطح خارجی جسم برابر با صفر است.

بر اساس همین شرایط، الکترودهای به کاررفته روی دو سطح خارجی جسم باعث تخلیه انرژی الکتریکی در جسم می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که چون درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر، پتانسیل الکتریکی را در خلال ارتعاش آزاد نمی‌کند، در نتیجه این پتانسیل به دلیل اثر پیزوالکتریک به انرژی مکانیکی تبدیل می‌شود. این افزایش در انرژی مکانیکی منجر به

$$v_0 = -\frac{1}{I_0 \beta^2} [(F + n_2) \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} - s_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + (F + n_2 - s_1) \frac{2}{rR} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + n_1 \frac{1}{r} \frac{\partial (\Delta w_0)}{\partial \theta} + n_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}] \quad (49)$$

به طوری که:

$$\Psi_2 = \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \quad (50)$$

جابه‌جایی‌های شعاعی و محیطی برای حالت عملگر مانند حالت حسگر بوده‌اند، با این تفاوت که پارامترهای n_1 تا n_3 برابر با صفر هستند.

با اعمال شرایط مرزی، ضرایب مجهول (C_i) به دست می‌آیند. شرایط مرزی برای درپوش کروی پیزوالکتریک به صورت زیر است: برای لبه گیردار:

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (51)$$

برای لبه با تکیه‌گاه ساده:

$$w_0 = 0, M_{r\theta} = 0, N_{r\theta} = 0, M_r = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

برای لبه آزاد:

$$M_{r\theta} = 0, N_{r\theta} = 0, M_r = 0, N_r = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (53)$$

۶- نتایج عددی

نتایج عددی تحلیل رفتار ارتعاشی حسگرها و عملگرهای کروی بر اساس تئوری پوسته کم عمق نازک و معادله ماکسول ارایه شده است. همچنین تاثیر پارامترهای مختلف مانند نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنا پوسته، نسبت ضخامت به شعاع داخلی پوسته و شرایط مرزی مختلف روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

شماره‌ها در مودهای ارتعاشی به صورت (p, s) است که p مشخص‌کننده تعداد گره‌های محیطی در شکل مود ارتعاشی و s مشخص‌کننده تعداد گره‌های قطری در شکل مود ارتعاشی فرکانس مربوطه هستند.

به منظور تفصیل و جامعیت بخشیدن به بررسی‌های صورت گرفته در این مقاله، از انواع رایج مواد پیزوالکتریک استفاده شده که خواص مکانیکی آنها در جدول ۱ ارایه شده است.

به منظور اعتبارسنجی در مدل ریاضی مطرح شده و اطمینان حاصل کردن از صحت و کارآمدی روش حل و برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی شده، نتایج حاصل از مطالعه حاضر با نتایج به دست آمده از مدل‌سازی پوسته در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. برای مش‌بندی پوسته از المان‌های مربعی پیزوالکتریک به تعداد ۲۲۰۴۰ استفاده شده است. این المان که در فرمول‌بندی آن اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت لحاظ می‌شود، دارای چهار گره است و برای مدل‌سازی ورق‌ها و پوسته‌های پیزوالکتریک استفاده می‌شود. برای تحلیل ارتعاشات پوسته کم عمق پیزوالکتریک در نرم‌افزار آباکوس، ۷ فرکانس اول در نظر گرفته شده است. فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از این مطالعه با حل عددی به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس در جدول‌های ۲ و ۳ مقایسه شده است. در این

افزایش سفتی درپوش کروی و افزایش فرکانس طبیعی آن می‌شود.

جدول ۶ تاثیر خاصیت پیزوالکتریک را روی رفتار ارتعاشی درپوش کروی پیزوالکتریک به نمایش می‌گذارد. جنس ماده PZT-8 بوده و ضخامت درپوش کروی برابر با ۰/۱ متر و شرط مرزی گیردار است. فرکانس‌ها برای دو مقدار مختلف از نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی محاسبه شده‌اند. همان طور که در جدول ۶

ملاحظه می‌شود، فرکانس‌ها به ترتیب از حالت حسگر نسبت به عملگر و از حالت عملگر نسبت به حالتی که خاصیت پیزوالکتریک در نظر گرفته نمی‌شود، کاهش می‌یابند. در واقع خاصیت پیزوالکتریک باعث افزایش انرژی مکانیکی جسم می‌شود و در نظر نگرفتن خاصیت پیزوالکتریک باعث کم‌تر بودن سفتی درپوش کروی نسبت به حالت حسگر و عملگر می‌شود و فرکانس‌ها کاهش می‌یابند.

جدول ۱) خواص مواد

ماده	ثوابت الاستیک (Gpa)				ثوابت الکتریک (C/m ²)		ثوابت دی‌الکتریک (nC/Vm)		چگالی (kg/m ³)
	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₃₃	e ₃₁	e ₃₃	ε ₁₁	ε ₃₃	
PZT4	۱۲۶	۷۹/۵	۸۴/۱	۱۱۷	-۶/۵	۲۳/۳	۱/۵۰۵	۱/۳۰۲	۷۵۰۰
PZT-8	۱۳۷	۶۹/۹	۷۱/۱	۱۲۳	-۴	۱۷/۵	۵/۱۴	۷/۹۷	۷۶۰۰
PZT-6B	۱۶۸	۸۴/۷	۸۴/۲	۱۶۳	-۰/۹	۷/۱	۳/۶۰	۳/۴۲	۷۵۵۰
PIC-151	۱۰۷/۶	۶۳/۱	۶۳/۹	۱۰۰/۴	-۹/۵۲	۱۵/۱۴	۹/۸۳۷	۸/۱۹۰	۷۸۰۰

جدول ۲) مقایسه ۷ فرکانس طبیعی (rad/s) اول درپوش کروی PZT4 در حالت عملگر با شرط مرزی گیردار (زمانی که $r_0 = 1m$ و $h = 0.02m$ است)

R	روش حل	شماره مود						
		(۰.۱)	(۱.۱)	(۲.۱)	(۰.۲)	(۳.۱)	(۱.۲)	(۴.۱)
۵	تحلیل حاضر	۷۷۸/۳۳	۷۵۰/۸۱	۹۳۷/۷۵	۱۰۷۲/۸۵	۱۲۱۰/۰۶	۱۳۸۶/۱۳	۱۵۵۵/۲۴
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۷۷۵/۷۸	۷۴۳/۴۳	۹۲۴/۸۸	۱۰۶۱/۴۲	۱۱۸۸/۵۹	۱۳۵۹/۰۵	۱۵۲۲/۶۸
۱۰	تحلیل حاضر	۴۴۵/۲۱	۵۳۵/۲۵	۷۸۰/۹۲	۸۸۴/۸۹	۱۰۹۵/۵۸	۱۲۹۰/۵۳	۱۴۶۹/۳۴
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۴۴۴/۸۴	۵۳۲/۸۹	۷۷۶/۲۹	۸۷۹/۸۱	۱۰۸۷/۶۲	۱۲۸۰/۵۷	۱۴۵۶/۵۷
۱۵	تحلیل حاضر	۳۳۷/۳۵	۴۸۴/۴۳	۷۴۸/۱۴	۸۵۰/۰۳	۱۰۷۲/۹۹	۱۲۷۲/۰۲	۱۴۵۲/۸۶
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۳۳۷/۱۴	۴۸۳/۲۶	۷۴۵/۴۴	۸۴۶/۹۷	۱۰۶۷/۹۵	۱۲۶۵/۵۰	۱۴۴۴/۰۰
۲۰	تحلیل حاضر	۲۸۹/۳۰	۴۶۵/۲۹	۷۳۶/۳۱	۸۳۷/۷۸	۱۰۶۴/۹۷	۱۲۶۴/۴۷	۱۴۴۷/۰۴
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۲۸۹/۲۱	۴۶۴/۵۸	۷۳۴/۳۱	۸۳۵/۴۷	۱۰۶۰/۹۸	۱۲۶۰/۰۹	۱۴۳۹/۶۰

جدول ۳) مقایسه ۷ فرکانس طبیعی (rad/s) اول درپوش کروی PZT4 در حالت حسگر و با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (زمانی که $r_0 = 1m$ و $h = 0.02m$ است)

R	روش حل	شماره مود						
		(۰.۱)	(۱.۱)	(۲.۱)	(۰.۲)	(۳.۱)	(۱.۲)	(۴.۱)
۵	تحلیل حاضر	۳۱۶/۶۲	۴۸۸/۴۱	۷۶۳/۱۷	۸۵۴/۷۷	۱۰۱۱/۱۴	۱۱۵۳/۴۹	۱۳۱۸/۵۲
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۳۱۵/۳۷	۴۸۴/۵۹	۷۵۷/۱۹	۸۴۳/۸۳	۹۹۶/۷۰	۱۱۳۶/۷۵	۱۲۹۴/۰۲
۱۰	تحلیل حاضر	۱۹۳/۸۵	۳۵۴/۲۹	۶۰۰/۴۴	۶۸۳/۶۷	۸۷۹/۶۱	۱۰۴۴/۵۶	۱۲۱۶/۰۳
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۱۹۳/۶۳	۳۵۴/۲۶	۵۹۷/۵۳	۶۷۹/۷۸	۸۷۳/۷۶	۱۰۳۷/۹۷	۱۲۰۶/۱۲
۱۵	تحلیل حاضر	۱۵۳/۸۲	۳۲۲/۰۴	۵۶۴/۸۶	۶۴۸/۴۳	۸۵۲/۹۳	۱۰۳۳/۷۴	۱۱۹۶/۰۴
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۱۵۳/۰۴	۳۲۱/۷۶	۵۶۳/۰۷	۶۴۶/۰۴	۸۴۹/۱۱	۱۰۱۸/۹۴	۱۱۸۹/۵۴
۲۰	تحلیل حاضر	۱۳۶/۱۳	۳۰۹/۶۶	۵۵۱/۸۴	۶۳۵/۸۱	۸۴۳/۳۰	۱۰۱۶/۴۰	۱۱۸۸/۹۴
	المان محدود (آیاکوس) خطای نسبی (درصد)	۱۳۶/۰۷	۳۰۹/۳۵	۵۵۰/۴۲	۶۳۳/۹۱	۸۴۰/۲۵	۱۰۱۲/۲۸	۱۱۸۳/۱۹

جدول ۴) فرکانس ۶ فرکانس (rad/s) اول تشدید برای درپوش کروی PZT4 (در صورتی که $r_0 = 1m$ و $h = 0.02m$ و $R = 10m$ است)

شرایط مرزی	روش حل	شماره مود					
		(۰.۱)	(۱.۱)	(۲.۱)	(۰.۲)	(۳.۱)	(۱.۲)
لبه گیردار	تحلیل حاضر (حسگر)	۵۲۵/۵۳	۵۵۴/۱۳	۷۹۲/۹۳	۹۱۲/۳۵	۱۱۰۳/۵۳	۱۲۹۶/۶۵
	المان محدود (حسگر)	۵۲۷/۳۸	۵۵۱/۴۱	۷۸۸/۰۴	۹۰۶/۷۹	۱۰۹۵/۵۴	۱۲۸۶/۶۷
	تحلیل حاضر (عملگر)	۴۴۵/۲۱	۵۳۵/۲۵	۷۸۰/۹۲	۸۸۴/۸۹	۱۰۹۵/۵۸	۱۲۹۰/۵۳
	المان محدود (عملگر)	۴۴۴/۸۴	۵۳۲/۸۹	۷۷۶/۲۹	۸۷۹/۷۱	۱۰۸۷/۶۲	۱۲۸۰/۵۷
تکیه‌گاه ساده	تحلیل حاضر (حسگر)	۱۹۳/۸۵	۳۵۴/۲۹	۶۰۰/۴۴	۶۸۳/۶۷	۸۷۹/۶۱	۱۰۴۴/۵۶
	المان محدود (حسگر)	۱۹۳/۶۳	۳۵۴/۲۶	۵۹۷/۷۳	۶۷۹/۷۸	۸۷۳/۸۶	۱۰۳۷/۹۷
	تحلیل حاضر (عملگر)	۱۸۴/۴۲	۳۴۵/۷۹	۵۹۲/۳۱	۶۷۴/۲۹	۸۷۳/۰۲	۱۰۳۸/۶۵
	المان محدود (عملگر)	۱۸۴/۳۴	۳۴۶/۰۵	۵۸۹/۸۰	۶۷۰/۷۹	۸۶۷/۵۸	۱۰۳۲/۴۵
لبه آزاد	تحلیل حاضر (حسگر)	۹۴/۵۸	۲۲۳/۱۱	۳۶۵/۷۵	۳۹۶/۱۱	۵۲۹/۶۷	۶۱۴/۲۳
	المان محدود (حسگر)	۹۴/۴۴	۲۲۲/۲۳	۳۶۲/۰۶	۳۹۳/۴۹	۵۲۴/۱۷	۶۰۷/۳۴
	تحلیل حاضر (عملگر)	۹۰/۲۲	۲۱۸/۴۳	۳۵۹/۷۸	۳۸۰/۴۴	۵۱۵/۴۳	۵۹۱/۴۴
	المان محدود (عملگر)	۹۰/۱۰	۲۱۷/۶۶	۳۵۶/۵۱	۳۷۷/۸۷	۵۱۰/۲۱	۵۹۰/۵۵

شماره مود							روش حل	h/r_0
(۴.۱)	(۱.۲)	(۳.۱)	(۰.۲)	(۲.۱)	(۱.۱)	(۰.۱)		
۶۵۹/۶۹	۸۷۵/۶۶	۵۰۶/۰۶	۴۲۷/۹۱	۳۸۲/۳۴	۲۴۴/۶۰	۱۵۸/۳۶	تحلیل حاضر (حسگر) المان محدود (حسگر) خطای نسبی (درصد)	۱/۱۰۰
۶۵۶/۶۶	۵۷۶/۵۲	۵۰۴/۲۷	۴۲۶/۵۵	۳۸۱/۶۰	۲۴۴/۲۶	۱۵۸/۲۳		
۰/۴۶	۰/۳۷	۰/۳۵	۰/۳۲	۰/۱۹	۰/۱۴	۰/۰۸	تحلیل حاضر (عملگر) المان محدود (عملگر) خطای نسبی (درصد)	۱/۱۰۰
۶۵۰/۳۱	۵۶۷/۷۶	۴۹۴/۶۶	۴۱۲/۰۰	۳۶۹/۵۹	۲۳۳/۴۵	۱۴۹/۴۰		
۶۴۷/۳۶	۵۶۵/۷۹	۴۹۲/۹۶	۴۱۰/۷۹	۳۶۸/۹۲	۲۳۳/۲۷	۱۴۹/۳۱	خطای نسبی (درصد)	۱/۱۰۰
۰/۴۵	۰/۳۵	۰/۳۴	۰/۲۹	۰/۱۸	۰/۰۸	۰/۰۶		
(۴.۱)	(۱.۲)	(۳.۱)	(۰.۲)	(۲.۱)	(۱.۱)	(۰.۱)	تحلیل حاضر (حسگر) المان محدود (حسگر) خطای نسبی (درصد)	۲/۱۰۰
۱۲۱۰/۸۵	۱۰۳۸/۶۵	۸۷۳/۰۲	۶۷۴/۲۹	۵۹۲/۳۱	۳۴۵/۷۹	۱۸۴/۴۲		
۱۲۰۱/۴۱	۱۰۳۲/۴۵	۸۶۷/۵۸	۶۷۰/۷۹	۵۸۹/۸۰	۳۴۶/۰۵	۱۸۴/۳۴	خطای نسبی (درصد)	۲/۱۰۰
۰/۷۸	۰/۶۰	۰/۶۳	۰/۶۲	۰/۴۲	۰/۰۷	۰/۰۴		
۱۲۱۶/۰۳	۱۰۴۴/۵۶	۸۷۹/۶۱	۶۸۳/۶۷	۶۰۰/۴۴	۳۵۴/۲۹	۱۹۳/۸۵	تحلیل حاضر (عملگر) المان محدود (عملگر) خطای نسبی (درصد)	۲/۱۰۰
۱۲۰۶/۱۲	۱۰۳۷/۷۹	۸۳۷/۸۶	۶۷۹/۷۸	۵۹۷/۷۳	۳۵۴/۲۶	۱۹۳/۶۳		
۰/۸۳	۰/۶۵	۰/۶۶	۰/۵۷	۰/۴۵	۰/۰۱	۰/۱۱	تحلیل حاضر (حسگر) المان محدود (حسگر) خطای نسبی (درصد)	۳/۱۰۰
(۴.۱)	(۱.۲)	(۳.۱)	(۰.۲)	(۲.۱)	(۱.۱)	(۰.۱)		
۱۷۹۳/۵۵	۱۵۳۳/۲۹	۱۲۷۹/۰۶	۹۷۲/۴۱	۸۴۶/۹۸	۴۸۱/۸۹	۲۳۰/۸۶	المان محدود (حسگر) خطای نسبی (درصد)	۳/۱۰۰
۱۷۷۰/۵۴	۱۵۱۷/۹۵	۱۲۶۶/۱۹	۹۶۴/۲۲	۸۴۰/۹۴	۴۸۰/۹۶	۲۳۰/۲۱		
۱/۳۰	۱/۰۱	۱/۰۲	۰/۸۵	۰/۷۲	۰/۱۹	۰/۲۸	تحلیل حاضر (عملگر) المان محدود (عملگر) خطای نسبی (درصد)	۳/۱۰۰
۱۷۸۹/۷۴	۱۵۲۸/۶۷	۱۲۷۴/۳۶	۹۶۵/۸۳	۸۴۱/۱۳	۴۷۵/۴۳	۲۲۲/۱۴		
۱۷۶۷/۷۷	۱۵۱۴/۶۹	۱۲۶۲/۱۷	۹۵۸/۳۷	۸۳۵/۵۴	۴۷۴/۹۸	۲۲۱/۹۸	خطای نسبی (درصد)	۳/۱۰۰
۱/۲۴	۰/۹۲	۰/۹۶	۰/۷۸	۰/۶۷	۰/۰۹	۰/۰۷		
(۲.۱)	(۰.۰)	(۳.۱)	(۰.۲)	(۲.۱)	(۱.۱)	(۰.۱)	تحلیل حاضر (حسگر) المان محدود (حسگر) خطای نسبی (درصد)	۵/۱۰۰
۲۵۳۶/۴۶	۲۱۷۸/۹۵	۲۰۹۵/۸۳	۱۵۷۳/۹۳	۱۳۶۳/۳۱	۷۵۶/۳۵	۳۱۶/۶۱		
۲۴۷۳/۶۹	۲۱۲۹/۷۵	۲۰۵۳/۵۳	۱۵۴۸/۴۹	۱۳۴۴/۲۲	۷۵۱/۷۸	۳۱۵/۷۸	خطای نسبی (درصد)	۵/۱۰۰
۲/۵۴	۲/۳۱	۲/۰۶	۱/۶۴	۱/۴۲	۰/۶۱	۰/۲۶		
۲۴۳۱/۶۲	۲۰۶۷/۵۶	۲۰۹۲/۰۸	۱۵۶۹/۳۰	۱۳۵۹/۲۰	۷۵۱/۸۱	۳۱۰/۰۲	تحلیل حاضر (عملگر) المان محدود (عملگر) خطای نسبی (درصد)	۵/۱۰۰
۲۴۷۲/۰۶	۲۰۳۲/۸۰	۲۰۵۱/۷۷	۱۵۴۵/۶۰	۱۳۴۱/۴۰	۷۴۸/۳۳	۳۰۹/۸۳		
۲/۴۱	۱/۷۱	۱/۹۶	۱/۵۳	۱/۳۲	۰/۴۶	۰/۰۶	خطای نسبی (درصد)	۵/۱۰۰

جدول ۶) تاثیر خاصیت پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی (rad/s) درپوش کروی PZT-8 برای شرایط مرزی گیردار و $h = 0.01m$

شماره مود						ماده	r/R
۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۱۱۰/۹۶	۱۰۳۱/۳۵	۹۶۰/۳۴	۸۶۴/۸۰	۸۱۴/۴۶	۸۱۱/۳۸	PZT-8 در حالت حسگر	۱/۵
۱۰۲۴/۳۷	۹۹۷/۸۳	۹۲۴/۷۲	۸۲۳/۸۳	۷۷۸/۰۸	۷۶۶/۸۳		
۹۸۶/۸۲	۹۴۵/۶۷	۸۸۳/۸۰	۸۰۱/۷۷	۷۵۸/۷۴	۷۵۶/۵۵	PZT-8 بدون در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک	۱/۱۰
۷۹۷/۲۸	۷۰۱/۸۳	۶۷۷/۳۵	۵۵۷/۲۸	۴۹۹/۱۶	۴۶۲/۳۲	PZT-8 در حالت حسگر	
۷۸۶/۹۶	۶۸۹/۵۷	۶۲۲/۵۸	۵۴۰/۹۸	۴۶۱/۶۱	۴۴۱/۲۰	PZT-8 در حالت عملگر	۱/۱۰
۷۱۸/۳۵	۶۳۲/۳۲	۵۹۲/۱۰	۵۰۸/۳۷	۴۴۷/۳۲	۴۲۶/۲۲	PZT-8 بدون در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک	

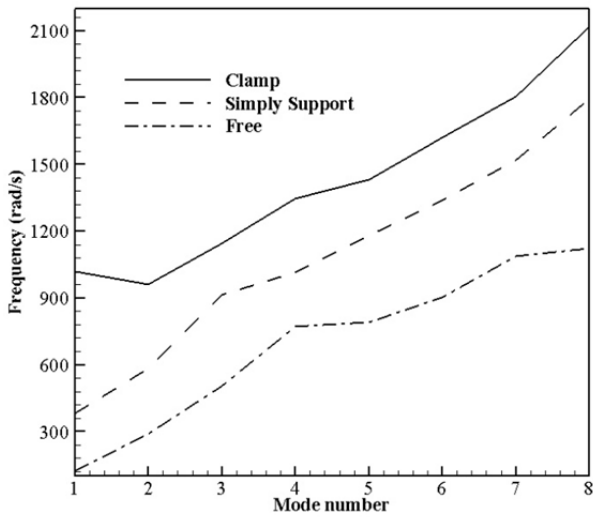
۰/۰۲ متر هستند. شماره مودهای یک تا ۸ به ترتیب مربوط به مودهای (۰.۱)، (۱.۱)، (۲.۱)، (۰.۲)، (۳.۱)، (۱.۲)، (۴.۱) و (۲.۲) هستند.

در نمودارهای ۵ و ۶، تاثیر به کارگیری مواد پیزوالکتریک مختلف روی فرکانس‌های طبیعی درپوش کروی بررسی شده است. در این بررسی از چهار ماده پیزوالکتریک، PZT-8، PZT-4، PZT-6B و PIC-151، تحت شرایط مرزی لبه گیردار و تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. شعاع داخلی درپوش کروی و ضخامت آن به ترتیب یک و ۰/۰۲ متر است و شعاع انحنای دارای دو مقدار ۵ و ۱۰ متر است. در این بررسی تعداد گره‌های قطری (S) برابر با یک و تعداد گره‌های محیطی (p) متغیر است.

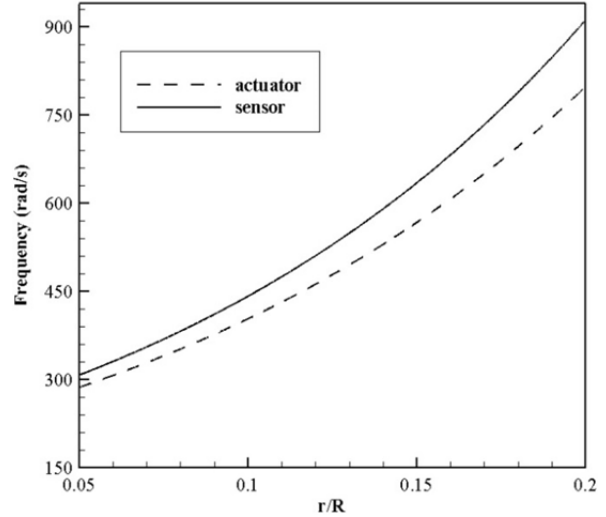
به ازای هر دو شرط مرزی و جنس‌های مختلف پیزوالکتریک، با افزایش p به استثنای نمودار ۶ که فرکانس پایه در مود (۱.۱) ایجاد می‌شود، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. این امر به دلیل آن است که درپوش کروی در مودهای بالاتر، سفتی بیشتری را از خود نشان می‌دهد.

نمودارهای ۱-۳، رفتار و نحوه تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک در دو حالت حسگر و عملگر را بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی پیزوالکتریک، به ترتیب برای شرایط مرزی لبه گیردار، تکیه‌گاه ساده و لبه آزاد نشان می‌دهد. ضخامت درپوش کروی ۰/۰۲ متر در نظر گرفته می‌شود. همان طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی پیزوالکتریک، به دلیل افزایش سختی ساختار، فرکانس‌های پایه افزایش می‌یابند. همچنین مشخص است که با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی پیزوالکتریک، اختلاف فرکانس بین دو حالت حسگر و عملگر بیشتر می‌شود.

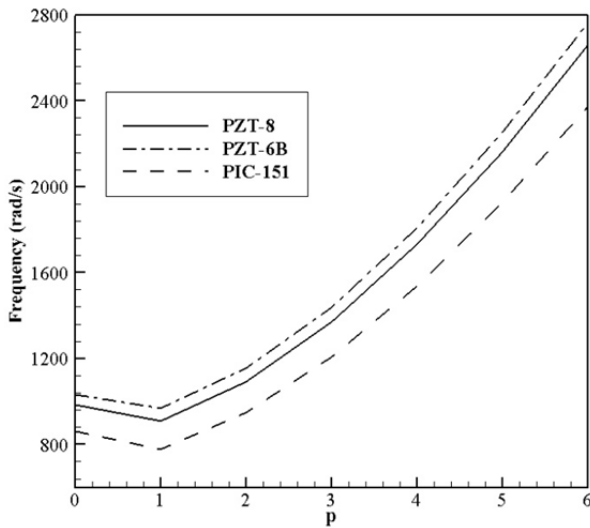
نمودار ۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی درپوش کروی پیزوالکتریک را برای حالت عملگر و سه شرط مرزی لبه گیردار، تکیه‌گاه ساده، لبه آزاد و بر حسب شماره مودها نشان می‌دهد. جنس ماده پیزوالکتریک PZT-6B است و شعاع انحنای شعاع داخلی و ضخامت درپوش کروی پیزوالکتریک به ترتیب برابر با ۵، یک و



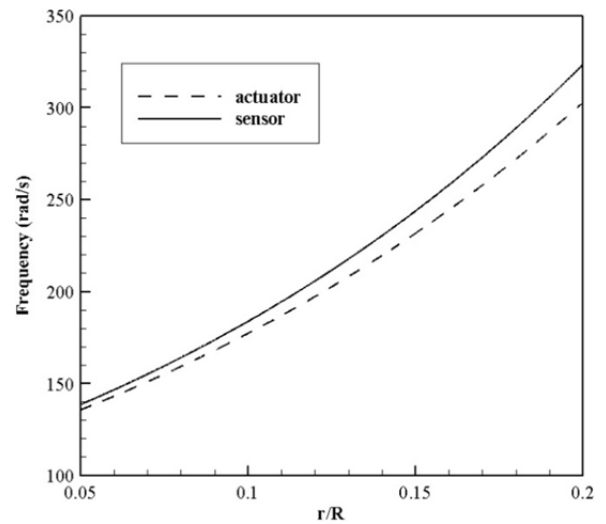
نمودار ۱ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی PZT-6B برای سه شرط مرزی لبه گیردار، تکیه‌گاه ساده و لبه آزاد در حالت عملگر



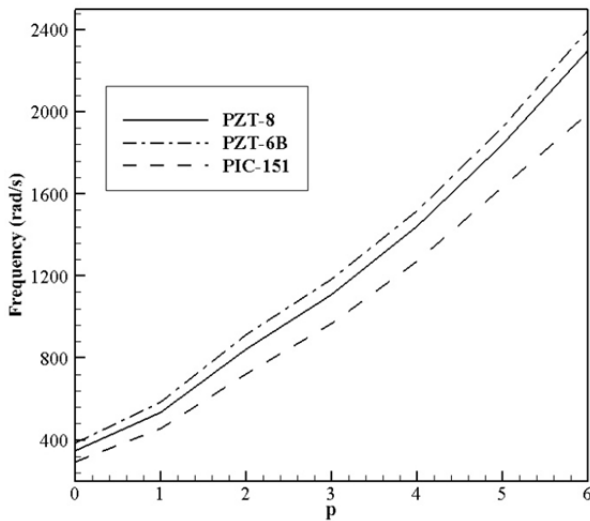
نمودار ۲ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک برای دو حالت حسگر و عملگر بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی برای شرایط مرزی لبه گیردار



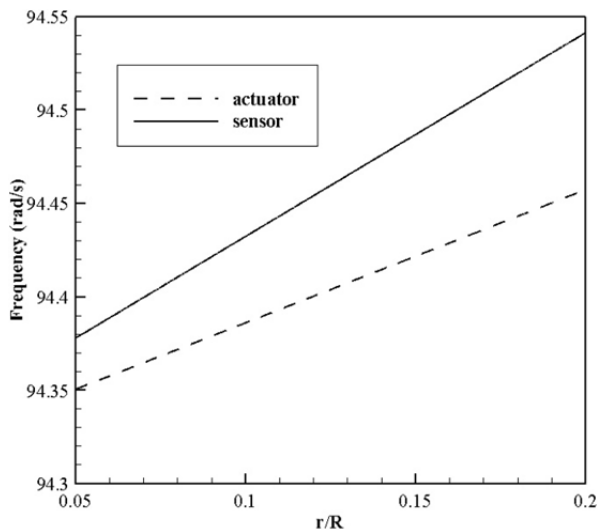
نمودار ۳ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر بر حسب شماره مودهای محیطی و جنس‌های مختلف ماده برای $R = 5m$ و شرط مرزی لبه گیردار



نمودار ۴ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک برای دو حالت حسگر و عملگر بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی برای شرایط مرزی لبه تکیه‌گاه ساده



نمودار ۵ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک در حالت حسگر بر حسب شماره مودهای محیطی و جنس‌های مختلف ماده برای $R = 10m$ و شرط مرزی لبه تکیه‌گاه ساده



نمودار ۶ تغییرات فرکانس‌های پایه درپوش کروی پیزوالکتریک برای دو حالت حسگر و عملگر بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی برای شرایط مرزی لبه آزاد

form solution for free vibration of piezoelectric coupled annular plates using Levinson plate theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2010;329(9):1390-1408.

8- Heydarpour Y, Malekzadeh P, Golbahar Haghghi M, Vaghefi M. Thermoelastic analysis of rotating laminated functionally graded cylindrical shells using layerwise differential quadrature method. *Acta Mechanica*. 2012;223(1):81-93.

9- Li SR, Fu XH, Batra RC. Free vibration of three-layer circular cylindrical shells with functionally graded middle layer. *Mechanics Research Communications*. 2010;37(6):577-580.

10- Malekzadeh P, Fiouz AR, Sobhrouyan M. Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2012;89:210-221.

11- Santos H, Soares CM, Soares CA, Reddy JN. A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: Bending and free vibrations. *Computers and Structures*. 2008;86(9):940-947.

12- Alibeigloo A, Madoliat R. Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature. *Composite Structures*. 2009;88(3):342-353.

13- Alibeigloo A, Kani AM. 3D free vibration analysis of laminated cylindrical shell integrated piezoelectric layers using the differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*. 2010;34(12):4123-4137.

14- Alibeigloo A, Kani AM, Pashaei MH. Elasticity solution for the free vibration analysis of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2012;89:98-111.

15- Huy Bich D, Van Tung H. Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011;46(9):1195-1204.

16- Duc ND, Anh VTT, Cong PH. Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells on elastic foundations under uniform external pressure and temperature. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2014;45:80-89.

17- Sabzikar Boroujerdy M, Eslami MR. Axisymmetric snap-through behavior of Piezo-FGM shallow clamped spherical shells under thermo-electro-mechanical loading. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2014;120-121:19-26.

18- Viola E, Rossetti L, Fantuzzi N, Tornabene F. Generalized stress-strain recovery formulation applied to functionally graded spherical shells and panels under static loading. *Composite Structures*. 2016;156:145-164.

19- Kioua H, Mirza Sh. Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells. *Smart Materials and Structures*. 2000;9(4):476-484.

20- Zenkour AM, Arefi M, Alshehri NA. Size-dependent analysis of a sandwich curved nanobeam integrated with piezomagnetic face-sheets. *Results in Physics*. 2017;7:2172-2182.

21- Shariyat M, Yaghotian A. Buckling analysis of piezoelectric cylindrical shell with initial imperfection under electro-mechanical loading based on a higher order theory. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transaction of the ASME*. 2007;9(1):41-58. [Persian]

22- Kani A, Alibeigloo A. Vibration analysis of laminated

در این مقاله، راه‌حلی دقیق و صریح برای یافتن فرکانس‌های طبیعی درپوش‌های کروی پیزوالکتریک بر مبنای تئوری پوسته‌های کم‌عمق معرفی شد. به‌منظور اطمینان از صحت و کارآمدی رویکرد حاضر، جواب‌های به‌دست‌آمده از روش معرفی‌شده با پاسخ‌هایی که از تحلیل مساله در نرم‌افزار آباکوس صورت گرفت، مقایسه شد و مطابقت و توافق دقیقی بین پاسخ‌های حل ارائه‌شده و حل عددی مساله به وجود آمد. پس از اطمینان از صحت حل معادلات، مطالعاتی به‌منظور بررسی تأثیر شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی، نسبت شعاع داخلی به شعاع انحنای درپوش کروی، نسبت ضخامت به شعاع داخلی درپوش کروی، جنس ماده و تأثیر در نظر نگرفتن خاصیت پیزوالکتریک ماده بر پاسخ فرکانسی درپوش کروی اختصاص پیدا کرد. بررسی نتایج نشان داد که با تغییر شرایط مرزی الکتریکی از حالت عملگر (مدار بسته) به حالت حسگر (مدار باز)، شاهد افزایش فرکانس طبیعی هستیم. این پدیده برآمده از این واقعیت فیزیکی بوده که در حالت عملگر به دلیل تخلیه پتانسیل الکتریکی، درپوش کروی از سفتی کمتری برخوردار است، در حالی که در حالت حسگر با تبدیل این پتانسیل الکتریکی به انرژی مکانیکی، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. با افزایش ضخامت و کاهش شعاع انحنای درپوش کروی پیزوالکتریک، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. خاصیت پیزوالکتریک باعث افزایش انرژی مکانیکی جسم و در نظر نگرفتن خاصیت پیزوالکتریک باعث کاهش سفتی درپوش کروی می‌شود.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تأییدیه اخلاقی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

تعارض منافع: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

سهم نویسندگان: پدram دارابی (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ محمد فدایی (نویسنده دوم)، روش‌شناس/تحلیلگر آماری (۵۰٪)

منابع مالی: موردی توسط نویسندگان گزارش نشده است.

منابع

- 1- Chen LW, Lin CY, Wang CC. Dynamic stability analysis and control of a composite beam with piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2002;56(1):97-109.
- 2- Cupiał P. Three-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;283(3-5):1093-1113.
- 3- Haojiang D, Rongqiao X, Weiqui Ch. Exact solutions for free vibration of transversely isotropic piezoelectric circular plates. *Acta Mechanica Sinica*. 2000;16(2):141-147.
- 4- Wang Q, Quek ST, Sun CT, Liu X. Analysis of piezoelectric coupled circular plate. *Smart Materials and Structures*. 2001;10(2):229-239.
- 5- Liu X, Wang Q, Quek ST. Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(8):2129-2151.
- 6- Hosseini-Hashemi Sh, Es'haghi M, Rokni Damavandi Taher H. An exact analytical solution for freely vibrating piezoelectric coupled circular/annular thick plates using Reddy plate theory. *Composite Structures*. 2010;92(6):1333-1351.
- 7- Hosseini Hashemi Sh, Es'haghi M, Karimi M. Closed-

theory. Modares Mechanical Engineering. 2018;17(11):181-191. [Persian]

24- Qatu MS. Vibration of laminated shells and plates. 1st Edition. Amsterdam: Elsevier; 2004.

25- Es'haghi M, Hosseini Hashemi Sh, Fadaee M. Vibration analysis of piezoelectric FGM sensors using an accurate method. International Journal of Mechanical Sciences. 2011;53(8):585-594.

cylindrical shell with piezoelectric layer using differential quadrature method. 18th Annual International Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers, Sharif University of Technology, Iran, 2010. Tehran: Marja Danesh; 2010. [Persian]

23- Nikoei S, Hassani B. Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner-Mindlin