



بررسی تأثیر کاربرد طرح افسی تی در روش تسخیر ورتیسسته بر کاهش اثر مقدار پارامتر تسخیر بر جواب نهایی

مصطفی محسنی¹، سید مجید ملک جعفریان^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* mmjafarian@birjand.ac.ir, 971751/376 صندوق پستی

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 مهر 1396

پذیرش: 13 بهمن 1396

ارائه در سایت: 02 اسفند 1396

کلید واژگان:

گردابه

تسخیر ورتیسسته

پارامتر تسخیر

طرح افسی تی

ضریب محدود کننده

چکیده

یکی از مشکلات روش تسخیر ورتیسسته نیاز به تنظیم دستی پارامتر تسخیر در حل مسائل است. به این صورت که در مورد هر مسئله جدید، کاربر بایستی به تنظیم آن اقدام نماید. مقادیر کوچک این پارامتر عملاً این روش را بی‌اثر کرده و مقادیر بالای آن باعث ارائه پاسخ‌های غیرفیزیکی در حل می‌گردد. تلاش‌های زیادی توسط محققین برای غلبه بر این مشکلات انجام شده اما همچنان وابستگی آن به تنظیم دستی از بین نرفته است. یک راه برای حل این مشکل کاهش اثر گذاری پارامتر تسخیر بر جواب نهایی است. در پژوهش حاضر کاهش حساسیت روش تسخیر ورتیسسته به تغییرات پارامتر تسخیر از طریق ترکیب این روش با روش افسی تی به ازای ضرایب محدود کننده مختلف پیشنهاد شده است. جهت ارزیابی روش معرفی شده، مسئله گردابه منفرد مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله نخست میزان تأثیرپذیری پاسخ نهایی نسبت به تغییرات پارامتر تسخیر در مورد طرح تفاضل مرکزی با طرح افسی تی (به ازای ضرایب محدود کننده مختلف) مقایسه گردیده است. سپس بهترین حالت جهت ترکیب طرح افسی تی و روش تسخیر ورتیسسته مورد بحث قرار گرفته است. نشان داده شد که بهترین نتایج با استفاده از ضریب محدود کننده مینمود در گام میانی حل حاصل می‌شود.

Investigating effect of applying FCT scheme in vorticity confinement method on reducing the influence of confinement parameter on the final solution

Mostafa Mohseni, Seyyed Majid Malek Jafarian*

Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

* P.O.B. 971751/376, Birjand, Iran, mmjafarian@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 25 September 2017

Accepted 02 February 2018

Available Online 21 February 2018

Keywords:

Vortex

Vorticity Confinement

Confinement Parameter

FCT Scheme

Limiter

ABSTRACT

One of the most important difficulties of the vorticity confinement method is the need for manual adjustment of confinement parameter. In other word, user must adjust the parameter for each new problem. The small values deactivate this method and high values lead to non-physical results. Many attempts have been made by researchers to overcome this problem, but the dependence on manual adjustment has not been resolved. One way to conquer this problem is to reduce the effect of the confinement parameter on the final solution. At the present study, reducing the sensitivity of the vorticity confinement method to confinement parameter variations has been proposed by combining this method with FCT scheme for various limiters. In order to validate the proposed method, the problem of single vortex has been investigated. At first stage, the effect of changes in the confinement parameter on the final results has been compared for central difference scheme against the FCT scheme (using different limiters). Then, the best way to combine the FCT scheme and the vorticity confinement method is discussed. It has been shown that, the best results were obtained using the minmod limiter at the middle step.

1- مقدمه

مشکل راهکارهای متعدد مانند استفاده از شبکه‌ی حل بسیار ریز و انفصال معادلات به کمک طرح‌های مرتبه بالا وجود دارد. این راهکارها خود مشکلات جدیدی همچون افزایش بار محاسباتی و پیچیده شدن کدنویسی را به همراه دارند. راهکار سوم جهت حل این مشکل استفاده از روش تسخیر ورتیسسته است. این روش امکان دستیابی به حل‌های قابل قبول با استفاده از شبکه حل نسبتاً درشت را در زمان کوتاه فراهم می‌آورد. اولین بار اشتاینهف و همکاران در بازه زمانی سال‌های 1992 الی 1995 طی مقالاتی [1-5] روش تسخیر

باوجود پیشرفت‌های بشر در زمینه حل مسائل به کمک دینامیک سیالات محاسباتی و همچنین افزایش قدرت سخت‌افزاری رایانه‌ها، همچنان مسائل شامل جریان‌های جدایش یافته پیچیده (گردابه غالب) جزو مسائل زمان‌بر و پیچیده محسوب می‌گردند. در بررسی این دسته از مسائل به دلیل وجود لزجت مصنوعی حاصل از خطای منفصل سازی معادلات، گردابه‌های موجود در جریان با نرخ سریع‌تری نسبت به واقعیت پخش می‌گردند. برای حل این

Please cite this article using:

M. Mohseni, S. M. Malek Jafarian, Investigating effect of applying FCT scheme in vorticity confinement method on reducing the influence of confinement parameter on the final solution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 03, pp. 65-74, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

سال 2017 دقت این روش را بار دیگر افزایش داده و آن را به مرتبه پنج رساندند [19].

باوجود اثر مناسب حاصل از ترکیب طرح تی‌وی‌دی و روش تسخیر ورتیسسته در کاهش حساسیت نتایج به تغییرات پارامتر تسخیر، استفاده از طرح تی‌وی‌دی بار محاسباتی و پیچیدگی نسبتاً زیاد را به فرایند حل عددی تحمیل می‌نماید. از آن‌جا که جهت محاسبه ضرایب محدود کننده به‌کار رفته در طرح‌های افسی‌تی می‌توان از روش‌های ساده‌تری بهره برد لذا این امکان وجود دارد تا با استفاده از این طرح راهکار کم‌هزینه‌تر و ساده‌تری با نتایج مشابه ارائه داد. لذا هدف پژوهش حاضر بررسی مجدد ایده پویتسکی و پیرسون با استفاده از طرح افسی‌تی^۸ و ضرایب محدود کننده مختلف و بررسی اثر آن بر کاهش حساسیت پاسخ مسئله به تغییرات پارامتر تسخیر و بار محاسباتی است.

2- معادلات حاکم و روش حل عددی

در این بخش معادلات حاکم بر جریان و روش حل عددی بیان خواهد شد.

2-1- معادلات حاکم

در پژوهش حاضر ترکیب روش تسخیر ورتیسسته تراکم‌پذیر با معادله اوایلر دوبعدی موردبررسی قرار گرفته است. رابطه (1) این دستگاه معادلات را در شکل برداری نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

در رابطه (1)، W نشانگر بردار کمیات جریان و دو بردار F و G شار در جهت x و y را نشان می‌دهند. این کمیات به ترتیب در روابط (2)، (3-الف) و (3-ب) نشان داده شده‌اند.

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uh_0 \\ \rho v \end{bmatrix} \quad (3-الف)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vh_0 \end{bmatrix} \quad (3-ب)$$

در روابط (3-الف) و (3-ب) مقادیر h_0 و p به‌وسیله روابط (4) و (5) محاسبه می‌گردد.

$$h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

$$p = (\gamma - 1) \times \rho \times \left\{ e_0 - \frac{u^2 + v^2}{2} \right\} \quad (5)$$

همچنین S (چشمه) بیانگر تسخیر ورتیسسته تراکم‌پذیر می‌باشد.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_b \cdot \vec{i} \\ \rho \vec{f}_b \cdot \vec{j} \\ \rho \vec{f}_b \cdot \vec{V} \end{bmatrix} \quad (6)$$

یکی از مزایای روش تسخیر ورتیسسته، سادگی افزودن این روش به حل عددی است زیرا جمله تسخیر به‌صورت یک چشمه به معادلات اضافه می‌گردد، این موضوع چه در مسائل تراکم‌ناپذیر و چه در مسائل تراکم‌پذیر صادق

ورتیسسته را برای جریان تراکم‌ناپذیر معرفی نمودند. در راهکار ارائه شده توسط اشتاینهف خطای ناشی از لزجت مصنوعی به‌وسیله افزودن یک جمله چشمه به معادله ممنتوم جبران می‌شد. پس از ارائه مقالات اولیه تسخیر ورتیسسته تلاش‌های زیادی جهت گسترش این روش به جریان‌های تراکم‌پذیر صورت گرفت. از جمله پوچین و همکاران در سال 1997 یک فرمولاسیون بسیار پیچیده بر مبنای روش جدایش شار ارائه دادند [6]. یی در سال 1998 سعی کرد از جمله تسخیر تراکم‌ناپذیر مستقیماً در معادلات جریان تراکم‌پذیر استفاده کند [7]؛ حاصل این پژوهش یک فرمولاسیون ناپایدار بود. در نهایت هو و همکاران در سال 2002 توانستند یک فرمولاسیون پایدار تسخیر ورتیسسته برای معادلات جریان تراکم‌پذیر ارائه دهند [8].

باوجود مزایای روش تسخیر ورتیسسته یک مشکل اساسی در راه‌همه‌گیر شدن این روش وجود دارد. به منظور اعمال این روش بایستی پارامتری که پارامتر تسخیر نامیده می‌شود برای حل درست مسئله توسط کاربر مشخص گردد. تلاش‌های زیادی در زمینه رفع یا تخفیف این مشکل صورت پذیرفته است. کاستس و کوانی در سال 2003 رابطه‌ای ارائه دادند که پارامتر تسخیر را به مقدار ورتیسسته محلی مرتبط می‌ساخت [9]. رابینسون در سال 2004 مقدار پارامتر تسخیر را به هلیسیتی^۱ مرتبط ساخت [10]. تحقیقات ملک جعفریان و پسندیده فرد در سال 2007 به ارائه سه پارامتر تسخیر^۲ متغیر انجامید [11].

باتسانتورن و همکاران در سال 2008 جهت بررسی وسایل پرنده ملخی^۳ از ترکیب روش طیفی-زمانی^۴ و تسخیر ورتیسسته استفاده نمودند [12]. در سال 2009 هان و یاجارینو با استفاده از اختلاف نتایج طرح‌های بالادست و تفاضل مرکزی رابطه‌ای برای پارامتر تسخیر معرفی نمودند [13]. همچنین باقری اسفه و ملک جعفریان در سال 2011 یک شیوه جدید را جهت محاسبه پارامتر تسخیر معرفی نمودند [14]. باوجود ارائه این طرح‌ها همچنان برای بهره‌برداری مناسب از روش تسخیر ورتیسسته نیاز به دخالت کاربر (تعیین درست پارامتر تسخیر) می‌باشد.

راهکار دیگر برای رفع مشکل مربوطه، کاهش حساسیت جواب به مقدار پارامتر تسخیر است. این موضوع توسط پیرسون و پویتسکی در سال 2013 مورد بررسی قرار گرفت [15]. آن‌ها با استفاده از شارهای مبتنی بر طرح تی-وی‌دی^۵ موفق به کاهش حساسیت نتایج حاصل از روش تسخیر ورتیسسته به مقدار پارامتر تسخیر شدند.

صدری و همکاران در سال 2015 از شارهای مرتبه بالا در کنار روش تسخیر ورتیسسته تراکم‌پذیر جهت حل معادلات اوایلر استفاده نمودند [16].

در سال 2016 اورگان و همکاران از روش تسخیر ورتیسسته تراکم‌پذیر جهت حل معادلات ناویر-استوکس مربوط به جریان گردابه نوک بال هواپیما استفاده کردند. آن‌ها برای مدل‌سازی جریان آشفته از دو روش معادلات ناویر-استوکس میانگین‌گیری شده گذرا^۶ و شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ^۷ استفاده نمودند [17].

کاستس و همکاران در سال 2016 موفق به ارائه روش تسخیر ورتیسسته با دقت از مرتبه سه شده و این روش را در مورد معادلات اوایلر و ناویر-استوکس میانگین‌گیری شده به‌کار بردند [18]. پتروپولوس و همکاران در

¹ Helicity

² Confinement Parameter

³ Rotorcraft

⁴ Time Spectral method

⁵ Total Variation Diminution (TVD)

⁶ Unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes (URANS)

⁷ Large Eddy Simulation (LES)

⁸ Flux Corrected Transport (FCT)

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho E_c \omega_z \varphi_{ys} \\ \rho E_c \omega_z \varphi_{xs} \\ -\rho E_c \omega_z (u \varphi_{ys} - v \varphi_{xs}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

پس از محاسبه جمله تسخیر کافی است شارها به گونه مناسب محاسبه گردند.

2-2- طرح‌های ضد پاشیدگی

از آن‌جا که روش مرسوم تسخیر ورتیسسته دارای دقت از مرتبه دوم است و مانند شارهای مرتبه بالا دارای خطای پاشیدگی¹ است، با اعمال بیش از حد جمله تسخیر علاوه بر افزایش غیرواقعی مقدار پارامتر، جواب نهایی دچار نوسان خواهد شد. این موضوع انگیزه اصلی استفاده از روش‌های ضد پاشیدگی مانند تی‌وی‌دی و افسی‌تی در کنار تسخیر ورتیسسته است.

جهت ساده شدن توضیحات یک مسئله اویلر دوبعدی در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} = \frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \vec{f}_b \quad (16)$$

در رابطه (16) نشانگر مقادیر شار در فصل مشترک سلول‌ها و \vec{f}_b نشانگر جمله تسخیر ورتیسسته است. برای محاسبه شارهای فوق می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده نمود. به‌طور کلی می‌توان این روش‌ها را به دو دسته شارهای مرتبه بالا و مرتبه پایین تقسیم‌بندی نمود. روش‌های مرتبه پایین از مقادیر بالای خطای پخشی² رنج می‌برند اما از پایداری بهتری برخوردار بوده و در مقابل خطاهای عددی پاشیدگی مقاوم هستند. از سوی دیگر شارهای مرتبه بالا دارای خطای پخشی کمتری بوده اما بسیار مستعد خطاهای پاشیدگی هستند. از این رو راهکارهایی مانند طرح‌های تی‌وی‌دی و افسی‌تی جهت ایجاد یک راهکار بهینه که ویژگی‌های مثبت هر دو گروه شارهای مرتبه بالا و پایین را در خود داشته باشد، ارائه شده‌اند. هر دو روش فوق بر پایه‌ی افزودن یک جمله جبرانی به حل یا شار مرتبه پایین ایجاد شده‌اند. این جمله توسط یک ضریب محدود کننده کنترل می‌گردد. به‌عنوان مثال رابطه (17) نحوه محاسبه شار را براساس طرح تی‌وی‌دی نشان می‌دهد.

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i^+ + 0.5\phi^+(F_i^+ - F_{i-1}^-) + 0.5\phi^-(F_{i+1}^- - F_{i+2}^-) \quad (17)$$

در ساده‌ترین حالت ضریب محدود کننده برابر صفر در نظر گرفته شده و شار به دست آمده معادل طرح بالادست درجه یک خواهد بود.

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = 0 \quad (18)$$

به‌صورت مشابه در صورتی که مقدار ثابت 0.5 به این ضریب داده شود، طرح بالادست درجه دو حاصل خواهد گردید.

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = 0.5 \quad (19)$$

واضح است که در هر دو طرح فوق میزان افزوده شدن جمله جبرانی به شار مرتبه پایین ثابت خواهد بود. روش‌های دیگری توسعه داده شده است که بسته به شرایط حل مقدار متغیری از جمله جبرانی را به کار می‌برند که این موضوع سبب ارائه جواب‌های مناسب‌تری می‌گردد. طرح‌های مینمود (رابطه (20) و ون‌آلبادا (رابطه (21) از این جمله به شمار می‌روند.

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = \max(0, \min(1, x)) \quad (20)$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{(x^2 + x)}{(x^2 + 1)} \quad (21)$$

است. این جمله به شکلی عمل می‌کند که مطابق "شکل 1" (و رابطه (7)) ورتیسسته‌ای که از مرکز ناحیه گردابه‌ای دور شده است دو مرتبه به جایگاه اصلی‌اش منتقل گردد. این انتقال باید در جهت عمود بر صفحه ورتیسسته ثابت (در فضای سه‌بعدی) یا خط ورتیسسته ثابت (در فضای دوبعدی) صورت گیرد.

در ادامه بیشتر به نحوه محاسبه جملات بردار جملات چشمه پرداخته می‌شود:

$$\vec{f}_b = -E_c \hat{n}_c \times \vec{\omega} \quad (7)$$

محاسبه جملات بردار S طبق روش تسخیر ورتیسسته در حالت دوبعدی به‌صورت زیر انجام می‌پذیرد. در گام اول مقدار ورتیسسته و قدر مطلق آن در دامنه حل محاسبه می‌گردد.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8-الف)$$

$$\varphi = -|\omega_z| = -\sqrt{\omega_z^2} \quad (8-ب)$$

سپس با استفاده از گرادیان قدر مطلق ورتیسسته بردار یکه جانب به مرکز گردابه محاسبه می‌گردد.

$$\hat{n}_c = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \varphi_{xs} \hat{i} + \varphi_{ys} \hat{j} \quad (9)$$

که مقادیر φ_{xs} و φ_{ys} از روابط (10) و (11) محاسبه می‌گردد.

$$\varphi_{ys} = \frac{-\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \quad (10)$$

$$\varphi_{xs} = \frac{-\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \quad (11)$$

با قرار دادن مقدار بردار یکه جانب به مرکز از رابطه (9) در رابطه (7) مقادیر بردار جملات چشمه معادلات ممنوم در جهات x و y محاسبه می‌گردد. این مقادیر در روابط (12) و (13) نشان داده شده است.

$$\vec{f}_{bx} = -E_c \times (\omega_z \varphi_{ys}) \quad (12)$$

$$\vec{f}_{by} = -E_c \times (\omega_z \varphi_{xs}) \quad (13)$$

از سوی دیگر با بسط رابطه (6) بردار جملات چشمه به‌صورت رابطه (14) بازنویسی می‌شود.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_{bx} \\ \rho \vec{f}_{by} \\ \rho(u \vec{f}_{bx} + v \vec{f}_{by}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (12) و (13) در رابطه (14)، شکل نهایی جمله چشمه به‌صورت رابطه (15) ظاهر می‌گردد.

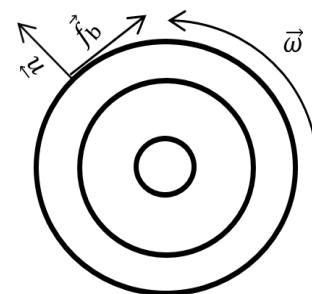


Fig. 1 the Functionality of the vorticity confinement Method

شکل 1 نحوه عملکرد روش تسخیر ورتیسسته

¹ Dispersion
² Dissipation

$$W_i^{\max} = \max(W_i^n, W_{i+1}^n, W_{i-1}^n, W_i^{\text{td}}, W_{i+1}^{\text{td}}, W_{i-1}^{\text{td}}) \quad (33)$$

$$Q_i^- = (W_i^{\text{td}} - W_i^{\min}) \quad (34)$$

$$W_i^{\min} = \min(W_i^n, W_{i+1}^n, W_{i-1}^n, W_i^{\text{td}}, W_{i+1}^{\text{td}}, W_{i-1}^{\text{td}}) \quad (35)$$

در گام بعدی به کمک روابط (36) و (37) نسبت پارامترهای P و Q برای شارهای ورودی و خروجی به دست می‌آید.

$$R_i^+ = \begin{cases} \min\left(1, \frac{Q_i^+}{P_i^+}\right) & P_i^+ > 0 \\ 0 & P_i^+ \leq 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$R_i^- = \begin{cases} \min\left(1, \frac{Q_i^-}{P_i^-}\right) & P_i^- > 0 \\ 0 & P_i^- \leq 0 \end{cases} \quad (37)$$

در گام آخر با استفاده از رابطه (38) مقدار ضریب محدود کننده محاسبه شده

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \min(R_{i+1}^+, R_i^-) & A_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \min(R_i^+, R_{i+1}^-) & A_{i+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \quad (38)$$

سازوکار عملکرد ضریب محدود کننده در هر دو طرح تی‌وی‌دی و اف‌سی‌تی مشابه است. به این صورت که با اعمال بیش از حد جمله تسخیر خطای پاشیدگی زیادی به حل تحمیل می‌گردد. این خطا توسط کد تی‌وی‌دی یا افسی‌تی حس شده و در نتیجه مقدار ضریب محدود کننده کاهش می‌یابد. این کار سبب می‌شود تا مقدار نقش شار مرتبه بالا در جواب نهایی کاهش یافته و در نتیجه حل به‌سوی حل با شار مرتبه پایین سوق داده شود.

3- روش حل عددی

جهت به دست آوردن پاسخ روابط (23) و (25-الف) مطابق روابط (39-الف) تا (39-ه) از روش رانگ-کوتای مرتبه چهار استفاده شده است.

$$\text{RHS} = \frac{Dt}{Dx \times Dy} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} + G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}}) \quad (39\text{-الف})$$

$$W_0 = W_n - \alpha_1 \text{RHS}(W_n) \quad (39\text{-ب})$$

$$W_1 = W_n - \alpha_2 \text{RHS}(W_0) \quad (39\text{-ج})$$

$$W_2 = W_n - \alpha_3 \text{RHS}(W_1) \quad (39\text{-د})$$

$$W_{n+1} = W_n - \alpha_4 \text{RHS}(W_2) \quad (39\text{-ه})$$

مقادیر ضرایب به‌کار رفته به صورت $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_4 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ انتخاب گردیده.

4- تعریف مسئله

در پژوهش حاضر از دو مسئله پایه، گردابه منفرد ثابت و متحرک در جریان ثابت، استفاده شده است. دامنه حل یک مربع به ابعاد $1 \times 1 \text{ m}^2$ در نظر گرفته شده و در مورد گردابه متحرک از شرط مرزی تناوبی در لبه‌های دامنه حل استفاده شده است. جهت تعیین شرایط اولیه از روش استفاده شده توسط پویتسکی و اوفنجم مطابق با روابط (40) و (41) استفاده گردیده است [20].

$$U_\theta = \frac{R}{R_c} \quad R < R_c \quad (40)$$

$$U_\theta = \frac{-R_c R}{R_0^2 - R_c^2} + \frac{R_c R_0^2}{R(R_0^2 - R_c^2)} \quad R_c < R < R_0 \quad (41)$$

با استفاده از روابط فوق یک گردابه منفرد که ترکیبی از گردابه‌های آزاد و اجباری است، مطابق با "شکل‌های 2 و 3" به دست می‌آید (R_c برابر با 0.05 و R_0 برابر با $10 \times R_c$ در نظر گرفته شده است).

در روابط (20) و (21) مقدار پارامتر x از رابطه (22) محاسبه می‌گردد.

$$x = \frac{(F_{i+1}^+ - F_i^+)}{(F_i^+ - F_{i-1}^+)} \quad (22)$$

طرح افسی‌تی به‌کار رفته در پژوهش فعلی از سازوکار مشابهی بهره می‌برد با این تفاوت که در این روش پاسخ مسئله در دو گام محاسبه می‌گردد. به این صورت که ابتدا با یک شار مرتبه پایین یک جواب میانی برای مسئله ایجاد می‌گردد و سپس با استفاده از یک شار ضد پخش جواب نهایی محاسبه می‌گردد.

جهت بررسی اثر استفاده از طرح افسی‌تی در محاسبه شارها ابتدا بایستی اجزاء اصلی این طرح بررسی شود. به‌طور کلی طرح افسی‌تی را می‌توان به سه جزء کوچک‌تر تقسیم نمود:

1. طرح مرتبه پایین
2. طرح مرتبه بالا
3. ضریب محدودکننده

نحوه عملکرد به این صورت است که در گام نخست به‌وسیله طرح مرتبه پایین یک جواب میانی محاسبه می‌گردد.

$$W^{\text{td}} = W^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-\frac{1}{2}}^L - F_{i+\frac{1}{2}}^L) \quad (23)$$

سپس از حاصل تفاضل شار مرتبه بالا و مرتبه پایین یک شار ضد پخش ایجاد می‌گردد.

$$A_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^H - F_{i+\frac{1}{2}}^L \quad (24)$$

در آخر پاسخ نهایی با استفاده از جواب میانی و شار ضد پخش حاصل می‌گردد. در این‌جا نیز جهت جلوگیری از ارائه پاسخ‌های غیر فیزیکی از یک ضریب محدود کننده بهره‌برداری شده است.

$$W^{n+1} = W^{\text{td}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i-\frac{1}{2}}^c - A_{i+\frac{1}{2}}^c) \quad (25\text{-الف})$$

$$A_{i+\frac{1}{2}}^c = \phi_{i+\frac{1}{2}} A_{i+\frac{1}{2}} \quad (25\text{-ب})$$

جهت اعمال ضریب محدود کننده دو راه مرسوم وجود دارد در راه اول که به روش بوریس-بوک معروف است. مقدار شار ضد پخش محدود شده مستقیماً محاسبه می‌گردد. این کار با کمک روابط (26) تا (29) انجام می‌شود.

$$A_{i+\frac{1}{2}}^c = S \max(0, x) \quad (26)$$

$$x = \min\left(\left|A_{i+\frac{1}{2}}\right|, S\Delta W_{i+1}^{\text{td}}, S\Delta W_i^{\text{td}}\right) \quad (27)$$

$$\Delta W_i^{\text{td}} = (W_i^{\text{td}} - W_{i-1}^{\text{td}})\Delta x \quad (28)$$

$$S \equiv \text{sign}\left(1, A_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (29)$$

در راهکار دوم که توسط زالسک ارائه گشته است. ضریب محدود کننده به صوت مجزا محاسبه می‌گردد. جهت انجام این کار ابتدا مقدار کل شار ورودی و خروجی به سلول توسط روابط (30) و (31) محاسبه می‌گردد.

$$P_i^+ = \max\left(A_{i-\frac{1}{2}}, 0\right) - \min\left(A_{i+\frac{1}{2}}, 0\right) \quad (30)$$

$$P_i^- = \max\left(A_{i+\frac{1}{2}}, 0\right) - \min\left(A_{i-\frac{1}{2}}, 0\right) \quad (31)$$

سپس حداکثر مقدار شاری که می‌تواند وارد سلول شده یا از آن خارج گردد به کمک روابط (32) تا (35) محاسبه می‌شود.

$$Q_i^+ = (W_i^{\max} - W_i^{\text{td}}) \quad (32)$$

گردد. اما خطای ناشی از انفصال معادلات، (نوعی از خطا که به پخش مصنوعی معروف است) باعث پخش شدن گردابه می‌گردد..

5- بحث و بررسی نتایج

5-1- بررسی اثر مقدار پارامتر تسخیر

جهت درک بهتر اثر روش تسخیر ورتیسسته و به‌ویژه تأثیر مقدار پارامتر تسخیر بر جواب حل عددی، خطوط هم تراز ورتیسسته گردابه منفرد در آغاز حل در "شکل 5" نشان داده شده است. پس از طی 1000 گام زمانی از حل عددی (با استفاده از طرح تفاضل مرکزی) در صورت عدم استفاده از تسخیر ورتیسسته یا استفاده از مقادیر ناچیز پارامتر تسخیر، گردابه در اثر لزجت مصنوعی دچار پخش‌شدگی می‌گردد. این موضوع در خطوط هم‌تراز ورتیسسته (شکل 6) و پروفیل سرعت مماسی گردابه (شکل 7) قابل مشاهده است.

حال در صورتی که از روش تسخیر ورتیسسته با مقدار مناسب از پارامتر تسخیر استفاده شود، میزان پخش شدن گردابه به‌صورت قابل‌توجه کاهش می‌یابد (شکل 8). این موضوع در پروفیل سرعت مماسی متناظر با این حل عددی (شکل 9) نیز قابل مشاهده است.

اما در صورتی که مقدار پارامتر تسخیر بیش از حد انتخاب شود. دو مشکل عمده ایجاد خواهد شد. اولاً پاسخ دچار مقادیر بالایی از خطای پاشیدگی می‌گردد، به‌صورتی که گردابه از هم پاشیده و جواب غیرقابل قبول

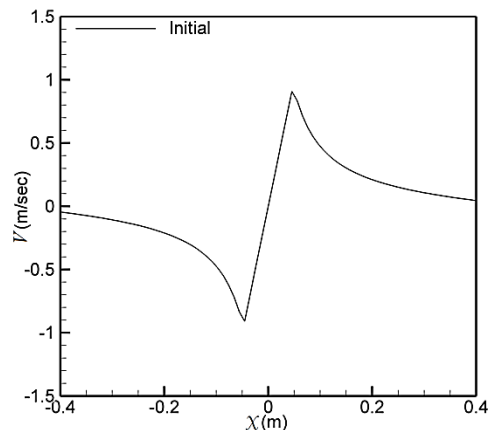


Fig. 2 Tangential velocity profile of a single vortex

شکل 2 پروفیل سرعت مماسی یک گردابه منفرد

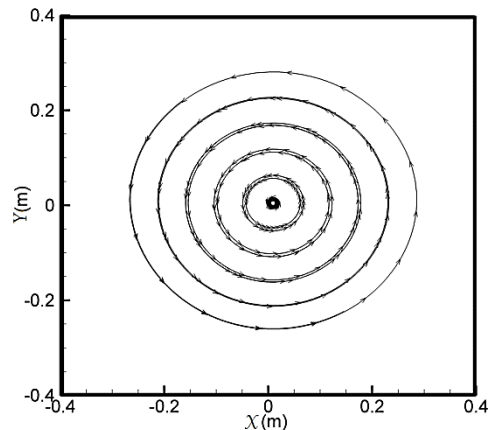


Fig. 3 the streamlines of a single vortex

شکل 3 خطوط جریان یک گردابه منفرد

4-1- شبکه حل

شبکه حل مورد استفاده در این پژوهش یک شبکه متعامد ساده شامل 10000 سلول مربعی شکل می‌باشد (شکل 4).

4-2- فیزیک حل مسئله

با توجه به این موضوع که معادلات حاکم معادلات اویلر می‌باشد، در حالت عادی نباید هیچ‌گونه پخش‌شدگی در حین حل عددی گردابه‌ها مشاهده

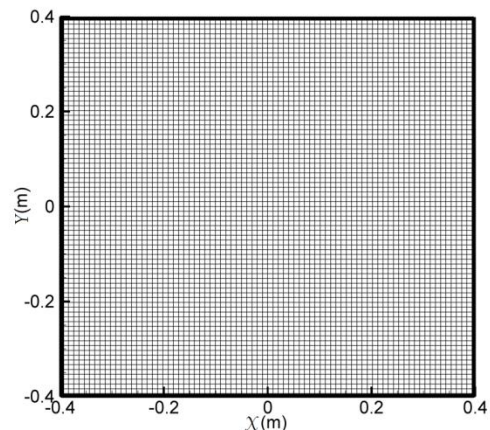


Fig. 4 Numerical Grid

شکل 4 شبکه حل عددی

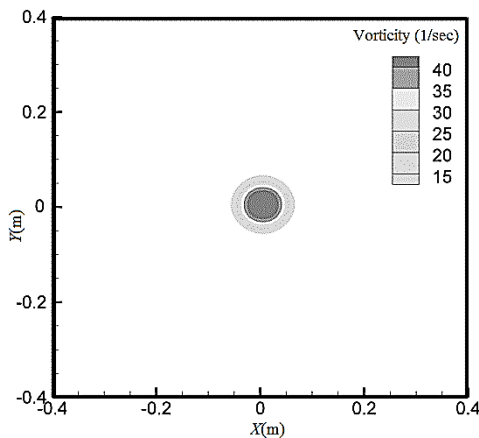


Fig. 5 vorticity contours at the beginning of the numerical solution

شکل 5 خطوط هم‌تراز ورتیسسته در آغاز حل عددی

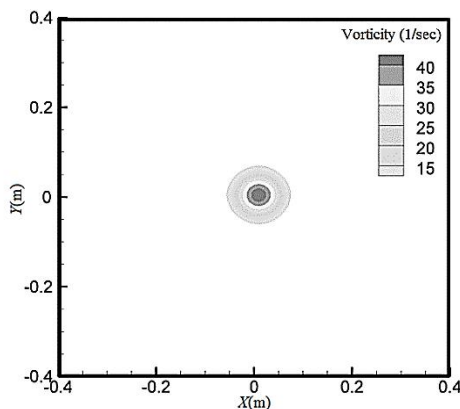


Fig. 6 vorticity contours after 1000 time steps of numerical solution without vorticity confinement Method

شکل 6 خطوط هم‌تراز ورتیسسته پس از 1000 گام حل عددی بدون استفاده از روش تسخیر ورتیسسته

خواهد شد (شکل 10). مشکل دوم این است که مقادیر حداکثری سرعت مماسی در ورتیسیتیه از مقدار اولیه بزرگ‌تر می‌گردد (شکل 11). این موضوع یکی از چالش‌های بهره‌برداری از روش تسخیر ورتیسیتیه است.

به طوری که حتی با وجود روش‌های خودکار تسخیر ورتیسیتیه، انتخاب پارامتر مربوطه همچنان نیاز به دخالت کاربر دارد. اما اگر بتوان وابستگی پاسخ حل عددی به پارامتر تسخیر را کاهش داد، کمک شایانی به افزایش سهولت استفاده از این روش می‌شود. به این صورت که با کاهش حساسیت پاسخ به تغییرات پارامتر تسخیر دامنه بزرگ‌تری از مقادیر پارامتر تسخیر به نتایج قابل قبول منتهی می‌گردند.

5-2- اثر استفاده از طرح افسی‌تی در روش تسخیر ورتیسیتیه (بررسی نوع ضریب محدودکننده)

در گام نخست جهت بررسی اثر به‌کارگیری طرح افسی‌تی در کاهش وابستگی پاسخ روش تسخیر ورتیسیتیه به مقدار پارامتر تسخیر، ابتدا پروفیل سرعت مماسی پس از 1000 گام حل عددی با استفاده از طرح تفاضل مرکزی به ازای پارامترهای تسخیر متفاوت مطابق "شکل 12" ترسیم می‌شود.

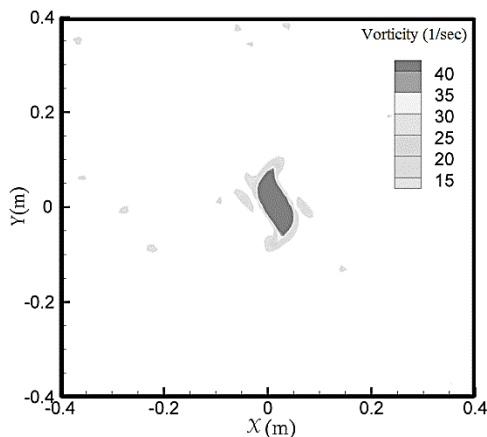


Fig. 10 vorticity contours after 1000 time steps of numerical solution using vorticity confinement Method, ($Ec = 1.0$)

شکل 10 خطوط هم‌تراز هم‌تراز ورتیسیتیه پس از 1000 گام حل عددی با استفاده از روش تسخیر ورتیسیتیه ($Ec = 1.0$)

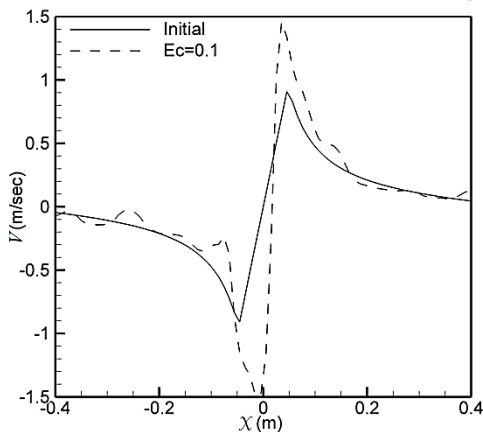


Fig. 11 Comparison of the initial tangential velocity profile with the velocity profile after 1000 time steps of numerical solution using vorticity confinement Method, ($Ec = 1.0$)

شکل 11 مقایسه پروفیل سرعت مماسی اولیه با پروفیل سرعت پس از 1000 گام حل عددی با استفاده از روش تسخیر ورتیسیتیه ($Ec = 1.0$)

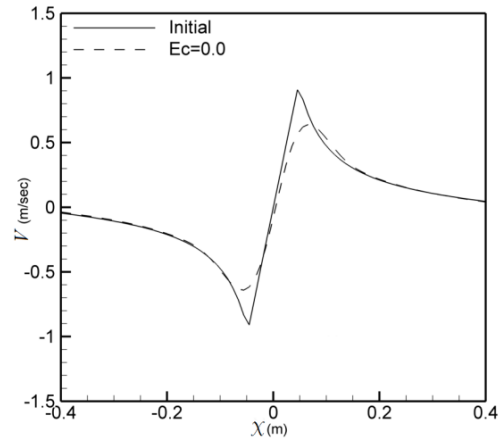


Fig.7 Comparison of the initial tangential velocity profile with the velocity profile after 1000 time steps of numerical solution without vorticity confinement Method

شکل 7 مقایسه پروفیل سرعت مماسی اولیه با پروفیل سرعت پس از 1000 گام حل عددی بدون استفاده از روش تسخیر ورتیسیتیه

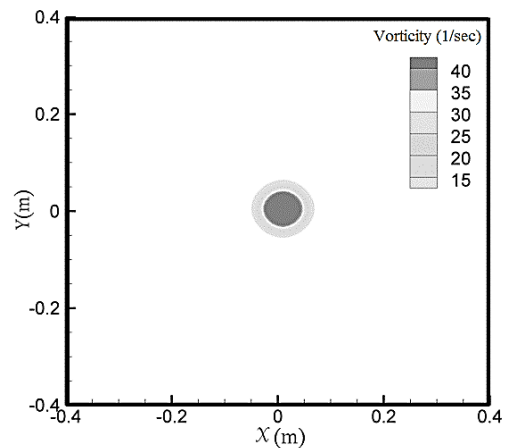


Fig. 8 vorticity contours after 1000 time steps of numerical solution using vorticity confinement Method, ($Ec = 0.01$)

شکل 8 خطوط هم‌تراز ورتیسیتیه پس از 1000 گام حل عددی با استفاده از روش تسخیر ورتیسیتیه ($Ec = 0.01$)

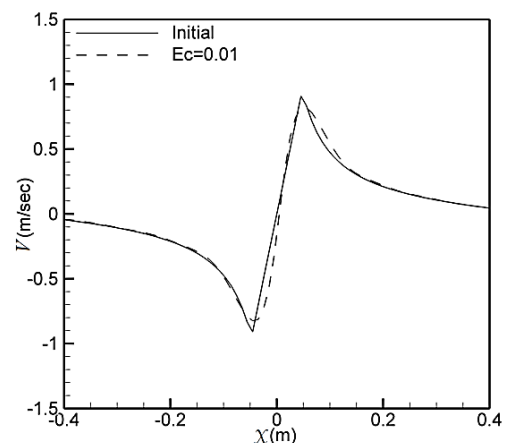


Fig. 9 Comparison of the initial tangential velocity profile with the velocity profile after 1000 time steps of numerical solution using vorticity confinement Method, ($Ec = 0.01$)

شکل 9 مقایسه پروفیل سرعت مماسی اولیه با پروفیل سرعت پس از 1000 گام حل عددی با استفاده از روش تسخیر ورتیسیتیه ($Ec = 0.01$)

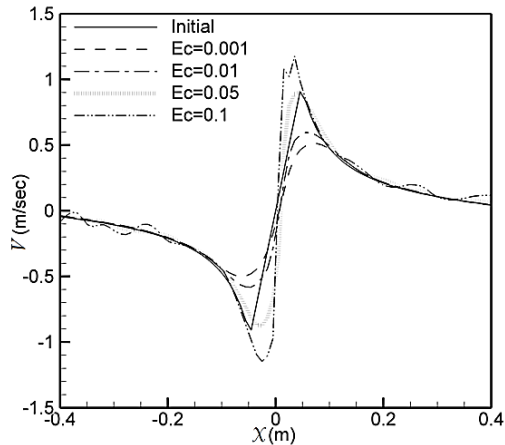


Fig. 14 Comparison of the tangential velocity profiles obtained from FCT scheme with Van-alada limiter after 1000 time steps of numerical solution using various confinement parameters

شکل 14 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی حاصل از طرح افسی‌تی و ضریب محدود کننده ون‌آلبادا پس از 1000 گام حل عددی به ازای پارامترهای تسخیر مختلف

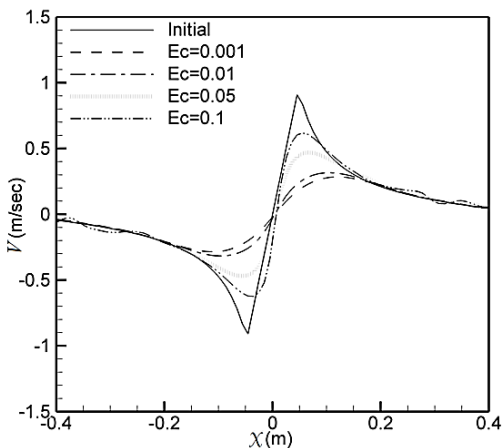


Fig. 15 Comparison of the tangential velocity profiles obtained from FCT scheme with Boris&Book limiter after 1000 time steps of numerical solution using various confinement parameters

شکل 15 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی حاصل از طرح افسی‌تی و ضریب محدود کننده بوریس-بوک پس از 1000 گام حل عددی به ازای پارامترهای تسخیر مختلف

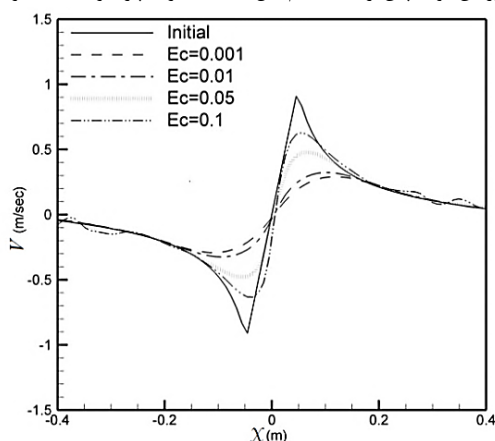


Fig. 16 Comparison of the tangential velocity profiles obtained from FCT scheme with Zalesak limiter after 1000 time steps of numerical solution using various confinement parameters

شکل 16 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی حاصل از طرح افسی‌تی و ضریب محدود کننده زالسک پس از 1000 گام حل عددی به ازای پارامترهای تسخیر مختلف

با مقایسه اختلاف پروفیل‌ها در این حالت با اختلاف پروفیل‌های مشابه در هنگام استفاده از طرح‌های افسی‌تی (به ازای ضرایب محدود کننده مختلف)، با پارامترهای تسخیر مشابه (شکل 13 تا 16) مشاهده می‌گردد که میزان تغییرات جواب در صورت استفاده از طرح افسی‌تی در مقایسه با استفاده از شار تفاضل مرکزی (شکل 12) بسیار کمتر است. همچنین با بررسی دقیق‌تر نتایج مشاهده می‌گردد که طرح‌های بوریس-بوک و زالسک (شکل 15 و 16) نتایج مشابه ارائه داده و دارای کمترین تغییرات در پروفیل سرعت با افزایش پارامتر تسخیر بوده اما در مقایسه با طرح‌های مینمود و ون‌آلبادا (شکل‌های 13 و 14) دارای مقادیر بالاتری از پخش عددی هستند. در مقایسه نتایج حاصل از کاربرد طرح مینمود (شکل 13) و ون‌آلبادا (شکل 14)، طرح ون‌آلبادا حساسیت بیشتری به تغییرات پارامتر تسخیر نشان داده اما همچنان عملکرد این طرح (از نظر حساسیت به تغییرات پارامتر تسخیر) بهتر از کاربرد طرح تفاضل مرکزی است.

3-5- اثر نحوه اعمال جمله تسخیر در طرح افسی‌تی

پس از بررسی اثر نوع ضریب محدود کننده مورد استفاده بر جواب نهایی این نکته نیز شایان ذکر است که نحوه قرارگیری جمله تسخیر ورتیسسته در

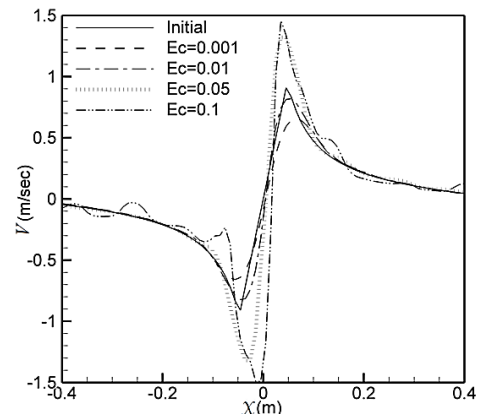


Fig. 12 Comparison of the tangential velocity profiles obtained from central difference scheme after 1000 time steps of numerical solution using various confinement parameters

شکل 12 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی حاصل از طرح تفاضل مرکزی پس از 1000 گام حل عددی به ازای پارامترهای تسخیر مختلف

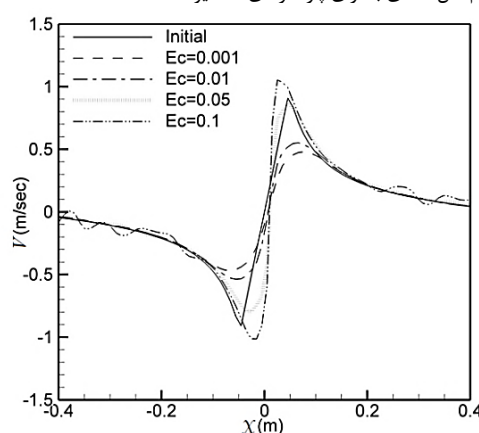


Fig. 13 Comparison of tangential velocity profiles obtained from FCT scheme with minmod limiter after 1000 time steps of numerical solution using various confinement parameters

شکل 13 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی حاصل از طرح افسی‌تی و ضریب محدود کننده مینمود پس از 1000 گام حل عددی به ازای پارامترهای تسخیر مختلف

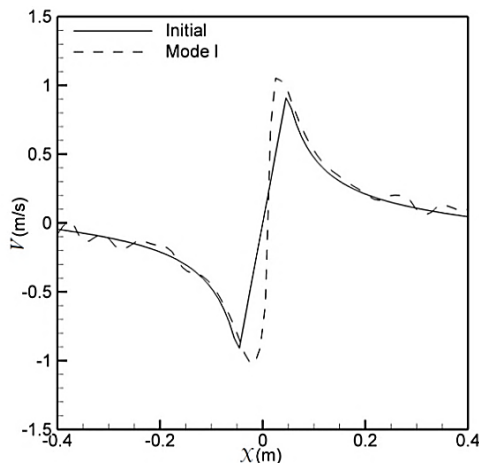


Fig. 18 Comparison of the initial tangential velocity profile and velocity profile obtained from FCT scheme (Mode I) with confinement parameter of 0.1

شکل 18 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی اولیه و پروفیل سرعت حاصل از طرح افسی‌تی (حالت 1) به ازای پارامتر تسخیر 0.1

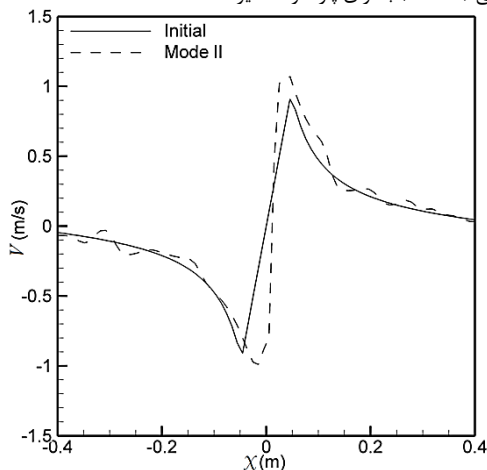


Fig. 19 Comparison of the initial tangential velocity profile and velocity profile obtained from FCT scheme (Mode II) with confinement parameter of 0.1

شکل 19 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی اولیه و پروفیل سرعت حاصل از طرح افسی‌تی (حالت 2) به ازای پارامتر تسخیر 0.1

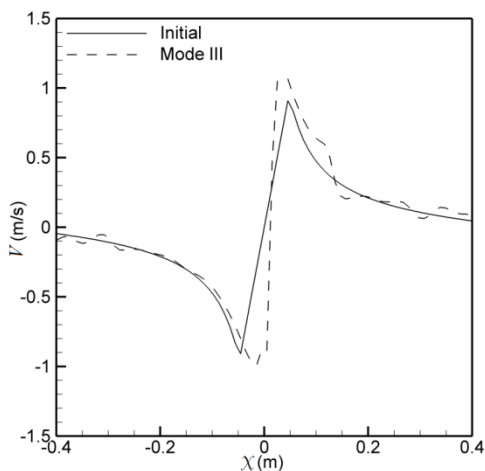


Fig. 20 Comparison of the initial tangential velocity profile and velocity profile obtained from FCT scheme (Mode III) with confinement parameter of 0.1

شکل 20 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی اولیه و پروفیل سرعت حاصل از طرح افسی‌تی (حالت 3) به ازای پارامتر تسخیر 0.1

کدهای حل عددی که از این ضرایب استفاده می‌کنند نیز بر نتایج حاصل تأثیر دارد. برای درک علت این موضوع کافی است بار دیگر نحوه محاسبه این ضرایب بررسی گردد. با مراجعه به روابط (32) تا (42) مشهود است که مقدار ضرایب محدود کننده در طرح‌هایی مانند بوریس-بوک و زالسک وابسته به نتایج قبلی حل (شامل مقادیر جواب در گام‌های قبلی و مقادیر میانی حل) است. بنابراین این امکان وجود دارد که بسته به این موضوع که جمله تسخیر به حل اولیه افزوده شود یا به حل نهایی، مقادیر ضریب محدود کننده و در نهایت پاسخ حاصله متفاوت شود. برای بررسی این موضوع سه حالت در نظر گرفته شده است (در هر سه حالت از ضریب محدود کننده مینمود استفاده گردیده است).

1. در حالت اول کل جمله تسخیر به جواب میانی اضافه می‌گردد.

2. در حالت دوم کل جمله تسخیر به جواب نهایی افزوده می‌شود.

3. در حالت سوم مقدار جمله تسخیر به صورت برابر بین دو جواب پخش می‌گردد (به عبارت دیگر از دو جمله تسخیر با پارامتر تسخیر نصف مقدار اصلی استفاده می‌شود).

در گام اولیه با استفاده از سه حالت فوق‌الذکر، حل با پارامتر تسخیر برابر 0.01 انجام می‌پذیرد. نتایج مطابق "شکل 17" ارائه گردیده است. مشاهده می‌شود که در هر سه حالت نتایج یکسانی حاصل شد. در گام بعد مقدار پارامتر تسخیر افزایش یافت تا پدیده تسخیر بیش از حد رخ دهد (شکل‌های 18-20). طبق پیش‌بینی انجام شده نتایج متفاوتی از سه طرح ارائه شده حاصل می‌گردد. پروفیل سرعت حاصل از حالت اول با وجود ایجاد پدیده تسخیر بیش از حد دارای مقدار حداکثر سرعت کمتری از دو پاسخ دیگر است. از سوی دیگر پروفیل سرعت حاصل از حالت دوم دارای مقدار حداکثر سرعت بزرگ‌تری نسبت به دو روش دیگر است. این موضوع با پیش‌بینی قبلی ما مطابقت کامل دارد. به عبارت دیگر، در صورتی که کل جمله تسخیر به پاسخ میانی افزوده شود مکانیزم تشخیص موجود در طرح‌های افسی‌تی، اثر تسخیر بیش از حد (خطای پاشیدگی) را بهتر حس کرده و در گام نهایی با استفاده از مکانیزم ضریب محدود کننده این خطا به شکل بهتری جبران می‌گردد. در صورت اضافه کردن جمله تسخیر به پاسخ نهایی، این فرآیند دچار نقصان می‌شود.

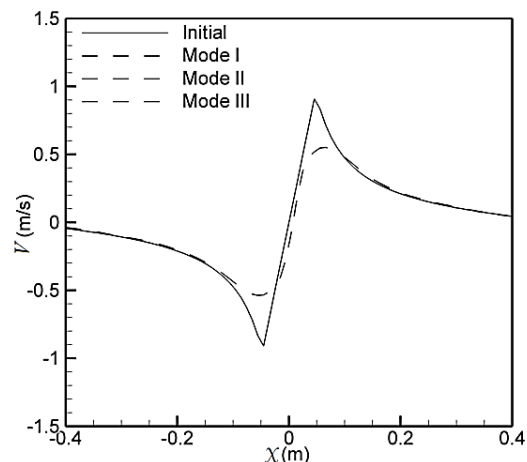


Fig.17 Comparison of the initial tangential velocity profile and the profile derived from FCT scheme with confinement parameter of 0.01 and different methods of applying vorticity confinement

شکل 17 مقایسه پروفیل‌های سرعت مماسی اولیه و پروفیل حاصل از طرح افسی‌تی به ازای پارامتر تسخیر 0.01 و شیوه‌های متفاوت اعمال جمله تسخیر

4-5- اثر استفاده از طرح افسی‌تی بر افزایش سهولت کاربرد روش

تسخیر ورتیسیده

مزیت استفاده از طرح‌های افسی‌تی کاهش حساسیت پاسخ نهایی به مقدار پارامتر تسخیر است (که پیش‌تر نیز به آن اشاره شد). در "شکل‌های 21 و 22" پروفیل سرعت بدست آمده با به‌کاربردن دو طرح تفاضل مرکزی و اف-سی‌تی (با ضرایب محدود کننده مینمود و ون-آلبادا) برای دو مقدار پارامتر تسخیر مختلف آورده شده است. مشاهده می‌گردد که تغییرات حداکثر مقدار سرعت در اثر افزایش پارامتر تسخیر در هنگام استفاده از طرح افسی‌تی حدوداً نصف تغییرات مشابه با استفاده از طرح تفاضل مرکزی است. این موضوع باعث می‌شود تا در صورت عدم تنظیم دقیق پارامتر تسخیر توسط کاربر، نتیجه نهایی تغییرات کمی نسبت به پاسخ صحیح داشته باشد. در نتیجه کاربر می‌تواند با نگرانی کمتر از غیرفیزیکی شدن حل از اعداد بزرگتر پارامتر تسخیر استفاده کند.

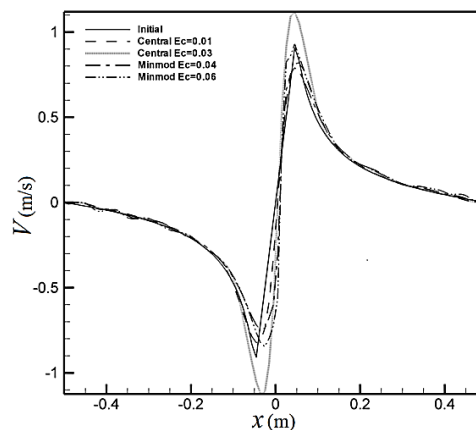


Fig. 21 Comparison of the initial tangential velocity profile with the profiles derived from Central and FCT-Minmod schemes, using various confinement parameters after 1000 time step of numerical solution

شکل 21 مقایسه پروفیل سرعت اولیه با پروفیل به دست آمده از طرح‌های تفاضل مرکزی و افسی‌تی-مینمود با استفاده از پارامترهای تسخیر متفاوت پس از 1000 گام زمانی حل عددی

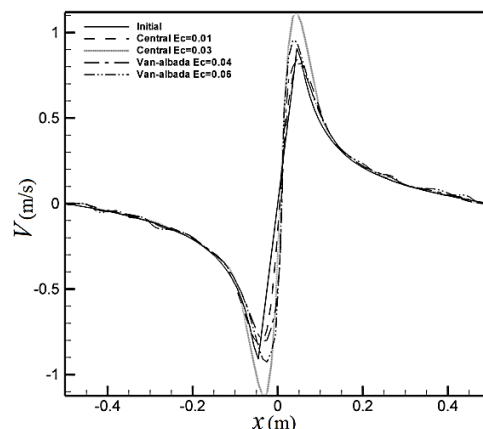


Fig. 22 Comparison of the initial tangential velocity profile with the profiles derived from Central and FCT-Van-albada schemes, using various confinement parameters after 1000 time step of numerical solution

شکل 22 مقایسه پروفیل سرعت اولیه با پروفیل به دست آمده از طرح‌های تفاضل مرکزی و افسی‌تی-ون-آلبادا با استفاده از پارامترهای تسخیر متفاوت پس از 1000 گام زمانی حل عددی

6- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر ترکیب طرح افسی‌تی و روش تسخیر ورتیسیده مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا اثر این ترکیب با استفاده از ضرایب محدود کننده متفاوت بر حساسیت نتایج به مقدار پارامتر تسخیر و سپس اثر نحوه توزیع جمله تسخیر بین دو گام حل موجود در طرح افسی‌تی بررسی شد. و نتایج زیر حاصل گردید:

- استفاده از ترکیب طرح افسی‌تی و روش تسخیر ورتیسیده میزان حساسیت نتایج به تغییرات پارامتر تسخیر را کاهش داده و در بازه‌ی بزرگ‌تری از مقادیر این پارامتر، پاسخ‌های قابل قبول حاصل می‌شود. به معنای دیگر امکان سعی و خطا در تعیین مقدار پارامتر به حداقل رسیده و روش سریع‌تر از قبل می‌گردد. یا به عبارتی کاهش حساسیت سبب تسهیل فرایند تنظیم EC می‌شود.
- طرح افسی‌تی با ضرایب محدود کننده بوریس-بوک و زالسک حساسیت کمتری را نسبت به ضرایب محدود کننده مینمود و ون-آلبادا به تغییرات پارامتر تسخیر نشان داد. در حالی که دو ضریب ذکر شده اول مقادیر خطای پخش بیشتری را به پاسخ نهایی تحمیل می‌کنند. لذا استفاده از ضرایب مینمود و ون-آلبادا به همراه روش اف-سی‌تی در تسخیر ورتیسیده توصیه می‌شود.
- در نهایت مشاهده گردید که قرارگیری جمله تسخیر در جواب میانی تأثیر قابل توجهی بر کاهش حساسیت پاسخ نهایی به مقدار پارامتر تسخیر دارد.

7- فهرست علائم

A	شار ضد پخش
A^c	شار ضد پخش اصلاح شده
e_0	انرژی داخلی
E_c	پارامتر تسخیر
F	شار در جهت x
F^L	شار مرتبه پایین در جهت x
F^H	شار مرتبه بالا در جهت x
G	شار در جهت y
G^L	شار مرتبه پایین در جهت y
G^H	شار مرتبه بالا در جهت y
h_0	انرژی کل
n	بردار یکه جانب به مرکز گردابه
p	فشار
S	جمله چشمه
u	مؤلفه سرعت در جهت x
v	مؤلفه سرعت در جهت y
V	بردار سرعت
W	بردار کمیات جریان

علائم یونانی

φ	قدر مطلق ورتیسیده
\emptyset	ضریب محدود کننده
ρ	چگالی
γ	نسبت ظرفیت حرارتی
ω	ورتیسیده

8- منابع

- [11] M. M. Jafarian, M. P. Fard, Development and application of compressible vorticity confinement, *Scientia Iranica*, Vol. 14, No. 3, pp. 251-262, 2007 .
- [12] N. Butsunorn, A. Jameson, Time spectral method for rotorcraft flow, *Proceeding of 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 2008.
- [13] S. Hahn, G. Iaccarino, Towards adaptive vorticity confinement, *Proceeding of 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 2009.
- [14] H. Bagheri-Esfef, M. Malek-Jafarian, Development of artificial dissipation schemes and compressible vorticity confinement methods, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 225, No. 8, pp. 929-945, 2011 .
- [15] K. Pierson, A. Povitsky, Vorticity Confinement technique for preservation of tip vortex of rotating blade, *Proceeding of 31st AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Reno Nevada, 2013.
- [16] M. Sadri, K. Hejranfar, M. Ebrahimi, On application of high-order compact finite-difference schemes to compressible vorticity confinement method, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 46, pp. 398-411, 2015 .
- [17] M. O'Regan, P. Griffin, T. Young, A vorticity confinement model applied to URANS and LES simulations of a wing-tip vortex in the near-field, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 61, pp. 355-365, 2016 .
- [18] M. Costes, I. Petropoulos, P. Cinnella, Development of a third-order accurate vorticity confinement scheme, *Computers & Fluids*, Vol. 136, pp. 132-151, 2016 .
- [19] I. Petropoulos, M. Costes, P. Cinnella, Development and analysis of high-order vorticity confinement schemes, *Computers & Fluids*, Vol. 156, pp. 602-620, 2017 .
- [20] A. Povitsky, D. Ofengeim, Numerical study of interaction of a vortical density inhomogeneity with shock and expansion waves, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 12, No. 2, pp. 165-176, 1999 .
- [1] J. Steinhoff, Y. Wenren, D. Underhill, E. Puskas, Computation of short acoustic pulses, *Proceeding of Proceedings, 6th International Symposium on CFD*, Lake Tahoe Nevada, 1995.
- [2] J. Steinhoff, C. Wang, D. Underhill, T. Mersch, Y. Wenren, *Computational Vorticity Confinement: A Non-Diffusive Eulerian Method for Vortex-Dominated Flows*, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma Tennessee, 1992.
- [3] J. Steinhoff, G. Raviprakash, Navier-Stokes computation of blade-vortex interaction using vorticity confinement, *Proceeding of 33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 1995.
- [4] J. Steinhoff, T. Mersch, F. Decker, Computation of incompressible flow over delta wings using vorticity confinement, *Proceeding of 32nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 1994.
- [5] J. Steinhoff, Vorticity confinement: A new technique for computing vortex dominated flows, D.Caughey, M.Hafez (Eds.), *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*, pp. 235-264, John Wiley & Sons, 1994.
- [6] S. V. Pevchin, J. Steinhoff, B. Grossman, Capture of contact discontinuities and shock waves using a discontinuity confinement procedure, *35 th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 1997 .
- [7] K. Yee, An euler calculation for a hovering coaxial rotor flow field with new boundary condition, *24 Th European Rotorcraft Forum*, Marseilles France, 1998 .
- [8] G. Hu, B. Grossman, J. Steinhoff, Numerical method for vorticity confinement in compressible flow, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 10, pp. 1945-1953, 2002 .
- [9] M. Costes, G. Kowani, An automatic anti-diffusion method for vortical flows based on Vorticity Confinement, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 7, No. 1, pp. 11-21, 2003 .
- [10] M. Robinson, Application of vorticity confinement to inviscid missile force and moment prediction, *42 nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno Nevada, 2004 .